凸関数の二次の Approximate Directional Derivative と二次の Dini Derivative の関係について *

白石俊輔 †

Abstract

For a real–valued convex function f, the existence of the exact second–order derivative assures that of the limit of the approximate second–order directional derivative $f''_\varepsilon(x_0;d)$ when $\varepsilon \to 0^+$ and both values are the same [6] [7]. The aim of the present work is to show the converse of this result. It will be proved that upper and lower limits of the approximate second–order directional derivative are equal to the second–order upper and lower Dini derivatives, respectively. Consequently the existence of the limits of the approximate second–order directional derivative and that of second–order Dini derivative are equivalent.

1　定義と基本的性質

$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を凸関数とする。基点 x_0 と方向 $d \neq 0$ は固定して動かさないものとする。このとき 正数 $\varepsilon > 0$ に対して f の x_0 における d 方向への近似方向微分（ approximate directional derivative ） を次式によって定める。

$$f'_\varepsilon(x_0;d) := \inf_{\lambda>0} \frac{f(x_0+\lambda d) - f(x_0) + \varepsilon}{\lambda}$$

$\varepsilon = 0$ ならばこれは通常の (exact な) 方向微分（ directional derivative ）

$$f'(x_0;d) := \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x_0+\lambda d) - f(x_0)}{\lambda}$$

*計画数学におけるモデル化と解析 December 20-22, 1990

†富山市五福 3190 富山大学経済学部

と一致する。凸関数の方向微分は劣微分 (subdifferential) と非常に密接な関係があるが、近似方向微分の場合にも同様に次式で定める近似劣微分 (approximate subdifferential) との間に重要な関係が存在する。

$$\partial_\varepsilon f(x_0) := \{x^* \in \mathbf{R}^n | f(x) \geq f(x_0) + < x^*, x - x_0 > -\varepsilon \ \ \forall x \in \mathbf{R}^n\}$$

$\varepsilon = 0$ の場合が劣微分である。次に述べる定理によって近似方向微分と近似劣微分が結びつけられる。

定理 1 (Rockafellar [13]) $\partial_\varepsilon f(x_0)$ の支持関数は $f'_\varepsilon(x_0;d)$ である。即ち

$$f'_\varepsilon(x_0;d) = \max\{< x^*, d > | x^* \in \partial_\varepsilon f(x_0)\}$$

が成立する。

ここで共役凸関数 $f^*(x^*) = \sup\{< x^*, x > - f(x) | x \in \mathbf{R}^n\}$ を用いれば近似劣微分は $\partial_\varepsilon f(x) = \{x^* | f(x) + f^*(x^*) - < x^*, x > \leq \varepsilon\}$ と書けるので上の定理と合わせると近似方向微分は次の（ x をパラメーターとする）摂動型凸計画問題の最適値関数であることがわかる。

$$\max\{< x^*, d > | f(x) + f^*(x^*) - < x^*, x > \leq \varepsilon\}$$

この問題は自然に Slater 条件を満たしている。このような関数が方向微分可能であることは Gol'stein [4] や Hogan [9] らによって示されている。この事実に基ずいて二次の近似方向微分を次で定める。

$$f''_\varepsilon(x_0;d) := \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f'_\varepsilon(x_0+\lambda d; d) - f'_\varepsilon(x_0;d)}{\lambda}$$

ここでの目的は $\varepsilon \to 0^+$ とした時の二次の近似方向微分の極限と exact な二次の方向微分との関係を調べることである。この時中心的な役割を果たすのが Lemaréchal and Nuruminskii [11] と Auslender [2] によって与えられた $f''_\varepsilon(x_0;d)$ を一次の方向微分（ approximate 及び exact ）で表わす公式である。　その公式は近似微分商の minimizers の集合

$$\Lambda(\varepsilon) := \{\lambda > 0 | [f(x_0+\lambda d) - f(x_0) + \varepsilon]/\lambda = f'_\varepsilon(x_0;d)\}$$

にも関わるものである。もちろん $\Lambda(\varepsilon)$ が空集合になることもありうるがこのような状況は $\varepsilon \to 0^+$ とするなかでの瞬間的な状況でしかないことを注意しておく。 $\Lambda(\varepsilon) \neq \emptyset$ の時の公式をあげる。

定理 2 (Lemaréchal and Nuruminskii [11], Auslender [2])

$$f''_\varepsilon(x_0;d) = \frac{f'_\varepsilon(x_0;d) - f'(x_0;d)}{\bar\lambda(\varepsilon)},$$

但し $\bar\lambda(\varepsilon) = \max\{\lambda > 0 | \lambda \in \Lambda(\varepsilon)\}$ 。

2 Exact な二次の方向微分

まず exact な二次の方向微分として次のふたつを挙げる。

- Second–order Dini directional derivative

$$D''f(x_0;d) := \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{f'(x_0+\lambda d;d) - f'(x_0;d)}{\lambda},$$

- Second–order de la Vallée Poussin directional derivative

$$V''f(x_0;d) := \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{2}{\lambda}[\frac{f(x_0+\lambda d) - f(x_0)}{\lambda} - f'(x_0;d)].$$

結論を言えば二次の近似方向微分と密接な関係があるのは二次の Dini 微分の方である。而るに凸関数の場合 Dini, de la Vallée Poussin の両微分の存在性は同値であり値が一致することが知られている。この両微分が存在しないような凸関数がどのようなものであるかを考察するために平面曲線（plane curve）の曲率（curvature）について（かなりいいかげんに）復習する。 $y = f(x)$ を平面曲線とし、簡単のために $f(x_0) = 0, f'(x_0) = 0$ とする。点 $(x_0, f(x_0))$ で $y = f(x)$ に接し、点 $(x_0+t, f(x_0+t))$ を通る円の半径 $r(t)$ は

$$r(t) = (1 + \{\frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t}\}^2)\frac{t}{2}[\frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} - f'(x_0)]^{-1}$$

となる。 $t \to 0$ とした時の円の半径 $r = \lim_{t\to 0} r(t)$ がこの曲線の曲率であるがそれは $r = 1/V''f(x_0)$ となっている。（詳しくは Spivak [15] を参照。）従ってここで興味がある二次の方向微分が存在しない凸関数を与えるためには上記の円の極限が存在しないようなものを考えればよい。このような凸関数の例は川崎 [10], Busemann [3] などで与えられている。

3 二次の近似方向微分と Dini 微分との関係

一次の近似方向微分については $\varepsilon \to 0^+$ とした時、exact な方向微分に収束することが知られている。(Rockafellar [13]) この意味で確かに近似方向微分は exact な方向微分を近似していると言えその名にふさわしいものとなっているが、二次の近似方向微分については確かに定義こそできたものの果して真に exact な二次の微分を近似しているのだろうかと言う疑問が自然に湧いてくる。この問に対して Hiriart–Urruty [7] が部分的に解答を与えている。それは exact な二次の微分が存在するときには二次の近似方向微分の極限も存在して両者は一致すると言うものである。ここではこの問題に対して全面的な（ exact な二次の微分が存在しないような場合にも対応している）解答を与える。 exact な二次の Dini 微分が存在しない場合に

$$UD''f(x_0;d) := \limsup_{\lambda\to 0^+} \frac{f'(x_0+\lambda d;d) - f'(x_0;d)}{\lambda},$$

$$LD''f(x_0;d) := \liminf_{\lambda\to 0^+} \frac{f'(x_0+\lambda d;d) - f'(x_0;d)}{\lambda},$$

を second–order upper and lower Dini derivative と呼ぶことにする。

定理 3 (主定理 [14]) 二次の近似方向微分の上、下極限と *second–order upper and lower Dini derivative* との間に次の関係が成立する。

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} f''_\varepsilon(x_0;d) = UD''f(x_0;d)$$

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+} f''_\varepsilon(x_0;d) = LD''f(x_0;d)$$

従って $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f''_\varepsilon(x_0;d)$ と $D''f(x_0;d)$ との存在性は同値でありそのとき両者の値は一致する。

この定理により二次の近似方向微分の正当性が主張される。証明の方針は $\varepsilon_n \to 0^+$ ($\lambda_n \to 0^+$) なる点列に対して $\lambda_n \to 0^+$ ($\varepsilon_n \to 0^+$, resp.) で

$$f''_{\varepsilon_n}(x_0;d) = \frac{f'(x_0+\lambda_n d;d) - f'(x_0;d)}{\lambda_n} \qquad (1)$$

となるものが存在することを示す。そのとき中心的な役割を果たすのが次のふたつの命題である。

命題 1 (Hiriart–Urruty [6]) 適当な仮定の下で $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \bar\lambda(\varepsilon) = 0$ かつ

$$f'_\varepsilon(x_0;d) \in < \partial f(x_0 + \bar\lambda(\varepsilon)d), d >, \qquad (2)$$

が成立する。

命題 2 (Lemaréchal and Zowe [12]) 各 $\lambda > 0$ に対して、

$$f(x_0+\lambda d) - f(x_0) = \max\{f'_\varepsilon(x_0;\lambda d) - \varepsilon | \varepsilon \geq 0\}$$

が成立する。 上式で *max* を実現する ε は

$$\varepsilon(\lambda) = f(x_0) - f(x_0+\lambda d) + \lambda < x^*, d >, x^* \in \partial f(x_0+\lambda d)$$

で与えられ $\lim_{\lambda\to 0^+} \varepsilon(\lambda) = 0$ が成立する。

註 1 f が十分ななめらかさを有していれば上記ふたつの命題で（ *1* ） が示されるのだがそうでないときには例えば（ *2* ）式において劣微分（これは普通は一点ではない）が現われるために一般には（ *1* ） 式が不等式になる。しかしこれは実はうまく処理ができるのである。

註 2 命題 1 における適当な仮定と言うのは実は x_0 の近傍で f は d 方向にアフィンではないというものである。これは一見非常に制限的に思えるが実は f がアフィンであれば *exact* な二次の微分は明らかにゼロであり二次の近似方向微分もゼロに収束することが知られている。

4 その他

最後に凸関数の方向微分に関する色々な事実や Open problems について述べる。

1. 凸関数は a.–e. 二階微分可能であることが知られている。(Alexandrov [1])
2. x_0 で二階微分可能であれば
$$f'_\varepsilon(x_0;d) - f'(x_0;d) = O(\varepsilon^{1/2})$$
である。(Hiriart–Urruty [7], Lemaréchal and Zowe [12])
3. $f(x) = |x|^\alpha, 1 < \alpha < 2, x_0 = 0, d = 1$ とすると、
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} f''_\varepsilon(x_0;d) = D''f(x_0;d) = +\infty$$
となる。(Hiriart–Urruty [7])
4. d の関数としての $f''_\varepsilon(x_0;d)$ の挙動についてはあまり知られていない。(たとえば level surface $\{d : f''_\varepsilon(x_0;d) = \alpha\}$ がどのようなものであるか等) (Hiriart–Urruty [5])
5. (1) にあげた Alexandrov の定理を $f''_\varepsilon(x_0;d)$ を使って簡単に証明ができるか？(Hiriart–Urruty [8])

参考文献

[1] A. Alexandrov. The existence almost everywhere of the second differential of a convex function and some associated properties of convex surfaces. *Ucenye Zapiski Leningr. Gos. Univ. Ser. Mat.*, 37:3–35, 1939. in Russian.

[2] A. Auslender. Differential properties of the support function of the ε–subdifferential of a convex function. *Math. Programming*, 24:257–268, 1982.

[3] H. Busemann. *Convex Surfaces.* Interscience, New York, New York, 1958.

[4] E. Gol'shtein. *Theory of Convex Programming.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1972.

[5] J. Hiriart–Urruty. The approximate first–order and second–order directinal derivatives for a convex function. In J. Cecconi and T. Zolezzi, editors, *Mathematical Theories of Optimization, Lecture Notes in Mathematics 979*, pages 144–177, Springer–Verlag, Berlin, 1983.

[6] J. Hiriart–Urruty. Approximating a second–order directional derivative for nonsmooth convex functions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 20:783–807, 1982.

[7] J. Hiriart–Urruty. Limiting behavior of the approximate first–order and second–order directional derivatives for a convex function. *Nonlinear Analysis:Theory,Methods, and Applications*, 6:1309–1326, 1982.

[8] J. Hiriart–Urruty. *Personal Communication.* October 1990.

[9] W. Hogan. Directional derivatives for extremal–value functions with applications to the completely convex case. *Oper. Res.*, 21:188–209, 1973.

[10] H. Kawasaki. The upper and lower second order directional derivatives of a sup–type function. *Math. Programming*, 41:327–339, 1988.

[11] C. Lemaréchal and E. Nurminskii. Sur la différentiabilité de la fonction d'appui du sous différential approché. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 290:855–858, 1980.

[12] C. Lemaréchal and J. Zowe. Some remarks on the construction of higher order algorithms in convex optimization. *Appl. Math. Optim.*, 10:51–68, 1983.

[13] R. Rockafellar. *Convex Analysis.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[14] S. Shiraishi. *On connections between approximate second-order directional derivative and second-order Dini derivative for convex functions.* Working Paper Number 125, Faculty of Economics, Toyama University, October 1990.

[15] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* Volume Two, Publish or Perish, Boston, Mass., 1970.

線形制約凸計画問題に対する主双対近接点法

茨木 智，福島雅夫，茨木俊秀

京都大学工学部

1. Introduction

In this report we propose an iterative method, which belongs to the class of the proximal point algorithm [2,3,4], for convex programming problems with linear equality constraints. In the next section, we formulate this type of problem and its dual problem. In Section 3, we briefly give the concepts of the general proximal point algorithm and introduce Rockafellar's primal-dual application of the algorithm. Then we propose our primal-dual proximal point algorithm, prove a convergence theorem and present a result on the rate of convergence. In Section 4, we apply the algorithm to a separable problem, in which case our method can in particular be implemented effectively.

2. Problem

Let $F : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ be a closed proper convex function, and consider the convex programming problem with linear equality constraints

(P) minimize $F(x)$

subject to $Ax = b$,

where A is an $m \times n$ matrix such that rank $A = m\ (< n)$. We assume that problem P has an optimal solution. Note that problem P contains convex programming problems with inequality constraints and an explicit constraint set on x, e.g.,

$$\begin{aligned} &\text{minimize } F(x) \\ &\text{subject to } Ax \le b \text{ and } x \in C, \end{aligned} \tag{2.1}$$