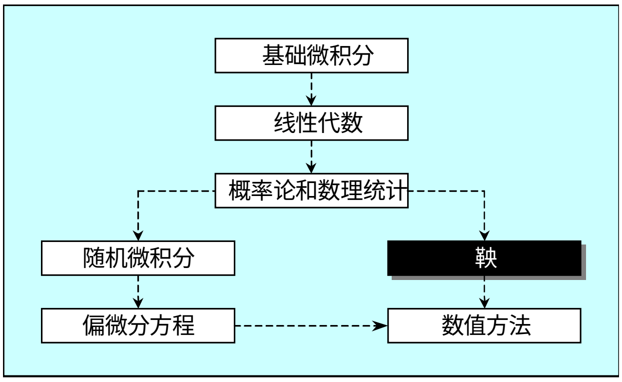
第十章 随机过程 II：鞅



本章的学习目标为：

- ✧ *了解信息结构和信息一致性的数学表述方式*
- ✧ *明确鞅的定义和连续时间情形下的一些技术性条件*
- ✧ *熟悉二项过程和布朗运动等常见鞅的定义和轨道特征*
- ✧ *了解鞅的几个重要子类：一致可积鞅和平方可积鞅*
- ✧ *了解停时概念和最优停止定理*
- ✧ *了解由停止一个鞅产生的其它鞅型随机过程*
- ✧ *了解二次变差和协变差过程，多布-迈耶分解*
- ✧ *复习伊藤积分的定义和主要性质*
- ✧ *掌握拉登-尼科迪姆导数的各种形式和性质*
- ✧ *掌握凯麦隆-马丁-哥萨诺夫定理并熟练应用该定理进行测度变换*
- ✧ *掌握鞅表示定理并理解该定理在分析交易策略的可行性和构造完备市场模型中的作用*

鞅这个术语早在 20 世纪 30 年代首先由 Ville(1939)引进，但是基本概念来自于法国概率学家列维(Levy，1934)。但是真正把鞅理论发扬光大的则是美国数学家多布(Doob)，他于 1953 年的名著《随机过程》一书中介绍了（包括上鞅分解问题在内的）他对于鞅论的系统研究成果。它引起了一般过程理论的研究，从此鞅成为现代概率和随机过程的基础，而且在决策和控制模型等方面有着重要应用，并得到快速发展。。

鞅在 20 世纪 70 年代末期被引入金融经济学用来描述资产的价格运动过程，

最早出现在 Pliska&Kreps

相对于上一章随机微积分而言，由于较多地借助测度论，鞅显得更加抽象，但是令人惊奇的是，它的引入不仅使得微观金融理论分析（例如期权定价）变得更加简洁和优雅；

并且由于可以借助现代数值计算技术，它还提供了更为强大的运算能力，而这对于实际工作又是至关重要的。

在本章中，我们首先在离散时间下，使用在概率基础一章中接触到的分割、条件数学期望等概念来严格地给出鞅的定义。然后澄清一些性技术要求并给出连续时间鞅的概念。介绍一些常见的鞅的例子。在讨论了鞅的两个重要子类之后，

接下来我们考察多布-迈耶分解(Doob-Meyer decomposition)，

停时(stopping time)

接下来讨论对于现代金融分析至关重要的——等鞅测度变换(equivalent martingale transformation)和凯麦隆-马丁-哥萨诺夫定理(Cameron-Martin-Girsanov theorem)。只有熟练掌握并且能够灵活运用这一方法，才能真正领略到现代金融理论的精髓。

10．1 概述

“鞅”一词来源于法文 martingale 的意译，原意是指马的笼套或者船的索具，同时也指一种逢输就加倍赌注，直到赢为止的恶性赌博方法(double strategy)。但这都没有说明它在金融学中的确切含义。鞅究竟是什么呢？简单的说，鞅是“公平”赌博（fair game）的数学模型。那么什么又是公平的赌博呢？假设一个人在参加赌博，他已经赌了 n 次，正准备参加第 $n+1$ 次赌博。如果不做什么手脚，他的运气应当是同他以前的赌博经历无关的，用 X_n 表示他在赌完第 n 次后拥有的赌本数，如果对于任何 n 都有

$$E(X_n \mid X_{n-1}) = X_{n-1}$$

成立，即赌博的期望收获为 0，仅能维持原有财富水平不变，就可以认为这种赌博在统计上是公平的[1]。

在金融分析中，投资者通常会根据过去发生的事件来指导未来的投资决策，我们可以把 X 设想为对由于信息发布而产生波动的金融资产价格(过程)，而 EX_n 就是对这种价格运动的预测，而恰好鞅就是用条件数学期望来定义的，这种相似性就激发了使用鞅和与之相关的数学概念来描述金融资产价格运动过程特征的热情，鞅在 20 世纪 80 年代以后迅速成为主流金融经济学研究中标准的时髦。

10．1．1 离散时间

简单的说，一个随机变量的时间序列没有表现出任何的趋势性(trend)，就可以称之为鞅；而如果它一直趋向上升，则称之为下鞅(submartingale)；反之如果该过程总是在减少，则称之为上鞅(supermartingale)。实际上鞅是一种用条件数学期望定义的随机运动形式，或者说是具有某种可以用条件数学期望来进行特征描述的随机过程。

我们循序渐进地分成 4 个步骤来正式定义鞅：

1)首先，描述概率空间。存在一概率空间 $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$，要求σ-代数 $\mathcal{F}$ 是 P-完备的，即对于任何 $A \in \mathcal{F}$ 且 $P(A)=0$，对一切 $N \subset A$ 都有 $N \in \mathcal{F}$ 成立[2]。接下来，

2)描述滤波(filtration)。设想我们在一些时点上观察一种股票的价格 $(S_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$[3]随时间的波动情况。令 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ 代表在不同时点上投资者获得的有关股票价格的历史信息，随着时间的推移，越来越多的数据被追加到这个信息集合中，它会越来越丰富。当 $m<n<o$ 时，这

---

[1] 期望收益等于参加费用的赌博也可以认为是统计上公平的。

[2] 我们会经常看到这一类技术性的要求，它是保证数学上严密性的需要，在经济分析则往往找不到合适的对应物。幸运的是，经济分析中大多数问题具有良好的性质。

[3] 我们用 $\mathbf{Z}_+$ 表示正整数。

一族信息集合必然满足：

10．1．1 $$\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_o \cdots\cdots$$

实际上$\mathcal{F}_n$就是n时刻的分割产生的σ-代数，这样的σ-增族记为：

$$\boxed{\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}}$$

我们称它为滤子(filter)或者滤波[4]。给定一个滤波就决定了在给定概率空间中的历史演化和信息传播过程(见金融相关点 10-1)。四位一体的$\{\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P},\mathbf{F}\}$被称为滤过(filtered)的概率空间或者随机基(stochastic basis)。

金融相关点 10-1：信息结构和传播过程[5]

金融市场首先是一个交易的场所，它完成资源配置的任务；同时它还是信息发布的场所，有时也被称为经济运行的“指针”。在微观金融分析中我们需要一个能够反映这种金融市场上的信息结构(information structure)及其历史演化的过程(spread process)性质的数学模型。考虑一个如下图所示的重合(recombining)的二项树模型。

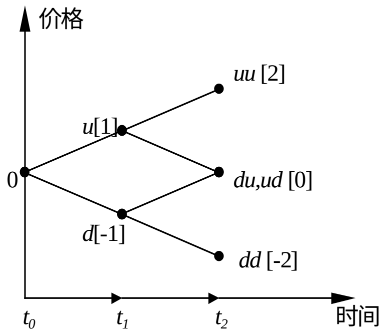


图 10-1 二项树模拟股票价格运动

u代表股票价格经历了一次上升；d则代表一次下降，两个时刻过后股票价格会出现 4 种情况，那么样本空间就是：

$$\Omega = \{\{uu\},\{ud\},\{du\},\{dd\}\}$$

我们任意构造几种集合，例如：

$$\mathcal{F}_a = \{\{uu\},\{ud\},\{du\},\{dd\}\}$$
$$\mathcal{F}_b = \{uu,ud,du,dd\}$$
$$\mathcal{F}_c = \{\{uu,ud\},\{du\},\{dd\}\}$$
$$\mathcal{F}_d = \{\{uu\},\{uu,ud\},\{du\},\{dd\}\}$$
$$\mathcal{F}_e = \{\{uu\},\{ud\},\{du\}\}$$

根据我们在概率论一章中学习过的知识，我们知道$\mathcal{F}_a$，$\mathcal{F}_b$和$\mathcal{F}_c$都是对样本空间Ω的一种分割。这是因为按照分割的定义，它们各自包含的所有元素的并集构成了整个状态空间，而它们所包含的元素两两相交的结果是空集。$\mathcal{F}_d$和$\mathcal{F}_e$则不是分割，因为$\mathcal{F}_d$中前两个元素的交集不是空集，而是$\{uu\}$；而f_e的所有元素的并也没有构成整个状态空间，缺少了$\{dd\}$。

$\mathcal{F}_b$集合表示股票价格两次变动以后所有可能发生的情况，它仅仅说明了事物发展的未来潜在可能性，它相当于位于二项树上的 0 点。在 0 时刻信息结构是最平凡的，即：$\mathcal{F}_0 = \{\varnothing,\Omega\}$。而$\mathcal{F}_a$则刚刚好相反，它完全揭示出所有的世界状态，正是在最终的 2 时刻，究竟哪种状态会发生已经成为了事实。$\mathcal{F}_c$则代表了一种中间状态，好比在 1 时刻，我们知道如果状态$\{uu,ud\}$发生，即前进到$d[1]$点后，$\{dd\}$或者$\{ud\}$之一必定会发生，到

[4] 实际上$\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$可以作更为广泛的理解，它也可以是无限维向量，如果仅仅解释为价格或者收益就和法马(Fama E.)定义的弱的市场效率的基础相吻合，这也是我们这里的定义。这样假定时，我们说滤波是由价格过程产生的。

[5] 这里的描述来主要自于 Dothan(1990)和 Rebonato(1998)。

底是谁，仍然不能够确定；而$u[1]$点以后的发生的情况则不清楚或者不重要了。因此这些分割就适当地代表了一个动态系统中的 0、完全和部分的信息。我们知道$\mathcal{F}_a$比$\mathcal{F}_c$精细，而$\mathcal{F}_b$是最粗糙的分割，把它们串联起来就有：

$$\mathcal{F}_b < \mathcal{F}_c < \mathcal{F}_a$$

因此从粗到细排列这些分割，还代表了信息的传递过程。

正式一些有：假定同一状态空间中存在$N+1$个分割，它们满足下列 3 个条件：

1)第一个分割是最粗糙的，即：$\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\} = \{\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}\}$；

2)最后一个分割是最精细的，即：$\mathcal{F}_N = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, ..., \{\omega_n\}\}$；

3)对于任何$s < t$，$\mathcal{F}_t$分割比$\mathcal{F}_s$要精细。

这样定义的分割序列，就是一个“过目不忘”的学习过程。在最初的 0 时刻，未来世界视野一片模糊，唯一可知的是Ω中的某种状态会发生。下一个时刻有一些新的信息来临，即有一个比较粗的分割，在任意时刻，我们对于(价格)信息知识的了解始终在增长。最后时刻一切都昭然若揭，我们完全了解了从 0 到N时刻哪一个状态发生了，它又是如何演化的。这在实际中是容易做到的，只要投资者有一个好记性或者容量足够大的硬盘就可以了。符合上述 3 个条件的一组分割就被称为信息结构，它的数学对应物就是滤波。

3)如果对于任何$n \geq 0$，S_n的值被包含在$\mathcal{F}_n$中，就称S_n是$\mathcal{F}_n$可测的，或者使用梅耶(Meyer)的术语，称S_n为$\mathcal{F}_n$适应的($\mathcal{F}_n$–adapted)[6]。

金融相关点 10-2：随机金融变量的可测性和一致性

微观金融分析中的各种随机过程，例如价格、交易头寸都有一个是否可以被预测的问题。讨论仍然从上一框文中的信息结构开始。我们知道由于以集合本身为定义域的函数运算，例如微积分运算，不是很方便，所以要进一步引入曾经学习过的随机变量函数，即：

$$X : \Omega \to \mathbf{R}$$

来描述信息结构。考虑这样一种的随机变量函数，它赋予一个分割中的同一子集下的元素以相同的数值，我们称这种随机变量对于该种特定的分割是可测的。仍然使用前面的二项树模型来具体说明这一点。有随机变量函数x'，它定义股票的价格在 0 时刻为 0，在 0 时刻以后则每经历一次上升就在原来的价格上加 1；如果下降就减去 1，图 10-1 中就标明这种情形。根据x'的定义有：

$$x'(\{uu\}) = 2\ ；\ x'(\{ud\}) = 0\ ；\ x'(\{du\}) = 0\ ；\ x'(\{dd\}) = -2$$

考虑下列分割：

$$\mathcal{F}_a = \{\{uu\}, \{ud\}, \{du\}, \{dd\}\}$$
$$\mathcal{F}_f = \{\{uu\}, \{ud, du\}, \{dd\}\}$$
$$\mathcal{F}_g = \{\{uu, dd\}, \{ud\}, \{du\}\}$$

函数x'把相同的数值指定给了分割$\mathcal{F}_f$中同一子集的相同元素，例如$x'(\{ud\})$和$x'(\{du\})$都是 0，因此它是$\mathcal{F}_f$可测的。但是它不是$\mathcal{F}_g$可测的，因为它给该分割下同一子集$\{uu, dd\}$中不同元素赋予了不同的数值。它也是$\mathcal{F}_a$可测的，这是平凡的。需要注意的是，尽管x'并没有为$\mathcal{F}_a$中的每一个不同的元素(子集)指定不同的数值，例如$x'(\{ud\})$和$x'(\{du\})$都是 0，但这并没有影响它的$\mathcal{F}_a$可测性。因此一般而言，任何随机变量对于最细致的分割总是可测的。注意到尽管分割$\mathcal{F}_f$比$\mathcal{F}_a$粗糙，但它仍然是x'可测的。当函数x在它所基于的最粗糙的那个分割上是可测的，就称该分割是由x生成的，记为$\mathcal{F}_x$，在上面的例子中有

$$\mathcal{F}_{x'} = \mathcal{F}_f$$

我们之所以对由随机变量函数生成的分割感兴趣，是因为它包含了与该随机变量本身所包含的相同的信息内容。不妨假定存在一新的随机变量函数x''，它为状态空间中的

[6] 对随机过程可测性的描述见框文 10-2，并请回顾 3．3．2 节中的有关内容。

每一个元素都赋予同样的数值，那么即使在最后时刻准确地获得了这时的随机变量的值，我们仍然无法了解事件树的演化路径，它所包含的信息内容不比最粗糙的分割 f_b 更多。但是从 x' 的数值，我们确实可以知道：路径究竟是 uu (如果 2 出现)或者 dd (-2 出现)还是 ud 、 du (0 出现)。而这正是由 x' 生成的分割 $\mathcal{F}_f$ 所包含的信息内容。

不妨再定义一个随机变量函数 x'''，它定义股票的价格在 0 时刻为 0，在 0 时刻以后如果第 i 步出现股票价格上涨，就在原股票价格上加上 i ($i=1,2$)；下降则作类似定义。这样：

$$x'''(\{uu\})=1+2=3\text{；}x'''(\{ud\})=1-2=-1\text{；}$$

$$x'''(\{du\})=-1+2=1\text{；}x'''(\{dd\})=-1-2=-3$$

尽管 x''' 是一个“路径依赖”(path-dependent)的函数，但根据 x''' 的取值情况，我们仍然可以确定股票价格的变化路径。显然这时有：

$$\mathcal{F}_{x'''}=\mathcal{F}_a$$

由于一个随机变量包含了同它生成的分割同样的信息内容，因此可以使用一个新的表述结构。

1）假定存在一个随机变量序列 $x(0),x(1),...,x(N)$，如果每一个 $x(n)$ 是 $\mathcal{F}_n$ 可测的，也就是说它对于 t 时刻的分割中的子集的每一个元素赋予相同的数值，就称该随机变量序列或者随机过程是 $\mathcal{F}(n)$ 适应的。一般说来，如果没有内幕交易的话，我们通常价格过程是 $\mathcal{F}(n)$ 适应的。

2)如果一个随机过程中每一个 $x(n)$ 是 $\mathcal{F}(n-1)$ 可测的，就称它为可料(predictable or previsible)过程。期间交易过程，即在每一个时刻上的交易策略(trading strategy)的汇总：

$$\theta=\{\theta(0),\theta(1),...,\theta(N)\}$$

就是 $\mathcal{F}(n-1)$ 可测的。这是容易理解的，因为投资者一般是根据上一时刻的(价格)信息来决定投资组合并一直保持到本期的。换句话说，投资策略 $\theta^i(n)$ 是 $\mathcal{F}(n)$ 可料的[7]。

4)然后，是条件数学期望。使用不同时刻的信息集，我们可以推测 S_n 的未来运动形式，很自然的，这种预测通常采用条件数学期望的形式：

10．1．2 $$\boxed{E^{\mathcal{P}}(S_N)=E^{\mathcal{P}}(S_N\mid\mathcal{F}_n),\quad n<N}$$

这意味着在 n 时刻对 N 时刻的价格预期是基于在该时刻已确知的特定信息集合 $\mathcal{F}_n$ 的。注意在这里我们在期望算子上加的 $\mathcal{P}$ 代表这种期望是基于特定概率测度（或者分布）的，在不混淆的情况下它也可以被省略。

定义 10．1．1 假定 $(S_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ 是滤波空间 $\{\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P},\mathbf{F}\}$ 上的一个 $\mathcal{F}_n$-适应过程，如果：

1)无条件的数学期望是有限的，即：

$$E(S_n)<\infty,n\in\mathbf{Z}_+$$

2)对下一时刻的预测就是现在观察到的数据，即：

10．1．3 $$\boxed{E_n(S_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)=S_n,n\in\mathbf{Z}_+}$$

则称 $(S_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ 为（$\mathbf{F}$ 下的）离散时间鞅或者简称离散鞅[8]。

因此鞅实际上就是未来变化完全无法预测的随机过程。不妨假设 $(S_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ 是一个鞅，在一个单位时间间隔内，S_n 的预期变化为

[7] 对于随机变量和随机过程可测性的一般性讨论见 10.1.2 节。

[8] 当 $\mathbf{F}$ 固定时，我们常常会省略它；而且如果不特别提及 $\mathbf{F}$ 时，一般隐含地指过程本身产生的滤波 $\mathbf{F}^S$，通常称之为自然滤波（natural filtration）。

$$E_n\left[(S_{n+1}-S_n)\mid\mathcal{F}_n\right]=E_n(S_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)-E_n(S_n\mid\mathcal{F}_n)$$

由于S_n是鞅，$E_n(S_{n+1})$等于S_n，而根据定义S_n是$\mathcal{F}_n$可测的，所以$E_n(S_n)$在 n 时刻是已知的，也等于S_n，所以：

10．1．4 $$\boxed{E_n(\Delta S_n\mid\mathcal{F}_n)=0}$$

因此对S_n在下一时间内变化的最好预测就是 0。换句话说，该随机变量的未来运动方向和大小是不可预测的，这就是所谓鞅性(martingale property)。这里ΔS_n被称为鞅差(martingale difference)。显然，鞅差的部分和(partial summation)也是鞅，即：

$$E_n(\sum_{k=1}^{n}\Delta S_k\mid\mathcal{F}_k)=0$$

需要强调的是：鞅是用条件期望来定义的，而条件期望的计算总是基于某种概率分布和特定信息集合的，这两点对于决定一个随机过程是不是鞅起关键作用，以后的分析会逐渐揭示这一点。

只要对定义 10．1．1 中的第二个条件做适当修改，就可以获得相应的上鞅和下鞅的定义。

定义 10．1．2 如果：

2') $E_n(S_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)>S_n,n\in\mathbf{Z}_+$，则称随机过程$(S_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$为下鞅；

2'') $E_n(S_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)<S_n,n\in\mathbf{Z}_+$，则称随机过程$(S_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$为上鞅。

容易知道：

1）如果$(S_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$是上鞅，则$(-S_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$是下鞅。

2）如果$(S_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$、$(X_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$是（下）鞅，则(S_n+X_n)也是（下）鞅。

3）如果$(S_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$是鞅，根据詹森不等式，如$f(.)$是一个凸函数，则

$$X_n=f(S_n)$$

必定是一个下鞅。所以$(S_n^{\lambda})_{n\in\mathbf{Z}_+},\lambda\geq 1$就是一个下鞅。

10．1．2 连续时间

连续时间参数t的取值范围为实半轴$[0,\infty)$或者其中的某个区间$[0,T]$，但我们对连续时间随机函数的路径有比较严格的（技术性）要求。

首先让我们来正则化(regularize)路径。

1）正则性。如果一个函数

$$f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$$

在每一点的左右极限都存在，就称它为正则函数（regular）。容易知道正则函数仅有有限个间断点。

2）连续性。如果一个随机过程的全部样本路径是连续的，我们就称之为连续随机过程。正式的有：如果对于任意随机过程$X(t)$和任意$s\in[0,T]$，在概率收敛意义下有：

$$X(s)=\lim_{t\to s}X(t)$$

则称该随机过程为连续的。这又具体包括两种情况，如果

$$X(\omega,t)=\lim_{s\downarrow t}X(\omega,s), a.s\forall t\in[0,T]$$

就称该随机过程有着右连续样本路径。左连续的概念是类似的。

3）正则连续性。我们称一个随机过程 $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ 为正则右连续的(regular right continuous)，当且仅当它是 $\mathcal{F}_t$-可测的，并且对于每一个 $\omega\in\Omega$ 和 $t\in[0,\infty)$，

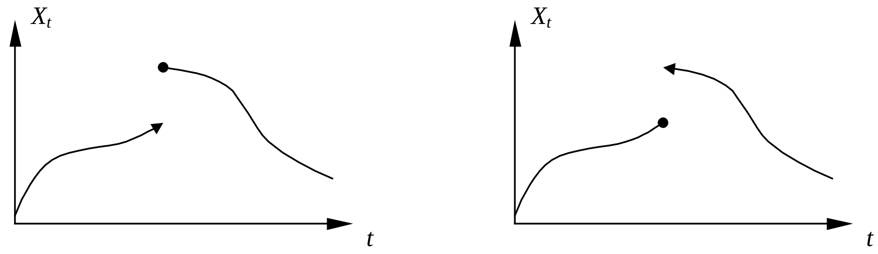
a)它的样本路径是右连续的：

$$\lim_{u\to t}X(u,\omega)=X(t,\omega), u>t$$

b)存在左极限：

$$X(t-,\omega)=\lim_{s\to t}X(s,\omega), s<t$$

正则左连续的定义是类似的，它们的图形表示如下：



a 正则右连续　　　　**b** 正则左连续

图 10-2 正则右、左连续函数

我们用 RCLL（right-continuos with left limits 或者 càdlàg[9]）表示拥有左极限同时又是右连续的随机过程。

接下来我们考察两个随机过程是否相同。考虑定义在同一概率空间上的两个随机过程 $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$、$(Y_t)_{t\in[0,\infty)}$，当它们被认为是 t 和 ω 函数时，当且仅当

$$X_t(\omega)=Y_t(\omega),\quad \forall t\in[0,T];\omega\in\Omega$$

成立时，我们才能说它们是相同的。但考虑到概率测度 $\mathcal{P}$，可以放松一些要求。我们可以提供至少 2 个判断两个随机过程是否“几乎总是相同”(almost the same)的标准：

1）当且仅当对于每一个 $t\geq 0$，有

$$P\{X_t=Y_t\}=1$$

成立时，称它们互相为对方的一个修正(modification)或者一个版本(version)[10]。

2）而当且仅当有

$$P\{X_t=Y_t,\forall t\in[0,T]\}=1$$

成立时，称为它们为是无区别的(indistinguishable)。如果两个过程是无法区别的，则它们一定是对方的一个修正，分之则不真[11]。但是如果它们具有右连续的样本路径，则反之也成立。

现在我们加强信息结构。存在一个滤过的概率空间 $\{\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P},\mathbf{F}\}$，要求它满足以下这些常规条件(usual conditions)：

1) σ-代数 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{P}$-完备的，即对于任何 $A\in\mathcal{F}$ 且 $P(A)=0$，对一切 $N\subset A$ 都有 $N\in\mathcal{F}$ 成

[9] càdlàg 即 continu à droite, limites à gauche。

[10] 或者称两者随机等价(stochastically equivalence)，这时 X 和 Y 有相同的有穷维分布函数。

[11] 两者之间的细微差异见 Elliott&Kopp(1999)，p102。

立；

2) σ-代数$\mathcal{F}_0$包含$\mathcal{F}$的所有$\mathcal{P}$-零集，即对于任何$A\in\mathcal{F}$且$P(A)=0$，都有$A\in\mathcal{F}_0$成立；

3)滤波$\mathbf{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$是右连续的，即对于所有$t>0$，都有：

$$\mathcal{F}_t=\bigcap_{u>t}\mathcal{F}_u$$

成立，其中$\bigcap_{u>t}\mathcal{F}_u$表示对于$u>t$时的所有$\mathcal{F}_u$中最大的σ-域，这个条件说明滤波包含了σ-域的所有不可数集合。

接下来我们深入考察随机过程的联合可测性（joint measurability）问题。假定$[0,T]$是$\mathbf{R}$中的某个区间，$\mathcal{B}(0,T)$是$[0,T]$中全体 Borel 集构成的σ-代数；用$\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[(0,T)]$表示乘积σ-代数[12]。给定任意随机过程$(S_t)_{t\in[0,T]}$，$S:\Omega\times[0,T]\to\mathbf{R}$，如果：

1）$(S_t)_{t\in[0,T]}$在乘积σ-域$\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[(0,T)]$上是可测的，就称它为可测的。

2）$(S_t)_{t\in[0,T]}$是$\mathcal{F}_t$可测的就称$(S_t)_{t\in[0,T]}$为$\mathbf{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$适应的。

3）$(S_t)_{t\in[0,T]}$对于任何$t\in[0,T]$，是在乘积σ-域$\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}([0,t])$上是可测的，就称之为循序可测的(progressively measurable)[13]。

容易知道任何循序可测随机过程均是可测过程，并适应于$\mathbf{F}$。一个可测、适应过程有一个循序可测的修正[14]。我们定义使得所有适应于$\mathbf{F}$的随机过程路径为循序可测的最小σ-域为循序σ-域$\mathcal{PM}$(progressive σ-field)。

实际上每个有着左（右）连续样本路径的适应过程都是循序可测的，由此我们还可以有以下子σ-域和相应的随机过程。

4）可选σ-域Op(optional σ-field)——使得所有适应于$\mathbf{F}$的右连续路径为可测的最小σ-域，如果一个过程是Op可测的就被称为可选过程。

5）可料σ-域$\mathcal{P}r$ (predictable σ-field)——是使得所有适应于$\mathbf{F}$的左连续路径为可测的最小σ-域，如果一个过程是$\mathcal{P}r$可测的就被称为可料过程。实际上就是指在t时刻的值是严格依赖于t时刻以前的信息的。***

因为：

连续适应过程$\Rightarrow$ RCLL 过程$\Rightarrow$循序可测过程$\Rightarrow$可测过程

因此可料过程和可选过程必然是循序可测过程，所以上面的σ-域之间有以下嵌套关系：

$\mathcal{P}r\subset Op\subset\mathcal{PM}\subset\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,T]$ **nielsen17 543

定义 10．1．3 假定$(S_t)_{t\in[0,\infty)}$是滤波空间$\{\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P},\mathbf{F}\}$上的一个适应过程，如果：

1) $E(S_t)<\infty, t\in[0,\infty)$；

2) $E_t(S_T\mid\mathcal{F}_t)=S_t,\ \forall T>t$。

则称S_t为连续时间鞅或者简称鞅。

可以证明如果滤波满足常规条件，每一个上(下)鞅都存在一个$\mathcal{F}_t$适应的右连左极的修

---

[12] 一个$\Omega\times[0,T]$可测的长方形是一个$A\times B$集合，$A\in\mathcal{F}$，$B\in\mathcal{B}[(0,T)]$。乘积σ-域$\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[(0,T)]$是包含所有可测长方形和概率测度$\mathcal{P}\times$勒贝格测度$\lambda$-0 集的最小σ-域。

[13] 这个重要术语最早来自 Chung&Doob(1965)。

[14] 证明见 Meyer（1966），p68。

正[15]。因此当我们谈到连续时间鞅的时候，指的均是它们的 RCLL 版本[16]。

10．1．3 鞅的例子

离散鞅的例子是很普遍的，以下是微观金融分析中经常会见到的两个例子。

仍然启用我们在上一章中用来模拟股票价格路径的二项树模型。现在假定 n 时刻的股票价格为 S_n，而在 $n+1$ 时刻，股票价格将以：

$$p=(1-d)/(u-d)$$

的概率上涨到 uS_n；或者以 $1-p$ 的概率下降到 dS_n，即：

10．1．5
$$S_{n+1}=\begin{cases} uS_n \text{ 概率为 } \dfrac{1-d}{u-d} \\ dS_n \text{ 概率为 } \dfrac{u-1}{u-d} \end{cases}，\quad 0<d<u$$

则下一时刻股票价格的数学期望为：

10．1．6
$$E(S_{n+1}\mid S_n)=uS_n\frac{1-d}{u-d}+dS_n\frac{u-1}{u-d}=S_n\frac{u(1-d)+d(u-1)}{u-d}=S_n$$

因此遵循这种二项过程的股票价格运动就是一个鞅。

考虑下面这个 $\mathcal{F}_n$-适应的随机过程：

10．1．7
$$S_{n+1}=S_n+\varepsilon_n, S_0=0$$

其中 ε_n 定义为：

10．1．8
$$\varepsilon_n=\begin{cases} 1 \text{ 概率为 } p \\ 0 \text{ 概率为 } r, p,r,q\geq 0, p+r+q=1 \\ -1 \text{ 概率为} q \end{cases}$$

可以证明

$$[S_n-n(p-q)]$$

是一个鞅，这是因为：

10．1．9
$$\begin{aligned} &E[S_{n+1}-(n+1)(p-q)\mid\mathcal{F}_n]=E[S_n+\varepsilon_n-(n+1)(p-q)\mid\mathcal{F}_n] \\ &=S_n+E(\varepsilon_n)-(n+1)(p-q) \\ &=S_n+(p-q)-(n+1)(p-q) \\ &=S_n-n(p-q) \end{aligned}$$

容易证明

$$S_n^2-n(p-q)$$

$$[S_n^2-n(p-q)]^2+n[(p-q)^2-(p+q)]$$

以及

$$a^{S_n}, a=q/p$$

也都是 $\mathcal{F}_n$-适应的鞅，请读者自行完成。

连续时间中最让人感兴趣的鞅是我们已经很熟悉的维纳过程。在上一章中，我们知道标准维纳过程 $(\mathcal{W}_t)_{t\in[0,\infty)}$ 或者说布朗运动是一个具有以下特征的独立增量随机过程，：

[15] 参见 Karatzas&Shreve（1991）。

[16] 注意有些术语上有微小差异，参考 Hunt&Kennedy（2000），p49。

1) $\mathcal{W}_0 = 0$ ；

2) $t \to \mathcal{W}_t(\omega)$ 是连续的；

3)对于任何 $s \le t$ ，$\mathcal{W}_t - \mathcal{W}_s$ 是服从 0 均值，方差为 $t-s$ 的标准正态分布的独立随机变量。

给定一个维纳过程 $\mathcal{W}$ ，我们可以定义一个由 $\mathcal{W}$ 生成的滤波。令 $\mathcal{F}_t^0$ 为 $\mathcal{F}$ 中使得 $\{\mathcal{W}(s), 0 \le s \le t\}$ 是可测的最小子σ-域，而令 $\mathcal{F}_t^w$ 是包括 $\mathcal{F}_t^0$ 和所有 0 概率集的最小子σ-域，则 $\{\mathcal{F}_t^{\mathcal{W}}\}_{t\in[0,\infty)}$ 就是由 $\mathcal{W}$ 生成的滤波。可以证明自然滤波：

$$\mathcal{F}_t^{\mathcal{W}} = \sigma(\mathcal{W})$$

满足前面定义的常规条件[17]。也容易证明 $\mathcal{W}$ 是该滤波下的一个连续鞅：

$$E(\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t \mid \mathcal{F}_t) = E(\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t) = 0$$

以维纳过程为基础，可以引申出许多类似的随机过程。例如如果 $\mathcal{W}_t$ 是一个 $\mathcal{F}_t$ 适应的维纳过程，则

$$\mathcal{W}_t^2 - t$$

也是鞅，这一点可以简单证明如下：

$$\begin{aligned}
&E[X_{t+\Delta t} \mid \mathcal{F}_t] = E(\mathcal{W}_{t+\Delta t}^2 \mid \mathcal{F}_t) - (t+\Delta t) \\
&= E[(\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t)^2 + 2\mathcal{W}_{t+\Delta t}\mathcal{W}_t - \mathcal{W}_t^2 \mid \mathcal{F}_t] - (t+\Delta t) \\
&= E[(\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t)^2 \mid \mathcal{F}_t] + 2E(\mathcal{W}_{t+\Delta t}\mathcal{W}_t \mid \mathcal{F}_t) - E(\mathcal{W}_t \mid \mathcal{F}_t) - (t+\Delta t)
\end{aligned}$$

逐次考察上式右侧各项。由于 $\mathcal{W}$ 具有独立增量性质，因此 $\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t$ 是独立于滤波 $\mathcal{F}_t$ 的，另外注意到有

$$\Delta\mathcal{W}^2 = \Delta t$$

这一近似关系，就有：

$$E[(\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t)^2 \mid \mathcal{F}_t] = E[(\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t)^2] = \Delta t$$

而根据条件期望的性质(见第８．３．３节)，有：

$$E(\mathcal{W}_{t+\Delta t}\mathcal{W}_t \mid \mathcal{F}_t) = \mathcal{W}(t)E(\mathcal{W}_{t+\Delta t} \mid \mathcal{F}_t) = \mathcal{W}_t^2$$

根据条件期望性质：

$$E(\mathcal{W}_t^2 \mid \mathcal{F}_t) = \mathcal{W}_t^2$$

综合上述结果就有：

$$E[X_{t+\Delta t} \mid \mathcal{F}_t] = \Delta t + 2\mathcal{W}_t^2 - \mathcal{W}_t^2 - t - \Delta t = \mathcal{W}_t^2 - t = X_t$$

---

[17] 详见黄（）p18。

这就证明了$\mathcal{W}_t^2-t$是鞅。这个事实反过来说也是正确的，即如果$\mathcal{W}_t^2-t$是一个连续时间鞅，而$\mathcal{W}$也是连续时间鞅，则$\mathcal{W}$必然是布朗运动[18]。

我们也可以证明随机过程：

$$e^{a\mathcal{W}_t-\frac{1}{2}a^2t}$$

也是鞅，其中a是任意实数。这是因为

$$E[X_{t+\Delta t}\,|\,\mathcal{F}_t]=E\left\{\exp[a\mathcal{W}_{t+\Delta t}-\frac{1}{2}a^2(t+\Delta t)]\,|\,\mathcal{F}_t\right\}$$
$$=E\left\{X_t\exp[a(\mathcal{W}_{t+\Delta t}-\mathcal{W}_t)-\frac{1}{2}a^2\Delta t]\,|\,\mathcal{F}_t\right\}$$

根据维纳过程的独立性假设和条件期望的性质，有：

$$E[X_{t+\Delta t}\,|\,\mathcal{F}_t]=X_tE\left\{\exp[a(\mathcal{W}_{t+\Delta t}-\mathcal{W}_t)-\frac{1}{2}a^2\Delta t]\,|\,\mathcal{F}_t\right\}$$
$$=X_t\exp(-\frac{1}{2}a^2\Delta t)E\left\{\exp[a(\mathcal{W}_{t+\Delta t}-\mathcal{W}_t)]\right\}$$

$a(\mathcal{W}_{t+\Delta t}-\mathcal{W}_t)$项服从 0 均值和$a^2\Delta t$方差的正态概率分布，根据在概率论一章中学习过的内容，我们知道$\exp[a(\mathcal{W}_{t+\Delta t}-\mathcal{W}_t)]$服从对数正态分布，它的期望是$\exp(\frac{1}{2}a^2\Delta t)$，这样：

$$E[X_{t+\Delta t}\,|\,\mathcal{F}_t]=X_t\exp(-\frac{1}{2}a^2\Delta t)\exp(\frac{1}{2}a^2\Delta t)=X_t$$

这就证明了$e^{a\mathcal{W}_t-\frac{1}{2}a^2t}$也是鞅，它被称为王尔德鞅(Wald's martingale)。

金融相关点 10-3：金融资产价格运动和鞅

那么是不是金融资产价格运动就是鞅呢？我们知道一般说来，风险资产的价格变化，在给定信息集下，并非完全不可预测的。比方说折扣发行的零息票债券(zero coupon bond)的价格B会随着到期日的临近，越来越接近其面值，即越来越大，即：

$$E_n(B_N)>B_n,n<N$$

显然这是一个下鞅。类似的，股票通常会有一个正的预期收益，也就是说：

$$E(S_N-S_n\,|\,\mathcal{F}_n)\geq 0,n<N$$

因而也不具有鞅性。以上讨论原则上也适合期货和期权一类的衍生产品。例如期权有时间价值，并且会随着到期日的临近不断地衰减，这是上鞅的一个特征。

很自然就会有这样一个问题：既然大多数金融产品的价格运动不是鞅，为什么我们对于鞅有这么浓厚的兴趣呢？实际上在 10．1．1 节中定义离散鞅时，我们就强调过：

鞅的定义是基于特定概率分布和信息集合的，通过对信息集和概率测度的适当处理，就可以把上(下)鞅转化为鞅。

比方说我们能不能找到某一种概率分布Q，它把资产的未来价格用无风险收益率贴现后的值，转变成一个鞅，即：

$$E_n^Q(e^{-r(N-n)}S_N\,|\,\mathcal{F}_n)=S_n,\qquad n<N$$

如果这种转换可以实现，势必大为简化金融产品定价工作。如何在数学中实现这种变换以及它在经济学上的合理解释是什么，将是以下分析的重要内容之一。

[18] 简单的证明可以参考 Elliot&Kopp，1999，p125-26。

10．1．4 鞅的子类

接下来我们介绍鞅的 3 个子类，它们是L^1-有界（bounded）鞅，一致可积（uniformly integrable）鞅和平方可积（square integrable）鞅。一致可积性（uniformly integrability）的概念同条件数学期望紧密联系在一起，因而也同鞅性紧密联系在一起。因此一致可积鞅通常是使得一些主要结论得以成立的最大和最自然的一类鞅。Hunt+Dothan

在 8．4．2 节中，我们定义过$L^p, p\geq 1$线性概率空间，回忆一下，我们称由满足

$$E(|X|^p)<\infty$$

的随机变量X构成的集合全体为L^p（有界）空间。这里类似的，令X_t为任意随机过程，当它满足

$$\sup_{t\geq 0} E(|X_t|^p)<\infty$$

时，就称该随机过程为L^p-有界的（或者说属于L^p）。特别的，如果随机过程X_t是L^2-有界的，我们就称它为平方可积的。

眼下我们对L^1-有界鞅感兴趣，注意到如果M是一个鞅则对于所有的t，必然有

$$E(|M_t|)<\infty$$

进一步根据条件数学期望的 Jensen 不等式，对于$s<t$，有

$$E(|M_t|)=E[E(|M_t||\mathcal{F}_s)]\geq E|E(M_t|\mathcal{F}_s)|=E(|M_s|)$$

因此$\sup_{t\geq 0} E(|M_t|)=\lim_{t\to\infty} E(|M_t|)$和说一个鞅是$L^1$-有界的，是一个当$t\to\infty$时的断言。**

鞅的L^1-有界性是下面这个关于鞅的收敛定理（martingale convergence theorem）的充分条件。

定理 10．1．4 （Doob 鞅收敛定理）*令M是一个L^1-有界的 RCLL 鞅，则*

$$M_\infty(\omega)=\lim_{t\to\infty} M_t(\omega)$$

存在而且是有限。

详细证明见 Revuz&Yor(1991)。根据 Fatou 定理：

$$E(|M_\infty|)\leq \liminf E(|M_t|)<\infty$$

我们可能会轻率地得出以下结论：

1）在L^1中$M_t\to M_\infty$意味着当$t\to\infty$时，有$E(|M_t-M_\infty|)\to 0$成立。

2） $M_t=E(M_\infty|\mathcal{F}_t)$。

但实际上这两个断言在一般情况下均不成立，除非我们把M_t限制在更为严格的类别——一致可积鞅上。

定义 10．1．5 对于一族L^1-有界的随机变量C，如果当$\varepsilon\to\infty$时对于任意$X\in C$

$$\int_{\{|X|\geq\varepsilon\}}|X|\,dP$$

一致收敛于 0。就称该族随机变量是一致可积的。

如果一个鞅M_t满足上述条件就它是一致可积鞅。一致可积性是比L^1-有界更强的一个要求。实际上如果是一个鞅是$L^p, p>1$-有界的，则它必定是一致可积的。我们加上一致可

积性的要求目的是控制鞅的尾部行为（tail behavior），它将保证上述的两个收敛结果成立。实际上如果 M 是一个一致可积鞅，则[19]：

1）在 L^1 中 $M_n \to M_\infty$。

2）存在 $M_\infty \in L^1$ 使得 $E(M_\infty | \mathcal{F}_n) = M_n$。

这时我们也称 M 被 M_∞ 封闭了（closed）。[kopp105]

现在我们前往最终目标——平方可积鞅。如果一个鞅具有有限的二阶矩，即

$$E(M_n^2) < \infty$$

我们就称之为平方可积鞅[20]。最后我们附送一个 Doob 最大不等式（Doob's maximal inequality）[21]：******

$$E(\sup X_t)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(X^p), p > 1$$

10．2 停时和鞅型序列

在本节中我们要引入停时(stopping time)概念[22]，这个概念在随机过程理论研究中非常重要，它提供了“驯服时间这一连续统”（tame the continuum of time）的有效工具（Chung，1982），而且停时的引入将把鞅的性质拓展到其它鞅型序列上去[23]。

10．2．1 停时定义

那么什么是停时呢？记住 t 是时间，$\mathcal{F}_t$ 代表积累到 t 时刻的信息。停时可以理解为某一随机事件第一次发生的时刻。不妨假想我们对某些特定现象的发生感兴趣：例如某个“黑色星期五”的出现，我们对这些特定现象第一次出现的时刻 $\mathcal{T}(\omega)$ 给予特别的注视。很明显事件 $\{\omega, \mathcal{T}(\omega) \le t\}$ 的发生，当且仅当这一现象出现在 t 时刻上或者 t 时刻之前。应当是积累到那个时刻的信息集的一部分。

例如一个赌徒决定在他赌赢 100 次后就收手，那么他停止赌博的时刻就是一个随机变量 $\mathcal{T} = n$，就是说当他赌到 n 次时，他才赢足 100 次，$\mathcal{F}_n$ 是他赌到第 n 次的所能掌握的全部信息。故 $\mathcal{T}$ 是否等于 n 是依赖他赌到第 n 次才能知道的。从这里体会它似乎有点“你到那就知道了”那种无奈的意味。

正式的，停时是一个定义在滤波空间 $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbf{F}\}$ 上的随机变量

$$\mathcal{T} : \Omega \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

对于任何 $t \in \mathbf{R}_+$，它满足[24]：(数学手册 543 总合)

10．2．1 $$\boxed{\{\mathcal{T} \le t\} = \{\omega, \mathcal{T}(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}_t}$$

---

[19] 这被称为鞅收敛定理 kopp83-85（martingale convergence）证明参考 Williams。Rogers&Williams。

[20] 引入平方可积的目的是为了实现随机积分，L^2 是一赋泛（完备）线性空间。Hunt39 因为在构造随机积分的时候，我们要考察一系列鞅的极限，我们要求这个极限也是一个鞅，因此我们需要有一个完备的鞅空间。。

[21] 或者称 Doob's L^p 不等式，证明见##

[22] 有时也称马(尔科夫)时(Markvo time)。

[23] 停时可能是整个随机过程分析中最具有技术特征的部分之一，在直观意义上停时提供了一个试图最大化赌博收益的赌博策略，因为鞅代表公平赌博，这样一种策略不会涉及到预见性。

[24] 如果该严格不等式成立，则称之为可选时(optional time)。如果滤波是右连续的，则可选时和停时是相同

显然任意非负的常值随机变量$\mathcal{T}=t$是一个停时，而且$\mathcal{T}+s,(s\geq 0)$也是停时。容易知道：

1）如果$\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$是停时，则$\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2$，$\mathcal{T}_1\wedge\mathcal{T}_2$，$\mathcal{T}_1\vee\mathcal{T}_2$也都是停时[25]；

2）如果$(\mathcal{T}_n)_{n\geq 1}$是一个停时序列，则$\vee_n\mathcal{T}_n=\sup_n\mathcal{T}_n$、$\wedge_n\mathcal{T}_n=\inf_n\mathcal{T}_n$、$\limsup_{n\to\infty}\mathcal{T}_n$、$\liminf_{n\to\infty}\mathcal{T}_n$也都是停时。

我们同时定义[Hunt42]

$$\mathcal{F}_{\mathcal{T}}=\{A\in\mathcal{F},\forall t\leq\infty,A\cap\mathcal{T}\leq t\}\in\mathcal{F}_t$$

注意此时集合$\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$被称为停时前的σ-代数。补一个 Elliott101 黄 22 如果$\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$是停时，而且$\mathcal{T}_1\leq\mathcal{T}_2$，则有：

1）$\mathcal{F}_{\mathcal{T}_1}\leq\mathcal{F}_{\mathcal{T}_2}$。

2）如果$A\in\mathcal{F}_{\mathcal{T}_1}$，则$A\cap\{\mathcal{T}_1\leq\mathcal{T}_2\}\in\mathcal{F}_{\mathcal{T}_2}$。

10．2．2 最优停止定理

我们可以把停时看成是对普通时间变量t的随机化，那么停时在随机序列中的出现会对随机序列的运动特征产生什么样的影响呢？不妨更直接的说出我们的想法：现在既有停时概念又有鞅的概念，把它们放在一起会怎么样呢？直观上理解：一个鞅在停止时刻基于现在时刻的均值就应当是它的当前值。

假设W_t代表一个赌徒在t时刻的财富，他连续的参加“公平”的赌博，现在的问题是：他能不能通过精心的选择停止赌博的次数来最大化他的个人财富呢？答案是否定的。这就是著名的多布有界停时定理(Doob's bounded stopping time theorem)[26]。

定理 10．2．1 *如果$(M_n)_{n\in Z_+}$是在随机基$\{\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P},\mathbf{F}\}$上的一个$\mathcal{F}_n$-适应的离散鞅；$\mathcal{T}<\infty$是一个有界停时，则有*

$$\boxed{E\left[(M_{\mathcal{T}})\,|\,\mathcal{F}_0\right]=M_{\mathcal{T}}}$$

以及

$$E(M_{\mathcal{T}})=E(M_0)$$

*证明：*Rogers20 考虑这样一个随机序列θ_n：

$$\theta_n=1_{(\mathcal{T}\geq n)},n\geq 1$$

它是可料的，因此如果$(M_n)_{n\in Z_+}$是鞅，则鞅变换$(\theta\cdot M)_n$也是鞅，但是

10．1．24 $$(\theta\cdot M)_n=\sum_{k=1}^{n}1_{(\mathcal{T}\geq k)}(M_k-M_{k-1})=M_{\tau\wedge n}-M_0$$

如果$\tau\leq n$，则

10．1．25 $$(\theta\cdot M)_n=M_{\mathcal{T}\wedge n}-M_0=M_\tau-M_0$$

的

[25] 其中$a\wedge b$代表两者中较小的那个；$a\vee b$代表两者中较大的那个。以下主要性质的证明可以参考 Karatzas&Shreve（1991）。

[26] 该定理有时也称可选取样定理（optional sampling theorem)。

因此就有：

10．1．26 $$E[(\theta\cdot M)_n\mid\mathcal{F}_0]=E[M_{\mathcal{T}}-M_0\mid\mathcal{F}_0]=E[M_{\mathcal{T}}\mid\mathcal{F}_0]-M_0=0$$ ◆

这是可选取样定理的最简版本。它还有其它的形式，例如假定 $\tau_1\le\tau_2$ 为两个有界停时：

1）如果 $(M_n)_{n\in Z_+}$ 为一个上鞅，则 $E[M_{\mathcal{T}_2}\mid\mathcal{F}_{\mathcal{T}_1}]\le M_{\mathcal{T}_1}$。

2）如果 $(M_n)_{n\in Z_+}$ 是鞅，则 $E[M_{\mathcal{T}_2}\mid\mathcal{F}_{\mathcal{T}_1}]=M_{\mathcal{T}_1}$[27]。

正如我们看到的，对鞅过程的停止，相当于某种形式的鞅变换。

10．2．3 鞅型序列

定义 10．2．2 dothan240 在随机基 $\{\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P},\mathbf{F}\}$ 上存在一个 $\mathcal{F}_n$ 适应的随机过程 $(M_n)_{n\in Z_+}$，如果存在一系列的停时 $(\mathcal{T}_m)_{m\in Z_+\cup\infty}$ $(\mathcal{T}_m\le\mathcal{T}_{m+1})$，而且 $\lim\limits_{m\to\infty}\mathcal{T}_m\to\infty$，使得 $M_{n\wedge\mathcal{T}_m}$ 成为一个鞅，就称为 $(M_n)_{n\in Z_+}$ 局部鞅(local martingale)。

这一过程被成为局部化（localization），具有以上性质的停时序列 $(\mathcal{T}_m)_{m\in Z_+\cup\infty}$ 被称为(局部鞅 M 的)局部化序列(localizing sequence)。容易知道所有的鞅都是局部鞅[28]。直观上理解所谓局部鞅就是指一个过程差一点点就是鞅，如果用停时隔一下，则它就成为了鞅。

可料递增过程

两个可料递增过程的差是有界变差过程

定义 10．2．3 如果 M_n 是局部鞅、A_n 是有界变差过程，则一个具有下面(不一定是唯一的)分解形式的随机过程 $(X_n)_{n\in Z_+}$ 被称为半鞅(semi-martingale)：

10．1．27 $$\boxed{X_n=X_0+M_n+A_n}$$

10．3 多布-迈耶分解

在金融相关点 10-3 中，我们提到为了可以采用鞅方法给金融资产定价，需要通过某种形式的转换把上(下)鞅变成鞅。在微观金融学中有一系列的重要定理表明当市场上不存在套利机会时，所有资产价格都是均衡价格测度(equilibrium price measure)下的鞅，证明这些定理以及使用它们为金融资产定价是下一章（第一节）的任务，现在我们不妨假定这就是事实，那么怎样把原本是上(下)鞅的资产价格运动过程变成鞅呢？有两种思路，第一种在本小节中讨论，另外一种在第 5 节中讨论。

10．3．1 多布分解定理

第一种思路在直觉上很简单，既然上(下)鞅中有一种向上或者向下趋势，只要从它们之中分离出这种趋势，就可以得到一个纯粹的鞅了。先考虑离散时间情形，考虑下面这个简化的二项过程：

---

[27] 参见 Kopp（1992），p79。

[28] 如果要把 OST 推广到无界停时的情形，就需要涉及一致可积鞅(uniformly integrable)的收敛定理。可以参考 Kopp83-85。

$$S_{n+1}=\begin{cases}S_n+1 & \text{概率为 } p\\ S_n-1 & \text{概率为 } 1-p\end{cases}$$

下一时刻股票的期望价格为：

$$E(S_{n+1}\mid S_n)=(S_n+1)p+(S_n-1)(1-p)=S_n+(2p-1)$$

当 $p=1/2$ 时，它是一个鞅。但如果上涨的概率超过了下降的概率，则我们会观察到一个有着上升轨迹的下鞅，即：

$$E(S_{n+1}\mid S_n)=S_n+(2p-1)>S_n$$

但是我们可以定义一个中心化过程(centered process) M_n ：

$$M_n=[S_0+(1-2p)]+\sum_{i=1}^{n}[\Delta S_n+(1-2p)]=S_n+(1-2p)(n+1)$$

注意上式最后一个等号右侧的第二项是一个随着时间推移而同时增加（或者减少）的确定性时间的函数：如果 $p>1/2$ ，则它是递减的；如果 $p<1/2$ ，则它是递增的。

容易证明 M_n 是一个 $\mathcal{F}_n$ -适应的鞅。这就启发我们去思考：如果从 S_n 中剔除一个趋势：

$$S_n-(1-2p)(n+1)$$

是否就可以得到一个鞅呢？换句话说我们可以把一个下鞅(当 $p>1/2$ 时)分解成为了两个部分：

10．3．1
$$S_n=M_n-(1-2p)(n+1)$$

上式右侧第一项，也就是第一个部分，是一个 $\mathcal{P}$ 测度下的鞅，第二项也就是第二部分是一个递增的确定性函数。

这个结论可以一般化，我们先给一个定义：如果对于任何 $n\in Z_+$ ，一个 $\mathcal{F}_n$ -适应的随机序列 $(A_n)_{n\in Z_+}$ ，都有：

$$\Delta A_n=A_n-A_{n-1}\geq 0$$

成立，就称它为是递增随机序列。

定理 10．3．1 (多布分解) *令 $(X_n)_{n\in Z_+}$ 为一个 $\mathcal{F}_n$ -适应的下鞅，则它可以唯一的分解为一个鞅和可料递增随机序列的和：*

10．3．2
$$\boxed{X_n=M_n+A_n,\ \forall n\in Z_+}$$

一个简单的证明可以参考 Mel’nikov10 令******

$$M_n=M_0+\sum_{k=0}^{n-1}[X_{k+1}-E(X_{k+1}\mid\mathcal{F}_k)]，\quad M_0=X_0$$

$$A_n=\sum_{k=0}^{n-1}[E(X_{k+1}\mid\mathcal{F}_k)-X_k]，\quad A_0=0$$

显然 M 和 A 有分解要求中的特性。至于唯一性，不妨假定存在另外的分解 M' 和 A' ，则

$$\Delta A'_{n+1}=A'_{n+1}-A'_n=\Delta A_{n+1}+\Delta M_{n+1}-\Delta M'_{n+1}$$

因为 A 和 A' 是可料的，而 M 和 M' 是鞅，

$$\Delta A'_{n+1}=E(\Delta A'_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)=E(\Delta A_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)=\Delta A_{n+1}$$

因此对于任何 $n\in Z_+$ ，有

$$A_n=A'_n \text{ 和 } M_n=M'_n \blacklozenge$$

多布分解(Doob decomposition)定理(又称为下鞅分解定理)就显示了下鞅、鞅和可料增量过程相互之间的关系。它是后面我们将接触的连续时间的多布-迈耶分解(Doob-Meyer decomposition)定理的离散形式。

10．3．2 多布-迈耶定理

本节中我们讨论多布分解的连续形式和它的应用。多布-迈耶分解定理把多布分解定理一般化了，它表明在一些很一般的前提下，任意一个连续时间随机过程都可以分解成为一个鞅和一个可以预料的趋势。

定理 10．3．2 *(多布-迈耶分解) 如果$(S_t)_{t\in[0,\infty)}$是一个$\mathcal{F}_t$-适应的右连续的下鞅，$E(S_t)<\infty,\forall t$，则对于任何$0\le t\le\infty$，S_t都可以分解为下列形式：*

10．3．3 $$\boxed{S_t = M_t + A_t}$$

M_t是右连续鞅，A_t是一个$\mathcal{F}_t$-可料的增量过程。

定理的一个详细证明见 Karatzas&Shreve（1991）。这个定理说明，即便是随机过程S_t中同时包含跳空(jump)和向上两种趋势，我们仍然能够通过从中减去一个可料增量过程，剥离一个鞅过程出来。如果原来的随机过程没有跳空，则得到的鞅也是连续的。

例子 10．3．3 平方布朗运动$\mathcal{W}_t^2$是不是鞅呢？我们知道：

$$E[(\mathcal{W}_{t+\Delta t}^2-\mathcal{W}_t^2)\,|\,\mathcal{F}_t]=E\{[\mathcal{W}_t-(\mathcal{W}_{t+\Delta t}-\mathcal{W}_t)]^2-\mathcal{W}_t^2\}=E(\mathcal{W}_{t+\Delta t}-\mathcal{W}_t)^2$$

后一个等式是因为$\mathcal{W}_t$的增量是独立的，因此交差项去掉了，但是我们知道：

$$E(\Delta\mathcal{W}_t^2\,|\,\mathcal{F}_t)=\Delta t$$

这是一个随着时间递增的可料函数，因此平方布朗运动$\mathcal{W}_t^2$本身不是一个鞅，但是根据多布-迈耶分解定理，如果从$\mathcal{W}_t^2$中减去这个趋势，就可以得到一个鞅了。实际上在前一节中我们已经证明了$\mathcal{W}_t^2-t$是鞅。■

例子 10．3．4 在上一章中我们学习了关于泊松过程N_t的一些特征，我们知道：

$$E(N_{t+\Delta t}-N_t)=\lambda\Delta t$$

由于泊松过程有非 0 的期望增量，因此它显然也是一个下鞅，但是可以定义一个新的随机过程：

10．3．4 $$M_t = N_t - \lambda t$$

称它为补偿泊松过程(compensated Poisson process)。容易证明，它是一个右连续的离散鞅。λt被称为补偿项，它抵消了N_t中有趋势性的那个部分，并且有：

10．3．5 $$E(M_t^2)=\lambda t$$

因此尽管M_t的轨迹是不连续的，它的方差是有限的，也是平方可积的。 [151nefcti]■

金融相关点 10-4：多布分解在实际应用中可行吗？

考虑一个欧式看涨期权，它的到期日收益函数是：

$$c_T = Max(S_T - K, 0)$$

如果到期日 T 时刻，基础产品价格超过执行价格 K，则该期权的持有人可以得到这个价差，如果 $S_T < K$，则该期权的价值为 0，在 t（$t < T$）时刻，则该期权的价格 c_t 是待定的。但是我们可以根据 t 时刻的信息预测它在到期日的期望价值：

$$E_t^{\mathcal{P}}[c_T \mid \mathcal{F}_t] = E_t^{\mathcal{P}}[Max(S_T - K, 0) \mid \mathcal{F}_t]$$

那么是不是把这个期望值按照某种合适的利率贴现后，就是它在 t 时刻的价格 c_t 呢？假定 r 是无风险利率，那么

$$c_t = e^{-r(T-t)} E_t^{\mathcal{P}}[Max(S_T - K, 0) \mid \mathcal{F}_t]$$

是否就是它在 t 时刻的“公平”市场价值呢？这样做能不能行得通，就取决于 $e^{-rt} c_t$ 在滤波 $\mathcal{F}_t$ 和测度 $\mathcal{P}$ 下是不是一个鞅了。如果是这样，我们就有：

$$E_t^{\mathcal{P}}[e^{-rT} c_T \mid \mathcal{F}_t] = e^{-rt} c_t$$

或者两边同时乘以 e^{rt}，得：

$$E_t^{\mathcal{P}}[e^{-r(T-t)} c_T \mid \mathcal{F}_t] = c_t$$

由于执行价格 K 是常数，能否证明在概率分布 $\mathcal{P}$ 下，$e^{-rt} S_t$ 是一个鞅是问题的关键。记得吗？如果我们假定投资者是风险厌恶的，则对于任何一种风险资产，一般要求：

$$E_t^{\mathcal{P}}[e^{-r(T-t)} S_T \mid \mathcal{F}_t] > S_t$$

这就是说 $e^{-rt} S_t$ 是一个下鞅。但是根据多布-迈耶分解定理我们可以从 $e^{-rt} S_t$ 中减去一个可以预测的趋势，即抵消股票价格运动中向上的单边趋势，而使得剩下的部分获得鞅性，即：

$$M_t = e^{-rt} S_t - A_t$$

其中 M_t 是 $\mathcal{F}_t$ 下的鞅，A_t 则是一个 $\mathcal{F}_t$ 可测的递增的随机变量。如果可以显式地得到 A_t，我们就减去这个量来得到具有鞅性的股票价格，进而股票期权的公平市场价格了。这里的 A_t 实际上相当于一个风险溢价，这个风险溢价是由投资者的主观偏好决定的，因而是很难首先决定的。所以尽管这种方法很直观，在实际中却很少用到。

10．3．3 二次变差过程

根据 10．1．1 节中的简单推论 3)，我们知道如果 $(M_n)_{n \in Z_+}$ 是鞅，则 $(M_n^2)_{n \in \mathbf{Z}_+}$ 是一个下鞅。而根据上面的下鞅分解定理，就有：

10．3．6 $$\boxed{M_n^2 = m_n + A_n = m_n + \langle M \rangle_n}$$

这里 m_n 是一个鞅，$(\langle M \rangle_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$ 是一个可料递增序列，它被称为 $(M_n)_{n \in Z_+}$ 的二次变差过程(quadratic variation process)或者二次特征（quadratic characteristic），它被定义为：

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} [E(\Delta M_k)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}]$$

因为

$$E[(M_k - M_l)^2 \mid \mathcal{F}_l] = E[(M_k - M_l)^2 \mid \mathcal{F}_l]$$
$$= E(\langle M \rangle_k - \langle M \rangle_l \mid \mathcal{F}_l) = 0, l \le k$$

因此就有：

10．3．7 $$E(M_k^2) = E\langle M \rangle_k, k \in \mathbf{Z}_+$$

在例 10．3．4 中我们看到 $\langle M \rangle_t = \lambda t$。

实际上如果$(M_n)_{n\in Z_+}$、$(N_n)_{n\in Z_+}$是任意两个平方可积鞅，那么

$$(M+N)^2-<M+N>\text{和}(M-N)^2-<M-N>$$

以及它们的差

$$4MN-[<M+N>-<M-N>]$$

都是鞅。

进一步，如果$(X_n)_{n\in Z_+}$、$(Y_n)_{n\in Z_+}$是$\{\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P},\mathbf{F}\}$空间上任意两个随机序列，它们的二次协变差过程(quadratic covariation process)就定义为：

$$<X,Y>_0=E[X(0)Y(0)]$$

$$<X,Y>_n=E[X(0)Y(0)]+\sum_{k=1}^{n}E\{[X(k)-X(k-1)][Y(k)-Y(k-1)]\,|\,\mathcal{F}_{k-1}\},1\le n\le T$$

例子 10．3．5 $\Omega=\{\omega_1,...,\omega_6\}$，$T=3$，$p=1/6$

$\mathcal{F}_1=\{\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}\};\mathcal{F}_2=\{\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3,\omega_4\},\{\omega_5,\omega_6\}\}$

x	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$T=0$	0	1	2	1	0	-1
$T=1$	2	3	1	2	1	0
$T=2$	-1	0	-1	0	-1	0
$T=3$	-2	2	2	1	3	2
y	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$T=0$	0	2	-1	-2	0	1
$T=1$	1	3	0	2	-1	3
$T=2$	2	1	-1	-2	-1	0
$T=3$	1	2	0	1	0	2

则它们的二次协变差过程$<X,Y>_n$是：

$<X,Y>$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$T=0$	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2
$T=1$	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6
$T=2$	7/3	7/3	10/3	10/3	10/3	10/3
$T=3$	23/6	23/6	19/3	19/3	22/3	22/3

如果$(M_n)_{n\in Z_+}$、$(N_n)_{n\in Z_+}$是两个鞅，则它们的二次协变差过程$<M,N>_n$就定义为：

10．3．8 $$\boxed{<M,N>_n=\frac{1}{4}(<M+N>_n-<M-N>_n)}$$

容易证明随机序列$(M_nN_n-<M,N>_n)_{n\in Z_+}$也是鞅。这是因为对于任何$1\le n\le T$，它的条件期望等于：

$$\begin{aligned}&[E(M_nN_n-<M,N>_n)\,|\,\mathcal{F}_{n-1}]\\&=[E(M_nN_n-(M_n-M_{n-1})(N_n-N_{n-1}))\,|\,\mathcal{F}_{n-1}]-<M,N>_{n-1}\\&=[E(M_nN_n-M_nN_{n-1}+M_{n-1}N_n-M_{n-1}N_{n-1})\,|\,\mathcal{F}_{n-1}]-<M,N>_{n-1}\\&=M_{n-1}N_{n-1}-<M,N>_{n-1}\end{aligned}$$

如果对于任意两个鞅，有：

$$<M,N>_n=0,n\in\mathbf{Z}_+$$

则称为两个鞅是正交的(orthogonal)。固定一个平方可积鞅M，考虑所有可能同M正交的鞅N，我们可以构造一族有着下面形式的平方可积鞅：

10．3．9 $$\boxed{X_n = M_n + N_n}$$

反过来，任何平方可积鞅都可以用这种形式来表示，这被称为国田-渡边分解(Kunita-Watanabe decomposition)。

10．4 再论随机积分

在上一章第 3 节中我们用最直观的方法给出了随机(伊藤)积分的定义，本节还要再次比较正规地和更为详细地定义随机积分。为了不在具体细节中迷失，我们要强调一下：目标是给出下面形式随机积分的确切含义：

$$X(t,\omega)=\int_0^t \theta(s,\omega)dM(s,\omega),\quad t\in R^+,\omega\in\Omega$$

其中$\theta=\{\theta_t,t\in R^+\}$和$M=\{M_t,t\in R^+\}$都是随机过程。我们早已知道困难在于当$M$是布朗运动或者是和布朗运动那样具有极不规则的轨道的随机过程时，传统定义积分的方法就会失效。

10．4．1 鞅变换和随机积分

先看离散情形，来产生一些直觉。令$(\theta_n)_{n\in Z_+}$为一可料随机序列，$(M_n)_{n\in Z_+}$为离散鞅。我们可以定义一个新的随机序列：

10．4．1 $$X_t=(\theta\cdot M)_t=\sum_{t=1}^{t}\theta_t\Delta M_t,X_0=0$$

称$(\theta\cdot M)_n$为θ对M的鞅变换(martingale transformation)，它实际上是以鞅为积分算子，可料过程为被积函数的一种特殊形式的随机积分的离散形式。它有一个重要的性质：

10．4．2 $$E[\Delta(\theta\cdot M)_n\mid\mathcal{F}_n]=E(\theta_n\Delta M_n\mid\mathcal{F}_n)=\theta_n E(\Delta M_n\mid\mathcal{F}_n)=0$$

因此$[(\theta\cdot M)_n]_{n\in Z_+}$是一个鞅[29]。这被称为平稳性(stability)，它提供了一个简单但很有用的判断鞅的方法：

当且仅当对于任意可料随机过程θ，有：

10．4．3 $$E(\theta\cdot M)_n=E(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\Delta M_k)=0$$

时，一个$\mathcal{F}_n$适应的随机序列$(M_n)_{n\in Z_+}$是一个鞅[30]。

直观上看如果$(M_n)_{n\in Z_+}$是一个鞅，则鞅变换$(\theta\cdot M)_n$也是一个鞅，因此：

$$E(\theta\cdot M)_n=0,n\geq 1$$

反过来，假定这个等式对于任何M和任何可料随机过程θ都成立。不妨任选$s>0$，令$A\in\mathcal{F}_n$，让$\theta_{s+1}=1_A,\theta_n=0$，则对$n>s$，我们有：

10．4．4 $$0=E(\theta\cdot M)_n=E[1_A(M_{s+1}-M_s)]$$

因为这对于所有$A\in\mathcal{F}_s$，这就是说$E(\Delta M_{s+1}\mid\mathcal{F}_s)=0$，因此$M$确实是一个鞅。***

如果把θ设想为资产组合（过程），而把M设想为资产价格，则鞅变换$(\theta\cdot M)_n$就代表了金融投资的收获过程(gain process)。

---

[29] 类似的，如果$(M_n)_{n\in Z_+}$是一个上鞅，则$[(\theta\cdot M)_n]_{n\in Z_+}$也是一个上鞅。

[30] 一个简单的证明可以参见 Elliott&Kopp(1999)，p32。

例子 10．4．1 假定$(S_n)_{n\in Z_+}$为一个$(\mathcal{F}_n)_{n\in Z_+}$-适应的随机过程，它是某种股票的收盘价格。如果在$n$日，投资者拥有$(\theta_n)_{n\in Z_+}$股该种股票，则这一天的总收获就是$\theta_n(S_n-S_{n-1})$。如果该投资者在 0 时刻以$W_0$初始财富起家，到$n$日他积累的财富就是：

10．4．5 $$W_n=W_0+\sum_{n=1}^{n}\theta_n\Delta S_n=W_0+(\theta\cdot S)_n$$

这里的$(\theta\cdot S)_n$就是收获过程[31]。显然$(\theta_n)_{n\in Z_+}$是可料的，如果股票价格过程是鞅，则期末财富W_n也是一个鞅。这是因为：

10．4．6 $$\begin{aligned}&E[W_{n+1}\mid\mathcal{F}_n]-W_n=E[W_{n+1}-W_n\mid\mathcal{F}_n]\\&=E[\theta_n\Delta S_{n+1}\mid\mathcal{F}_n]=\theta_nE[\Delta S_{n+1}\mid\mathcal{F}_n]\\&=\theta_n(E[S_{n+1}\mid\mathcal{F}_n]-S_n)\\&=0\end{aligned}$$ ■

10．4．2 简单过程随机积分

实际上把鞅变换（收益过程）推广到连续时间环境下就有随机积分：

$$\int_0^t\theta_s dW_s$$

为了便于讨论，我们把时间区间$[0,T]$做一个等分[32]：

$$0=t_0<t_1,\dots,t_{n-1}<t_n=T$$

令$\Phi_i:\Omega\to R,i=1,2,\dots,n$为有界随机变量，其中$\Phi_0$为$\mathcal{F}_0$可测的，$\Phi_i$为$\mathcal{F}_{i-1}$可测的。如果一个随机过程$\{\theta_i\}_{t\in[0,T]}$可以表示为下面的这种形式：

10．4．7 $$\theta_t(\omega)=\theta(t,\omega)=\Phi_0(\omega)1_{\{0\}}(t)+\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(\omega)1_{(i-1,i]}(t)$$

即$\theta(t)$在每一个区间$(t_{i-1},t_i]$上为常数，就称之为简单过程或者基本过程（simple or elementary process）。需要注意的是：每个$\theta(t)$是$\mathcal{F}_{t_{i-1}}$可测的，而且简单过程的样本路径$\theta(.,\omega)$是左连续的阶梯函数，它的高度是$\Phi_i(\omega)1_{(t_{i-1},t_i]}(t)$，如下图所示。（左右连续 check********）

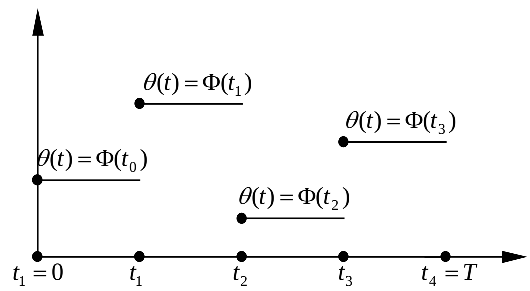


图 10-3 简单随机过程

[31] 对收获过程的详细讨论见 3．3．4 节。
[32] 可以参考黄志远（2001）第 2 章。Korn（）Shreve（）Rebonato。

我们不妨把上述简单过程理解为一种仅仅在有限时点上才变动投资决策的特定交易策略过程。那么对于简单过程的随机（伊藤）积分就定义为[33]：

10．4．8 $I_t(X)=\int_0^t X_s d\mathcal{W}_s=\sum_{i=1}^{k}\Phi(t_i)[\mathcal{W}(t_i)-\mathcal{W}(t_{i-1})]+\Phi(t_{k+1})[\mathcal{W}(t)-\mathcal{W}(t_k)]$

或者更一般的：

10．4．9 $$\boxed{I_t(X)=\int_0^t X_s d\mathcal{W}_s=\sum_{i=1}^{n}\Phi(t_i)[\mathcal{W}(t_i\wedge t)-\mathcal{W}(t_{i-1}\wedge t)]}$$

对于简单过程的伊藤积分具有一些重要性质，其中一些是与普通积分类似的，例如：

1）线性。

10．4．10 $$\int_0^t [aX(s)+bY(s)]d\mathcal{W}(s)=a\int_0^t X(s)d\mathcal{W}(s)+b\int_0^t Y(s)d\mathcal{W}(s)$$

2)区间可加性。

10．4．11 $$\int_0^t X(u)d\mathcal{W}(u)=\int_0^s X(u)d\mathcal{W}(u)+\int_s^t X(u)d\mathcal{W}(u),\quad 0\le s\le t$$

其它的重要性质则是伊藤积分所独有的，例如：

3）鞅性。因为Φ_i为$\mathcal{F}_{i-1}$可测的，而$\mathcal{W}_i$为$\mathcal{F}_i$可测的，所以$I_t(X)$是$\mathcal{F}_t$可测的。而由于布朗运动的路径是连续的，因此$I_t(X)$的路径也是连续的。

令$t\in(t_{k-1},t_k]$， $s\in(t_{l-1},t_l]$， $s<t$。不失一般性，不妨假定$k>l$。既然$\Phi_i, i=1,\ldots,l$和$\mathcal{W}_r, r<s$是$\mathcal{F}_s$可测的，我们就有：

$$\begin{aligned}E[I_t(X)\,|\,\mathcal{F}_s]=E\Bigg\{&\sum_{i=0}^{l-1}\Phi(t_i)[\mathcal{W}(t_i)-\mathcal{W}(t_{i-1})]+\Phi(t_l)[\mathcal{W}(t_l)-\mathcal{W}(s)+\mathcal{W}(s)-\mathcal{W}(t_{l-1})]\\&+\sum_{i=l+1}^{k-1}\Phi(t_i)[\mathcal{W}(t_i)-\mathcal{W}(t_{i-1})]+\Phi(t_k)[\mathcal{W}(t)-\mathcal{W}(t_{k-1})]\,|\,\mathcal{F}_s\Bigg\}\end{aligned}$$

上式可改写为：

$$\begin{aligned}E[I_t(X)\,|\,\mathcal{F}_s]&=\sum_{i=0}^{l-1}\Phi(t_i)[\mathcal{W}(t_i)-\mathcal{W}(t_{i-1})]+\Phi(t_l)[\mathcal{W}(s)-\mathcal{W}(t_{l-1})]\\&+E\{[\Phi(t_l)[\mathcal{W}(t_l)-\mathcal{W}(s)]\,|\,\mathcal{F}_s\}\\&+E\Bigg\{\sum_{i=l+1}^{k-1}\Phi(t_i)[\mathcal{W}(t_i)-\mathcal{W}(t_{i-1})]+\Phi(t_k)[\mathcal{W}(t)-\mathcal{W}(t_{k-1})]\,|\,\mathcal{F}_s\Bigg\}\end{aligned}$$

上式前面两项相加就得到了$I_s(X)$，而后面两项均为 0，这是因为有：******

$$E\{\Phi(t_l)[\mathcal{W}(t_l)-\mathcal{W}(s)\,|\,\mathcal{F}(s)\}=E\langle\Phi(t_l)\{E[\mathcal{W}(t_l)\,|\,\mathcal{F}(s)]-\mathcal{W}(s)\}\,|\,\mathcal{F}(s)\rangle=0$$

以及

[33] Wiener 很早就定义了对于 Brown 运动的随机积分，但他只利用了 Brown 运动增量的正交性质，因而被积函数只限于非随机的函数，伊藤清（1944）首次定义了很广一类随机过程关于 Brown 运动的随机积分，他充分利用了 Brown 运动的鞅性。虽然其后这种随机积分被大大推广了，但从本质上说，还是根据伊藤清的思想，因而这类随机积分都称为伊藤积分。（可以解释为来自交易的收益）

$$E\left\{\sum_{i=l+1}^{k-1}\Phi(t_i)[\mathcal{W}(t_i)-\mathcal{W}(t_{i-1})]\,|\,\mathcal{F}(s)\right\}$$
$$=\sum_{i=l+1}^{k-1}E\left\langle E\{\Phi(t_i)[\mathcal{W}(t_j)-\mathcal{W}(t_{i-1})]\,|\,\mathcal{F}(t_{i-1})\}\,|\,\mathcal{F}(s)\right\rangle$$
$$=\sum_{i=l+1}^{k-1}E\left\langle\{\theta(t_i)E[\mathcal{W}(t_i)\,|\,\mathcal{F}(t_{i-1})]-\mathcal{W}(t_{i-1})\}\,|\,\mathcal{F}(s)\right\rangle$$
$$=0$$

因此对简单过程的伊藤积分确实是一个$\mathcal{F}(t)$适应的连续鞅。特别的，我们有

10．4．12 $$E[I_t(X)]=0,\quad \forall t\in[0,T]$$

4)（伊藤）等距性(Ito Isometry)。

10．4．13 $$E\left[\int_0^t X(s)d\mathcal{W}(s)\right]^2=E\int_0^t X^2(s)ds$$

简化记法，假定$t=t_{k+1}$，则

10．4．14 $$E[I_t(X)^2]=E\left\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\Phi_i\Phi_j[\mathcal{W}(t_i)-\mathcal{W}(t_{i-1})][\mathcal{W}(t_j)-\mathcal{W}(t_{j-1})]\right\}$$

先考察$i\neq j$时的的情形，不失一般性假定$i>j$：

$$E\{\Phi_i\Phi_j[\mathcal{W}(t_i)-\mathcal{W}(t_{i-1})][\mathcal{W}(t_j)-\mathcal{W}(t_{j-1})]\}$$
$$=E\left\langle E\{\Phi_i\Phi_j[\mathcal{W}(t_i)-\mathcal{W}(t_{i-1})][\mathcal{W}(t_j)-\mathcal{W}(t_{j-1})]\}\,|\,\mathcal{F}(t_{i-1})\right\rangle$$
$$=E\left\langle E\{\Phi_j[\mathcal{W}(t_j)-\mathcal{W}(t_{j-1})]\Phi_iE[\mathcal{W}(t_i)-\mathcal{W}(t_{i-1})]\}\,|\,\mathcal{F}(t_{i-1})\right\rangle=0$$

对于$i<j$的情形，可以有类似的结果，因此只需要考虑$i=j$的情形，即：

$$E\{\Phi_i^2[\mathcal{W}(t_i)-\mathcal{W}(t_{i-1})]^2\}$$
$$=E\left\langle\Phi_i^2E\{[\mathcal{W}(t_i)-\mathcal{W}(t_{i-1})]^2\,|\,\mathcal{F}(t_{i-1})\}\right\rangle$$
$$=E[\Phi_i^2(t_i-t_{i-1})]$$

因此就有：Rebonato480

$$E[I_t(X)^2]=E\left[\sum_{i=1}^{k}\Phi_i^2(t_i-t_{i-1})\right]=E\int_0^t X^2(s)ds$$

这个结论无论是在理论建模还是在实际计算中都十分有用。从这个性质我们可以看出该随机积分是一个平方可积随机过程。

例子 10．4．2 对于简单过程$X=1$，我们有：

$$\int_0^t 1d\mathcal{W}(s)=\mathcal{W}(t)$$

根据上述性质就有：

$$E\left[\int_0^t d\mathcal{W}(s)\right]^2=E[\mathcal{W}(t)]^2=t=\int_0^t ds$$

或者

$$d\mathcal{W}(t)=\sqrt{dt}\ \blacksquare$$

10．4．3 再论伊藤积分

如果把对简单过程的随机积分推广到更为一般的随机过程类别时，我们要求被积函数$X(t)$：

1）是循序可测的。

2）满足可积性条件：$E\left(\int_0^T X^2(t)dt\right)<\infty$。

进一步我们引入在$[0,T]$上满足上述条件的所有随机过程等价类构成的向量空间，显然它就是 Hilbert 空间：

$$L^2[0,T]=L^2\{[0,T],\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P},\mathbf{F}\}$$

它的范数定义为：

$$\|X\|_T^2=E\left(\int_0^T X^2(t)dt\right)$$

容易知道这就是概率空间$\{[0,T]\times\Omega,\mathcal{B}[0,T]\otimes\mathcal{F},\lambda\otimes\mathcal{P}\}$上的$L^2$范数[34]。

对于简单过程X，映射$X\to I.(X)$在由下面随机积分：

$$\|I.(X)\|_{L_T}^2=E\left(\int_0^T X(s)d\mathcal{W}(s)\right)^2=E\left(\int_0^T X^2(s)ds\right)=\|X\|_T^2$$

给出的空间上引至了一个范数。因此$I.(X)$是一个线性和保范（norm-preserving）的映射（伊藤等距性）。

我们现在应该把随机积分$I.(X)$拓展到过程$X\in L^2[0,T]$上。为了做到这一点，一方面我们要利用$X\in L^2[0,T]$可以用一个简单过程序列$X^{(n)}$来近似的性质；另一方面我们还要利用伊藤等距性，随机积分的相应序列$I.(X^{(n)})$是具有L_T-范数的柯西数列（Cauchy sequence）[35]。余下的工作是证明柯西数列是收敛的而且这个极限是独立于近似序列$X^{(n)}$的。我们应当把这个极限记为：

$$I(X)=\int X_s d\mathcal{W}_s$$

这种随机积分的拓展如下图所示。

$$\begin{tikzcd}
X\in L^2[0,T] \arrow[r, dashed, "J(.)"] & J(X)\in\mathcal{M}_2^c \\
X^{(n)} \arrow[u, "\|\cdot\|_T"] \arrow[r, "I(.)"'] & I(X^{(n)}) \arrow[u, "\|\cdot\|_{L_T}"']
\end{tikzcd}$$

简单过程 对简单过程的随机积分

图 10-4 随机积分的拓展

其中$\mathcal{M}_2^c$代表连续平方可积鞅空间。此外请再次注意到，对于一个简单过程$X^{(n)}$，我们有：

---

[34] 实际上它只是一个准范数（semi-norm），因为$\|X-Y\|_T^2=0$，并不必然意味着$X=Y$，这仅仅在等价意义上成立。

[35] 柯西数列定义为 HH。

$$\| X^{(n)} \|_T = \| I(X^{(n)}) \|_{L_T}$$

为了开始伊藤随机积分的拓展，我们不加证明的给出下面的近似结果[36]：

定理 10．4．2 任意 $X \in L^2[0,T]$ 均可以用一个简单过程序列 $X^{(n)}$ 来近似。更准确的说：存在一个简单过程序列 $X^{(n)}$，满足：

$$\lim_{n\to\infty} E\int_0^T (X_s - X_s^{(n)})^2 ds = 0$$

下图显示了主要思路。

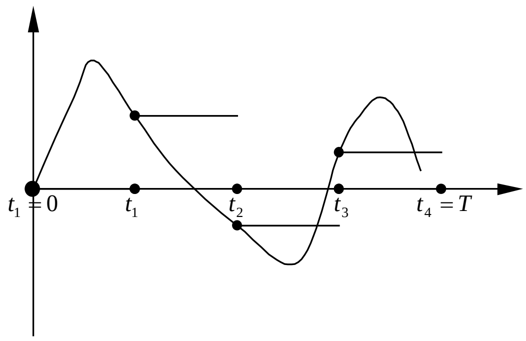


图 10-5 用简单过程近似出一般随机过程

定理：构造 $L^2[0,T]$ 过程的伊藤积分：存在一个唯一的从 $L^2[0,T]$ 到 $[0,T]$ 上连续鞅空间的线性映射 J，它满足：

1） $X = \{X_t\}_{t\in[0,T]}$ 简单过程推出：$P\{J_t(X) = I_t(X), \forall t \in [0,T]\} = 1$。

2） $E[J_t(X)]^2 = E\int_0^t X_s^2 ds$。伊藤等距性。

这个映射在下面的意义上是唯一的：如果两个映射 J 和 J' 同时满足上面两点，则对于 $X \in L^2[0,T]$，过程 $J(X)$ 和 $J'(X)$ 是无区别的。因此就有以下定义。

对于 $X \in L^2[0,T]$ 和 J，我们令

$$\int_0^t X_s dW_s = J_t(X)$$

并称之为随机积分或者随机过程 X 对于维纳过程的伊藤积分。

这种（一般）伊藤积分也具有对简单过程的伊藤积分所具有的那 3 种重要性质[37]。

需要指出的是上面讨论的随机伊藤积分，是当随机积分的被积函数是循序过程、积分算子是布朗运动时的一种特殊积分形式。而一般的随机积分理论就是要给出

$$X(t,\omega) = \int_0^t \theta(s,\omega) dM(s,\omega)$$

的确切含义。因此它必须考察被积函数、积分算子为更广泛类别的积分形式，即它们

---

[36] 详细的证明可以参考 35。

[37] 实际上在前一章考察伊藤积分性质的时候，我们有意的忽略了伊藤积分的一个引人注目的重要性质，即它是一个鞅。直观上这一点也许是容易理解的，因为伊藤积分代表一系列无法预料的随机变化的总和。

是各种函数条件下的合理意义。我们仅仅开了一个头，更进一步的工作包括积分算子为局部鞅和半鞅的情况。但这也许是整个随机过程理论中最深奥而又广泛的问题之一，并且超出了本章的目的和范围。建议有兴趣的读者参考严加安（1992）、卡利安普&卡兰迪卡(Kallianpur&Karandikar，2000)、黄志远（2001）;技术性不太强的可以参考多瑟(Dothan，1990)以及亨特&肯尼迪（Hunt&Kennedy，2000)。

10．5 测度变换

现代微观金融理论研究中一项重要的工作就是给衍生金融产品定价，就是说给具有上(下)鞅随机运动形式的金融资产价格一个合理的现在价值。尽管多布-迈耶分解可以把下鞅分解成鞅和一个可料增量，但是由于明显的困难，它在实践中难以应用，注意力逐渐转向另一种被称为测度变换(change measure)的方法上。本节中我们着重考察其中的两个核心定理和它们的应用。前 3 小节讨论凯麦隆-马丁-哥萨诺夫定理[38]，最后一小节考察鞅表示定理[39]。

10．5．1 直观理解

在前面对鞅的讨论中，我们反复强调过鞅的数学期望形式是基于相应的概率测度的，一旦概率测度（或者分布）发生变化，那么原来的随机过程就可能不是鞅了，反过来这也就启发我们可以通过适当地变换概率测度，把任意的一个随机过程转化为鞅。

在这种测度变换方法中，同多布-迈耶分解方法不同，变换的是概率测度 $\mathcal{P}$ 本身。例如在概率分布（测度）$\mathcal{P}$ 下，有：

$$E_t^{\mathcal{P}}(S_T \mid \mathcal{F}_t) > S_t, t < T$$

$E_t^{\mathcal{P}}(\bullet)$ 是概率分布 $\mathcal{P}$ 下的条件期望算子，显然 $(S_t)_{t\in[0,T)}$ 是一个下鞅。我们希望可以找到另一个与 $\mathcal{P}$ “等价”的概率分布 Q，使得

$$E_t^{Q}(S_T \mid \mathcal{F}_t) = S_t, \quad t < T$$

这样我们就可以改变一个随机过程的均值，它使得有着正的风险溢价的资产看上去是无风险的，从而把 $(S_t)_{t\in[0,T)}$ 变成为一个鞅。能够实现这种转换的概率分布 Q 被称为等鞅测度(equivalent martingale measure)。

如何实现这种变换在金融理论和实际工作中非常重要，在微观金融学中有一系列重要的定理说明在无套利市场条件下（见第 3 章和第 11 章），所有资产的贴现价格都是 Q 测度下的鞅。利用这样一个原理，原则上我们可以为具有任何未来或有收益形态的资产制定合理的市场价格，而这只需要求出 Q 下资产的期望收益然后用无风险利率贴回到现在时刻就可以了，这便不奇怪，为什么说鞅是现代金融理论的核心工具了。

尽管这种测度变换的功能非常强大，但是实现起来也比较复杂。我们将先对一般随机变量而不是随机过程进行测度变换来提供直观理解。在第 8 章中我们已经知道概率是一种测度，那么什么是所谓的测度变换呢？下面的例子可以提供一些直觉。考虑一个服从正态分布的随机变量，当提到正态分布时，我们脑海中总是会出现一个钟型的密度曲线。我们知道对于正态分布而言，只有头两阶矩是有用的：一阶矩数学期望表示集中度，二阶矩方差则反映离中趋势。这两个数值特征就足以刻画正态分布（概率测度）的所有信息，我们

---

[38] 这里的材料主要来自 Neftci(1996,2000)、Nielsen(2000)、Hunt&Kennedy(2000)以及 Rebonato(1996)。特别是其中的许多直观理解均来自 Neftci(1996,2000)和 Nielsen(2000)。

[39] 这里的材料主要来自 Dothan(1990)、Hunt&Kennedy(2000)、Baxter&Rennie(1996)以及 MR(1998)。

可以令这两个数值特征产生变化进而使这样一个正态分布（概率测度）产生两种形式的变换：

1)保持分布形状不变，把它的分布中心移动到另一个位置（location）。这只要改变该分布的数学期望就可以了，如下图所示。

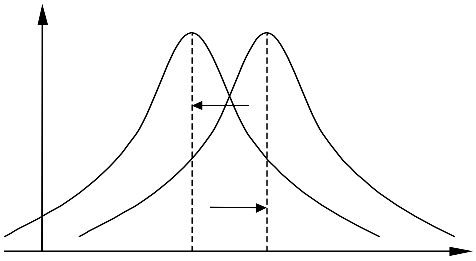


图 10-3 改变正态分布的中心位置

2)改变分布的形状（shape），这可以通过改变方差来实现。钟形曲线会因此变得瘦一些或者胖一些，但是集中指标保持不变，如下图所示。

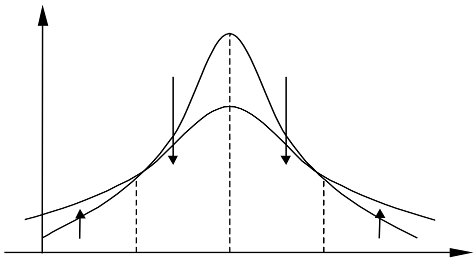


图 10-4 改变正态分布的形状

我们对第一种形式的变换，即保持方差不变而改变均值比较感兴趣。这是因为在可以获得的金融资产价格信息中，最重要的就是期望收益和波动率，而这种变换可以在保留原来分布的“波动”特征的同时，而又对期望收益进行调整。如本节一开始时所提到的：如果可以把风险资产的期望收益（带有风险溢价）调整为无风险收益率，那么这种变换所具有的性质是非常具有吸引力的。

这样我们手头的问题简化为：如何变换一个随机变量的数学期望而又保持它的其它分布特征不变。有两种方法可以实现我们的目标。第一种方法的思路很直观，它经常出现在统计和计量工作中。它是通过直接变换随机变量本身的取值来实现的，具体的做法就是在每一个随机变量可能取到的值 X 上加任一常数，这样就得到一个新的随机变量 X'，它等于：

$$X' = X + \alpha(\text{常数})$$

而根据数学期望性质，就有：

$$E(X') = E(X) + \alpha$$

例子 10．5．1 假定在掷骰子的试验中，随机变量 X 定义为[40]：

$$X = \begin{cases} 10 & \text{当出现1、2点时,} \quad p = 1/3 \\ -3 & \text{当出现3、4点时,} \quad p = 1/3 \\ -1 & \text{当出现5、6点时,} \quad p = 1/3 \end{cases}$$

在当前概率分布 $\mathcal{P}$ 下， X 的数学期望为：

$$E(X) = \frac{1}{3}(10) + \frac{1}{3}(-3) + \frac{1}{3}(-1) = 2$$

不妨假定α等于-1，则新变量为$(X-1)$，因为概率分布$\mathcal{P}$没有变化，所以还是在$\mathcal{P}$下计算新的随机变量X'的数学期望，它等于：

$$E(X')=\frac{1}{3}(10-1)+\frac{1}{3}(-3-1)+\frac{1}{3}(-1-1)=(2-1)=1$$

而由于：

$$Var(X+\alpha)=Var(X)$$

所以它的方差不会变化，这些事实实际上都是数学期望性质的体现。■

第二种方法第一眼看上去是反直觉的。它保持随机变量本身不变，通过变换概率分布（测度）$\mathcal{P}$，来获得新的数学期望，而同时又保持随机变量的其它分布特征（例如方差）不变。这种方法可以说是 20 世纪 80 年代以来现代微观金融分析中的核心技术，它试图把随机过程变换为容易处理和在计算上容易实现的形式，这在为衍生产品定价中是至关重要的，我们需要对这个方法进行透彻地考察。先用一个例子来提供直观理解。

例子 10．5．2 仍然假定在掷骰子的试验中，把随机变量X定义为[41]：

$$X=\begin{cases}10 & \text{当出现1、2点时}, p=1/3\\ -3 & \text{当出现3、4点时}, p=1/3\\ -1 & \text{当出现5、6点时}, p=1/3\end{cases}$$

在上例中我们已经知道它的数学期望为 2，方差则是：

$$\sigma^2=E[X-E(X)]^2=\frac{1}{3}(10-2)^2+\frac{1}{3}(-3-2)^2+\frac{1}{3}(-1-2)^2=\frac{98}{3}$$

现在我们要做的是：保持方差不变，把均值变成 1。考虑下面这种从$\mathcal{P}$到$\mathcal{Q}$的概率测度变换：

$$p(\text{出现1、2点})=\frac{1}{3}\to q(\text{出现1、2点})=\frac{122}{429}$$
$$p(\text{出现3、4点})=\frac{1}{3}\to q(\text{出现3、4点})=\frac{22}{39}$$
$$p(\text{出现5、6点})=\frac{1}{3}\to q(\text{出现5、6点})=\frac{5}{33}$$

注意到$q\ge 0$，而且：

$$\sum q=\frac{122}{429}+\frac{22}{39}+\frac{5}{33}=1$$

因此$\mathcal{Q}$的确是一种概率测度。现在我们在新的概率测度$\mathcal{Q}$下，计算X的均值和方差：

$$E^{Q}(X)=\frac{122}{429}\times 10+\frac{22}{39}\times(-3)+\frac{5}{33}\times(-1)=1$$

$$\sigma^2=E^{Q}[(X-E(X)]^2=\frac{122}{429}(10-1)^2+\frac{22}{39}(-3-1)^2+\frac{5}{33}(-1-1)^2=\frac{98}{3}$$

可以看到，我们的要求确实达到了。■

需要注意的是这种新的概率测度$\mathcal{Q}$看上去与随机试验的真实概率分布$\mathcal{P}$毫无关系，但是它们之间确实存在某种联系，这种联系是下一节的主要内容。现在让我们进一步看一下更为复杂的连续正态分布情形。

例子 10．5．3 假定随机变量X服从标准正态分布：

$$X\sim\mathcal{N}(0,1)$$

用$d(x)$表示X的密度函数，那么隐含的概率测度（实际上也是它的分布函数$d\mathcal{D}(x)$）

[40] 本例来自 Neftci（2000），p317。
[41] 本例来自 Neftci（2000），p321。

可以用它的微分形式表示为：

$$dP(x)=d\mathcal{D}(x)=d(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

不妨“制造”一个 X 的函数 $\xi(x)$：

$$\xi(x)=e^{\mu x-\frac{1}{2}\mu^2}$$

其中 μ 是任意常数，用 $\xi(x)$ 乘以 $dP(x)$，可以得到一个新的概率测度 Q：

$$dQ(x)=\xi(x)dP(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2+\mu x-\frac{1}{2}\mu^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}dx$$

观察上式我们知道 $dQ(x)$ 是均值为 μ，方差为 1 的概率分布(函数)，因此 Q 确实是一个新的概率测度。这样我们就成功的进行了测度变换，新的概率分布的形状仍然是一个钟形曲线。但是 $Q(x)$ 和 $\mathcal{P}(x)$ 是完全不同的测度，它们有着不同的均值，而且对于 X 轴上的同一区间指定不同大小的概率。■

需要指出的是，完全可以对上述测度变换进行方向相反的操作，即把测度 Q 乘以 $\xi(x)$ 的反函数变成测度 $\mathcal{P}$，即：

$$\xi^{-1}dQ=dP$$

以上我们处理的一个普通随机变量而不是一个随机过程，不过我们知道对于一个随机过程来说，如果固定时间点，一个随机过程就退化成为了一个普通随机变量。不妨想象我们上面处理正是这种简化的情形。接下来我们要考察测度变换是怎样推广到随机向量上去的，讨论的重点在两维情形，不过向更高的有限维的推广在原则上是类似的。

例子 10．5．4 假定二维随机变量 (X_1,X_2) 服从联合正态分布，它们的联合密度函数为：

$$d(x_1,x_2)=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}[(x_1-\mu_1)\quad(x_2-\mu_2)]\mathbf{V}^{-1}\begin{bmatrix}x_1-\mu_1\\x_2-\mu_2\end{bmatrix}\right\}}{2\pi\sqrt{|\mathbf{V}|}}$$

这里的 $\mathbf{V}$ 代表协方差矩阵：

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

$|\mathbf{V}|$ 代表 $\mathbf{V}$ 的行列式：

$$|\mathbf{V}|=\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2$$

相应的二维联合概率分布函数定义为：

$$dP(x_1,x_2)=d\mathcal{D}(x_1,x_2)=d(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

现在我们要变换这个分布的均值，把它们从 (μ_1,μ_2) 变换成 $(0,0)$，但是又不能影响它们的方差。同上例中的分析类似，定义一个随机向量函数 $\xi(x_1,x_2)$ 为：

$$\xi(x_1,x_2)=\exp\left\{-[x_1\quad x_2]\mathbf{V}^{-1}\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{bmatrix}+\frac{1}{2}[\mu_1\quad\mu_2]\mathbf{V}^{-1}\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{bmatrix}\right\}$$

用它乘以 $dP(x_1,x_2)$，就得到了新的测度 Q：

$$dQ(x_1,x_2)=\xi(x_1,x_2)dP(x_1,x_2)=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}[x_1 \quad x_2]\mathbf{V}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right\}}{2\pi\sqrt{|\mathbf{V}|}}dx_1dx_2$$

根据在概率基础一章中学习的内容，我们知道这是一个有着 0 均值和 $\mathbf{V}$ 方差的二维联合正态分布，测度变换的目标实现了。■

不妨小结一下改变随机变量分布特征的两种方法，记住我们的目标是要改变随机变量的数学期望，而保留它的方差特征：

1)改变随机变量本身。假定随机变量 X 服从正态分布：$X\sim\mathcal{N}(\mu,1)$。通过直接在 X 上减去一个量，可以定义一个新的随机变量：

$$X'=\frac{X-\mu}{1}\sim\mathcal{N}(0,1)$$

它服从标准正态分布。

2)测度变换。假定随机变量 X 服从 $\mathcal{P}$ 测度下的正态分布：$X^{\mathcal{P}}\sim\mathcal{N}(\mu,1)$。通过在 dP 上乘上 ξ，得到一个新的测度 dQ，在此测度下，随机变量 X 服从标准正态分布：

$$X^{Q}\sim\mathcal{N}(0,1)$$

这种变换被称为等测度变换，是因为变换前后的两个测度有着相同的 0 概率集合。因此尽管它们是不同的，一个总可以覆盖另一个的测度，这样我们完全可以在计算中采用那个比较容易计算的概率分布，如果需要也可以把它转换回原来那个分布。例如如果要计算某种数学期望时，我们可以选择比较容易计算的等价概率分布，尽管这种概率分布与实际发生的真实情况无关，但是我们需要的仅仅是计算能力，即用最简便的方法计算某个数量。但是这种简便做法总归要在经济上得到合理的解释，这种解释出现在第 3 章和第 11 章的资产定价基本定理中。

10．5．2 拉登-尼科迪姆导数

在上面的分析中，我们发现 $\xi(.)$ 在进行测度变换时，起到了关键的作用，它是连接两个测度 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 的纽带，但立即就有这样的问题：为什么 $\xi(.)$ 要采用下面的形式呢？

10．5．1 $$\xi(x)=\exp\left(-\frac{x\mu}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}\right)$$

或者更一般的：

10．5．2 $$\xi(\mathbf{x})=\exp\left(-\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)$$

这是因为在正态分布中，均值参数 μ 仅仅作为 e 的指数出现，而且具有平方形式：

$$-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}$$

为了把这种形式中的 μ 去掉，转换为 0 均值的

$$-\frac{1}{2}\frac{(x)^2}{\sigma^2}$$

我们需要加上一个

$$-\frac{x\mu}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}$$

这就决定了 $\xi(.)$ 的函数形式。用 $\xi(.)$ 乘上原始概率测度就完成了对 e 的指数的变形，它使我们得到了更容易计算的，均值为 0 的正态分布（概率测度）。

我们要进一步明确 $\xi(.)$ 的数学意义。注意到可以把

10．5．3 $$dQ = \xi(x)dP(x)$$

改写为

10．5．4 $$\boxed{\frac{dQ}{dP} = \xi}$$

从这种角度看来，ξ 可以视为一种导数，它是测度 $\mathcal{Q}$ 对于测度 $\mathcal{P}$ 的变化率。在概率论一章中我们已经知道 ξ 被称为拉登-尼科迪姆导数。但是这个导数必定存在吗？直观上理解这只要令分母 $dP \neq 0$ 就可以了，因为反方向的变换也是允许的，同样的要求也适用于在反向变换时出现在分母位置的 dQ，也就是说 dQ、dP 都不可以为 0。但是由于这个导数的分子分母都是随机变量的微小变化时概率分布的微小变化量，这就要求当 $\mathcal{P}$ 给 dx 指定的概率不为 0 时，$\mathcal{Q}$ 给 dx 指定的概率也不为 0。换句话说，给定任意区间 dx，测度 $\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{P}$ 必须满足：

$$P(dx) > 0 \Leftrightarrow Q(dx) > 0$$

在概率论一章中，我们称这样两个有着同样的零概率集测度为等价的，或者是一致连续的。因此如果 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 是一致连续的，则拉登-尼科迪姆导数必定存在。而且我们也知道，在 8．3．2 节中根据拉登-尼科迪姆定理构造条件数学期望时，ξ 是通过下面的形式把两种测度联系起来的：

$$Q(A) = \int_A \xi(\omega)dP(\omega),\quad \forall A \in \mathcal{F}$$

如果表示为数学期望形式就是：

10．5．5 $$\boxed{E^{\mathcal{Q}}[X\mid .] = E^{\mathcal{P}}[X\xi\mid .]}$$

通过上面的分析，我们对于测度变换有了一些直观的理解。但是以上的分析还仅仅限于一维随机变量或者有限维的随机向量，这些分析对于处理连续时间随机过程来说还远远不够。在连续时间条件下处理等测度变换使用的是凯麦隆-马丁-哥萨诺夫定理。下一节会考察这个定理，现在我们要为它做些准备工作，最重要的就是澄清在连续时间条件下的拉登-尼科迪姆导数的形式和性质。我们把它单独提出来，作为一个特殊的随机过程来研究。首先设定连续时间情形下讨论问题的环境。

假定：1) $\mathcal{W}(t)$ 是 $\{\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P}\}$ 上的一个维纳过程；

2)滤波 $\{\mathcal{F}_t = \sigma[\mathcal{W}(t)]\}$ 是由维纳过程 $\mathcal{W}(t)$ 生成的；

定义连续时间下的拉登-尼科迪姆导数为[42]：

10．5．6 $$\boxed{\xi_t = \exp\left(\int_0^t \beta_s d\mathcal{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2 ds\right)}$$

其中 $\beta(t)$ 是一个 $\mathcal{F}_t$ 适应的随机过程，我们对于 $\beta(t)$ 有一个要求，就是它的变化不能过于剧烈，即：

[42] 如果 $a \in L^1$，$b \in L^2$，通常定义随机过程 $\eta_t(a,b) = \exp\left[\int_0^t (bd\mathcal{W}_s + \int_0^t (a - \frac{1}{2}bb^T)ds\right]$ 为随机指数（stochastic exponential），显然它是一个正的伊藤过程。如果 $a = 0$，$b = \beta$ 则它就是 ξ_t。

10．5．7 $$\boxed{E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2 ds\right)\right] < \infty, \quad t \in [0,T]}$$

这被称为诺维科夫条件(Novikov condition)。

$\xi(t)$ 有以下性质：

1)显然 $\xi(0)=1$；

2)因为 $e^x > 0, \forall x$，所以 $\xi(t) > 0$；

3)最重要的，$\xi(t)$ 是一个(平方可积)鞅。

最后一点可以简单证明如下。考虑这样一个量：

$$D_t = \ln \xi_t = \int_0^t \beta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2 ds$$

使用随机微分方程的记法，有：

$$dD_t = -\frac{1}{2}\beta_t^2 dt + \beta_t dW_t$$

由于 $\xi = \exp(D)$，使用伊藤定理，有：

$$\begin{aligned} d\xi(t) &= \left[\frac{\partial \xi}{\partial D}(-\frac{1}{2}\beta_t^2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial D^2}\beta_t^2\right]dt + \frac{\partial \xi}{\partial D}\beta_t^2 dW_t \\ &= e^D\left[-\frac{1}{2}\beta_t^2 + \frac{1}{2}\beta_t^2\right]dt + e^D \beta_t dW_t \\ &= \xi_t \beta_t dW_t \end{aligned}$$

上式写成积分形式就是：

$$\int_0^t d\xi_s = \int_0^t \xi_s \beta_s dW_s$$

或者：

$$\xi_t - \xi_0 = \int_0^t \xi_s \beta_s dW_s$$

因为 $\xi_0 = 1$，所以上式又可以记为：

$$\xi_t = 1 + \int_0^t \xi_s \beta_s dW_s$$

但是上式中右侧第二项是对于维纳过程的随机积分，在前面我们证明过该积分是一个(平方可积)鞅，因此：

$$E(\xi_t) = \xi_0 = 1$$

反过来，除了一些不太重要的技术性要求，上述这些性质是确保任意一个随机过程 $\xi(t)$ 是一个拉登尼科迪姆导数的所有条件，也就是说它可以表示为两个等价的测度的变化比率 $\frac{dQ}{dP}$[43]。有了以上准备，下一步我们就可以研究对于连续随机过程（例如布朗运动）的测度变换是如何实现的。

10．5．3 哥萨诺夫定理

---

[43] 有时称 $E^{\mathcal{P}}(dQ/dP \mid \mathcal{F}_t)$ 为似然率过程（likelihood ratio process)。

在连续时间金融理论的研究中，10．5．2 节中提供的那些例子显得过于简单了。连续时间金融希望可以处理右连续的随机过程，但是前面的变换还仅仅局限在有限维的随机向量。凯麦隆-马丁-哥萨诺夫定理可以处理更复杂情形下的概率测度变换任务，我们先正式表述该定理然后讨论。

定理 10．5．5 (凯麦隆-马丁-哥萨诺夫) *在随机基*$\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbf{F}\}$ *上定义一个随机过程：*

10．5．8 $$\boxed{\xi_t = \exp\left(\int_0^t \beta_s d\mathcal{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2 ds\right)}$$

其中β_t *是*$\mathcal{F}_t$*-可测的随机过程，*$\mathcal{W}_t$ *是有着*$\mathcal{P}$ *分布的维纳过程。则：*

10．5．9 $$\boxed{\tilde{\mathcal{W}}_t = \mathcal{W}_t - \int_0^t \beta_s ds, t \in [0,T]}$$

是一个$\mathcal{F}_t$ *滤波下、*Q_T *测度下的维纳过程。*

这个定理说明给定一个维纳过程 $\tilde{\mathcal{W}}_t$，把它的概率分布 dP 乘以拉登尼科迪姆导数 ξ_t，就可以获得一个新的维纳过程 $\tilde{\mathcal{W}}_t$ 和相应的新概率分布 Q，这两个过程相差一个 $\mathcal{F}_t$-适应的漂移项 $\beta_t dt$ [44]，换句话说，从 $\mathcal{W}_t$ 减去一个 $\mathcal{F}_t$-适应的漂移 $\beta_t dt$ 就得到了 $\tilde{\mathcal{W}}_t$，即：

10．5．10 $$\boxed{d\tilde{\mathcal{W}}_t = d\mathcal{W}_t - \beta_t dt}$$

完成这一变化的重要条件就是 ξ_t 是一个鞅和

$$E(\xi_T) = \xi_0 = 1$$

该定理的详细证明可以参见 Liptser&Shiryayev(1977)以及 Okensendal()[45]。我们现在来讨论新维纳过程 $\tilde{\mathcal{W}}_t$ 的特征。因为：

$$E^{\mathcal{P}}[\tilde{\mathcal{W}}_T \mid \mathcal{F}_t] = \mathcal{W}_t - E^{\mathcal{P}}[\int_t^T \beta_s ds] \neq \tilde{\mathcal{W}}_t$$

所以在测度 $\mathcal{P}$ 下，$\tilde{\mathcal{W}}_t$ 不是一个鞅，但是必定存在另一个测度 Q 和 ξ_t，使得：

10．5．11 $$E^{Q}[\xi_t \tilde{\mathcal{W}}_t \mid \mathcal{F}_0] = E^{\mathcal{P}}[\mathcal{W}_t \mid \mathcal{F}_0]$$

为了计算上式左边的项，我们要对乘积 $\xi_t \tilde{\mathcal{W}}_t$ 使用随机微分法则——伊藤定理（见例 9．4．7)，因为有：

$$d\xi_t = \xi_t \beta_t d\mathcal{W}_t$$

和

$$d\tilde{\mathcal{W}}_t = d\mathcal{W}_t - \beta_t dt$$

所以：

---

[44] 这里的 β_t 就相当于前面随机变量简单情形下 μ 的作用，它用来测度原来的均值要改变多少。

[45] 该定理最初来自 Girsanov(1960)，但它的雏形在 Cameron&Martin（1945，1949）那里就有了。

10．5．12
$$\begin{aligned} d(\xi_t\tilde{\mathcal{W}}_t) &= \tilde{\mathcal{W}}_t d\xi_t + \xi_t d\tilde{\mathcal{W}}_t + d\xi_t d\tilde{\mathcal{W}}_t \\ &= \tilde{\mathcal{W}}\xi\beta d\mathcal{W} + \xi(d\mathcal{W} - \beta dt) + \xi\beta d\mathcal{W}(d\mathcal{W} - \beta dt) \\ &= \tilde{\mathcal{W}}\xi\beta d\mathcal{W} + \xi d\mathcal{W} - \xi\beta dt + \xi\beta d\mathcal{W}d\mathcal{W} - \xi\beta d\mathcal{W}\beta dt \end{aligned}$$

因为有

$$d\mathcal{W}d\mathcal{W} = dt \text{ 和 } d\mathcal{W}dt = 0$$

所以：

10．5．13 $$d(\xi_t\tilde{\mathcal{W}}_t) = (\tilde{\mathcal{W}}_t\xi_t\beta_t + \xi_t)d\mathcal{W}_t$$

这个结果表明$\xi_t\tilde{\mathcal{W}}_t$在测度$Q$下面是没有漂移的，因此除了一些必要的技术性条件以外，它是一个Q鞅，也就是说：

10．5．14 $$E^Q[\xi_t\tilde{\mathcal{W}}_t \mid \mathcal{F}_0] = \xi_0\tilde{\mathcal{W}}_0 = \tilde{\mathcal{W}}_0$$

最后需要说明的是Q_T的意义，它被定义为：

10．5．15 $$Q_T(A) = E^{\mathcal{P}}[1_A\xi_T]$$

A是$\mathcal{F}_T$中的一个事件，1_A是示性函数。1_A的意思就是说A如果发生，它的函数值就为 1，如果A不发生则它等于 0。因此上面的等式可以重写为：

10．5．16 $$Q_T(A) = E^{\mathcal{P}}[1_A\xi_T] = \int_A \xi_T dP$$

如果A是无穷小区间，这又意味着可以把上式记为我们比较熟悉的形式：

$$dQ_T = \xi_T dP$$

金融相关点 10-5：把股票价格转换成为鞅

股票价格$(S_t)_{t\in[0,T)}$可以用随机微分方程表述为：

10．5．17 $$dS_t = \mu dt + \sigma d\mathcal{W}_t,\quad \mathcal{W}_0 = 0$$

维纳过程$\mathcal{W}_t$有概率分布$\mathcal{P}$，定义为：

$$dP(\mathcal{W}_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{\mathcal{W}_t^2}{2t}} d\mathcal{W}_t$$

很明显如果漂移项μdt不等于 0，$(S_t)_{t\in[0,T)}$在$\mathcal{P}$下就不是一个鞅。可以把前式改写为下面的积分形式：

$$S_t = \mu\int_0^t ds + \sigma\int_0^t d\mathcal{W}_t = \mu t + \sigma\mathcal{W}_t,\quad S_0 = 0$$

因为

$$E(S_{t+\Delta t} \mid S_t) = \mu(t+\Delta t) + \sigma E(\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t \mid S_t) + \sigma\mathcal{W}_t = S_t + \mu\Delta t$$

显然这不是一个鞅，但是可以把它转换为新测度下的鞅，从S_t的密度函数开始：

$$d(S_t) = \frac{dP(S_t)}{dS_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(S_t-\mu t)^2}{\sigma^2 t}}$$

令$\beta = \mu/\sigma$，定义拉登尼科迪姆导数为：

10．5．18 $$\xi(S_t) = \exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}(\mu S_t - \frac{1}{2}\mu^2 t)\right]$$

用它乘以密度函数，就得到了新的测度：

$$dQ(S_t) = \xi(S_t)dP(S_t) = \xi(S_t)d(S_t)dS_t$$

因为：

$$\xi(S_t)d(S_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\exp\left[(\mu S_t-\frac{1}{2}\mu^2 t)-\frac{1}{2}(S_t^2-2\mu S_t t+\mu^2 t^2)\frac{1}{\sigma^2 t}\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\exp\left(\frac{\mu S_t}{\sigma^2}-\frac{\mu^2 t}{2}-\frac{S_t^2}{2\sigma^2 t}+\frac{\mu S_t}{\sigma^2}-\frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{S_t^2}{\sigma^2 t}\right)$$

所以：

10．5．19 $$dQ(S_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}e^{-\frac{1}{2}\frac{S_t^2}{\sigma^2 t}}dS_t$$

容易知道这个概率分布具有 0 漂移和 σ 扩散。而根据哥萨诺夫定理就有：

$$d\mathcal{W}_t=d\tilde{\mathcal{W}}_t+\beta dt$$

代入原始的随机微分方程 10．5．17 式，得：

$$dS_t=\mu dt+\sigma(d\tilde{\mathcal{W}}_t+\beta dt)$$

因为 $\beta=\mu/\sigma$ ，就有：

10．5．20 $$dS_t=\sigma d\tilde{\mathcal{W}}_t$$

这样 $(S_t)_{t\in[0,T)}$ 就变换成为了一个 Q 鞅。

我们不妨小结一下测度变换的整个过程：

1）从一个维纳过程 $\mathcal{W}_t$ 开始，构造一个量

$$\xi_t=\exp\left(\int_0^t\beta_s d\mathcal{W}_s-\frac{1}{2}\int_0^t\beta_s^2 ds\right)$$

其中 β_t 是一个 $\mathcal{F}_t$ 适应过程；证明该量是一个拉登尼科迪姆导数。

2）如果真是这样，则存在一个等价测度 Q。一个在测度 $\mathcal{P}$ 下的随机过程 X 的数学期望等于测度 Q 下 $\xi_t X$ 的数学期望，而且 ξ_t 一定是鞅。因为 ξ_t 是鞅，就可以断定它的漂移为 0，方差等于 β_t^2。

3）使用 β_t 可以找到一个新的随机过程 $\tilde{\mathcal{W}}_t$

$$\tilde{\mathcal{W}}_t=\mathcal{W}_t-\int_0^t\beta_s ds,\quad t\in[0,T]$$ ；

$\xi_t\tilde{\mathcal{W}}_t$ 是等价测度 Q 下的维纳过程，从 $\mathcal{W}_t$ 到 $\tilde{\mathcal{W}}_t$ 的变换仅仅是漂移的变化。

除了必须的技术性条件，上述结果给出了哥萨诺夫定理的主要内容[46]。

以上的讨论容易推广到多维情形：

定理 10．5．6 (多维哥萨诺夫) *令* $\mathcal{W}(t)=\{\mathcal{W}_1(t),...,\mathcal{W}_d(t)\},0\le t\le T$ *概率空间* $\{\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P}\}$ *上的* d *维布朗运动；令* $\mathcal{F}_t,0\le t\le T$ *为伴随的滤波；令* $\beta(t)=\{\beta_1(t),...,\beta_d(t)\},0\le t\le T$ *为* d *维适应过程，且满足*

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t\|\beta_s\|^2 ds\right)\right]<\infty$$

对于 $0\le t\le T$ *，定义*

$$\boxed{\tilde{\mathcal{W}}_j(t)=\mathcal{W}_j(t)+\int_0^t\beta_j(s)ds,\ j=1,...,d}$$

[46] 注意，该定理可以推广到半鞅情况下，详见 Karatzas&Shreve(1991)。

$$\boxed{\xi_t = \exp(\int_0^t \beta_j(s)d\mathcal{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \| \beta(s) \|^2 \ ds)}$$

$$Q(A) = \int_A \xi(T)dP$$

则 $\tilde{\mathcal{W}}(t) = \{\tilde{\mathcal{W}}_1(t),...,\tilde{\mathcal{W}}_d(t)\}, 0 \le t \le T$ *是一个* $\mathcal{F}_t$ *滤波和测度* Q *下的* d *维维纳过程。*

10．5．4 鞅表示定理

本节中考察基本的连续时间鞅-布朗运动是如何用来表示其它鞅的。鞅表示定理给出了一族（局部鞅）可以表示为对另一族（有界）鞅的随机积分的充要条件。

定理 10．5．7 （Kunita-watanabe） 令 $[\mathcal{W}(t)]_{0\le t\le T}$ *为概率空间* $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$ *上的布朗运动；令* $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ *为该布朗运动产生的滤波。令* $[X(t)]_{0\le t\le T}$ *为一个* $\mathcal{F}_t$ *滤波下的（* $\mathcal{P}$ *）鞅。则存在一个适应过程* $[\beta(t)]_{0\le t\le T}$ *，且*

10．5．21
$$E\int_0^T \| \beta(t) \|^2 \ dt < \infty$$

使得

10．5．22
$$\boxed{X(t) = X(0) + \int_0^t \beta(s)d\mathcal{W}(s), t \in [0,T]}$$

而且 $X(t)$ *的路径是连续的。*

这个结论也适合平方可积的局部鞅。证明见 Oksendal，第 4 版 p50[47]。

实际上在哥萨诺夫定理设定的环境下，如果 $\mathcal{F}_t$ 是 $\mathcal{P}$ 下维纳过程产生的自然滤波，假定是 $Y(t)$ 的一个 Q 鞅，则必定存在一个适应过程 $[\gamma(t)]_{0\le t\le T}$ ，使得下式成立：

10．5．23
$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \gamma(s)d\tilde{\mathcal{W}}(s), t \in [0,T]$$

这实际上是鞅表示道理的一种推广，这个结论的应用见下面的框文。

我们在直观的定义鞅时认定鞅是没有明显向上或者向下漂移趋势的，如果采用随机微分方程的形式，很自然我们就会有以下两个问题：没有漂移项的随机过程是否一定就是鞅，反过来，鞅是否总是可以表示为 $\sigma(t)d\mathcal{W}(t)$ 的形式呢？回答基本上是肯定的。第一个问题由上述鞅表示定理确认了。不过需要注意的是第二个命题仅仅在技术条件[48][checkK&S]

$$E\int_0^T \| \sigma(t) \|^2 \ dt < \infty$$

满足的情况下才成立。这时我们可以确认大多数鞅都长成下面这个样子：

$$dX(t) = \sigma(t)d\mathcal{W}(t)$$

例子 10．5．8 有时候技术条件是让人厌烦的[49]，考虑下面的指数鞅（exponential martingale）：

$$dX(t) = \sigma(t)X(t)d\mathcal{W}(t)$$

这时很难验证技术条件

$$E\int_0^T [\sigma^2(t)X^2(t)]^{1/2} dt < \infty$$

是否成立。但这时我们可以用 Novikov 条件：

---

[47] 这个定理最初来自 Kunita&Watanabe（1967），还可以参考 Karatzas&Shreve(1991)，p182。
[48] 诺维科夫条件(Novikov condition)也是其中的一种形式见下例。
[49] 本例来自 Baxter&Rienie(1996)，p79。

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right)\right] < \infty$$

作替代。只要它得到满足 $X(t)$ 就是一个鞅。■

金融相关点 10-6：存在可行的对冲交易策略吗？

假定股票价格遵循几何布朗运动：

$$dS_t = \mu dt + \sigma d\mathcal{W}_t$$

定义

$$\beta = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

根据哥萨诺夫定理：

$$\xi_t = ex\left(\int_0^t \beta d\mathcal{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \beta^2 ds\right))$$

$$\tilde{\mathcal{W}}_t = \mathcal{W}_t + \int_0^t \beta_s ds$$

以及

$$Q(A) = \int_A \xi(T) dP$$

这时就有：

$$d\left(\frac{S_t}{r}\right) = \frac{S_t}{r}\sigma d\tilde{\mathcal{W}}_t$$

令 $\theta(t)$ 为交易策略，则相应的财富过程 V_t 满足：

$$d\left(\frac{V_t}{r}\right) = \theta(t)\frac{S_t}{r}\sigma d\tilde{\mathcal{W}}_t$$

改写为积分形式为：

$$\frac{V_t}{r} = V_0 + \int_0^t \theta_s \frac{S_s}{r}\sigma d\tilde{\mathcal{W}}_s, \quad t \in [0,T]$$

令 D 为一个 $\mathcal{F}_T$ 可测的随机变量，假设某种衍生金融产品在 T 时刻的支付数量。我们需要认真的选择 V_0 和 θ_t，使得

$$V(T) = D$$

定义一个 Q 鞅：

$$Y(t) = E^Q\left[\frac{D}{r} \mid \mathcal{F}_t\right], \quad t \in [0,T]$$

根据 10．5．23 式，存在一个适应过程 $\gamma(t)$，使得

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \gamma(s) d\tilde{\mathcal{W}}(s), t \in [0,T]$$

令

$$V(0) = Y(0) = E^Q\left[\frac{D}{r}\right]$$

并令

$$\theta(t)\frac{S_t}{r}\sigma = \gamma(t)$$

通过这样选择交易策略，我们可以得到

$$\frac{V(t)}{r(t)} = Y(t) = E^Q\left[\frac{D}{r(T)} \mid \mathcal{F}(t)\right], \quad t \in [0,T]$$

特别有

$$\frac{V(T)}{r(T)} = E^Q\left[\frac{D}{r(T)} \mid \mathcal{F}(T)\right] = \frac{D}{r(T)}$$

因此

$$V(T) = D$$

我们看到正是鞅表示定理保证了对冲交易策略（投资组合）存在的可能性。在金融中这一点之所以重要是因为，如果一个或有权益证券（或有支付）可以被某种交易策略复制的话，它就是可获得的。但需要指出的是鞅表示定理告诉我们对冲的可能性总是存在的但它并没有告诉我们如何构造（计算出）交易策略。**sheve199

上述定理可以推广到多维：

定理 10．5．9 *令$\mathcal{W}(t)=\{\mathcal{W}_1(t),...,\mathcal{W}_d(t)\},0\le t\le T$ 概率空间$\{\Omega,\mathcal{F},P\}$上的 d 维布朗运动；令$\mathcal{F}_t,0\le t\le T$ 为伴随的滤波。如果$X(t),0\le t\le T$ 为一个$\mathcal{F}_t$滤波下的$\mathcal{P}$ 鞅，则存在一个 d 维适应过程$\beta(t)=\{\beta_1(t),...,\beta_d(t)\},0\le t\le T$ ，使得*

10．5．24
$$\boxed{X(t)=X(0)+\int_0^t\beta(s)d\mathcal{W}(s),t\in[0,T]}$$

实际上如果我们有一个d维适应过程$\beta(t)=\{\beta_1(t),...,\beta_d(t)\}$，则我们可以根据定义哥萨诺夫定理来定义$\tilde{\mathcal{W}}(t)$、$\xi(t)$和$Q$。这时如果是$Y(t),0\le t\le T$ 一个$\mathcal{F}_t$滤波下的Q鞅，在存在一个d维适应过程$\gamma(t)=\{\gamma_1(t),...,\gamma_d(t)\},0\le t\le T$ ，使得

10．5．25
$$Y(t)=Y(0)+\int_0^t\gamma(s)d\tilde{\mathcal{W}}(s),t\in[0,T]$$

金融相关点 10-7：构造完备市场模型

令$\mathcal{W}(t)=\{\mathcal{W}_1(t),...,\mathcal{W}_d(t)\},0\le t\le T$ 概率空间$\{\Omega,\mathcal{F},P\}$上的d维布朗运动；令$\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$为上述$d$维布朗运动生成的滤波，我们定义股票价格运动遵循下面的随机过程

$$dS_i(t)=\mu_i(t)S_i(t)dt+S_i(t)\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)d\mathcal{W}_j(t),\quad i=1,2...n$$

积累贴现因子

$$\beta(t)=\exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)$$

贴现股票价格

$$d\left(\frac{S_i(t)}{\beta(t)}\right)=[\mu_i(t)-r(t)]\frac{S_i(t)}{\beta(t)}dt+\frac{S_i(t)}{\beta(t)}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)d\mathcal{W}_j(t)$$
$$=\frac{S_i(t)}{\beta(t)}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)[\theta_j(t)+d\mathcal{W}_j(t)]$$

如果要满足上式，我们需要选择适当的$\theta(t)=\{\theta_1(t),...,\theta_d(t)\}$，使得

10．5．26
$$\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)\theta_j(t)=\mu_i(t)-r(t),i=1,2...m$$

风险的市场价格（market price of risk）是一个满足上式的适应过程

$$\theta(t)=\{\theta_1(t),...,\theta_d(t)\}$$

第一种情况：如果 10．5．26 式有唯一解，使用多维哥萨诺夫定理中定义的$\beta(t)$，我们可以定义一个唯一的风险中性概率测度Q。在Q下每一个贴现价格过程都是一个鞅，因此任何贴现财富过程也是鞅，这意味着市场不存在套利机会。最后鞅表示定理可以证明每一个或有权益证券都是可获得的，这时我们称市场是完备的。

第二种情况：如果 10．5．26 式无解。则不存在风险中性概率测度，市场存在套利机会。

第三种情况：如果 10．5．26 式有多个解。则存在多个风险中性概率测度，市场不存在套利机会。但是有些或有权益证券是不可获得的，这时我们称市场是不完备的[50]。

小节

[50] 更详细的讨论见第 3 章和第 11 章。

鞅是一种随机运动形式，[Nielsen90]

在连续时间下，着重考察在现代金融分析中最重要的鞅——标准维纳过程，考察它的轨道性质和由它衍生类似过程。

接下来我们再次考察了随机积分的深刻含义，先是对于简单过程的随机积分。它有两个重要的性质：鞅性和等距性。

当我们把对简单过程的随机积分推广到更为一般的随机过程类别时，我们要求被积函数（过程）是循序可测的。

尽管鞅并不是绝大多数金融资产价格运动的形式，它仍然是现代金融分析中当仁不让的主角。在资产定价基本定理的支撑下，通过功能强大的测度变换技术

然后讨论在测度变换中起重要作用的拉登-尼科迪姆导数及其相关性质；如果要把任意一个连续随机过程用这种概率变换的方法转化成一个鞅的话，就要使用著名的凯麦隆-马丁-哥萨诺夫定理。

定义一个新的概率测度，它对老测度的密度是 se 的终值，考虑一个随机过程它是在维纳过程上加一个漂移获得的，这个漂移等于 se 的相对扩散。哥萨诺夫定理说这是一个新测度下的标准维纳过程。

这种测度变换的功能非常强大，但是实现起来也比较复杂。在本节中我们将先对一般随机变量而不是随机过程进行测度变换来提供直观理解；然后讨论在测度变换中起重要作用的拉登-尼科迪姆导数及其相关性质；如果要把任意一个连续随机过程用这种概率变换的方法转化成一个鞅的话，就要使用凯麦隆-马丁-哥萨诺夫定理，最后将提供该定理的一个简单应用。

如果一个伊藤过程是鞅，则它的漂移一定为 0。

文献导读

纯数学类参考物包括离散鞅可以参考 Doob[51]、Billingsley(1979)、Williams（1991）、Rogers&Williams（）、Karatzas&Shreve（1991）、Gihman&Skorohod(1972)

Karatzas&Shreve（1991）是必不可少的宝典[用 Karatzas&Shrevenote 洗]

中文的包括史及民（1999）、严加安、何声武等（1992）、王梓坤（1996）、严加安（1981）鞅与随机积分引论，它以严加安为基础。一个简单的综述见严加安等（1997）、严加安，黄志远。

数理金融类 Musiela&Rutkowski(1998)、Hunt&Kennedy(2000)、

也可以参考 Duffie（1992，1996），Dothan1990，英格索尔(1987)。He

Kallianpur&Karandikar（2000）Elliott&Kopp(1999)

使用鞅方法为期权定价可以参考 Cox

用鞅方法分析最优行为，可以参考 Cox，

无套利的

[51] 本节的主要材料来自 Karatzas&Shreve（1991）、Neftci（1996，2000）、Hunt&Kennedy(2000)、Dothan（1990）、Williams（1991）。