

LC 直列回路の過渡現象

20238264 田村駿典

令和4年6月7日

図1に示す正弦波交流電源電圧 $e(t) = E \sin \omega t$ が印加された LC 直列回路において、スイッチ S を $t = 0$ で閉じたときの過渡現象を解析する [1]。ただし、回路を流れる電流を $i(t)$ とし、初期条件は $i(0) = 0$ とする。

1 LC 直列回路の s 回路

図1に示す LC 直列回路を s 回路に変換したものが図2である。ここで、 s 回路とは、電圧 $e(t)$ や電流 $i(t)$ をそれぞれ表1に示すようなラプラス変換を施して、 $E(s)$ や $I(s)$ とし、インダクタ L やキャパシタ C を s なる複素周波数領域のインピーダンス sL や $1/sC$ で表したものである [2]。

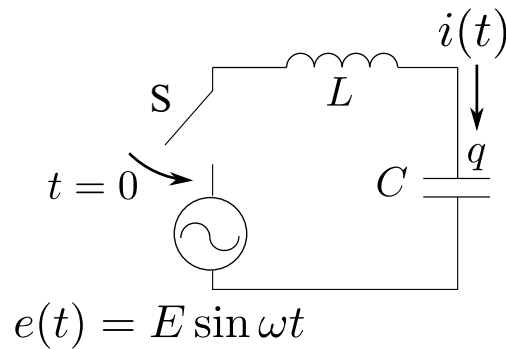


図 1: 正弦波交流電圧が印加された LC 直列回路

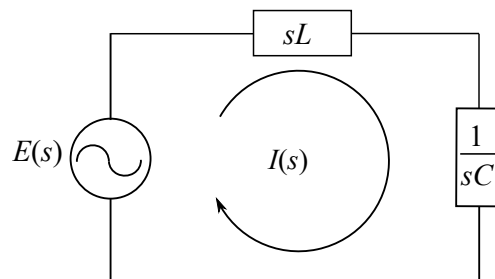


図 2: 正弦波交流電圧が印加された LC 直列回路の s 回路

表 1: 代表的なラプラス変換表

時間領域関数 $f(t)$	複素周波数領域関数 $F(s)$
$f(t)$	$F(s) \triangleq \int_{0+}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$
$H(t)$ (Heaviside 関数, 単位ステップ関数)	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

ただし, $\Gamma(n+1)$ は, ガマン関数であり, ガンマ関数は, $\Gamma(z+1) \triangleq \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt$ で定義され, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ なる性質を持つ [3]。

2 正弦波交流電源電圧のラプラス変換

正弦波交流電源電圧 $e(t) = E \sin \omega t$ のラプラス変換 $E(s)$ は, 表 1 から,

$$E(s) = \mathcal{L}[e(t)] = \mathcal{L}[E \sin \omega t] = \frac{E\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (1)$$

となる。

3 回路方程式

s 関数表示での回路方程式は

$$E(s) = sLI(s) + \frac{1}{sC}I(s) = \frac{1}{sC}(s^2LC + 1)I(s) \quad (2)$$

と表される。ここで, 初期条件 $i(0) = 0$ を用いている。(2) 式を, 電流 $I(s)$ について解くと

$$I(s) = \frac{sC}{s^2LC + 1}E(s) = \frac{s}{L\left(s^2 + \frac{1}{LC}\right)}E(s) = \frac{\omega_0 s E(s)}{R_0(s^2 + \omega_0^2)} \quad (3)$$

となる。ただし, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $R_0 = \sqrt{L/C}$ とする。

4 電流 $i(t)$ の導出

(3) 式に (1) 式を代入すると, 電流 $I(s)$ は

$$I(s) = \frac{\omega_0 s}{R_0(s^2 + \omega_0^2)} \frac{E\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega\omega_0 Es}{R_0(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \quad (4)$$

となる。(4) 式を逆ラプラス変換することにより $i(t)$ が求められる。ただし, 逆ラプラス変換する際には, $\omega_0 \neq \omega$ と $\omega_0 = \omega$ に場合分けする必要がある¹。

¹ $\omega = \omega_0$ の場合, 回路の固有角周波数と電源各周波数が一致することで, パラメータ共振と言う。

4.1 $\omega_0 \neq \omega$ の場合

(4) 式を部分分数展開すれば

$$I(s) = \frac{E}{R_0} \frac{\omega_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \right)$$

となり，これをラプラス逆変換すると

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \frac{\omega_0 \omega E}{(\omega_0^2 - \omega^2) R_0} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$$

となる。

4.2 $\omega_0 = \omega$ の場合

$\omega_0 = \omega$ の場合には，(4) 式は

$$I(s) = \frac{\omega^2 E s}{R_0 (s^2 + \omega^2)^2}$$

となり，これをラプラス逆変換すると

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \frac{E}{2R_0} \omega t \sin \omega t$$

となる。

参考文献

- [1] 平山博・大附達夫：「電気回路論第3版改訂」，電気学会，pp. 266–268 (2008 年)
- [2] 川村雅恭：「ラプラス変換と電気回路」，昭晃堂，pp. 60–68 (1978 年)
- [3] 森口繁一他著：「岩波数学公式 III 特殊関数」岩波書店 (1987 年)