LC 直列回路の過渡現象

学籍番号 氏名（ここは，各自違う，名前のないレポートは，5 点減点）

令和 2 年 6 月 14 日

図 1 に示す正弦波交流電源電圧 $e(t) = E\sin\omega t$ が印加された LC 直列回路において，スイッチ S を $t = 0$ で閉じたときの過渡現象を解析する [1]。ただし，回路を流れる電流を $i(t)$ とし，初期条件は $i(0) = 0$ とする。

1　LC 直列回路の s 回路

図 1 に示す LC 直列回路を s 回路に変換したものが図 2 である。ここで，s 回路とは，電圧 $e(t)$ や電流 $i(t)$ をそれぞれ表 1 に示すようなラプラス変換を施して，$E(s)$ や $I(s)$ とし，インダクタ L やキャパシタ C を s なる複素周波数領域のインピーダンス sL や $1/sC$ で表したものである [2]。

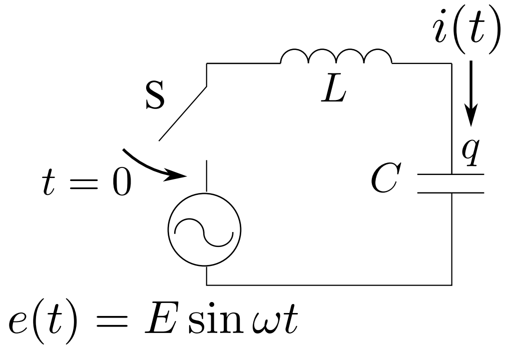

図 1: 正弦波交流電圧が印加された LC 直列回路

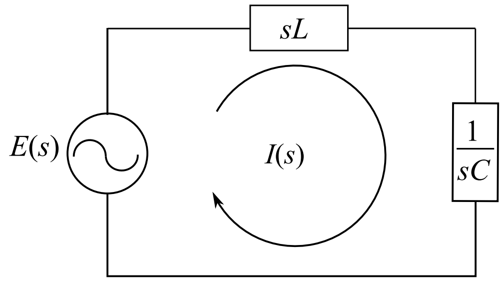

図 2: 正弦波交流電圧が印加された LC 直列回路の s 回路

表 1: 代表的なラプラス変換表

時間領域関数 $f(t)$	複素周波数領域関数 $F(s)$
$f(t)$	$F(s) \triangleq \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$
$H(t)$(Heaviside 関数，単位ステップ関数)	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

ただし，$\Gamma(n+1)$ は，ガンマ関数であり，ガンマ関数は，$\Gamma(z+1) \triangleq \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ で定義され，$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ なる性質を持つ [3]。

2　正弦波交流電源電圧のラプラス変換

正弦波交流電源電圧 $e(t) = E\sin\omega t$ のラプラス変換 $E(s)$ は，表 1 から，

$$E(s) = \mathcal{L}\left[e(t)\right] = \mathcal{L}\left[E\sin\omega t\right] = \frac{E\omega}{s^2+\omega^2} \tag{1}$$

となる。

3　回路方程式

s 関数表示での回路方程式は

$$E(s) = sLI(s) + \frac{1}{sC}I(s) = \frac{1}{sC}\left(s^2LC+1\right)I(s) \tag{2}$$

と表される。ここで，初期条件 $i(0) = 0$ を用いている。(2) 式を，電流 $I(s)$ について解くと

$$I(s) = \frac{sC}{s^2LC+1}E(s) = \frac{s}{L\left(s^2+\dfrac{1}{LC}\right)}E(s) = \frac{\omega_0 sE(s)}{R_0\left(s^2+\omega_0^2\right)} \tag{3}$$

となる。ただし，$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$，$R_0 = \sqrt{L/C}$ とする。

4　電流 $i(t)$ の導出

(3) 式に (1) 式を代入すると，電流 $I(s)$ は

$$I(s) = \frac{\omega_0 s}{R_0\left(s^2+\omega_0^2\right)}\frac{E\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega\omega_0 Es}{R_0\left(s^2+\omega_0^2\right)\left(s^2+\omega^2\right)} \tag{4}$$

となる。(4) 式を逆ラプラス変換することにより $i(t)$ が求められる。ただし，逆ラプラス変換する際には，$\omega_0 \neq \omega$ と $\omega_0 = \omega$ に場合分けする必要がある[1]。

[1] $\omega = \omega_0$ の場合，回路の固有角周波数と電源各周波数が一致することで，パラメータ共振と言う。

4.1　$\omega_0 \neq \omega$ の場合

(4) 式を部分分数展開すれば

$$I(s) = \frac{E}{R_0}\frac{\omega_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}-\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right)$$

となり，これをラプラス逆変換すると

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[I(s)\right] = \frac{\omega_0\omega E}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)R_0}\left(\cos\omega t - \cos\omega_0 t\right)$$

となる。

4.2　$\omega_0 = \omega$ の場合

$\omega_0 = \omega$ の場合には，(4) 式は

$$I(s) = \frac{\omega^2 E s}{R_0\left(s^2+\omega^2\right)^2}$$

となり，これをラプラス逆変換すると

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[I(s)\right] = \frac{E}{2R_0}\omega t \sin\omega t$$

となる。

参考文献

[1] 平山博・大附達夫：「電気回路論第 3 版改訂」，電気学会，pp. 266–268 (2008 年)

[2] 川村雅恭：「ラプラス変換と電気回路」，昭晃堂，pp. 60–68 (1978 年)

[3] 森口繁一他著：「岩波数学公式 III　特殊関数」岩波書店 (1987 年)