1日で実装する有限要素法

大阪大学 大学院基礎工学研究科

機能創成専攻 生体工学領域 大城研究室

吉元俊輔

2014年10月17日（金）

自己紹介

- 吉元 俊輔（よしもと しゅんすけ）
  - 2012年9月
    大阪大学 大学院基礎工学研究科 博士後期課程修了
  - 2012年10月～2013年9月
    大阪大学 大学院基礎工学研究科 システム創成専攻
    システム科学領域 佐藤研究室 助教
  - 2013年10月～
    大阪大学 大学院基礎工学研究科 機能創成専攻
    生体工学領域 大城研究室 助教
- 主な研究分野
  - ハプティクス
  - ヒューマンインタフェース
  - 生体計測

インタラクティブな弾性変形シミュレーション

動画

有限要素法の古典的な応用例

- 機械部品の強度を調べる（機械分野への応用）
- 電気素子の挙動を調べる（電気分野への応用）
- 建物内の熱効率を調べる（環境分野への応用）
- 建造物の耐震強度を調べる（建築分野への応用）
- 術中の臓器の挙動を調べる（医療分野への応用）

（支配方程式を立式できるあらゆる分野で応用が可能）

有限要素法

ウォーミングアップ

そもそもシミュレーションって

「シミュレーション」の元々の意味は「模擬実験」

現象のメカニズムを解明するために、実際の現象に類似した現象を
条件の制御が可能な実験で再現させ、種々の計測を行うこと

- 現象を事前に理解することができ必要な対策を講じることも可能
- 実物を使った実験をしなくて済むのでコストや手間を減らせる
- 実験が難しい現象や観測が困難な事象を解析できる
- 結果が数値でわかるので精密な議論ができる
- 自然界では起こりえない現象を調べることができる

物理の場合：支配方程式・原理の数値解を得る

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = +\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

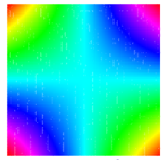
$$\boldsymbol{F} = m\frac{d^2 \boldsymbol{x}}{dt^2} + c\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} + k\boldsymbol{x}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = j$$

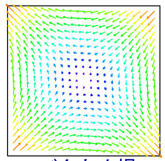
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\nabla^2 \phi$$

$$\int_v \{\epsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}dv - \int_v \{U\}^{\mathrm{T}}\{\bar{G}\}dv - \int_{S_\sigma} \{U\}^{\mathrm{T}}\{\bar{T}\}ds = 0$$

スカラー場？ベクトル場？微分オペレータ？



スカラー場



ベクトル場

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

空間微分

$$\nabla f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\} = \mathrm{grad} f$$

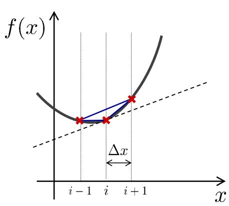
$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \mathrm{rot}\boldsymbol{v}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \mathrm{div}\boldsymbol{v}$$

$$\Delta f = \nabla^2 f$$

離散化：コンピュータで扱える形に

$$f(x) \xrightarrow{\text{離散化}} f[i] \qquad \frac{df(x)}{dx} \xrightarrow{\text{離散化}}$$



前進差分 $\dfrac{f[i+1]-f[i]}{\Delta x}$

中心差分 $\dfrac{f[i+1]-f[i-1]}{2\Delta x}$

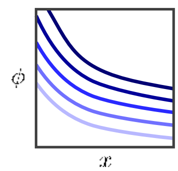
後退差分 $\dfrac{f[i]-f[i-1]}{\Delta x}$

初期条件・境界条件を与えて解く

境界条件がないとき

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = -\phi(x)$$

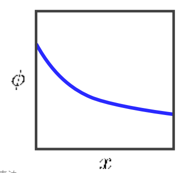
$$\phi(x) = A\exp(-x)$$



境界条件があるとき

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = -\phi(x) \quad \boxed{\phi(0) = 1}$$

$$\phi(x) = \exp(-x)$$

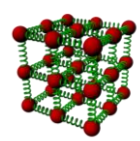


数値解析で押さえておきたいキーワード

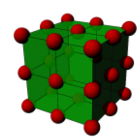
- 誤差、正確さ、安定性
- ニュートン法、2分法
- ガウスの消去法、反復法
- 多項式補間、最小二乗法
- 区分求積法、台形公式、シンプソンの公式
- オイラー法、クランク・ニコルソン法、ルンゲ・クッタ法
- ラグランジュの未定乗数法

代表的な力学変形モデル

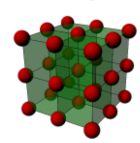
- バネ質点モデル（一次元要素）
  - 質点間距離をバネの結合力で変形
  - 実装は単純、パラメータ設定が困難



- 境界要素モデル（二次元要素）
  - 境界面のみを要素分割
  - 非均質・非等方性への対応が困難



- 有限要素モデル（三次元要素）
  - 計測できる物性パラメータを利用可能
  - 精度が高く計算コストも高い



最も**基本的**な問題についてのみ説明します

- 物理現象
  - 変形、電気伝導、熱伝導、・・・
- 支配方程式の形式
  - 線形、非線形
- 解析モード
  - 静解析（準静解析）、動解析、周波数解析、座屈解析、・・・

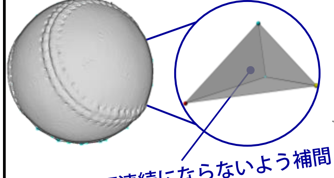
$$\{F\} = [k]\{\delta\}$$

有限要素法

理論

有限要素法

- 偏微分方程式の解を求める方法の一つ
- 空間を分割してコンピュータで計算できるように離散化
- 上記の操作で不都合が生じないよう支配方程式も変形



$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\bigg|_x = \rho \boldsymbol{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

↓ 弱形式化

$$\int_v \{\epsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\} dv - \int_v \{U\}^{\mathrm{T}}\{\bar{G}\} dv - \int_{S_\sigma} \{U\}^{\mathrm{T}}\{\bar{T}\} ds = 0$$

$$[K^e]\{\delta^e\} = \{F^e\}$$

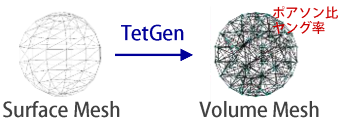
有限要素法で変形の静解析を行う手順

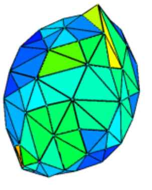
1. メッシュを生成する
2. 弾性パラメータを割り当てる
3. 剛性方程式を生成する
4. 境界条件を与えて解く
5. 所望の物理量を可視化する

ディリクレ条件：変位を規定

ノイマン条件：力がゼロ

$$\{F\} = [k]\{\delta\}$$

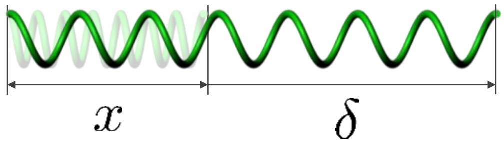




剛性方程式の生成

1. 弾性力学の基礎
2. 支配方程式
3. 定式化
4. 要素剛性方程式
5. 全体剛性方程式

ひずみ：自然長に対する変位の割合

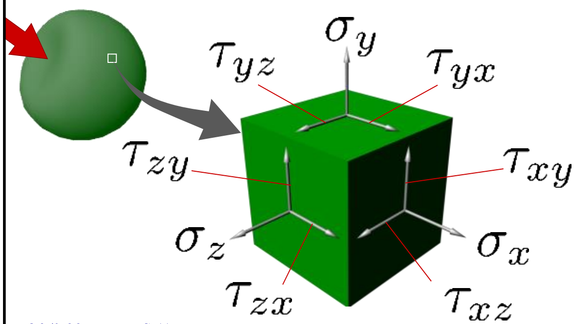


$$\epsilon = \frac{\delta}{x}$$

3次元にすると9成分に
（垂直方向と剪断方向）

微小体積で考えると偏微分に

応力：単位面積当たりに働く力



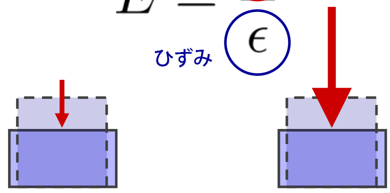
対称性から6成分のみに

物理パラメータ①：ヤング率

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

応力

ひずみ



応力を与えてもひずみにくい物体はヤング率が大きい

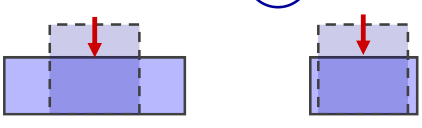
0.01～1200 GPa 程度

物理パラメータ②：ポアソン比

$$\nu = -\frac{\epsilon}{\gamma}$$

剪断ひずみ

垂直ひずみ



押しこむほど横に広がる物体ほどポアソン比が小さい

-1～0.5の範囲

支配方程式：Cauchy の第1運動法則

運動　物体力　表面力

$$\rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_x = \rho \boldsymbol{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

今回はゼロ

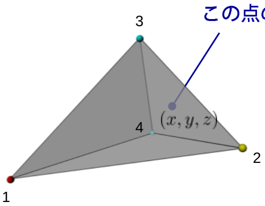
微小変位を掛けて体積分

$$\int_v \{\epsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}dv - \int_v \{U\}^{\mathrm{T}}\{\bar{G}\}dv - \int_{S_\sigma} \{U\}^{\mathrm{T}}\{\bar{T}\}ds = 0$$

仮想仕事の原理（要はエネルギー保存則）

定式化：要素内の変位場を定義しよう

この点の変位はどうなっている？



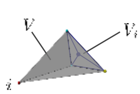
$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z = \sum_{i=1}^{4} N_i u_i$$

$$v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z = \sum_{i=1}^{4} N_i v_i$$

$$w = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z = \sum_{i=1}^{4} N_i w_i$$

任意の点の変位は形状関数*N*と頂点変位を使って表記できる

1次要素（1次補間）の場合

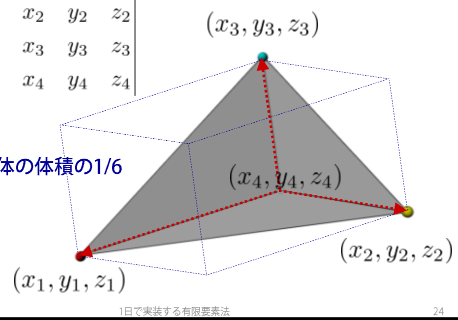


$$N_i = \frac{V_i}{V}$$

x,y,zの関数

四面体の体積と行列式の関係

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$



平行6面体の体積の1/6

αはどうやって求めるか

$u=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 z$ 四つの頂点座標を使ってパラメータを求める

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&x_1&y_1&z_1\\1&x_2&y_2&z_2\\1&x_3&y_3&z_3\\1&x_4&y_4&z_4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}$$

ついでに形状関数もわかりやすい形で

代入

$$u=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 z=\sum_{i=1}^{4}N_i u_i \xrightarrow{\text{係数比較}} \begin{bmatrix}N_1\\N_2\\N_3\\N_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\\a_4&b_4&c_4&d_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\y\\z\end{bmatrix}$$

要素のひずみ

$$\epsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial x}\cdot u_i$$ 自然形状からどのくらい変形したか

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\cdot u_i+\frac{\partial N_i}{\partial x}\cdot v_i\right)$$

形状関数の空間微分はどうやって求めるか

$$\begin{bmatrix}N_1\\N_2\\N_3\\N_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\\a_4&b_4&c_4&d_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\y\\z\end{bmatrix}$$

空間微分すると係数のみに

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x}&\frac{\partial N_1}{\partial y}&\frac{\partial N_1}{\partial z}\\\frac{\partial N_2}{\partial x}&\frac{\partial N_2}{\partial y}&\frac{\partial N_2}{\partial z}\\\frac{\partial N_3}{\partial x}&\frac{\partial N_3}{\partial y}&\frac{\partial N_3}{\partial z}\\\frac{\partial N_4}{\partial x}&\frac{\partial N_4}{\partial y}&\frac{\partial N_4}{\partial z}\end{bmatrix}=\frac{1}{6V}\begin{bmatrix}b_1&c_1&d_1\\b_2&c_2&d_2\\b_3&c_3&d_3\\b_4&c_4&d_4\end{bmatrix}$$

先ほどの逆行列計算で求まる

ひずみ変位関係式・応力ひずみ関係式

$$[\epsilon]=\begin{bmatrix}\epsilon_x\\\epsilon_y\\\epsilon_z\\\gamma_{xy}\\\gamma_{yz}\\\gamma_{zx}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x}&0&0&&\frac{\partial N_4}{\partial x}&0&0\\0&\frac{\partial N_1}{\partial y}&0&\cdots&0&\frac{\partial N_4}{\partial y}&0\\0&0&\frac{\partial N_1}{\partial z}&&0&0&\frac{\partial N_4}{\partial z}\\\frac{\partial N_1}{\partial y}&\frac{\partial N_1}{\partial x}&0&&\frac{\partial N_4}{\partial y}&\frac{\partial N_4}{\partial x}&0\\0&\frac{\partial N_1}{\partial z}&\frac{\partial N_1}{\partial y}&\cdots&0&\frac{\partial N_4}{\partial z}&\frac{\partial N_4}{\partial y}\\\frac{\partial N_1}{\partial z}&0&\frac{\partial N_1}{\partial x}&&\frac{\partial N_4}{\partial z}&0&\frac{\partial N_4}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\v_1\\w_1\\\vdots\\u_4\\v_4\\w_4\end{bmatrix}=[B][\delta]$$

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\sigma_z\\\tau_{xy}\\\tau_{yz}\\\tau_{zx}\end{bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu&\nu&\nu&0&0&0\\&1-\nu&\nu&0&0&0\\&&1-\nu&0&0&0\\&&&\frac{1-2\nu}{2}&0&0\\&sym.&&&\frac{1-2\nu}{2}&0\\&&&&&\frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_x\\\epsilon_y\\\epsilon_z\\\gamma_{xy}\\\gamma_{yz}\\\gamma_{zx}\end{bmatrix}=[D][\epsilon]$$

行列で表記してみるとわかりやすい

要素剛性方程式

$$[K^e]\{\delta^e\}=\{F^e\}$$ 要はフックの法則

これはどこからやってきたか

$$\rho\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_x=\rho\boldsymbol{g}+\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

$$\underbrace{\int_v\{\epsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}dv}_{\text{内部エネルギー}}-\underbrace{\int_v\{U\}^{\mathrm{T}}\{\bar{G}\}dv-\int_{S_\sigma}\{U\}^{\mathrm{T}}\{\bar{T}\}ds}_{\text{外部エネルギー}}=0$$

$$[\epsilon]=[B][\delta]\quad[\sigma]=[D][\epsilon]\qquad[U]=[N][\delta]$$

$$[K^e]=\int_v[B]^{\mathrm{T}}[D][B]dv\quad\{F^e\}=\int_v[N]^{\mathrm{T}}\{\bar{G}^e\}dv+\int_{S_\sigma}[N']^{\mathrm{T}}\{\bar{T}^e\}dv$$

要素剛性行列はどうやって求めるか

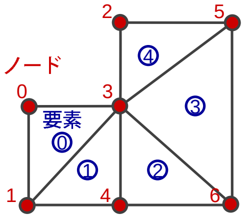
$$[K^e]=\int_v[B]^{\mathrm{T}}[D][B]dv=[B]^{\mathrm{T}}[D][B]\int_v dv$$

等方的であれば定数なので積分は体積を求めるのみでOK

$$[K^e]=V[B]^{\mathrm{T}}[D][B]$$

$$[B]=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x}&0&0&&\frac{\partial N_4}{\partial x}&0&0\\0&\frac{\partial N_1}{\partial y}&0&\cdots&0&\frac{\partial N_4}{\partial y}&0\\0&0&\frac{\partial N_1}{\partial z}&&0&0&\frac{\partial N_4}{\partial z}\\\frac{\partial N_1}{\partial y}&\frac{\partial N_1}{\partial x}&0&&\frac{\partial N_4}{\partial y}&\frac{\partial N_4}{\partial x}&0\\0&\frac{\partial N_1}{\partial z}&\frac{\partial N_1}{\partial y}&\cdots&0&\frac{\partial N_4}{\partial z}&\frac{\partial N_4}{\partial y}\\\frac{\partial N_1}{\partial z}&0&\frac{\partial N_1}{\partial x}&&\frac{\partial N_4}{\partial z}&0&\frac{\partial N_4}{\partial x}\end{bmatrix}\quad[D]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu&\nu&\nu&0&0&0\\&1-\nu&\nu&0&0&0\\&&1-\nu&0&0&0\\&&&\frac{1-2\nu}{2}&0&0\\&sym.&&&\frac{1-2\nu}{2}&0\\&&&&&\frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}$$

要素（ノード）間の影響は行列で表現される



$$\begin{array}{c|c}&\begin{array}{ccccccc}0&1&2&3&4&5&6\end{array}\\\hline\begin{bmatrix}k_{00}&k_{01}&0&k_{03}&0&0&0\\k_{10}&k_{11}&0&k_{13}&k_{14}&0&0\\0&0&k_{22}&k_{23}&0&k_{25}&0\\k_{30}&k_{31}&k_{32}&k_{33}&k_{34}&k_{35}&k_{36}\\0&k_{41}&0&k_{43}&k_{44}&0&k_{46}\\0&0&k_{52}&k_{53}&0&k_{55}&k_{56}\\0&0&0&k_{63}&k_{64}&k_{65}&k_{66}\end{bmatrix}&\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\end{array}$$

各要素がどのノードから構成されるか、という情報が必要

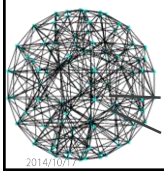
要素形状に依存（今回は4面体要素を想定）

要素剛性行列を物体全体に拡張（三次元）

全ての要素剛性行列を節点番号に従って足し込む

$$[k]\{\delta\} = \{F\}$$

$$[k] = \begin{array}{c|c|c|c|c} & \text{節点1} & \text{節点2} & \text{節点N} & \\ & \begin{matrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} \end{matrix} & \begin{matrix} k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \ddots \\ & k_{3N3N} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{節点1} \\ \\ \text{節点2} \\ \\ \text{節点N} \end{matrix} \end{array}$$



要素1：節点{1,2,3,4}　$[K^{e_1}]\{\delta^{e_1}\} = \{F^{e_1}\}$

要素2：節点{2,5,6,7}　$[K^{e_2}]\{\delta^{e_2}\} = \{F^{e_2}\}$

剛性方程式の解法

1. 連立方程式を解く
2. 境界条件
3. 変位入力による解析
4. 計算の工夫

剛性方程式（連立方程式）を解く

$$\{F\} = [k]\{\delta\}$$

$$\{\delta\} = [k]^{-1}\{F\}$$

偏微分方程式だったので
解が一意に定まらない

偏微分方程式が行列計算になった

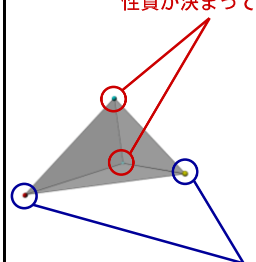
節点の数×自由度の数の連立方程式を解けば良い

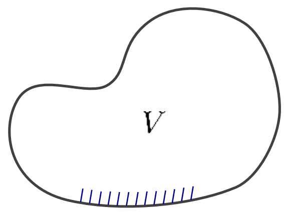
一般的には、未知数の数だけ方程式が必要

では、何が未知数で何が既知数なのでしょうか

境界条件：ディリクレ？ノイマン？

性質が決まっている　S_n　$\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dn} = \boldsymbol{x}_1$

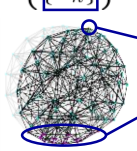




値が決まっている　S_d　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$

物体の一部に強制変位を与え、挙動を見たい

$$\begin{Bmatrix} \{F_d\} \\ \{F_n\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{dd}] & [K_{dn}] \\ [K_{nd}] & [K_{nn}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_d\} \\ \{\delta_n\} \end{Bmatrix}$$



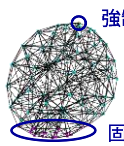
ディリクレ条件：変位を規定

ノイマン条件：力がゼロ

$$\{\delta_n\} = -[K_{nn}]^{-1}[K_{nd}]\{\delta_d\}$$

$$\{F_d\} = [K_{dd}]\{\delta_d\} - [K_{dn}][K_{nn}]^{-1}[K_{nd}]\{\delta_d\}$$

実時間シミュレーションのための工夫



強制変位 S_d

固定 S_f

$$\begin{Bmatrix} \{F_f\} \\ \{F_s\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ff}] & [K_{fs}] \\ [K_{sf}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\delta_s\} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_s\} = [K_{ss}]\{\delta_s\} \qquad \{\delta_s\} = [L_{ss}]\{F_s\}$$

$$\begin{Bmatrix} \{\delta_d\} \\ \{\delta_n\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_{dd}] & [L_{dn}] \\ [L_{nd}] & [L_{nn}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F_d\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

- S_f に変化がない
- $dimS_f < dimS$

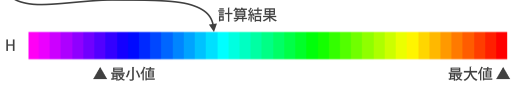
のとき有効

$$\{\delta_n\} = -[L_{nd}][L_{dd}]^{-1}\{\delta_d\}$$

所望の物理量を可視化したい

例えば、破壊の解析によく使われるミーゼス応力。

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2+(\sigma_{yy}-\sigma_{zz})^2+(\sigma_{zz}-\sigma_{xx})^2+3(\sigma_{xy}^2+\sigma_{xz}^2+\sigma_{yx}^2+\sigma_{yz}^2+\sigma_{zx}^2+\sigma_{zy}^2)\right\}}$$



要素ごとに値が求まるが、

色（カラーマップ）に対応づけると空間分布が一目瞭然

最大値で規格化して、HSV色空間のHに対応づけると良い

有限要素法

実装に向けて

実装のために必要な変数を考えてみる

- 要素
  - ノード番号
  - ノード座標
  - 変位ベクトル
  - 剛性行列
  - 応力ひずみ行列
  - ひずみ変位行列
  - 形状関数
  - ポアソン比
  - ヤング率
  - 体積
  - ミーゼス応力
  - ひずみベクトル
  - 応力ベクトル
- モデル全体
  - ノード数
  - 要素数
  - ノード座標
  - 要素配列
  - ディリクレ拘束条件以外のノード集合
  - ディリクレ荷重条件のノード集合
  - ノイマン条件のノード集合
  - 境界条件が設定のフラグ
  - 力ベクトル
  - 変位ベクトル
  - 剛性行列

実装のために必要な機能を列挙してみる

- 行列の和積、ベクトルとの積、転置行列、逆行列、行列式
- モデルを読み込む
- 要素の物性値の設定
- 要素の形状関数・ひずみ・応力・ミーゼス応力・体積の計算
- 要素のひずみ変位関係式の行列[Be]の設定
- 要素の応力ひずみ関係式の行列[De]の設定
- 要素の剛性行列[Ke]の設定
- 全体剛性行列[K]の設定
- 拘束境界条件領域の設定、逆行列の前計算
- 荷重境界条件領域の設定、荷重境界条件を与える
- 剛性方程式を解く（全ての点の変位が求まる）
- 全体のミーゼス応力を計算する (戻り値は最大値)
- 変位を解放する

.femファイル（ASCII）の中身

nNodes ノード数

nTetrahedra 要素数

@1 ノード座標

x成分値 y成分値 z成分値
・・・

} ノード数だけ並ぶ

@2 要素を構成するノード番号

ノード番号 ノード番号 ノード番号 ノード番号
・・・

} 要素数だけ並ぶ

@3 要素のマテリアル番号

マテリアル番号
・・・

} 要素数だけ並ぶ

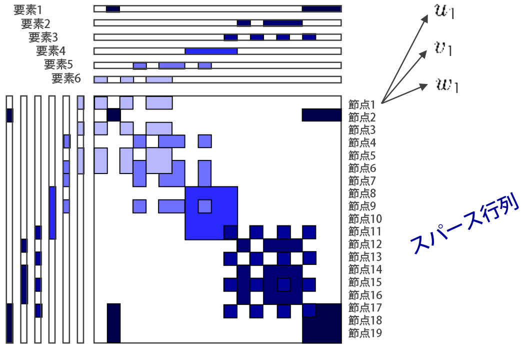
応力ひずみ行列の生成実装例

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & sym. & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

```
unsigned int i;
double Dscale;
Dscale = young_modulus / ( ( 1.0 + poisson_ratio )
                          * ( 1.0 - 2.0 * poisson_ratio ) );
for( i = 0; i < 3 ; i ++ ){
    D[ 6 * i + i ] = Dscale * ( 1.0 - poisson_ratio );
    D[ 6 * i + ( i + 1 ) % 3 ] = Dscale * poisson_ratio;
    D[ 6 * i + ( i + 2 ) % 3 ] = Dscale * poisson_ratio;
    D[ 6 * ( i + 3 ) + i + 3 ] = Dscale * ( 1.0 - 2 * poisson_ratio ) / 2;
}
```

直接書いても良いけど同じ成分はfor文で簡略化

全体剛性行列生成のイメージ



境界条件の設定に伴う行列・ベクトルの分解

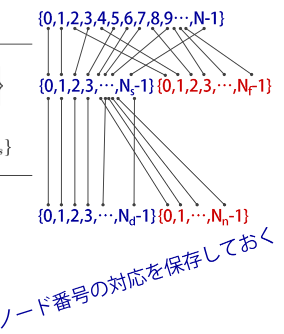
$$\{F\} = [k]\{\delta\}$$

$$\begin{Bmatrix}\{F_f\}\\ \{F_s\}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}[K_{ff}] & [K_{fs}]\\ [K_{sf}] & [K_{ss}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{0\}\\ \{\delta_s\}\end{Bmatrix}$$

$$\{F_s\} = [K_{ss}]\{\delta_s\} \qquad \{\delta_s\} = [L_{ss}]\{F_s\}$$

$$\begin{Bmatrix}\{\delta_d\}\\ \{\delta_n\}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}[L_{dd}] & [L_{dn}]\\ [L_{nd}] & [L_{nn}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{F_d\}\\ \{0\}\end{Bmatrix}$$

$$\{\delta_n\} = -[L_{nd}][L_{dd}]^{-1}\{\delta_d\}$$



有限要素法

デモ

有限要素法

おわりに

あくまで1日で全体像を把握するための概要です

- 支配方程式がわからなければ連続体力学を勉強しましょう
- 定式化がわからなければ微積分・線形代数を勉強しましょう
- 連立方程式のプログラムがわからなければ数値解析を勉強しましょう
- 実装がわからなければC言語を勉強しましょう
- 理解の近道は専門家に直接質問して難解点を解決していくことです

- 注意
  - 教科書によって表現が異なるのが厄介です
  - 本講義は厳密性よりわかりやすさを追求しました

シミュレーションにおいて注意するべきこと

- 解析条件を設計するに至った理由を的確に説明する
  - シミュレーションを行う基礎になるモデルをどのように構築するか
  - 静解析、動解析、周波数解析、座屈解析など、どのようなモードで行うか
  - パラメータや境界条件、入出力は何か
- 現象の性質を示すことはできてもその本質を説明することは難しい
- 妥当性の検証が困難であることを理解する
- 正しく"模擬"しないと、得られた結果は間違いになる
- 現象が複雑だとその間違いに気が付かないこともある

参考文献

- 京谷孝史 著，よくわかる連続体力学ノート，森北出版，2011年.
- William H. Press, et al., NUMERICAL RECIPES in C, 技術評論社, 1993.
- 川村哲也 著，数値計算の初歩！，山海堂，2002年.
- 野村大次ら 著，有限要素法 解析基礎と実践，丸善出版，2013年.
- 三好俊郎 著, 有限要素法入門，培風館，1994.
- 梅谷信行，有限要素法(FEM)のページ，http://ums.futene.net/

本資料に関する連絡先

吉元俊輔，yoshimoto@bpe.es.osaka-u.ac.jp