異質的家計のモデル

定量的マクロ経済学

松田　一茂

モチベーション

- 政策の効果は?
  - 例えば税金が貯蓄行動に与える影響は？
  - 貯蓄行動は消費や投資を通じてGDPに大きな影響を与えるので重要
- 政策を実験したいけれど現実の世界ではできない
- 政策のシミュレーションできるようなモデルを作る

家計

- 0期から無限期間生きて、t期の消費をc_tとして次の効用を最大化

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) = E_0[u(c_0) + \beta u(c_1) + \beta^2 u(c_2) + \beta^3 u(c_3) + \cdots],\ u' > 0,\ u'' < 0,\ \beta \in (0,1)$$

- 現在の効用$u(c_0)$だけでなく、将来の効用$u(c_1), u(c_2), u(c_3), \cdots$も$\beta, \beta^2, \beta^3 \cdots$で割り引いて考慮
- 現在の効用のための消費と、将来の効用のための貯蓄をバランスするのが最適な貯蓄行動！

所得ショック

- 将来を考慮して行動するが、将来起きる全てのことを知っているわけではない（不確実性）
- ここでは将来の不確実性の源を労働所得と考え、家計は0期時点での期待値E_0を最大化！
- 労働所得の変化は生産性の変化から来るとこのモデルでは解釈
- 生産性のショック $h_t \in \mathscr{H} = \{h^1, \cdots, h^{N_H}\}$
  - 簡単化のため取りうる生産性の値の候補はN_H個（有限）とする
  - 例（$N_H = 2$の場合）：$h^1 = 0$（万円、失業状態）, $h^2 = 600$（万円、職についている）

所得ショック

- 毎期毎期独立に$\mathscr{H} = \{h^1, \cdots, h^{N_H}\}$の中から生産性が決まるのか？それだと少し現実味がない
  - 例えば$h_0 = 0, h_1 = 600, h_2 = 0, h_3 = 600$のような激しい賃金変化は現実的でない
  - $h_1 = 0$となる確率はh_0に依存する：$h_0 = 0$なら可能性は高いし、$h_0 = 600$なら低いだろう
- 賃金の変化の性質：今期h_tの時、次の期h_{t+1}となる確率はマルコフ過程$\pi(h_{t+1} | h_t)$に従うと仮定
  - 例（$N_H = 2$の場合）：$\pi(0 | 600) = 0.2, \pi(0 | 0) = 0.7$

所得プロセスの近似 $\pi(h_{t+1} | h_t)$

- 行列$\pi(h_{t+1} | h_t)$はどうやってデータから得るの？そもそも$\mathscr{H} = \{h^1, \cdots, h^{N_H}\}$をどう作る？
- 生産性の対数は次のAR1過程に従うと仮定：$\ln h_{t+1} = \rho \ln h_t + \epsilon,\ \ \epsilon \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$
  - hが必ず正であるように対数にしている
- ρとσ_ϵは実際の個人の賃金データから推定可能
- 推定したAR1をTauchen's methodを使って$\pi(h_{t+1} | h_t)$に近似

Tauchen's method

1. グリッド$\mathscr{H} = \{h^1, \cdots, h^{N_H}\}$を$d$の間隔で-1*$stdd(\ln h_t)$から+1*$stdd(\ln h_t)$まで作る

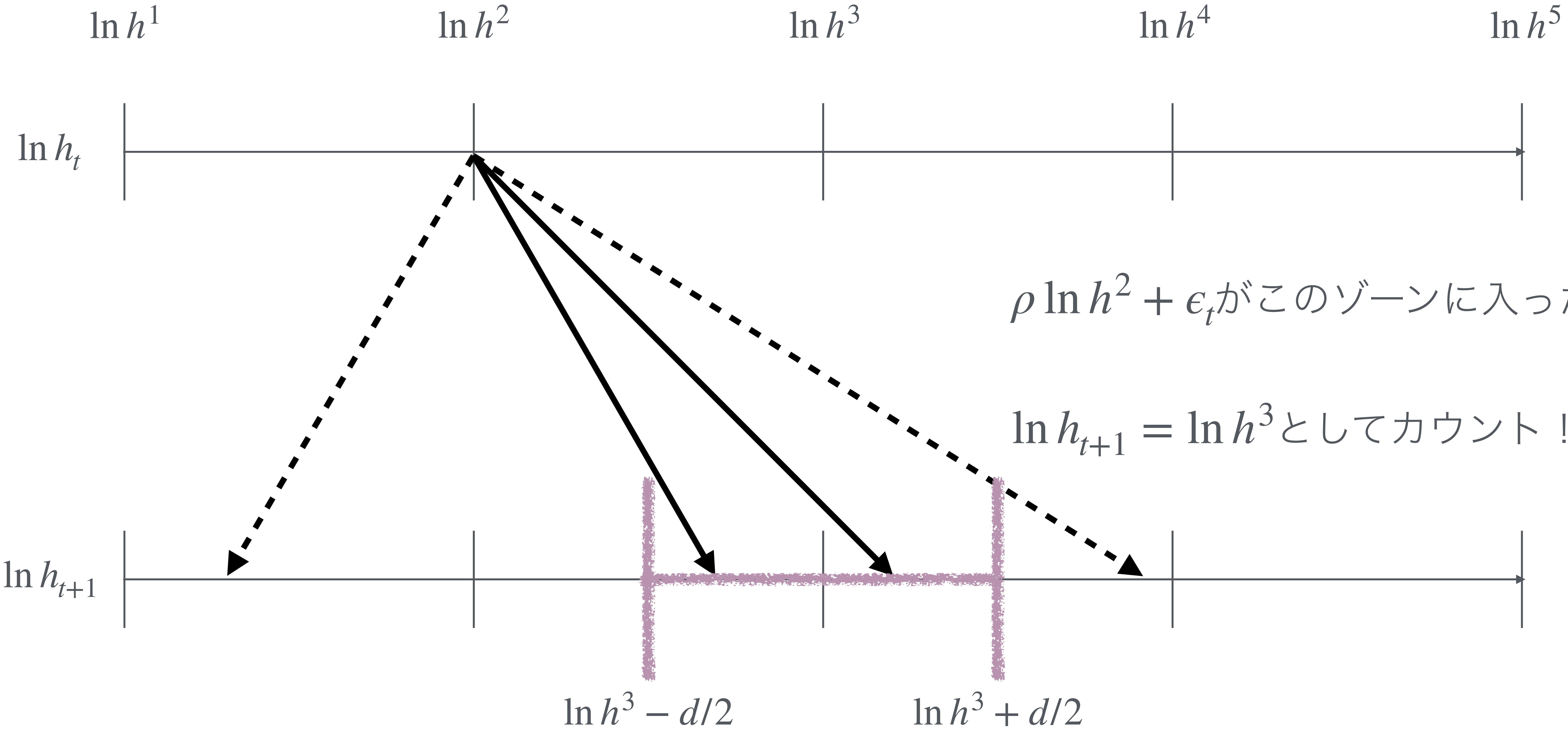
- h_tの分布もh_{t+1}の分布も同じと仮定し、AR1の両辺の分散をとると

$$Var(\ln h_t) = \rho^2 Var(\ln h_t) + \sigma_\epsilon^2$$

- よって$\ln h_t$の標準偏差は

$$stdd(\ln h_t) = \sqrt{Var(\ln h_t)} = \sqrt{\frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\rho^2}}$$

Tauchen's method



$\rho \ln h^2 + \epsilon_t$がこのゾーンに入った時

$\ln h_{t+1} = \ln h^3$としてカウント！

Tauchen's method

2. $\rho \ln h^j + \epsilon \in [\ln h^{j'} - d/2, \ln h^{j'} + d/2]$の時、$h_t = h^j$から$h_{t+1} = h^{j'}$に行くと仮定する

- $\rho \ln h^j + \epsilon$が$\ln h^{j'} + d/2$以下になる確率から$\rho \ln h^j + \epsilon$が$\ln h^{j'} - d/2$以下になる確率を引く
- 前者：$Pr(\rho \ln h^j + \epsilon \leq \ln h^{j'} + d/2) = Pr\left(\frac{\epsilon}{\sigma_\epsilon} \leq \frac{\ln h^{j'} + d/2 - \rho \ln h^j}{\sigma_\epsilon}\right)$
- 標準正規分布$N(0,1)$に従うϵ/σ_ϵが$(\ln h^{j'} + d/2 - \rho \ln h^j)/\sigma_\epsilon$以下になる確率なので累積分布関数$\Phi$を使って

$$\pi(h^{j'} \mid h^j) = \Phi\left(\frac{\ln h^{j'} + d/2 - \rho \ln h^j}{\sigma_\epsilon}\right) - \Phi\left(\frac{\ln h^{j'} - d/2 - \rho \ln h^j}{\sigma_\epsilon}\right)$$

家計の制約

- 利子率 r と 賃金率 w（この講義では$w = 1$と仮定、気にしなくていいです）
- 1単位の労働、c_tを消費、a_{t+1}だけ貯蓄するとして、予算制約は各t期で

$$c_t + a_{t+1} = (1 + r)a_t + wh_t.$$

- 各t期で借入制約

$$a_{t+1} \geq -\underline{B}$$

- 単純化のために、資産はa_{t+1}は $\mathscr{A} = \{a^1, \cdots, a^{N_A}\}$のうちからしか選べないと仮定

家計の最適化問題

$$\max_{\{c_t\},\{a_{t+1}\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \text{ s.t.}$$

各t期で$c_t + a_{t+1} = (1 + r)a_t + wh_t$

各t期で$a_{t+1} \geq -\underline{B}$, $c_t \geq 0$, a_0, h_0は所与

- どうやってこの動学的な最適化問題を解くか？
- 予算制約式を変形して$c_t = (1 + r)a_t + wh_t - a_{t+1}$とすると…

問題を単純化する (c_tを消す)

$$\max_{\{a_{t+1}\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u((1+r)a_t + wh_t - a_{t+1}) \text{ s.t.}$$

各t期で$a_{t+1} \geq -\underline{B}$, 各$t$期で$(1+r)a_t + wh_t - a_{t+1} \geq 0$, a_0, h_0は所与

- どうやってこの動学的な最適化問題を解くか？
- 家計は将来のことを全て予想して行動することに注意
- 厄介なのは将来が無限であること

一旦有限期間Tで考える

$$\max_{\{a_{t+1}\}} E_0 \sum_{t=0}^{T} \beta^t u((1+r)a_t + wh_t - a_{t+1}) \text{ s.t.}$$

各t期で$a_{t+1} \geq -\underline{B}$, 各$t$期で$(1+r)a_t + wh_t - a_{t+1} \geq 0$, a_0, h_0は所与

Recursive formに書き換える

$$\underbrace{\max_{\{a_{t+1}\}} E_0 \sum_{t=0}^{T} \beta^t u((1+r)a_t + wh_t - a_{t+1})}_{V(a_t, h_t)} = \max_{\{a_{t+1}\}} u((1+r)a_t + wh_t - a_{t+1}) + \beta \underbrace{E_0 \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u((1+r)a_t + wh_t - a_{t+1})}_{V_{t+1}(a_{t+1}, h_{t+1})}$$

$$V_t(a_t, h_t) = \max_{a_{t+1}} u((1+r)a_t + wh_t - a_{t+1}) + \beta \sum_{h_{t+1}} V_{t+1}(a_{t+1}, h_{t+1}) \pi(h_{t+1} \mid h_t)$$

- ここで$V_t(a_t, h_t)$は資産a_tと生産性h_tを持っている時のt期以降の全効用（価値）：value function
- t期以降の価値は今期の効用と$t+1$期以降の価値に分解できる！

無限期間に直す（$T \to \infty$ なら？）

- 直感的に, 今どの期にいてもそれ以後無限期間続くので、全ての期のV_tは同じとなる(Vと呼ぶ)
- 無限だと時間tは関係なく今日と明日の概念だけで十分。$'$は明日の変数 (a'は明日の資産)とすると

$$V(a,h) = \max_{a'} u((1+r)a + wh - a') + \beta \sum_{h'} V(a',h')\pi(h' \,|\, h) \text{ s.t. } -\underline{B} \le a' \le (1+r)a + wh$$

- この方程式はBellman equationと呼び、このような最大化問題の形をrecursive formと呼ぶ
- 最適な貯蓄a_{t+1}もtに依存せず(a,h)だけの関数として決まる：policy function $g_a(a,h)$.

ではg_aをどう解く？

$$V(a,h) = \max_{a'} u((1+r)a + wh - a') + \beta \sum_{h'} V(a',h')\pi(h'|h)$$

- 最適な$a' = g_a(a,h)$を解くためには右辺の$N_A \times N_H$の行列$V(a,h)$を知る必要がある
- その$V(a,h)$は左辺にあるが、そのためには右辺の$V(a,h)$が必要となりループ
- 適当に作った行列$V_0(a,h)$を右辺の$V(a,h)$に入れると最大化問題が解けるので左辺を$V_1(a,h)$とよぶ
- 当然$V_1(a,h) \neq V_0(a,h)$となるが、今度はV_1を右辺のVに代入、右辺と左辺が一致するまで繰り返す

Discretized value function iteration

1. 最初の予想として適当に行列$V_0(a^i, h^j)$を仮定
2. V_0を所与として, 各$(a^i, h^j) \in \mathscr{A} \times \mathscr{H}$に対して
    1. グリッドから以下を満たす$a' \in \mathscr{A}$を探す

$$g_a(a^i, h^j) = a' \in \arg\max_{a' \in \mathscr{A}} u(wh^j + (1+r)a^i - a') + \beta \sum_{h' \in \mathscr{H}} V_0(a', h')\pi(h' | h^j)$$

    2. $V_1(a^i, h^j) = u(wh^j + (1+r)a^i - g_a(a^i, h^j)) + \beta \sum_{h' \in \mathscr{H}} V_0(g_a(a^i, h^j), h')\pi(h' | h^j)$で$V_1$を導く
3. もし$d(V_0, V_1) < tol$ならばおしまい(dは何かしらの距離)、そうでなければV_0をV_1として2に戻る