

## 1.證明

$$dx_t = f(x_t, t) dt + g(x_t, t) dW_t$$

The corresponding Fokker–Planck equation (FPE) for the PDF  $p(x, t)$  is:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x, t)p(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [g^2(x, t)p(x, t)].$$

We can rewrite this as a divergence (continuity) equation:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [v(x, t)p(x, t)],$$

where  $v(x, t)$  is the *deterministic drift* of the probability flow ODE.

Matching terms, we must have:

$$-\frac{\partial}{\partial x} [vp] = -\frac{\partial}{\partial x} [fp] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [g^2 p].$$

Integrate once (remove one derivative):

$$vp = fp - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (g^2 p) + C,$$

and since the constant  $C = 0$  (probability must vanish at infinity), we get

$$v = f - \frac{1}{2p} \frac{\partial}{\partial x} (g^2 p).$$

Use the product rule:

$$\frac{\partial}{\partial x} (g^2 p) = \frac{\partial g^2}{\partial x} p + g^2 \frac{\partial p}{\partial x}.$$

So:

$$v = f - \frac{1}{2p} \left( p \frac{\partial g^2}{\partial x} + g^2 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = f - \frac{1}{2} \frac{\partial g^2}{\partial x} - \frac{1}{2} g^2 \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Recognize that

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \log p.$$

Thus,

$$v(x, t) = f(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial g^2(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{2} g^2(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \log p(x, t).$$

$$dx_t = [f(x_t, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial g^2(x_t, t)}{\partial x} - \frac{1}{2} g^2(x_t, t) \frac{\partial}{\partial x} \log p(x_t, t)] dt.$$

## 2. AI 的未來與機器學習的基石

主題：全自動城市決策與模擬系統（AI Governance Simulator）

### 一、引言

人工智慧（Artificial Intelligence, AI）在近十年間的快速發展，已使其在醫療、交通、金融及教育等領域展現強大的分析與預測能力。然而，當前 AI 的功能多仍侷限於「局部優化」與「單一領域決策」，尚不足以處理城市層級的複雜社會系統。未來二十年內，若能建構一套能夠整合多面向資訊、模擬長期影響並自動提出政策建議的智慧治理系統，將對人類社會產生深遠影響。本文將探討此一潛在能力——全自動城市決策與模擬系統（AI Governance Simulator）及其所涉及的機器學習基礎與初步研究方向。

## 二、AI 的未來能力：全自動城市決策與模擬系統

未來的 AI 有可能發展出能夠自主整合城市資料、建立模擬模型並生成政策建議的能力。此系統可在龐大的資料環境中（包括交通流量、能源消耗、人口變遷、公共衛生與經濟指標），建立動態的城市模型，進而模擬不同政策方案的長期影響。

舉例而言，當政府欲制定住房補貼或交通碳稅政策時，AI 可模擬其對生活成本、通勤效率、產業分布與環境永續的綜合影響，並提供最符合社會整體福祉的建議。相較於現今依賴人為假設與短期資料分析的政策模式，這種 AI 系統將能進行跨領域、長期且多目標的決策推演。

此能力對社會的意義重大。首先，它能降低政策制定中因主觀偏見、資訊不全或政治考量所造成的失誤；其次，透過公開透明的模擬結果，公民可更具體地理解政策後果，促進民主參與與知識化決策。換言之，AI 將不再只是工具，而是城市治理的智能協作者。

## 三、涉及的機器學習類型

要實現上述能力，關鍵在於結合非監督式學習（Unsupervised Learning）與強化學習（Reinforcement Learning）。

1. 非監督式學習主要用於從大量無標籤的城市資料中找出潛在結構與變數關聯。例如，AI 可透過生成模型（Generative Models）發現影響城市生活品質的隱含因子，如社會流動性或空氣污染熱點，進而構建可解釋的系統模型。
2. 強化學習則負責政策探索與優化。AI 在模擬環境中測試各種政策組合，並根據社會效益（如公平、效率、永續）獲取回饋信號（reward）。透過不斷試驗與更新策略，AI 能學習出最適合的治理方案。

在此架構中，「資料來源」包括實際城市的感測器資料、經濟報告、衛星影像及社群媒體訊號；「目標訊號」則為模擬中政策結果對社會指標的長期效應。由於系統需持續與模擬環境互動並根據回饋修正策略，強化學習的角色尤為關鍵。

#### 四、第一步的模型化：簡化問題設計

為了邁向完整的智慧治理系統，可先設計一個簡化模型問題（**model problem**）作為研究起點。

具體而言，假設 **AI** 的任務是同時管理「交通流量」與「能源使用」，在模擬城市中最小化碳排放並維持平均通勤時間。

此問題能在概念上代表城市治理的核心挑戰：多目標權衡（效率與永續）、多代理互動（市民行為）與長期動態回饋。若 **AI** 能在此任務中學會平衡不同政策效果，表示其已具備「治理思維」的雛形。

可測試性方面，研究者可透過具體量化指標（如平均通勤時間、能源消耗量、排放量）檢驗 **AI** 策略的成效，並觀察其對突發事件（交通事故、氣候變化）的韌性。若模型能在多情境下保持穩定與優化，即代表成功。

所需工具包括多代理強化學習（**Multi-Agent RL**）、生成式模型（**Generative Models**）、以及貝葉斯最佳化（**Bayesian Optimization**）等，皆為目前機器學習中處理複雜系統的前沿方法。

#### 五、結論

若能在未來二十年間實現「**AI Governance Simulator**」，將標誌著 **AI** 從「資料分析工具」進化為「社會系統的共同設計者」。這樣的 **AI** 不取代人類政治決策，而是以數據為基礎，協助人類平衡效率與公平，並為城市永續發展提供更科學與理性的支撐。

### 3.問題

#### 1. OU 過程的 score function

$$\nabla_x \log p_t(x | x_0) = -\frac{x - e^{-\beta t} x_0}{\sigma_t^2}$$

為何其形式與標準高斯分布的 **score** 相同？是否暗示 **OU** 流是高斯族封閉的？

#### 2. 當 $x_0 \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ 時，

合併初始隨機性後的  $p_t(x)$  仍為高斯分布，這樣的結構是否對所有線性 **SDE** 成

立？

3. **score matching** 損失中的加權函數 $\lambda(t)$ 理論上應如何選取？不同選擇會如何影響訓練的穩定性與樣本品質？