**伪谱法（PSM）、有限差分（FDM）方法对比**

（——模拟均匀介质下的二维声波方程）

一、PSM原理介绍：

伪谱法实质上是把求偏微分导数的问题借助傅里叶的正反变换，将复杂的偏微分项转化成简洁的形式，如下：

类比求n阶导数，形式如下：

对于二维均质各向同性声波方程：

只对空间项做傅里叶变换，时间项仍然采用三点有限差分格式，可得伪谱法求解公式如下：

1. 参数设置
2. 空间时间差分大小和采样点个数：

（2）声波速度设置为2000m/s

（3）波数k的确定

同理可得，

（2）震源的确立

选用雷克子波，表达式如下：

（3）稳定性条件

对于二维的伪谱法求解，稳定性条件为：

此时选用的各参数计算出的，满足条件

二、程序代码

clear

clc

tic

dt = 0.001; % 单位（s）

ds = 10; % 空间差分：ds = dx = dz

nx = 800;%800个空间采样点

nz = 800;

nt = 2000;%2000个时间采样点 故总长为2s

fmain = 20;%设置震源的主频为20HZ

slice = 10;%每间隔10步保存结果

slice\_num = nt/slice;

t = 1:nt;%计算震源（生成一个数组）

t0 = 50;%设置偏移量

s\_t = (1-2\*(pi\*fmain\*dt\*(t-t0)).^2).\*exp(-(pi\*fmain\*dt\*(t-t0)).^2);

%计算过程中数组变量初始化

P\_current = zeros(nz,nx);

P\_next = zeros(nz,nx);

P\_past = zeros(nz,nx);

Px\_fft = complex(zeros(nx,nz));

Pz\_fft = complex(zeros(nz,nx));

Px\_ifft = complex(zeros(nx,nz));

Pz\_ifft = complex(zeros(nz,nx));

P = zeros(nz,nx);

P\_slice =zeros(nz,nx,slice\_num);

V(1:nz,1:nx) = 2000;

slice\_count = 1;

%计算波数

kmax = pi/ds;

delta\_kx = kmax/(nx/2);

delta\_kz = kmax/(nz/2);

kx = zeros(nx,1);

kz = zeros(nz,1);

i = 1:nx/2;

j = 1:nz/2;

kx(i,1) = i\*delta\_kx;

kx(nx/2+i,1) = -kmax + i\*delta\_kx;

kz(j,1) = j\*delta\_kz;

kz(nz/2+j,1) = -kmax + j\*delta\_kz;

for T = 1:nt

P\_current(400,400) = P\_current(400,400) + dt^2\*s\_t(1,T);%将震源的位置设置在坐标（400，400）

%傅里叶变换

Px\_fft = fft(P\_current');%这里主要要进行转置的运算 Matlab对矩阵做傅里叶变换默认是对行处理，转置是为了在另一个方向做运算

Pz\_fft = fft(P\_current);

i = 1:nz;

Px\_fft(:,i) = (-kx.^2).\*Px\_fft(:,i);%(ik)^2\*p(k)

i = 1:nx;

Pz\_fft(:,i) = (-kz.^2).\*Pz\_fft(:,i);

%反傅里叶变换

Px\_ifft = ifft(Px\_fft)';

Pz\_ifft = ifft(Pz\_fft);

P = real(Px\_ifft+Pz\_ifft);%取实部

%递推公式计算

P\_next = 2\*P\_current-P\_past+(V.^2\*dt^2).\*P;

P\_past = P\_current;

P\_current = P\_next;

if(mod(T,slice)==0)

P\_slice(:,:,slice\_count) = P\_next;%将采样切片数据存储

slice\_count = slice\_count + 1;

end

end

%绘制图像

filename = 'PSM（均匀介质）.gif';

figure(1)

for i = 1:slice\_num

imagesc(P\_slice(:,:,i));

shading interp;

axis equal;

colormap('copper');

set(gca,'yDir','reverse');

str\_title = ['PSM（均匀介质） t=',num2str(dt\*i\*10),'s'];

title(str\_title);

colorbar;

drawnow; %刷新屏幕

F = getframe(gcf);%捕获图窗作为影片帧

I = frame2im(F); %返回图像数据

[I, map] = rgb2ind(I, 256); %将rgb转换成索引图像

if i == 1

imwrite(I,map, filename,'gif', 'Loopcount',inf,'DelayTime',0.1);

else

imwrite(I,map, filename,'gif','WriteMode','append','DelayTime',0.1);

end

end

toc

1. 结果分析：

（1）频散分析（dispersion）：

在当前的参数设计下，满足了CFL稳定性条件，ppw = ，未发生频散的现象，下图为截取的时间切片。

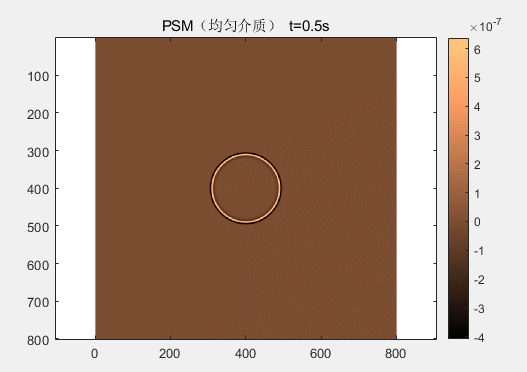


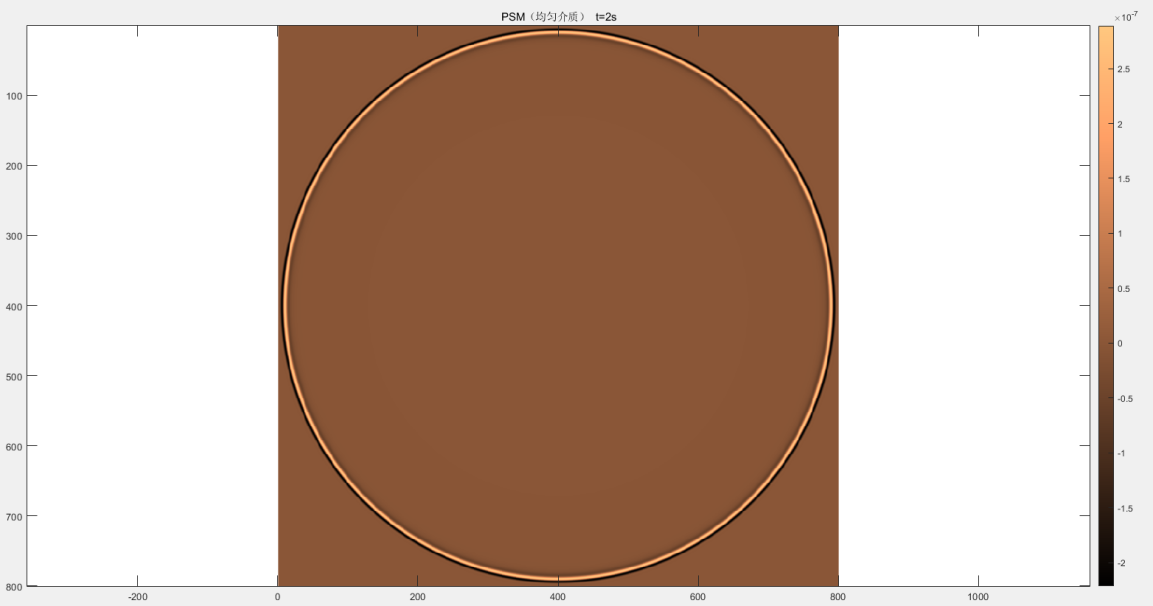
图3-1 t=0.5s时的时间切片图  


图3-2 t=2s时的时间切片图

根据下图的色散关系，改变CFL稳定性条件，令，ppw仍为5。

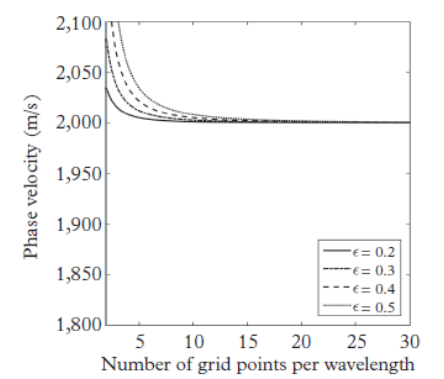
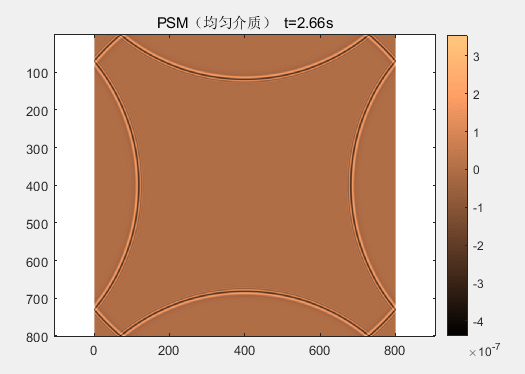


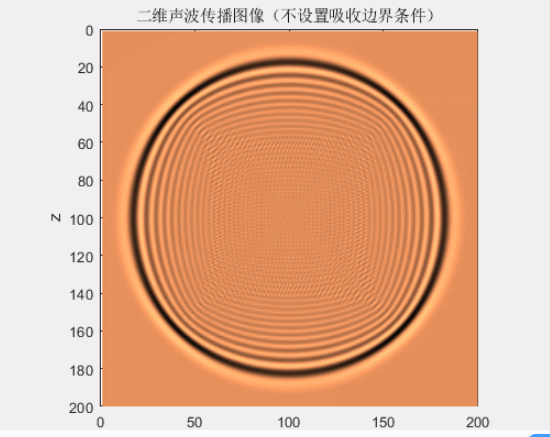
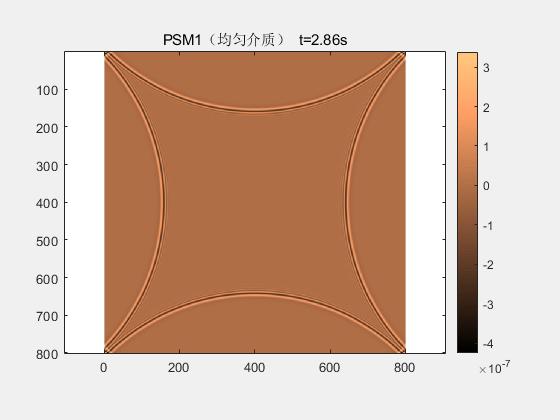
图3-3 色散关系图

得到图3-4如下：



分析图3-4可以发现在波前的前方有明显的频散现象，相速度比波的传播速度要大

1. PSM与FDM对比
2. 频散的特征不同：在同时满足CFL稳定性条件的前提下，PSM和FDM的色散关系不同，在PPW选用不当时，各自发生的频散现象中，PSM的相速度要大于群速度，FDM的相速度小于群速度,在图像上体现如下：

1. 计算速度不同：

PSM的计算耗时要长，计算速度较慢。在相同的参数设置下，三点差分的FDM所用时长为25s左右，而PSM的计算用时要94s左右。



1. 结论与体会
2. PSM与FDM的频散特征不同，主要体现在相速度和群速度的关系上。
3. PSM方法利用了傅里叶变换，与FDM方法相比计算耗时较长，特别是在程序中反复利用循环，多利用数组运算会减少耗时。
4. 在MATLAB中的傅里叶变换函数是针对行运算的，在计算两个方向的傅里叶变换时要注意转置运算后再去变换。