

单位代码: 11414

学 号: 2015011273



中国石油大学(北京)  
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM, BEIJING

# 本科生毕业论文

题 目 基于 Kalman 滤波的线性系统平滑

估计

学院名称 信息科学与工程学院

专业名称 自动化

学生姓名 阿不都加苏尔·依力哈木

指导教师 魏萍

起止时间: 2019 年 4 月 1 日 至 2019 年 6 月 8 日



## 摘 要

卡尔曼平滑是一种最优估计算法，如今被广泛应用于诸多领域。它源于卡尔曼滤波器模型，虽然在状态预测时需使用更多的数据，但是拥有更佳的估计效果，因此亦可视为一种升级的卡尔曼滤波。

根据状态变量特性和预测需求的不同，可以将卡尔曼平滑划分为三个基本类型：固定点平滑，固定滞后平滑和固定区间平滑。本文从最优平滑的背景和现状出发，结合理论基础对其原理进行详细说明；列举一维温度估计系统和二维坐标估计系统，并通过 MATLAB 工具分别实现三种平滑算法的仿真，分析其工作特点，同时给出解决多维模型平滑估计的思路；比较卡尔曼滤波和平滑，由两种算法的效果提供择优依据。

**关键词：最优平滑；卡尔曼滤波；MATLAB 仿真**

## Smoothing Estimation of Linear Systems Based on Kalman Filtering

### ABSTRACT

Kalman Smoothing is an optimal estimating algorithm, so far, which has been applied in many fields. It originates from the model of Kalman Filter. Although using more data during state prediction, it has a better effect on estimation. Hence it can also be regarded as an upgraded Kalman Filter.

According to different characteristics of the state variables and requirements of prediction, the Kalman Smoother can be divided into three basic categories: fixed point smoothing, fixed lag smoothing and fixed interval smoothing. Starting from the background and present situation of the Optimal Smoothing Estimation, this paper, with the theoretical basis, elaborates on its principle; One-dimensional temperature estimation system and two-dimensional coordinate estimation system are enumerated. By simulating three kinds of smoothing algorithms using tools of MATLAB, analyze their working performance. Meanwhile, the idea of solving smoothing estimation on multi-dimensional model is given. Kalman filtering and smoothing are compared, and the results of the two algorithms provide the basis for optimum selection.

**Key Words: Optimal Smoothing; Kalman Filtering; MATLAB simulation**

# 目 录

摘    要 .....	I
<b>ABSTRACT</b> .....	II
第 1 章 绪论 .....	1
1.1 最优估计 .....	1
1.2 最优平滑 .....	1
1.3. 卡尔曼平滑应用 .....	2
第 2 章 平滑理论基础 .....	3
2.1 线性离散系统估计 .....	3
2.2 递推卡尔曼滤波器 .....	3
2.3 卡尔曼增益的另一种形式 .....	4
2.4 平滑与滤波、预测的关系 .....	4
第 3 章 最优平滑原理 .....	6
3.1 平滑器的类型 .....	6
3.2 平滑器的应用 .....	7
3.3 三类平滑 .....	7
3.3.1 固定点平滑 .....	7
3.3.2 固定滞后平滑 .....	10
3.3.3 固定区间平滑 .....	11
第 4 章 平滑估计的实例运用 .....	14
4.1 一维温度估计系统三类平滑估计 .....	14
4.1.1 固定点平滑 .....	15
4.1.2 固定滞后平滑 .....	16
4.1.3 固定区间平滑 .....	17
4.2 多维坐标估计系统 .....	19
4.3 平滑与滤波比较 .....	22
第 5 章 结论 .....	25
参 考 文 献 .....	26
附 录 A MATLAB 仿真程序 .....	27
A.1 一维温度预测模型 .....	27

## 目 录

---

A.1.1	卡尔曼滤波程序 .....	27
A.1.2	卡尔曼平滑程序 .....	27
A.2	二维坐标定位模型 .....	29
附录 B	程序运行效果图.....	31
致 谢	.....	32

## 第 1 章 绪论

### 1.1 最优估计

最优估计是一种基于观测，推断系统信息的方法。它能利用不同的观测数据，结合系统的先验状态对未来状态作出估计。

历史上第一个最优估计方法，根据文献记载，是于 1795 年被 Gauss 发现的最小二乘法。虽然从 Galileo (1564-1642) 时代起，人们就已经认识到测量误差是不可避免的，但是最小二乘法仍是处理这种测量误差的第一个正规方法，且至今还被广泛试用<sup>[1]</sup>。它在实验科学和理论科学之间建立了重要的理论联系：它为实验人员提供了估计理论模型未知参数的一种切实可行的方法。19 世纪末 20 世纪初，概率论迅速发展，带动不确定性数学模型更加完善，过程预测、平滑和滤波的观念开始出现并发展起来。Wiener-Kolmogorov 滤波（维纳滤波）在四十年代由 Norbert Wiener（采用连续时间模型）和 Andrei Kolmogorov（采用离散时间模型）独立发现的，它是一种统计估计方法。它通过利用随机过程在频域领域中的功率谱密度，估计动态过程的状态，使均方估计误差达到最小化。然而，这种滤波器对信息存储和数据计算的要求都很大，同时也很难用于非平稳过程的滤波。随后在六十年代初期，Kalman 等人在维纳滤波的基础上，利用动态和随机过程的状态空间模型来解决维纳滤波存在的问题，提出了一种新的递推方法来实现滤波效果，被称为 Kalman 滤波（卡尔曼滤波）。值得一提的是，卡尔曼滤波的巨大成功并不意味着没有它自身的缺陷，最大的问题是相关 Riccati 方差的数值解的边缘稳定性。在某些应用中，很小的舍入也会累计起来，最终使滤波器的性能下降。在卡尔曼滤波器被提出后的十几年中，出现了几种对卡尔曼公式的改进方案，包括平方根滤波、UD 滤波和  $H_\infty$  滤波等。总之，至少从估计与控制问题的观点来看，卡尔曼滤波器依然可以被认为是二十世纪中最伟大的估计理论成就。它的主要应用是在“现代”控制系统领域，在所有运载工具的跟踪和导航领域，以及在对估计和控制系统进行预先设计的领域。

### 1.2 最优平滑

“平滑”这一词语，在不同背景下有不同的含义。“最优平滑”这个词语大约是从最小二乘法出现以后开始使用的，此后就成为了维纳滤波理论的一部分。而现代最优平滑方法，采用的绝大多数思路都来源于卡尔曼滤波理论，具有和它相同的数学模型，同时也求解相同类型的估计问题——但不一定是实时的。卡尔曼

滤波器对估计状态变量生效的那一时刻及以前的所有测量值进行最优利用。平滑比卡尔曼滤波做得更好，它还利用了被估计状态变量那一时刻以后补充的测量值<sup>[2]</sup>。

用“线性平滑”这个词表示将过程的线性动态模型作为平滑器的一部分，但这个词也被解释为采用某种直线拟合。实际上，有许多平滑方法都是利用局部平滑函数对数据进行最小二乘拟合——但这里所要讲的平滑没有并包括这些方法。本文中强调的重点是推广卡尔曼滤波，对动态过程采用相同的线性随机系统模型，但是对估计值和测量值的相对时间放宽约束。

### 1.3. 卡尔曼平滑应用

和最优滤波器一样，最优平滑技术常常应用在导航系统中。因为平滑器工作时使用的观测数据通常多于预测器和滤波器所需要的，故在估计时更可靠，精度更高。

通常，在对数据的精度有较高要求时，比起卡尔曼滤波器，更倾向于使用卡尔曼平滑器。例如在高精度定位系统中，需要使用尽可能多的观测数据对实际状态变量进行估计，保证其误差在一定的范围内。最优平滑器也被用于处理插值系统。实际上，只要期望的测量值不能得到或者被认为不可靠，就通常需要继续完成这类测试。当数据重新连接时，平滑数据即可被用于对之前缺失信号时的状态进行估计<sup>[3]</sup>。因此，在信号无法完全跟踪，例如出现时滞或者干扰信号较为严重时，最优平滑器往往是解决问题和优化问题的一种好选择。

卡尔曼最优平滑由几种不同类型的算法模型组成，根据实际问题的不同条件和不同需求，在各类平滑器的特性基础上，可以选取合适的模型实现有效平滑估计。对于卡尔曼平滑器的原理和作用将会在第三章中进行详细地描述，并在第四章中使用 MATLAB 工具对实际问题进行仿真，对其平滑特性进行汇总和分析。



## 第 2 章 平滑理论基础

### 2.1 线性离散系统估计

对于一个线性离散动态系统，可以将其用以下的状态空间模型描述出来：

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.2)$$

式中，离散时间记为  $k$ ， $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$  为  $k$  时刻的系统状态， $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^m$  为对应的状态观测信号，输入噪声是  $\mathbf{w}_k \in \mathbf{R}^r$ ，观测噪声是  $\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^m$ 。 $\mathbf{F}_k$  为状态转移矩阵， $\mathbf{G}_k$  为控制矩阵， $\mathbf{H}_k$  为观测矩阵<sup>[4]</sup>。

不妨设  $\mathbf{W}(k)$  合  $\mathbf{V}(k)$  为不相关白噪声，且均值皆为 0，方差矩阵各为  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$ ，即满足：

$$\begin{aligned} E(\mathbf{w}_k) &= 0, \\ E(\mathbf{v}_k) &= 0, \\ E(\mathbf{w}_k\mathbf{w}_j^T) &= \mathbf{Q}_k\delta_{kj}, \\ E(\mathbf{v}_k\mathbf{v}_j^T) &= \mathbf{R}_k\delta_{kj}, \\ E(\mathbf{w}_k\mathbf{v}_j^T) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中， $\delta_{kj}$  是 Kronecker- $\delta$  函数，即当  $k = j$  时，有  $\delta_{kj} = 1$ ，当  $k \neq j$  时，有  $\delta_{kj} = 0$ 。

当利用  $k$  时刻之前（但不包括  $k$ ）的测量值来估计  $\mathbf{x}_k$ ，就会得到一个先验估计，表示为  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ ；如果利用包括  $k$  时刻和  $k$  时刻之前的量测值估计  $\mathbf{X}(k)$ ，那么能到一个后验估计，表示为  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ ，即：

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{k-1}] = \text{先验估计} \quad (2.4)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k] = \text{后验估计} \quad (2.5)$$

用  $\mathbf{P}_k$  表示状态估计误差的协方差。 $\mathbf{P}_k^-$  表示  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  的估计误差协方差， $\mathbf{P}_k^+$  表示  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  的估计误差协方差，即：

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^- &= E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T] \\ \mathbf{P}_k^+ &= E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)^T] \end{aligned} \quad (2.6)$$

卡尔曼滤波问题是：在观测信号  $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\}$  的基础上计算状态变量  $\mathbf{x}_j$  的线性最小方差估计值  $\hat{\mathbf{x}}_{j,k}$ <sup>[5]</sup>。

### 2.2 递推卡尔曼滤波器

时间更新：

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{F}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^+\mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (2.8)$$

状态更新：

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2.9)$$

此处的  $\mathbf{K}_k$  为卡尔曼滤波增益。

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (2.11)$$

初始状态：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_0^+ &= E(\mathbf{x}_0), \\ \mathbf{P}_0^+ &= E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T] \end{aligned} \quad (2.12)$$

### 2.3 卡尔曼增益的另一种形式

在下一章中将会推导最优平滑，但是在这之前，需要先推导另一种形式的卡尔曼滤波。如果定义  $\mathbf{L}_k$  为

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{K}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2.13)$$

将  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  带入表达式  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$  中得：

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{F}_k \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{L}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (2.14)$$

将  $\mathbf{K}_k$  带入  $\mathbf{P}_k^+$  并整理：

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \quad (2.15)$$

将上式带入  $\mathbf{P}_{k+1}^-$  中并整理：

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k^- (\mathbf{F}_k - \mathbf{L}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{Q}_k \quad (2.16)$$

结合式 (1.14)、式 (1.15) 和式 (1.18)，给出了一步先验卡尔曼滤波的另一种形式

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_k &= \mathbf{F}_k \mathbf{K}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\ \mathbf{P}_{k+1}^- &= \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k^- (\mathbf{F}_k - \mathbf{L}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{Q}_k \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{F}_k \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{L}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)$$

其中， $\mathbf{L}_k$  为卡尔曼滤波的另一种增益形式。这种滤波器的形式只包含先验状态估计和协方差<sup>[6]</sup>。

### 2.4 平滑与滤波、预测的关系

本文中所要论述的最优平滑器来源于卡尔曼滤波算法，亦可称为卡尔曼平滑器。

在前面小节中讨论了预测问题。它是构成卡尔曼滤波所必须的一部分，因为总是提前一步对估计值及其相应的误差协方差进行预测，以便作为先验变量<sup>[7]</sup>。最优平滑器，它与卡尔曼最优预测器和最优滤波器之间的关系如图 2.1 所示，区别于状态向量的估计值  $\hat{\mathbf{x}}$  何时有效，以及估计时刻与用于估计的测量值的采样时刻之间的关系如何。

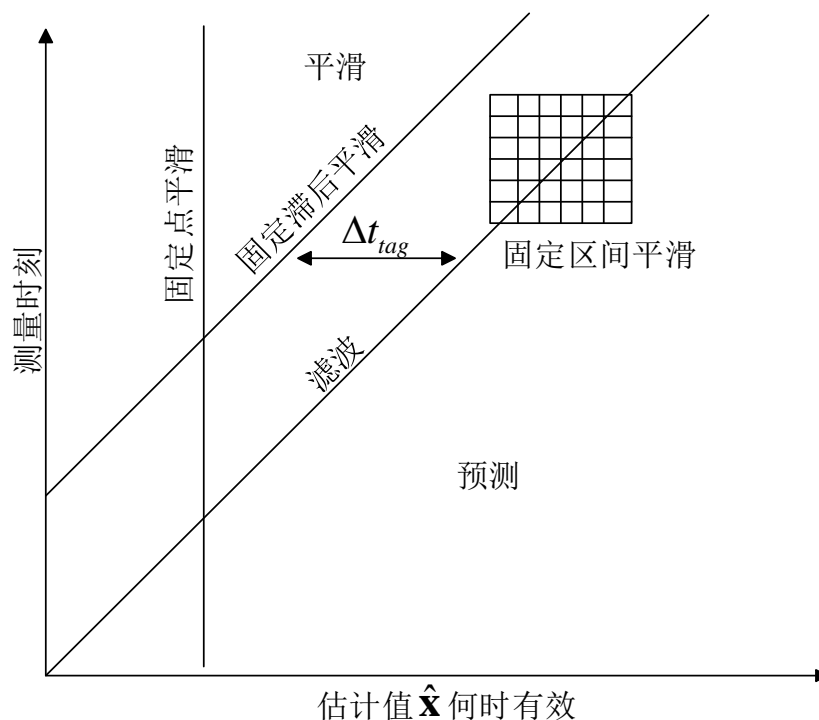


图 2.1 估计值与测量值之间的时间约束

Fig. 2.1 Time constraints between estimated and measured values

- 滤波：占据图中的对角线位置，其中每个状态向量估计都是基于估计有效时刻以及包含该时刻的所有量测数据得到的。
- 预测：占对角线下面的区域，其中每个预测的估计值都是基于严格在估计有效时刻以前获得的测量数据得到的。
- 平滑：占据对角线上面的区域，其中每个平滑的估计值都是基于估计有效时刻以前及以后的所有量测数据得到的。

亦可表示为：

$$\hat{\mathbf{x}}_j = E(\mathbf{x}_j | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k) \quad (2.18)$$

用时间点  $k$ （不包括时刻  $k$ ）之前的量测值用于估计  $\mathbf{x}_j$ ，当满足  $j > k$  时，称其为预测器；当满足  $j = k$  时为滤波器；当满足  $j < k$  时则为平滑器。

## 第3章 最优平滑原理

### 3.1 平滑器的类型

大多数平滑器的应用都逐渐发展成三种不同的类型，这是根据被估计状态向量与测量数据的依赖关系来划分的，如图所示。下面的描述指出了测量时刻相对于状态向量值被估计时刻之间的约束关系，并且给出了不同平滑器在实际中的应用举例。

#### 1. 固定区间平滑器

固定平滑器利用在固定时间区间  $t_{start} \leq t_{meas} \leq t_{end}$  内的  $t_{meas}$  时刻得到的所有测量值，产生在相同固定区间内的  $t_{start} \leq t_{est} \leq t_{end}$  时刻的状态向量估计值  $\hat{\mathbf{x}}(t_{est})$ ，如图 2.1 中沿着对角线所示的方格区域。

固定区间平滑器运行的时刻可以使所有测量值得到以后的任何时刻。固定区间平滑器最常见的应用，是对一个测试过程中的所有测量值进行后处理。因为一般是在测量结束以后才开始进行信息处理的，所以固定区间平滑器通常不是实时处理的。

#### 2. 固定滞后平滑器

固定滞后平滑器利用在时间区间  $t_{start} \leq t_{meas} \leq t_{end} + \Delta t_{tag}$  内得到的所有的测量值，产生在  $t_{meas}$  时刻的估计值。也就是说，在  $t$  时刻产生的估计值是  $\mathbf{x}$  在  $t - \Delta t_{tag}$  时刻的值，其中  $\Delta t_{tag}$  是一个固定的滞后时间，如图 2.1 中在“滤波”线上的斜线。

固定滞后平滑器用于通信中以提高信号估计的质量，为了降低误比特率，它们牺牲了一些延迟。固定滞后平滑器以实施方式运行，利用直到当前时刻以前的所有测量值，但是产生的是“滞后时间”的估计值。

#### 3. 固定点平滑器

固定平滑器利用在当前时刻  $t$  以前（即  $t_{start} \leq t_{meas} \leq t$ ）得到的所有测量值，产生在固定时刻  $t_{fixed}$  的  $\mathbf{x}$  的估计值  $\hat{\mathbf{x}}(t_{fixed})$ 。如图 2.1 中垂直线所示。

如果在估计问题时，对某些时间  $t_{fixed}$  的系统状态（这通常位初始状态）感兴趣，则可以选择使用固定点平滑器。它们被用于惯性导航系统（INS）的初始校准，以及在采用 GNSS 接收机作为辅助导航传感器的飞行器上，用于估计初始 INS 姿态。在初始 INS 校准阶段，GNSS 接收机不都提供姿态信息，但是它们可以检测出后续的位置误差模式，并据此利用固定点平滑器估计出初始姿态误差<sup>[8]</sup>。

### 3.2 平滑器的应用

在实际中，作为一种比单独使用滤波器进行估计的性能更好的实际方法，平滑器常常被忽略。根据具体应用的性质，平滑器相对于滤波器而言，其均方估计不确定性性能的提高可能达到许多数量级<sup>[9]</sup>。

在决定是否采用平滑——以及采用哪种类型平滑的时，需要考虑以下几个因素：

1. 对于何时进行测量、系统状态向量的估计结果何时有效，以及何时需要结果等相对时间关系，具体应用提出的约束条件是什么？
  - (a) 如果要求在整个时间段的状态向量估计值，则应该考虑采用固定区间平滑——特别是不需要近实时地得到结果的情况。
  - (b) 如果只在某个时刻点要求状态向量估计有效，则固定点平滑是合适的估计方法。
  - (c) 如果要求近实时（即在有限的时延内）得到结果，则固定滞后平滑是合适的。
2. 对于预期的应用而言，其状态变量估计新能需要提高多少？预期提高多少？或者希望提高多少（与滤波相比）？
3. 估计结果的可靠性受估计算法的数值稳定性的影响如何？或者受性能对假设模型参数值的过度敏感性的影响如何？
4. 计算复杂度与成本及可实现性之间应该如何折中考虑？这个问题对于固定滞后平滑和固定点平滑等“实时”应用而言更显重要。平滑需要更多数据来得到估计，这通常需要比滤波更多的计算量。因此必须总是对所需的计算资源，这些资源是否可以获得以及它们的成本等进行考虑<sup>[10]</sup>。
5. 是否还存在更严重的存储限制因素？对于具有非常大的数据采集并采用固定区间平滑的一些应用而言，这可能会是一个问题。

### 3.3 三类平滑

#### 3.3.1 固定点平滑

##### 1. 算法实现

固定点平滑的目的是在时刻  $j+1, j+2, \dots, k, k+1, \dots$  获得  $x_j$  的先验状态估计。使用符号  $\hat{\mathbf{x}}_{j,k}$  来表示利用包含时刻  $k-1$  及之前的所有量测值获得的对状态  $\mathbf{x}_j$  的估计。也就是说， $\hat{\mathbf{x}}_{j,k}$  可以被当作在时刻  $k$  状态  $x_j$  的先验估计

$$\hat{\mathbf{x}}_{j,k} = E(\mathbf{x}_j | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) \quad k \geq j \quad (3.1)$$

在以上定义的基础上可以得到

$$\hat{\mathbf{x}}_{j,j} = E(\mathbf{x}_j | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{j-1}) = \hat{\mathbf{x}}_j^- \quad (3.2)$$

1) 运行卡尔曼标准滤波器直至时刻  $j$ ，在该时刻获得  $\hat{\mathbf{x}}_j^-$  和  $\mathbf{P}_j^-$ 。为方便表达，

以下省略  $\mathbf{P}_j^-$  表达式中负号上标。

2) 初始化滤波其如下：

$$\begin{aligned} \Sigma_j &= \mathbf{P}_j \\ \Pi_j &= \hat{\mathbf{P}}_j \\ \hat{\mathbf{x}}_{j,j} &= \hat{\mathbf{x}}_j^- \end{aligned} \quad (3.3)$$

3) 对于  $k=j, j+1, \dots$ ，执行如下操作：

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_k &= \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\ \lambda_k &= \Sigma_k \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{j,k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{j,k} + \lambda_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- &= \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{L}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \\ \mathbf{P}_{k+1} &= \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k (\mathbf{F}_k - \mathbf{L}_k \mathbf{H}_k)^{-1} + \mathbf{Q}_k \\ \Pi_{k+1} &= \Pi_k - \Sigma_k \mathbf{H}_k^T \lambda_k^T \\ \Sigma_{k+1} &= \Sigma_k (\mathbf{F}_k - \mathbf{L}_k \mathbf{H}_k)^T \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中， $\mathbf{P}_k$  是标准卡尔曼滤波的先验协方差， $\Pi_k$  是在  $k$  时刻对状态变量  $\mathbf{x}_j$  进行平滑估计的协方差， $\Sigma_k$  是  $\mathbf{P}_k$  和  $\Pi_k$  的互协方差。

## 2. 平滑提高估计精度

这里分析由平滑带来的  $\mathbf{x}_j$  估计精度的提高。 $\hat{\mathbf{x}}_j^-$  是状态  $\mathbf{x}_j$  的标准卡尔曼估计， $\hat{\mathbf{x}}_{j,k+1}$  是利用包括时间  $k$  在内测量值的平滑估计。换句话说， $\hat{\mathbf{x}}_{j,k+1}$  比  $\hat{\mathbf{x}}_j^-$  多使用了  $k+1-j$  个量测值来获得  $\hat{\mathbf{x}}_j$  的估计。估计精度可以通过协方差测量。平滑带来的精度提高等于卡尔曼滤波标准协方差估计  $\mathbf{P}_j$  减去平滑估计协方差  $\Pi_{k+1}$ 。可以通过 (3.3) 和 (3.4) 获得该精度提高量

$$\mathbf{P}_j - \Pi_{k+1} = \Pi_j - (\Pi_j - \sum_{i=j}^k \Sigma_i \mathbf{H}_i^T \lambda_i^T) = \sum_{i=j}^k \Sigma_i \mathbf{H}_i^T \lambda_i^T \quad (3.5)$$

为了进一步分析，假设系统是是不变的，并且在时刻  $j$  滤波的协方差已经达到了稳定状态，则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}_k^- = \mathbf{P} \quad (3.6)$$

从式（3.4）可以得到

$$\Sigma_{k+1} = \Sigma_k (\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})^T \quad (3.7)$$

其中  $\Sigma$  被初始化为  $\Sigma_j = \mathbf{P}$ 。结合该处是值，可得

$$\Sigma_{k+1} = \mathbf{P}[(\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})^T]^{k+1-j} = \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{F}}^T)^{k+1-j} \quad (3.8)$$

其中， $\tilde{\mathbf{F}}$  的定义在上式中给出。将上式和（3.4）中的  $\lambda$  代入式（3.5）中得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_j - \Pi_{k+1} &= \sum_{i=j}^k \Sigma_i \mathbf{H}_i^T \lambda_i^T \\ &= \mathbf{P}[\sum_{i=j}^k (\tilde{\mathbf{F}}^T)^{i-j} \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H} \tilde{\mathbf{F}}^{i-j}] \mathbf{P} \end{aligned} \quad (3.9)$$

等式右边是正定的，它说明  $\mathbf{x}_j$  平滑估计总是好于卡尔曼滤波估计。换句话说， $(\mathbf{P}_j - \Pi_{k+1}) > 0$  说明  $\Pi_{k+1} < \mathbf{P}_j$ ，而且，等式的右边是正定矩阵和，这说明  $k$  越大（即平滑估计中使用跟读测量值）越能提高估计精度。同时从上式可以看出，求和式中的  $(\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})$  被求逆了，这说明随着  $\mathbf{R}$  的增加，右边的值减小，极限情况下从式（3.9）可知：

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (\mathbf{P}_j - \Pi_{k+1}) = 0 \quad (3.10)$$

这给出了一个结论：量测噪声越大，通过平滑估计获得的精度提高越小<sup>[11]</sup>。这也符合人们的直觉，因为大的量测噪声意味着更多的量测值无法较大幅度的提高估计精度。

### 3. 常值状态平滑

接下来考虑常值状态在经过平滑处理后估计精度的提高。如果系统状态是常值，即  $\mathbf{F}_k = \mathbf{I}, \mathbf{Q} = \mathbf{0}$ ，根据（3.4）可知：

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1} &= \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k (\mathbf{F}_k - \mathbf{L}_k \mathbf{H}_k)^{-1} + \mathbf{Q}_k = \mathbf{P}_k (\mathbf{I} - \mathbf{L}_k \mathbf{H}_k)^{-1} \\ \Sigma_{k+1} &= \Sigma_k (\mathbf{F}_k - \mathbf{L}_k \mathbf{H}_k)^T = \Sigma_k (\mathbf{I} - \mathbf{L}_k \mathbf{H}_k)^T \end{aligned} \quad (3.11)$$

比较表达式  $\mathbf{P}_{k+1}$  和  $\Pi_{k+1}$ ，且从（3.3）中可知初始值  $\Sigma_j = \mathbf{P}_j$ ，因此对于  $k \geq j$  有  $\Sigma_k = \mathbf{P}_k$ ，这意味着式（3.4）中的  $L_k$  可以写作

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} = \Sigma_k \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} = \lambda_k \quad (3.12)$$

将结果带入式（3.3）中  $\Pi_{k+1}$  的表达式可以得到

$$\Pi_{k+1} = \Pi_k - \Sigma_k \mathbf{H}_k^T \lambda_k^T = \Pi_k - \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{L}_k^T \quad (3.13)$$

注意初始值  $\Pi_j = P_j$ ，比较上式和式 (3.11) 中的  $P_{k+1}$ ，可以看出对于  $k \geq j$ ，有  $\Pi_k = P_k$ 。式中的  $P_k$  是标准卡尔曼滤波  $\mathbf{x}_k$  估计的协方差， $\Pi_k$  是使用时刻  $k-1$ （包括时刻  $k-1$ ）之前所有量测值对状态  $\mathbf{x}_j$  估计的协方差。

这个结果说明对于常值的估计使用平滑处理是没有意义的<sup>[12]</sup>。如果需要用  $k > j$  时间的量测值估计时刻  $j$  的常值状态，则简单地运行卡尔曼滤波直至时刻  $k$  即可，执行平滑在估计精度方面将不会有任何的提高。

### 3.3.2 固定滞后平滑

用包括时刻  $k$  以及之前所有的量测值获得时刻  $k-N$  状态的估计，当获得新的量测值时， $k$  持续改变，但  $N$  却是常量，这就是固定滞后平滑。换句话说，对于状态估计，在每一个时刻都有  $N$  个未来的量测值可以利用，即获得  $\hat{\mathbf{x}}_{k-N,k}$ ，其中  $k=N, N+1, \dots$ ，这里  $N$  是固定的正整数。在后面的计算中，将使用如下的表达式：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k-N,k} &= E(\mathbf{x}_{k-N} | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k) \\ \Pi_{k-N} &= E[(\mathbf{x}_{k-N} - \hat{\mathbf{x}}_{k-N,k})(\mathbf{x}_{k-N} - \hat{\mathbf{x}}_{k-N,k})^T]\end{aligned}\quad (3.14)$$

在这里，该表示方法与上一节相比有一些变化。在上一小节，使用符号  $\hat{\mathbf{x}}_{k,m}$  表示利用时刻  $m-1$  及之前所有的量测值来估计状态  $\mathbf{x}_k$ 。在这一节以及下一节中，用  $\hat{\mathbf{x}}_{k,m}$  表示利用时刻  $m$  及之前所有的量测值来估计状态  $\mathbf{x}_k$ 。

- 1) 运行式 (2.17) 的卡尔曼滤波，获得  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$ ,  $\mathbf{L}_k$  和  $\mathbf{P}_k^-$ 。
- 2) 初始化固定滞后平滑如下：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \\ \mathbf{L}_{k,0} &= \mathbf{L}_k \\ \mathbf{P}_k^{0,0} &= \mathbf{P}_k^-\end{aligned}\quad (3.15)$$

- 3) 对于  $i=1, \dots, N+1$ ，运行如下式子：

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{k,i} &= \mathbf{P}_k^{0,i-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^{0,0} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\ \mathbf{P}_{k+1}^{i,i} &= \mathbf{P}_k^{i-1,i-1} - \mathbf{P}_k^{0,i-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{L}_{k,i} \\ \mathbf{P}_{k+1}^{0,i} &= \mathbf{P}_k^{0,i-1} (\mathbf{F}_k - \mathbf{L}_{k,0} \mathbf{H}_k)^T \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1-i,k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+2-i,k} + \mathbf{L}_{k,i} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)\end{aligned}\quad (3.16)$$

注意，第一次运行此循环时，是实现标准卡尔曼滤波的量测更新。在这个循环的最后，可以获得了基于包含时刻  $k$  及所有之前量测值的延迟在  $0 \sim N$  之间的每



一个状态的平滑估计，这些估计被记作  $\hat{\mathbf{x}}_{k,k}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{k-N,k}$ 。同时也获得估计误差协方差，记作  $\mathbf{P}_{k+1}^{1,1}, \dots, \mathbf{P}_{k+1}^{N+1,N+1}$ 。

由平滑获得的精度提高百分比计算如下：

$$\text{提高百分比} = \frac{100\text{Tr}(\mathbf{P}_k^{1,1} - \mathbf{P}_k^{N+1,N+1})}{\text{Tr}(\mathbf{P}_k^{0,0})} \quad (3.17)$$

### 3.3.3 固定区间平滑

假设有固定时间间隔内的量测值，获得在时间间隔内某些时刻的状态估计，就被称之为固定区间平滑（或固定间隔平滑）。在平滑处理过程中没有更多的新的量测值。在本小节的前半部分，将讨论前后向平滑方法，该方法也许是最直观的平滑算法；在后半部分，将讨论 RTS 平滑，相比前后向平滑，其计算量更小。

#### 1. 前后向平滑

1) 初始化前向滤波器如下：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{f0}^+ &= E(\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{P}_{f0}^+ &= E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{f0}^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{f0}^+)^T] \end{aligned} \quad (3.18)$$

2) 对于  $k=1, \dots, m$ ，运行如下方程：

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{fk}^- &= \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{f,k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \\ \mathbf{K}_{fk} &= \mathbf{P}_{fk}^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{fk}^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{fk}^- &= \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{f,k-1}^+ \\ \hat{\mathbf{x}}_{fk}^+ &= \hat{\mathbf{x}}_{fk}^- + \mathbf{K}_{fk} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{fk}^-) \\ \mathbf{P}_{f0}^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{fk} \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{fk}^- \end{aligned} \quad (3.19)$$

此时获得了  $\mathbf{x}_m$  的前向估计及估计协方差。这些估计值是利用包含时刻  $m$  及之前所有量测值获得的。

3) 初始化后向滤波如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_N^- &= 0 \\ \mathbf{I}_{bN}^- &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.20)$$

4) 对于  $k=N, N-1, \dots, m+1$  执行如下方程：

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{bk}^+ &= \mathbf{I}_{bk}^- + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{s}_k^+ &= \mathbf{s}_k^- + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k \\ \mathbf{I}_{b,k-1}^- &= [\mathbf{F}_{k-1}^{-1} (\mathbf{I}_{bk}^+)^{-1} \mathbf{F}_{k-1}^{-T} + \mathbf{F}_{k-1}^{-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{F}_{k-1}^{-T}]^{-1} \\ \mathbf{s}_{k-1}^- &= \mathbf{I}_{b,k-1}^- \mathbf{F}_{k-1}^{-1} (\mathbf{I}_{bk}^+)^{-1} \mathbf{s}_k^+ \end{aligned} \quad (3.21)$$

5) 执行最后时刻更新来获得  $\mathbf{x}_m$  的后向估计:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{bm}^- &= \mathbf{Q}_m^{-1} - \mathbf{Q}_m^{-1} \mathbf{F}_m^{-1} (\mathbf{I}_{b,m+1}^- + \mathbf{F}_m^T \mathbf{Q}_m^{-1} \mathbf{F}_m^{-1})^{-1} \mathbf{F}_m^{-T} \mathbf{Q}_m^{-1} \\ \mathbf{P}_{bm}^- &= (\mathbf{I}_{bm}^-)^{-1} \\ \mathbf{s}_m^- &= \mathbf{I}_{bm}^- \mathbf{F}_m^{-1} (\mathbf{I}_{b,m+1}^+)^{-1} \mathbf{s}_{m+1}^+ \\ \hat{\mathbf{x}}_{bm}^- &= (\mathbf{I}_{bm}^-)^{-1} \mathbf{s}_m^-\end{aligned}\quad (3.22)$$

现在得到了后向估计  $\hat{\mathbf{x}}_{bm}^-$  和它的协方差差  $\mathbf{P}_{bm}^-$ 。通过测量  $m+1, m+2, \dots, N$  可以获得如上这些估计。

获得以上后向估计值后, 将其与 (3.19) 中的前向估计值相结合获得最终的状态估计和协方差:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_f &= \mathbf{P}_{bm}^- (\mathbf{P}_{fm}^+ + \mathbf{P}_{bm}^-)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_m &= \mathbf{K}_f \hat{\mathbf{x}}_{fm}^+ + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_f) \hat{\mathbf{x}}_{bm}^- \\ \mathbf{P}_m &= [(\mathbf{P}_{fm}^+)^{-1} + (\mathbf{P}_{bm}^-)^{-1}]^{-1}\end{aligned}\quad (3.23)$$

## 2. RTS 平滑

固定间隔平滑也存在其它形式。其中最常用的平滑方法是由 Rauch、Tung 和 Striebel 提出的, 通常被称为 RTS 平滑。相对于前面提出的平滑器, RTS 平滑计算效率更高, 因为不需要为了获得平滑估计和协方差而直接计算后向估计和协方差 [13]。

1) 初始化前向滤波器如下:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{f0}^+ &= E(\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{P}_{f0}^+ &= E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{f0}^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{f0}^+)^T]\end{aligned}\quad (3.24)$$

2) 对于  $k=1, \dots, N$  (其中  $N$  是最后时刻), 前向执行标准卡尔曼滤波:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{fk}^- &= \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{f,k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{fk}^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{fk}^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{fk}^- &= \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{f,k-1}^+ + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{fk}^+ &= \hat{\mathbf{x}}_{fk}^- + \mathbf{K}_{fk} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{fk}^-) \\ \mathbf{P}_k^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{fk} \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{fk}^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{fk} \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_{fk} \mathbf{R}_k \mathbf{K}_{fk}^T\end{aligned}\quad (3.25)$$

3) 初始化 RTS 平滑如下:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_N &= \hat{\mathbf{x}}_{fN}^+ \\ \mathbf{P}_N &= \mathbf{P}_{f0}^+\end{aligned}\quad (3.26)$$

4) 对于  $k=N-1, \dots, 1, 0$ , 执行如下的平滑等式:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_{f,k+1}^{-} &= (\mathbf{P}_{f,k-1}^{-})^{-1} \\
 \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{fk}^{+} F_f^k \mathbf{I}_{f,k+1}^{-} \\
 \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_{fk}^{+} - \mathbf{K}_k (\mathbf{P}_{f,k+1}^{-} - \mathbf{P}_{k+1}) \mathbf{K}_k^T \\
 \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_{fk} + \mathbf{K}_k (\hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{f,k+1}^{-})
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

## 第4章 平滑估计的实例运用

在本章中，将使用 MATLAB 工具对一些实际问题进行仿真，并就其结果中的数据和图像进行简单分析，从而讨论卡尔曼平滑对系统估计带来的效果。本论文涉及五个仿真程序，其主要部分依次在附录 A 中给出。

### 4.1 一维温度估计系统三类平滑估计

为了更好地说明三类平滑，本节中将引用一个典型的室温估计系统，并采用不同类型的平滑器对其状态变量进行最优估计，从而分析它们的实际工作效果。

假设有一个房间，其屋内温度大致在 25 摄氏度左右，当然，每一时刻的温度都会有所不同，这是符合实际的。室内有一个温度指示器，它将会测出每一时刻的室内的温度。事实上，设备不是理想的，这意味着每一次测量都是存在误差的（这里不讨论读数带来的偏差，可将其忽略）。除此之外，实验过程应当还存在误差，也应其考虑在内。假设测量误差和过程误差为不相关高斯白噪声，这将有助于更好的建立数学模型并进行分析。需要注意，这是一个一维离散数学模型，所以只需要考虑温度这一个变量即可。在第二章中论述线性离散系统时给出了其一般性方程，如式（2.1），（2.2）和（2.3）中所示。下面将对这三个式子中的基本参数初始化，进而建立完整的数学模型。考虑到是实际问题，初始化时也应该包含平滑所需的其它一些参数，如初始实际室温，初始估计室温等。

1. 室内的初始温度： 25.1℃；
2. 室内温度的协方差初始值： 0.01；
3. 第一次测量的温度： 24.7℃；
4. 初始估计值： 24.7℃。

事实上，初始估计温度的值并不影响系统的估计效果，平滑算法会使得估计值快速向实际值靠拢并稳定在某个常数或者某个常向量。

5. 噪声误差协方差：  $Q=0.1$ ，  $R=0.5$ ；
6. 对于一维系统来说，系统矩阵都是一阶单位矩阵：

$$F=1, G=1, H=1, I=1;$$

7. 系统中没有输入量，故  $u=0$ ；
8. 采样点数为 100，采样间隔为 1s。

接下来就要通过一系列时刻的数据对所需要时刻的温度进行估计，使其更加靠近实际值。

为了更加明显的展示平滑效果，在下文中没有选取从初始时刻（ $t=0$ ）到结束时刻（ $t=100$ ）的所有数据，只节选了部分重要时刻的数据进行分析。

#### 4.1.1 固定点平滑

不妨假设对  $j=50$  时刻处的数据感兴趣，则要对该时刻的状态变量  $x_j$  进行固定点平滑估计。在  $k \leq 50$  的时刻进行标准卡尔曼滤波，直到得到  $k=50$  时刻的后验估计，从此后的每一个测量值都将用于更新  $k=j$  这一点的状态变量估计。其效果如图 4.1 所示。

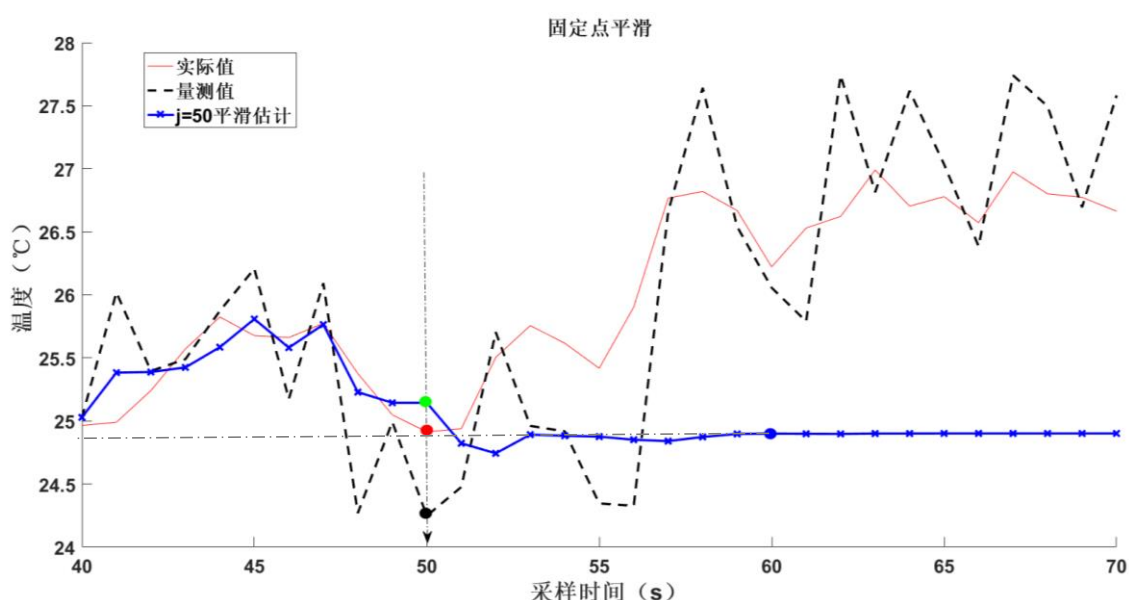


图4.1 固定点平滑

Fig. 4.1 Fixed point smoothing

由图 4.1 易知，当  $k > j$  时，随着  $k$  的增加，对  $k=j$  这一点的状态变量估计值不断被更新并且趋于稳定的一个常数。这个常数，就是对前面假设所感兴趣（ $j=50$ ）时刻室内温度的最优平滑估计。

在到达  $k=j$  时刻前，固定点平滑器就相当于卡尔曼滤波器，获得相应时刻的先验和后验估计，此后的数据才将被用于  $k=j$  点的平滑估计。可以理解为用  $k=j$  时刻以后的数据对该点卡尔曼滤波估计值进行更新和修正。因为有更多的数据来对固定点的状态变量进行更好的估计，所以平滑相比于滤波更加精准。图 4.1 中标出了四个点，分别为  $k=j$  时刻室内温度的真实值，测量值，滤波估计值和平滑估计值。表 4.1 为这些参数的汇总。不难发现，平滑估计值更加接近测量值，这验证了上面的说法。

表 4.1  $k=j$  时刻各项参数  
Table 4.1 Parameters when  $k = j$

参数	值
真实值	24.914
测量值	24.248
滤波估计值	25.144
平滑估计值	24.901

同时，对于这点的估计  $\hat{x}_j$ ，在  $k=j=50$  以后经过大概十个后继时刻点测量数据的补充更新（平滑估计）后，其值就已大致稳定到一个常数，接下来的数据对其估计值的改善效果并不明显。这给说明：在对一个固定点进行平滑估计时，如果对于精度期望不高或者在计算量不允许的情况，只要有少量却足够的后继时刻数据，对某一固定点的数据就可以实现最优平滑估计。

#### 4.1.2 固定滞后平滑

假设设备从采样开始到获得数据存在 8s 的纯时滞。那么通过固定滞后平滑器（ $\tau=8$ ），可以得到如图 4.2 的结果。其中，当  $92 < k < 100$  时，数据平滑值消失，因为  $k=100$  以后是没有测量数据，无法对时滞  $\tau=8s$  之前的状态变量进行平滑估计，这符合固定滞后平滑的原则。图 4.3 为其误差分析图像。

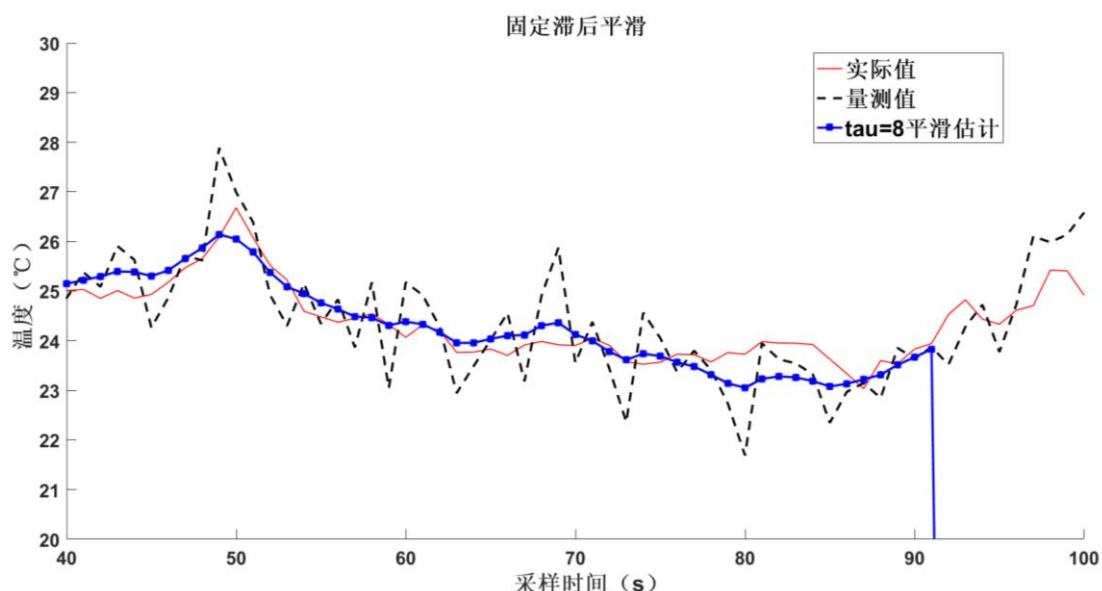


图4.2 固定滞后平滑

Fig. 4.2 Fixed delay smoothing

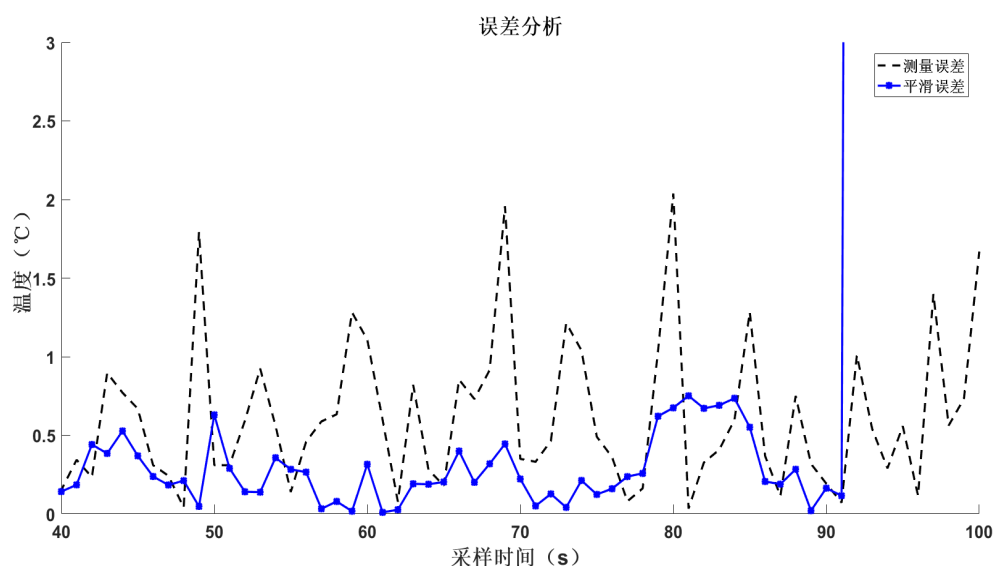


图 4.3 固定滞后平滑误差

Fig. 4.3 Errors in fixed delay smoothing

#### 4.1.3 固定区间平滑

在上一章中，细述了固定区间平滑中的两类算法，分别是前后向平滑和 RTS 平滑。两者只是算法有些不同，但其实际估计结果是一样的。下面分别是两种平滑算法的运行效果：

##### 1. 前后向平滑：

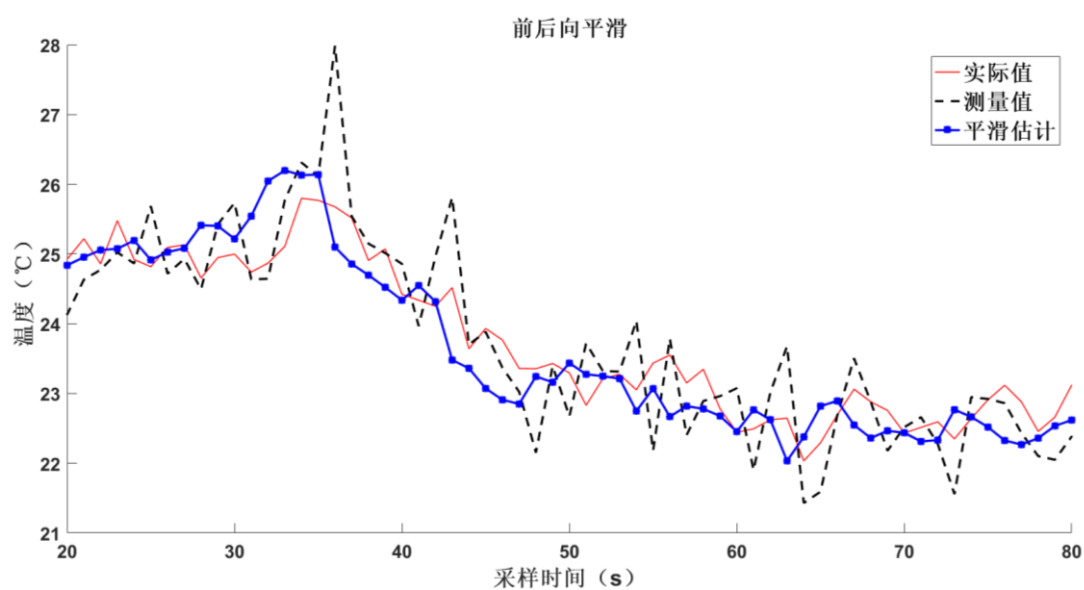


图 4.4 前后向平滑

Fig. 4.4 Forward and backward smoothing

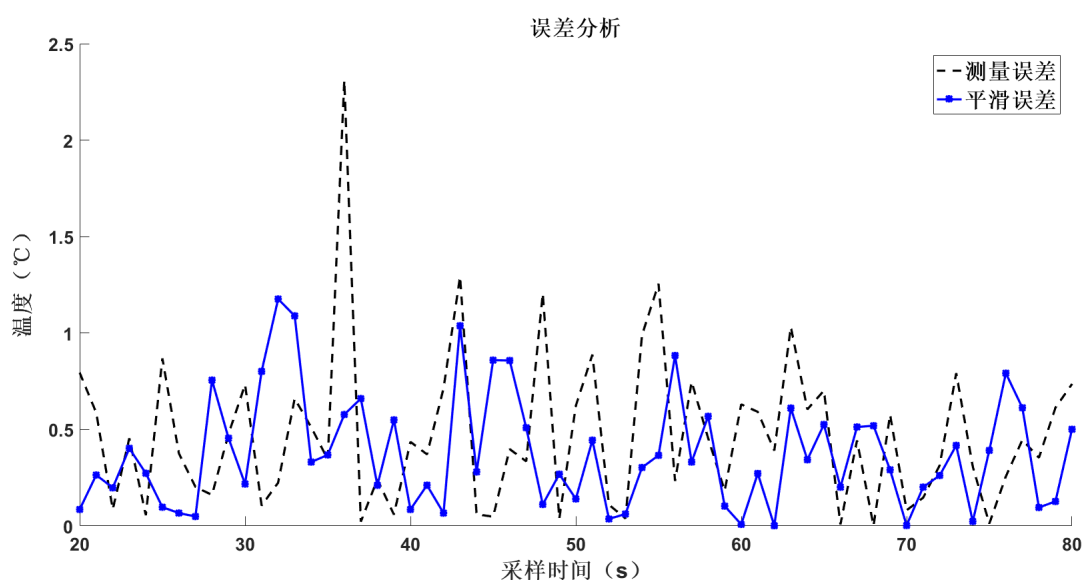


图 4.5 前后向平滑误差

Fig. 4.5 Errors in forward and backward smoothing

图 4.4 为前后向平滑器的工作效果，图 4.5 为其误差分析图像。可以发现，平滑估计值能更好的追踪实际值，其偏差对比于量测值表现得更好。

## 2. RTS 平滑：

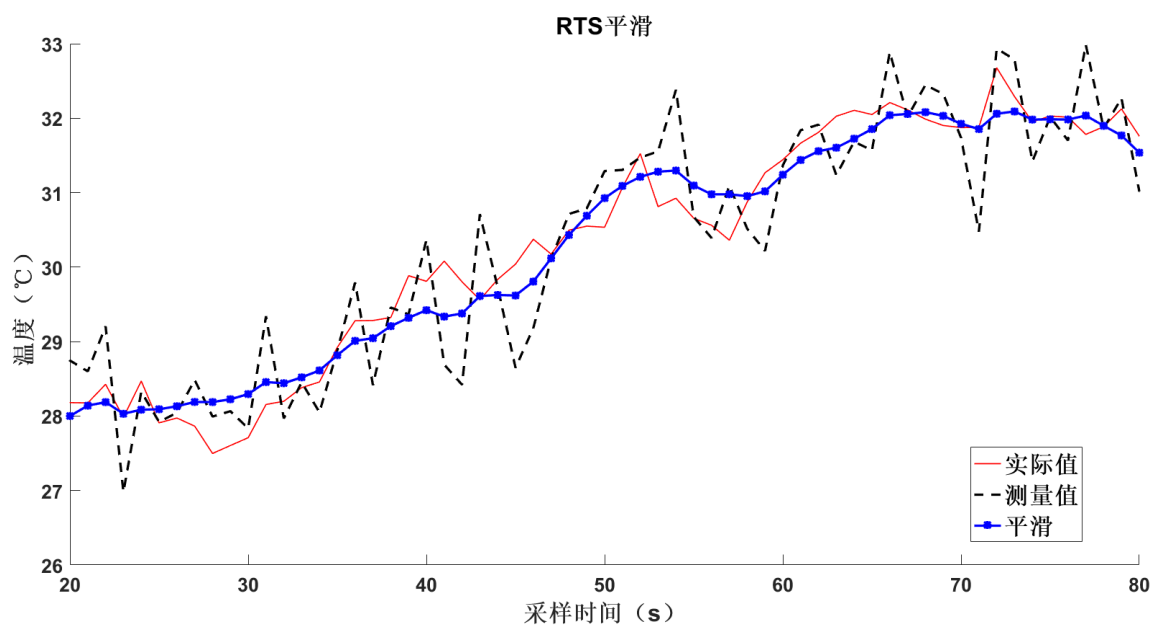


图 4.6 RTS 平滑

Fig. 4.6 RTS smoothing



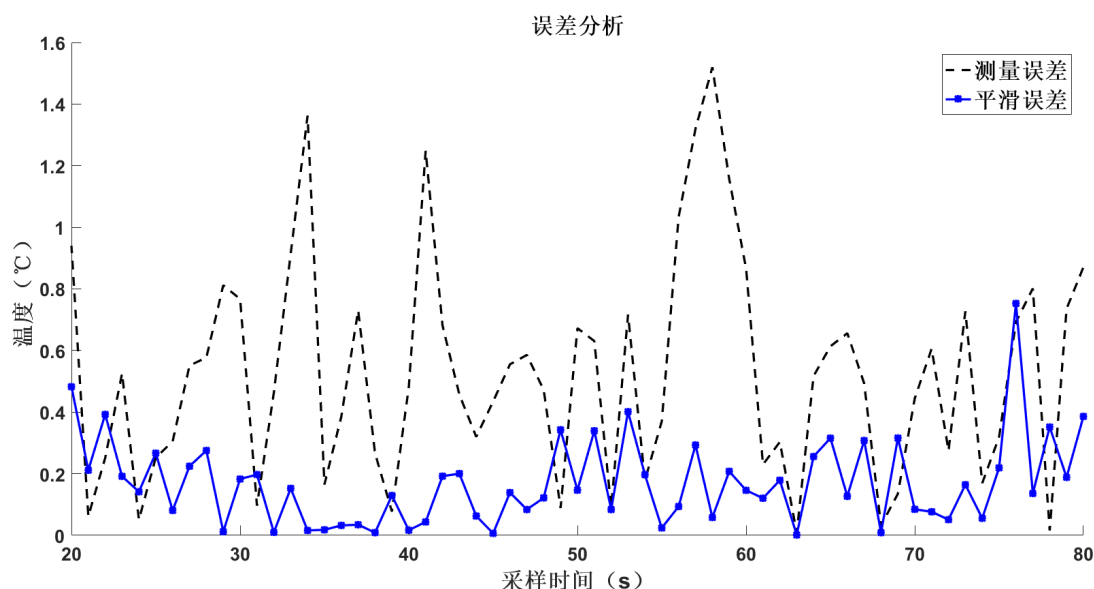


图 4.7 RTS 平滑误差

Fig. 4.7 Errors in RTS smoothing

相比于前后向平滑，RTS 平滑运算速度更快，占用空间更小<sup>[14]</sup>。因为 RTS 平滑不需要直接计算后向估计和协方差。尤其是当采样点数变多或者采样数据偏大时，RTS 平滑的运算优势就更为明显。当然，两者的运行结果始终是一致的，因为都属于固定区间平滑，只存在算法上的差异。图 4.6 为 RTS 平滑效果图，图 4.7 为其误差分析图像。

## 4.2 多维坐标估计系统

在章节 4.1 中，以不同类型的平滑器为工具，实现了单一维度的温度预测模型的平滑估计：依据条件和需求的不同，可以选择合适的平滑估计器。

在实际生活中，需要解决的问题往往基于多维度和复杂的数学模型。因在本论文中只讨论线性离散系统的估计，因此选择一个二维的简单模型，在此基础上对维度进行扩展，进而得到维度的复杂的高级系统模型。

卡尔曼滤波的一大应用就是车载系统的定位和导航，最优平滑也同样适用于此。但是，它更多的却是被用于航空系统当中，实现位置追踪和信号插值处理<sup>[15]</sup>。

在这一小节，将分析固定点平滑在一个二维定位系统当中的应用，其中包括对其原理和工作效果的描述。在这一系统中，有两个方向（水平和垂直）上的变量需要进行估计，再在平面直角坐标系中确定其唯一位置（坐标）。当然，这两个变量是互不相关的，平滑器将分别对其做出估计，最后结合两者给出状态对变

量  $\hat{\mathbf{x}}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix}$  的平滑估计。事实上，固定点平滑算法并不会因为系统维度的改变而改变，只需要保证其对应的各个系数矩阵在运算中能够匹配维度，模型运算逻辑正确，依然可以实现同一维系统效果相同的最优估计。

同上一节中的一维系统分析，先对模型内的一些基本参数进行初始化。

1. 研究点的初始位置：(50, 50)；

2. 初始协方差：  $\begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$ ；

水平方向和竖直方向的协方差不相关，故反对角线上元素皆可记为 0；

3. 第一次测量坐标：(50.4, 49.8)；

4. 初始估计坐标：(50.4, 49.8)；

5. 噪声误差协方差：Q=0.1，R=0.5；

输入噪声  $\mathbf{w}_k$  和观测噪声  $\mathbf{v}_k$  皆为  $2 \times 1$  阶矩阵。

6. 各个系统矩阵：

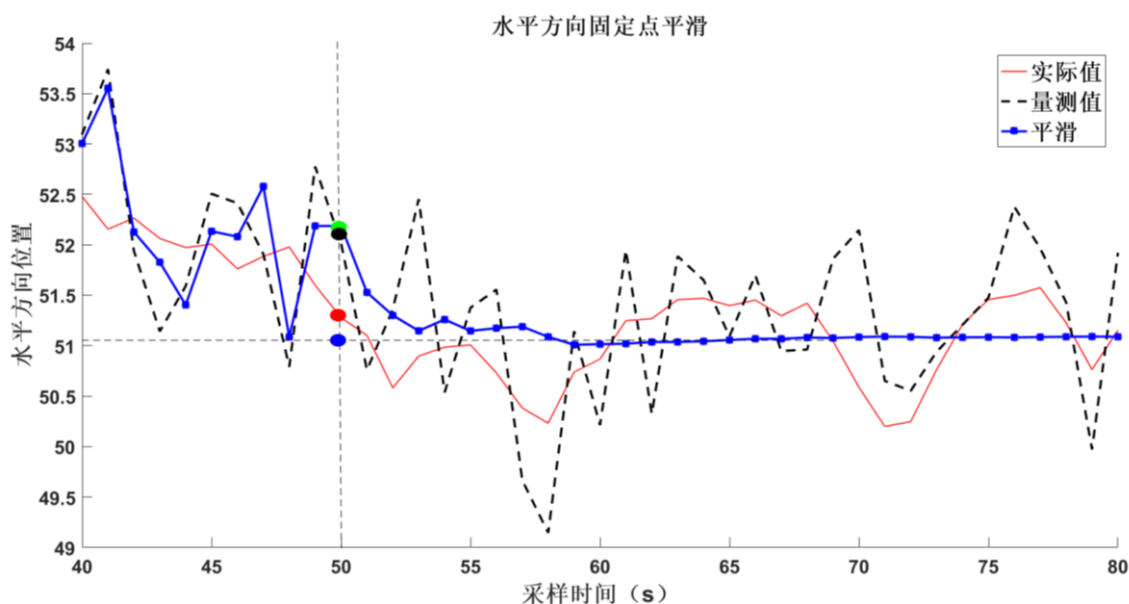
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = 0 \text{ (加速度为 0, 估驱动矩阵为零矩阵)},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (水平和竖直方向数据都可观测)}, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

7. 系统中没有输入量（加速度），故  $\mathbf{u}=0$ ；

8. 采样点数为 200，采样间隔为 1s。

根据以上参数，设计一个平面直角坐标系中动点位置跟踪估计的 MATLAB 程序，运行结果置于附录 B 中。在图 B.1 中，红色轨迹是研究点不断位移的路径，黑色轨迹为其量测值，围绕其周围运动并始终存在误差，而蓝色轨迹是对  $k=50$  时刻点的位置进行固定点平滑估计的结果。相比其它两个数据而言，最优估计值更加集中，这符合固定点平滑原理：状态变量估计值最终稳定在一个常数（或常向量）。



4.8 水平方向固定点平滑

Fig. 4.8 Errors in RTS smoothing

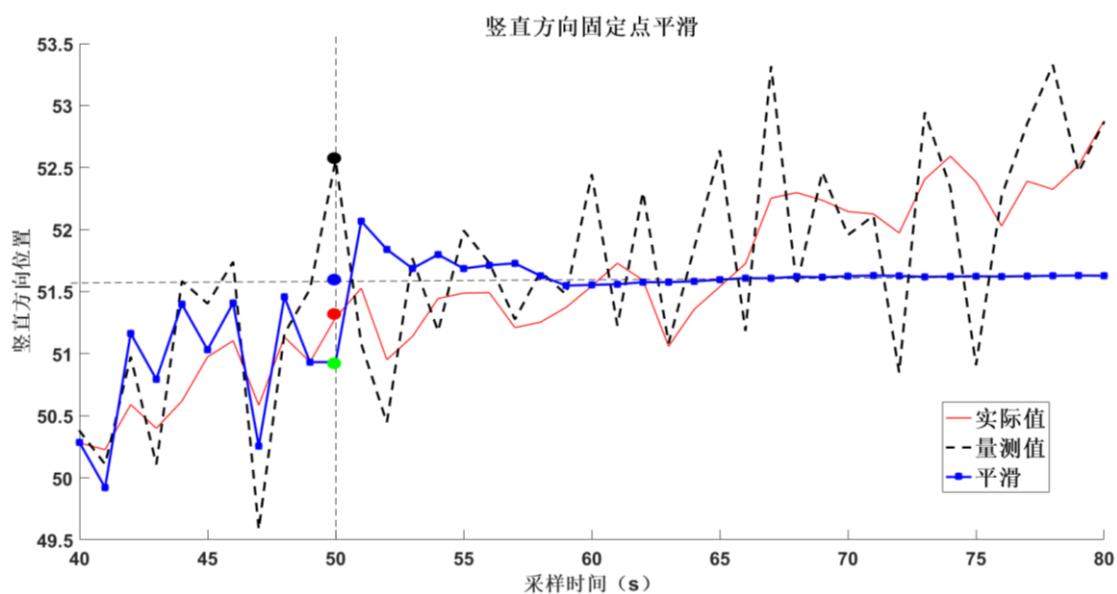


图 4.9 竖直方向固定点平滑

Fig. 4.9 Errors in RTS smoothing

通过分析数据能更好的发现这一收敛特性。表 4.2 是从模型 2 中的 MATLAB 变量表中节选的一部分数据。在程序中，设定了采样总数  $N=200$ ，平滑估计固定点  $j=50$ ，采样间隔为  $\Delta T=1s$ ，所以状态变量的平滑估计变量  $\mathbf{x}_{smoother}$  为  $1*N$  维矩阵（其实为一个行向量）。先取第一组数据，再每隔十个采样点取一次数据直，

这样就有 21 组数据可以用于观测和分析。在表 4.2 中，第一行为采样点，第二行为水平方向变量  $x$ ，第三行为垂直方向变量  $y$ 。可以发现，从采样时刻  $k=100$  以后，数据基本趋于稳定，后续的平滑对估计值的改变微乎其微。

表 4.2 平滑节选数据

Table 4.2 Selected data of smoothing

采样点 (s)	1	10	20	30	40	50	60
X 轴方向	50.400	50.274	49.403	50.524	53.005	52.187	51.015
Y 轴方向	49.800	51.591	53.174	51.224	50.285	50.932	51.555
采样点 (s)	70	80	90	100	110	120	130
X 轴方向	51.086	51.089	51.086	51.087	51.087	51.087	51.087
Y 轴方向	51.625	51.628	51.626	51.626	51.626	51.626	51.626
采样点 (s)	140	150	160	170	180	190	200
X 轴方向	51.087	51.087	51.087	51.087	51.087	51.087	51.087
Y 轴方向	51.626	51.626	51.626	51.626	51.626	51.626	51.626

将状态变量中两个维度变量的估计情况分别在 MATLAB 中绘制出来，如图 4.8 和图 4.9 所示。这与上文中表格数据分析的结论是完全吻合的。这两张图与上一章中对单一维度状态变量进行估计的效果一样，这也验证了本章开头所述的内容：固定点平滑算法不会因为系统维度的改变而改变。

通过上述简单二维系统的最优平滑估计分析，对多维系统平滑器可以有更进一步的认识。虽然本小结中只介绍了一类平滑器（固定点平滑）在多维系统中的应用，但是对于不同类型的平滑器，其实现原理是相同的：首先根据需求和条件确定合适类型的平滑器，再调整其所需要的各个系数矩阵并保证其匹配性和逻辑性，通过其对应算法进行最优平滑估计处理。

### 4.3 平滑与滤波比较

下面将对卡尔曼滤波与卡尔曼平滑作比较。绪论一章已经对这两种类型的最优估计器进行了概念性的介绍。卡尔曼滤波器是对下一时刻状态变量进行估计，它只利用估计的状态变量之前的所有数据；而最优平滑器，它利用除了估计的状态变量之前的所有数据以外，还有其后面时刻的数据。就估计效果而言，平滑器比

滤波器效果更好；但是滤波是实践性更好，平滑对运算数据量和速度要求更高，这也是滤波器比平滑器更加普及的原因。

在本章开头给出的固定点平滑中，滤波器的估计值确实比平滑器的估计值偏差更大。如图 4.1 中所示，在水平标度上，平滑估计点比滤波估计点更靠近实际点；在数值方便从表 4.1 也不难看出固定点平滑误差更小。在这小节中，将对一个固定区间内的数据进行滤波和平滑处理，从而区分滤波器和平滑器的不同，并比较的出一般性结论。

图 4.10 是第三章中室温估计系统在卡尔曼滤波器和固定区间平滑器（RTS）作用下得出的结果，图 4.11 为其误差分析。

可以明显地发现：平滑器更接近实际值，它的估计效果的确比滤波器要好。但是在真正运用时，需要根据实际情况，分析具体需求和硬件设施条件，最后再选择合适的估计器。如果对数据的估计精度要求高，则采用最优平滑是理想的；当对于精度要求不那么高，并且数据运算功能受限或者数据存储空间不宜过大时，滤波器更为方便。

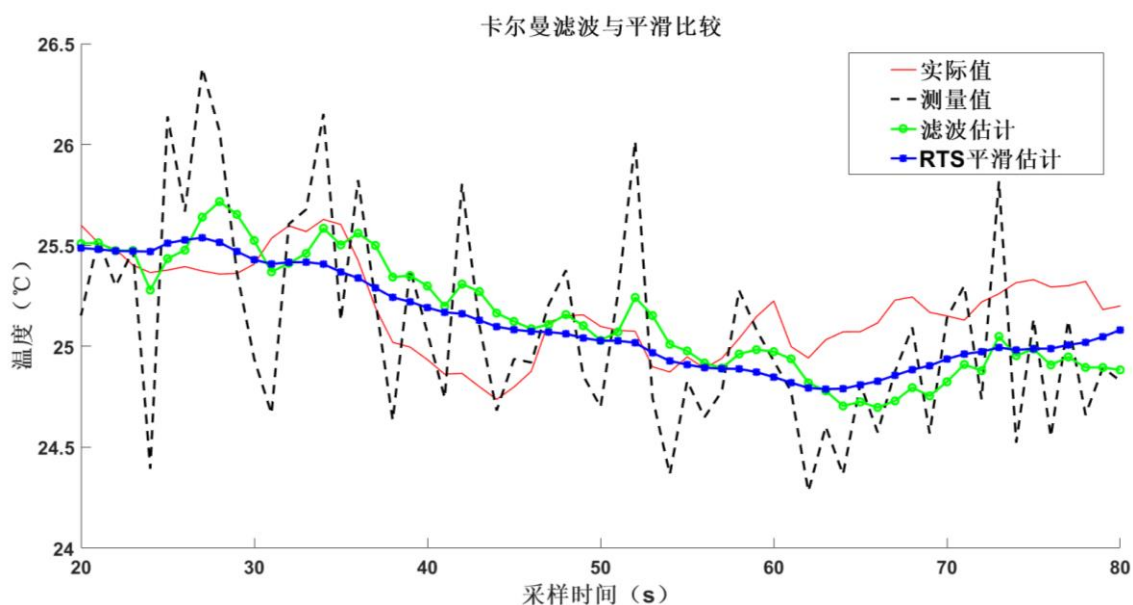


图 4.10 平滑与滤波比较

Fig. 4.10 Smoothing versus filtering

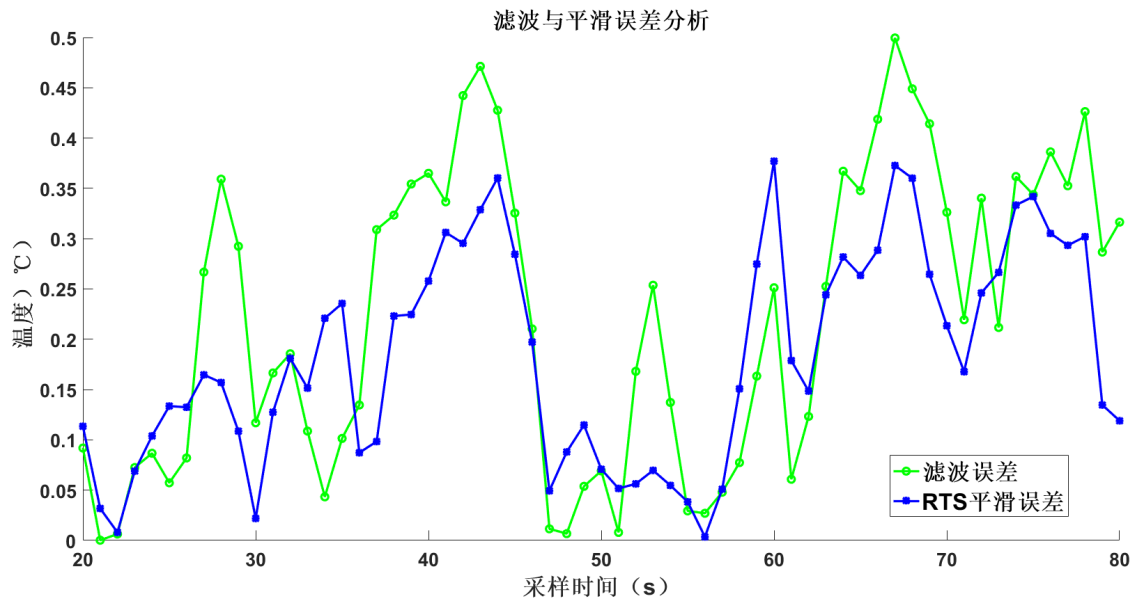


图 4.11 平滑与滤波误差

Fig. 4.11 Errors in smoothing and filtering

## 第 5 章 结论

本文从最优平滑的理论基础出发，详述三类平滑算法，通过举例具体的温度估计系统和二维坐标估计系统，分析各类平滑的特点和应用原则。

最优平滑是基于卡尔曼滤波算法的一种最优状态估计，也被称之为卡尔曼平滑。它与预测器、滤波器的区别在于估计值何时有效。与这两者相比，最优平滑放宽了时间约束，使用了更多的数据。因为涉及到需要采用估计点以后时刻的数据，所以实时性较差；同时，对数据的计算量要求更高。这使得在实际生活中滤波器比平滑器更为普及。这并不意味着最优平滑没有作用：在精度提高方面，平滑器做的更好。

卡尔曼平滑算法可以分成三类：固定点平滑、固定滞后平滑和固定区间平滑。区分依据在于估计值的范围和估计可用数据的范围不同<sup>[16]</sup>。固定点平滑用于对某一特定时刻的系统状态做出最优估计；固定滞后平滑用于存在时滞时的系统，并且它是实时的。固定区间平滑用于对区间内某个状态变量进行估计，且供参考的测量数据仅局限于该区间内部。

在应用和仿真部分，给出了两个经典的状态估计系统案例。前者为一维温度估计系，后者为位置坐标估计系统。在论文中，将三种类型的平滑算法应用到室温估计模型中，分析其特点并将其展示在 MATLAB 仿真绘图当中。定位估计系统用于分析并得出多维模型的解决思路：将  $N$  维系统（变量不相关）拆分成单一维度模型进行最优平滑估计。

最后，对平滑器和滤波器进行比较，验证了平滑估计精度高于滤波估计精度。展示方案择优的依据：考虑估计精度和数据计算量及存储量。

## 参 考 文 献

- [1] 吴涛.基于时间序列预测的最优估计方法研究[D]:(硕士学位论文).天津:天津理工大学,2011.
- [2] 陈爽,崔新维,李春兰.基于模糊 PI 与卡尔曼滤波器控制的液压变桨系统研究[J].能源研究与管理,2017,(2):47-51.
- [3] 温礼,茅旭初.基于非线性卡尔曼平滑的 GPS 定位估计方法[J].计算机仿真,2007,24(12):66-69.
- [4] Simon D 著.张勇刚,李宁等译.最优状态估计:卡尔曼,  $H_\infty$  及非线性滤波[M].北京:国防工业出版社.2013:89-93.
- [5] 汪玲,朱栋强,马凯莉等.空间目标卡尔曼滤波稀疏成像方法[J].电子与信息学报,2018,40(4):846-852.
- [6] 熊国强.确定指数平滑参数的最优化方法[J].西安理工大学学报,2000(3):313-315.
- [7] 黄小平,王岩.卡尔曼滤波原理及应用:MATLAB 仿真[M].北京:电子工业出版社.2015:31.
- [8] 孙伟,段顺利,闫慧芳等.基于卡尔曼平滑的 AWKNN 室内定位方法[J].电子科技大学学报,2018,47(6):829-833.
- [9] 卢伯英,陈国清,陶汉铭等.卡尔曼平滑在动态推力测量中的应用[J].北京航空航天大学学报,1990(1):51-56.
- [10] 雷菊阳,黄克,许海翔等.线性动态系统基于块采样的卡尔曼平滑推理算法[J].上海交通大学学报,2008,42(8):1396-1400.
- [11] 张海涛.高速列车组合导航系统算法研究[D]:(硕士学位论文).成都:电子科技大学,2009.
- [12] Bocquet M,Sakov P.An iterative ensemble Kalman smoother[J].Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society,2014,140(682):1521-1535.
- [13] Bocquet M.Localization and the iterative ensemble Kalman smoother[J].Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society,2016,142(695):1075-10890.
- [14] 程禹,吴限德,韩华等.基于卡尔曼滤波和 RTS 事后平滑的 GNSS 共视时间比对算法[J].哈尔滨工程大学学报,2018,39(5):915-920.
- [15] 吴旭.SINS/BD2 组合导航系统误差校正及信息融合技术研究[D]:(硕士学位论文).哈尔滨.哈尔滨工程大学,2013.
- [16] 刘成,郭树人,李芳.卫星导航定位卡尔曼滤波时延平滑方法研究[J].测绘通报,2017,(11):6-10.



## 附录 A MATLAB 仿真程序

此附录中列写了 MATLAB 仿真时的主要程序。

### A.1 一维温度预测模型

#### A.1.1 卡尔曼滤波程序

```
for k=2:N
    %状态更新
    X(k)=A*X(k-1)+G*W(k-1);
    Y(k)=H*X(k)+V(k);
    %数据更新
    X_pr=A*Xkf(k-1);
    P_pr=A*P(k-1)*A'+Q;%
    Kg=P_pr*H'*inv(H*P_pr*H'+R);% 卡尔曼增益
    Xkf(k)=X_pr+Kg*(Y(k)-H*X_pr); %滤波估计（后验）
    P(k)=(I-Kg*H)*P_pr;%
end
```

#### A.1.2 卡尔曼平滑程序

##### [1] 固定点平滑

```
for k=j:N-1
    L_k=F*Ppr(k)*H'*inv(H*Ppr(k)*H'+R); % 卡尔曼滤波的另一种形式
    lambda_k=Sigma(k)*H'*inv(H*Ppr(k)*H'+R);
    Xsm(k+1)=Xsm(k)+lambda_k*(Y(k)-H*Xpr(k));% 平滑估计（后验）
    Xpr(k+1)=F*Xpr(k)+L_k*(Y(k)-H*Xpr(k));
    Ppr(k+1)=F*Ppr(k)*(F-L_k*H)'+Q;
    Pi(k+1)=Pi(k)-Sigma(k)*H'*lambda_k';
    Sigma(k+1)=Sigma(k)*(F-L_k*H)';
end
```

##### [2] 固定滞后平滑

```
for k=tau+1:N-1 % 滞后平滑至少要从tau时刻开始计算
    L(k)=F*Ppr(k)*H'*inv(H*Ppr(k)*H'+R);
    Ppr(k+1)=F*Ppr(k)*(F-L(k)*H)'+Q
```

```

Xpr(k+1)=F*Xpr(k)+L(k)*(Y(k)-H*Xpr(k));
% 初始化数据
Xm(k+1)=Xpr(k+1);
Lk(1)=L(k);
Pk(1,1,k)=Ppr(k);
for i=2:tau+1
    Lk(i)=Pk(1,i-1,k)*H'*inv(H*Pk(1,1,k)*H'+R);
    Pk(i,i,k+1)=Pk(i-1,i-1,k)-Pk(1,i-1,k)*H'*Lk(i)';
    Pk(1,i,k+1)=Pk(1,i-1,k)*(F-Lk(1)*H)';
    Xm(k+1-i)=Xm(k+2-i)+Lk(i)*(Y(k)-H*Xpr(k));
    补充数据
    Pk(1,1,k+1)=Pk(1,1,k)-Pk(1,1,k)*H'*Lk(2)';
    Pk(1,2,k+1)=Pk(1,1,k)*(F-Lk(1)*H)';
end
end

```

### [3] 固定区间平滑

#### ① 前后向平滑

```

for m=2:N,
    % 前向
    for i = 2:m,
        P_fwd_pr= F*P_fwd(i-1)*F' + Q;
        Kf= P_fwd_pr*H'*inv(H*P_fwd_pr*H'+R);
        X_pr= F*X_fwd(i-1);
        X_fwd(i) = X_pr+Kf*(Y(i)-H*X_pr);
        P_fwd(i)=(I-Kf*H)*P_fwd_pr;
    end
    % 后向
    for i =N:-1:m+1,
        Ib_ps=Ib(i)+H'*inv(R)*H;
        S_ps=S(i)+H'*inv(R)*Y(i);
        Ib(i-1)=inv(inv(F)*inv(Ib_ps)*inv(F')+inv(F)*Q*inv(F'));
        S(i-1)=Ib(i-1)*inv(F)*inv(Ib_ps)*S_ps;
    end
    % 最后时刻m
    Ib(m)=inv(Q)-inv(Q)*inv(F)*(Ib_ps+inv(F')*inv(Q)*inv(F))*inv(F')*inv(Q);
    P_bwd(m)=inv(Ib(m));

```

```

S(m)=Ib(m)*inv(F)*inv(Ib_ps)*S_ps;
X_bwd(m)=inv(Ib(m))*S(m);
% 前后向结合
Kf=P_bwd(m)*inv(P_fwd(m)+P_bwd(m));
Xm(m)= Kf*X_fwd(m)+(I-Kf)*X_bwd(m);
Pm(m)=inv(inv(P_fwd(m))+inv(P_bwd(m)));
end
② RTS平滑
% RTS平滑只需要前向数据
% 初始化
Xrts(N)=X_fwd(N);
Prts(N)=P_fwd(N);
for i =N-1:-1:1
    If(i+1)=inv(P_fwd_pr(i+1));
    Krts=P_fwd(i)*F'*If(i+1);
    Prts(i)=P_fwd(i)-Krts*(P_fwd_pr(i+1)-Prts(i+1))*Krts';
    Xrts(i)=X_fwd(i)+Krts*(Xrts(i+1)-X_fwd_pr(i+1));
end

```

## A.2 二维坐标定位模型

```

% 数据更新
for k=2:N
    X(:,k)=F*X(:,k-1)+G*u+W(:,k-1);
    Y(:,k)=H*X(:,k)+V(:,k);
end
% 卡尔曼滤波运行至时间 k=j=50, 得到卡尔曼平滑初始值
for k=2:j
    % 状态更新
    Ppr(:,k)=F*P(:,k-1)*F'+Q;
    Ppr(1,2,k)=0;Ppr(2,1,k)=0;
    % P 为误差协方差（后验），其中包括 x 和 y
    % 两者不相关，故反对角线上元素皆可记为 0，在后续中皆记为“补充”
    Kg(:,k)=Ppr(:,k)*H'*inv(H*Ppr(:,k)*H'+R);
    Xpr(:,k)=F*Xkf(:,k-1)+G*u;
    Xkf(:,k)=Xpr(:,k)+Kg(:,k)*(Y(:,k)-H*Xpr(:,k));
end

```

```

P(:,:,k)=(I-Kg(:,:,k)*H)*Ppr(:,:,k)*(I-Kg(:,:,k)*H)'+Kg(:,:,k)*R*Kg(:,:,k)';
P(1,2,k)=0;P(2,1,k)=0;% 补充
% 平滑估计从 k=j=50 时刻开始，之前的滤波估计值都赋值给 Xsm
If k<j
    Xsm(:,1)=Xkf(:,1);% 未到达 k=j=50 时刻之前，平滑估计值就是滤波估计值
    Xsm(:,k)=Xkf(:,k);
end
end
% 初始化平滑参数
Sigma(:,:,j)=Ppr(:,:,j);
Pi(:,:,j)=Ppr(:,:,j);
Xsm(:,j)=Xpr(:,j);
vpa(Xsm,10)% 精度调整到小数点后 10 位
% 卡尔曼平滑方程
for k=j:N-1
    L_k(:,:,k)=F*Ppr(:,:,k)*H'*inv(H*Ppr(:,:,k)*H'+R);
    lambda_k(:,:,k)=Sigma(:,:,k)*H'*inv(H*Ppr(:,:,k)*H'+R);
    % 在此二维系统中，易知 L_k 和 lambda_k 相等。
    Xsm(:,k+1)=Xsm(:,k)+lambda_k(:,:,k)*(Y(:,k)-H*Xpr(:,k));
    Xpr(:,k+1)=F*Xpr(:,k)+L_k(:,:,k)*(Y(:,k)-H*Xpr(:,k));
    Ppr(:,:,k+1)=F*Ppr(:,:,k)*(F-L_k(:,:,k)*H)'+Q;
    Ppr(1,2,k+1)=0;Ppr(2,1,k+1)=0;% 补充
    Pi(:,:,k+1)=Pi(:,:,k)-Sigma(:,:,k)*H'*lambda_k(:,:,k)';
    Pi(1,2,k+1)=0;Pi(2,1,k+1)=0;% 补充
    Sigma(:,:,k+1)=Sigma(:,:,k)*(F-L_k(:,:,k)*H)';
end

```

## 附录 B 程序运行效果图

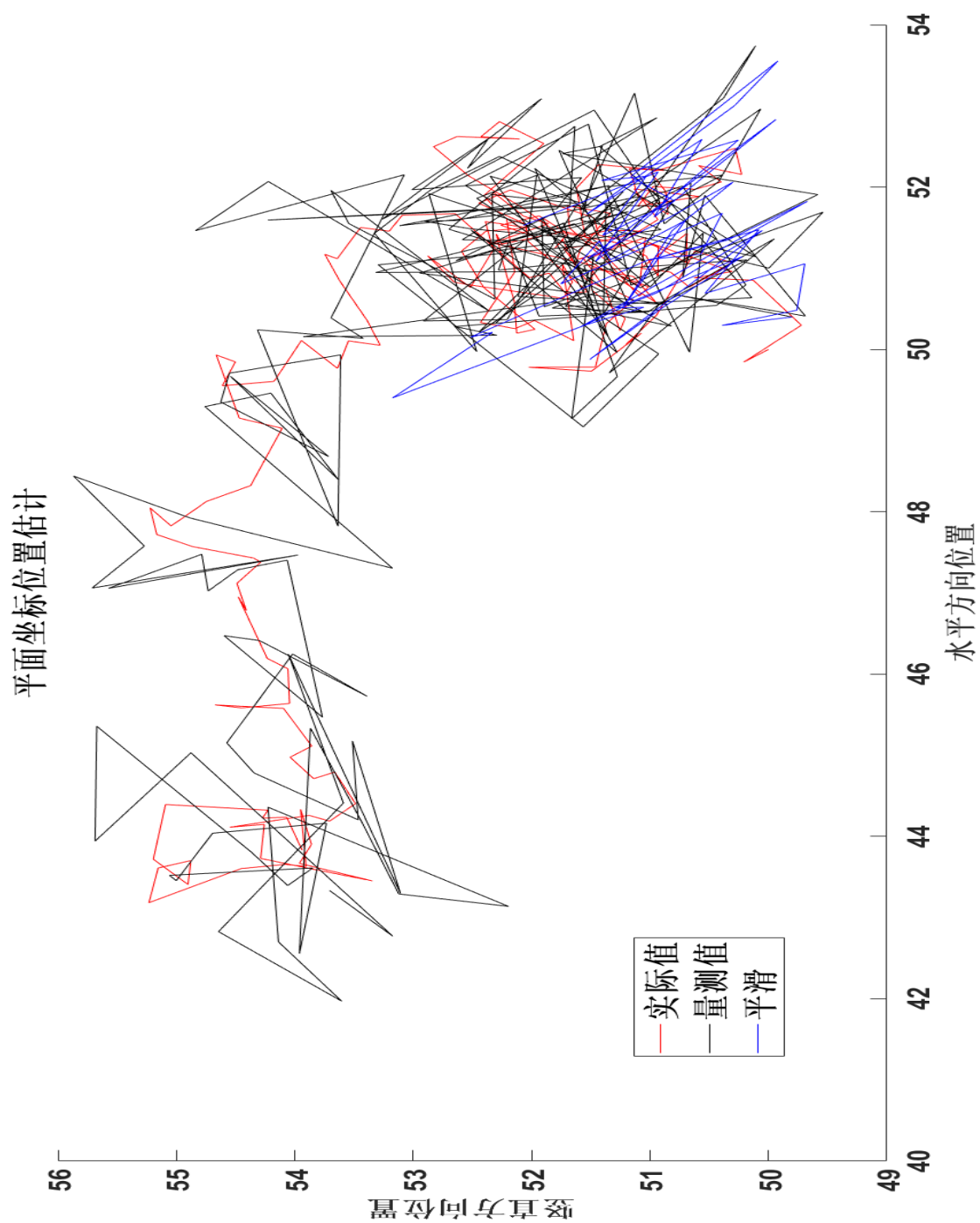


图 B. 1 二维位置系统平滑估计

Fig. B.1 Smoothing estimation of two-dimensional positional system

## 致 谢

首先，感谢魏萍老师在这一学年给予的帮助，使本人顺利完成了毕业论文的撰写。从初始构思、资料搜集和原理学习，到实际问题模型建立及仿真运行，最后到定稿，魏老师一直都在身边，鼓励和指导本人。这段时间，本人成长了很多，从老师身上学到了很多，包括学习态度、学习方法以及做人做事的道理，这些都使本人终生受用不尽。在此，对老师表示深深的敬意和感激。

感谢朋友们在此期间给予的帮助，感谢论文审阅老师提出的宝贵意见。