1 Динамика СВП

Исходная система уравнений, описывающая динамику СВП:

$$\begin{gathered} m\frac{d^2H}{dt^2} = \mathbf{F} \\ \frac{dp}{dt} = \frac{np_a}{W}\left(Q_{in} - Q_{out} - \frac{dW}{dt}\right) \\ I_z\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mathbf{M} \end{gathered} \tag{1.1}$$

2 Расходно напорная характеристика

Таблица 1: Исходные параметры центробежного нагнетателя, округленные до целой части. Точные параметры можно найти в *initials.xlsx*

p, Па	2809	2965	2902	2715	2497	2325	2060	1280	593
Q, $\frac{\text{м}^3}{\text{с}}$	0	6	11	17	22	25	28	34	38

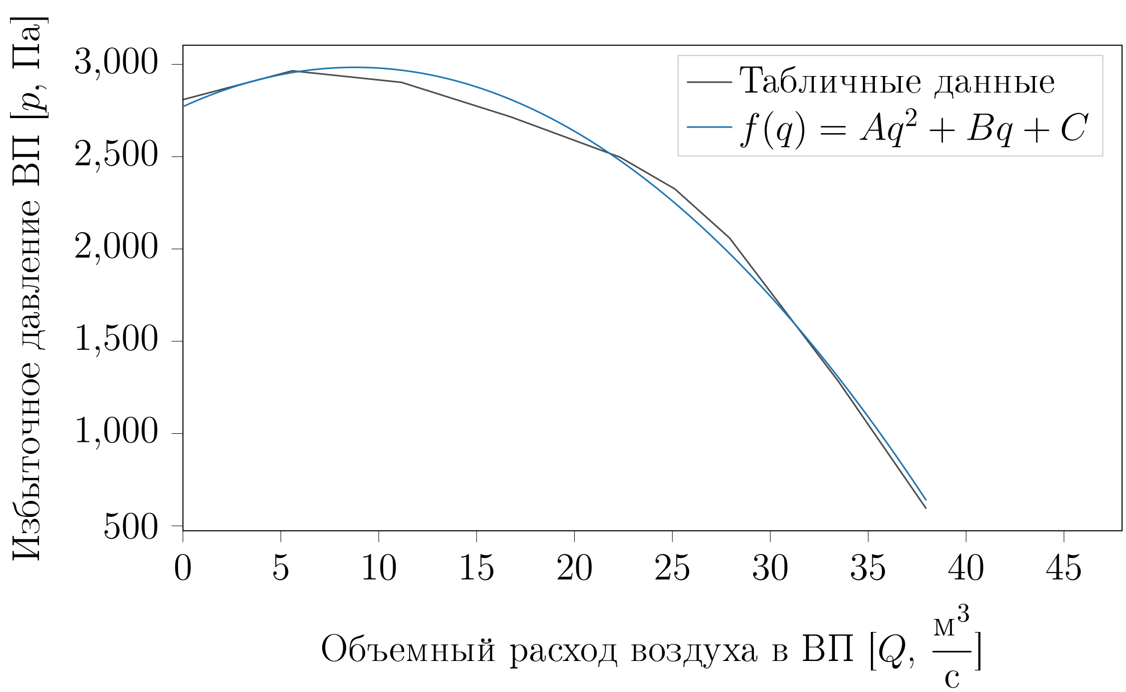

Рис. 1: Расходно напорная характеристика $p(Q_{in})$. Аппроксимация МНК квадратичной функцией $f(q) = -2.756q^2 + 48.46q + 2771$.

Для выполнения условия устойчивости судна в предположении отсутсвия волнения, необходимо:

$$\frac{1}{2}Q_0 - \frac{\partial Q}{\partial p}\bigg|_0 p_0 > 0, \text{ где } (Q_0, p_0) \text{ точка на нисходящей ветви РНХ} \tag{2.1}$$

Преобразуем $p(Q_{in})$ для получения функции $Q_{in}(p)$, решив уравнение $f(q) = p$ и выбрав решения на нисходящей ветке. Получим:

$$Q_{in}(p) = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4A(C - p)}}{2A}, \text{ где } A, B, C \text{ из } f(q) \tag{2.2}$$

Объмный расход воздуха Q_{out}, вытекающего из зоны ВП, может быть вычислено слуюющим образом:

$$Q_{out} = Q_{out}(p, S_{gap}) = \chi\sqrt{\frac{2p}{\rho_a}}S_{gap} \tag{2.3}$$

Объмный расход воздуха Q_{in}, нагнетаемого вентиляторами в зону ВП, вычисляется с помощью РНХ вентилятора:

$$Q_{in} = Q_{in}(p) \tag{2.4}$$

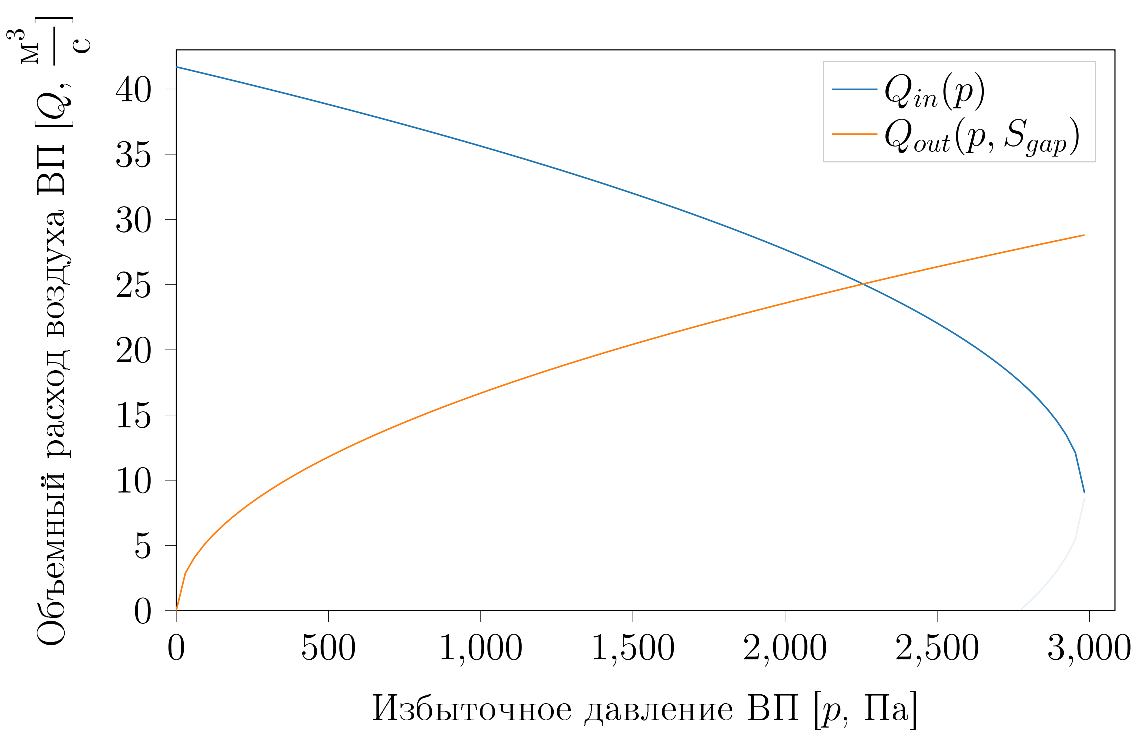

Рис. 2: Расходно напорная характеристика $Q_{in}(p)$ и истечение $Q_{out}(p, S_{gap})$ при высоте зазора в 1 см.

3 Удары волн о корпус

Для учета удар волн о корпус будем использовать *метод плоских поперечных сечений*. Для этого необходимо разбить корпус на N сечений (чем больше N, тем точнее будут вычисления). Тогда расстояние между сечениями:

$$d_L = \frac{L}{N} \tag{3.1}$$

Для каждого сечения необходимо вычислить положение свободной поверхности y. На данном этапе $y = 0$. Если в каком то из сечений вода касается корпуса судна ($y > 0$), то пятно контакта имеет площадь:

$$S_{wash} = S_{wash}(d_L) = d_L \cdot b \tag{3.2}$$

Тогда сила, действующая на пятно контакта, определяется как:

$$F_{contact} = \theta \cdot \rho_w \frac{V^2}{2} S_{wash}, \text{ где } V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \tag{3.3}$$

Таким образом получим выражение для полной силы, которую оказывает удар волны:

$$F_{wave} = \int\limits_{\mathcal{R}^1_+} F_{contact} \, \mathrm{d}d_L \tag{3.4}$$

Также необходимо вычислить момент вращения судна под влиянием удара волны о корпус:

$$M_{contact} = \int\limits_0^L \int\limits_{\mathcal{R}^1_+} d_{segment} \cdot F_{contact} \, \mathrm{d}d_L \mathrm{d}x \tag{3.5}$$

где $d_{segment}$ - знаковое расстояние от центра тяжести до конкретного сечения.

$$d_{segment}(x) = x - \frac{L}{2} \tag{3.6}$$

если $d_{segment} > 0$, то сечение находится в носовой части судна относительно центра тяжести, а при $d_{segment} < 0$ в кормовой.

3.1 Влияние на объем ВП и площадь зазора

Объем ВП под действием волны $y(x)$ вычисляется сделующим образом:

$$W_{shaped} = \int\limits_{x_c+0}^{x_c+L} \int\limits_{\mathcal{R}^1_+} S_{wash} \left[H - y(x)\right] \mathrm{d}d_L \mathrm{d}x \tag{3.1.1}$$

где x_c - координата центра тяжести судна по оси OX, а $H-y(x)$ высота свободного пространства в сечении. Для облегчения задания площади зазора введем следующий индикатор:

$$I(x) = \begin{cases} 0.01, & \text{H-d > y(x)} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Индикатор $I(x)$ равен зазору в 1 см, когда нижняя часть ВП (центр тяжести H минус клиренс судна d) находится выше волны $y(x)$. Тогда площадь зазора определяется следующим образом:

$$S_{gap} = \int\limits_{x_c+0}^{x_c+L} \int\limits_{\mathcal{R}^1_+} d_L \cdot I(x) \, \mathrm{d}d_L \mathrm{d}x \tag{3.1.3}$$

4 Симуляция

Распишем **F** и **M** из 1.1 с учетом знаков:

$$\begin{gathered} F = pS - mg + F_{wave} \\ M = pS \cdot l_{AC} + M_{contact} \end{gathered} \tag{4.1}$$

Также запишем уравнение, описывающее изменение объема ВП с учетом того, что волна может занимать часть объема ВП:

$$\frac{dW}{dt} = S\frac{dH}{dt} + S \cdot l_{AC}\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d(W - W_{shaped})}{dt} \tag{4.2}$$

Последнее слагаемое в 4.2 описывает скорость изменения объема волны в ВП ($W_{wave} = W - W_{shaped}$).

Преобразуем 1.1, заменив дифференциальные уравнения второго порядка уравнениями первого порядка. Также, допишем уравнение, описывающее изменение объема ВП:

$$\begin{gathered}
\frac{dV_y}{dt} = \frac{pS - mg + F_{wave}}{m} \\
\frac{dH}{dt} = V_y \\
\frac{dW}{dt} = S\frac{dH}{dt} + S \cdot l_{AC}\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d(W - W_{shaped})}{dt} \\
\frac{dp}{dt} = \frac{np_a}{W}\left(Q_{in} - Q_{out} - \frac{dW}{dt}\right) \\
\frac{dV_\varphi}{dt} = \frac{pS \cdot l_{AC} + M_{contact}}{I_z} \\
\frac{d\varphi}{dt} = V_\varphi
\end{gathered} \tag{4.3}$$

4.1 Шаг симуляции

В качестве метода численного интегрирования выбран метод *Рунге-Кутты четвертого порядка* в следующей формулировке:

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (далееий первого порядка (далее $\mathbf{y}, \mathbf{f}, \mathbf{k}_i \in \mathcal{R}^n, x, h \in \mathcal{R}^1$)

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \tag{4.1.1}$$

Тогда приближенное значение в последующих точдках вычисляется по итерационной формуле:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \tag{4.1.2}$$

Вычисление нового значения происходит в четыре стадии:

$$\begin{gathered}
\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\
\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1) \\
\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2) \\
\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_3)
\end{gathered} \tag{4.1.3}$$