

Отчёт по лабораторной работе №8

Модель конкуренции двух фирм

Виктория Михайловна Шутенко

Содержание

Цель работы	5
Теоретические сведения	6
Случай 1	9
Случай 2	12
Вариант 16	14
Задача	14
Случай 1.	14
Случай 2.	15
Замечание:	15
Задание	16
Ход работы	17
Случай 1	17
Случай 2	20
Выводы	25
Библиография	26

Список иллюстраций

0.1	Рисунок 6.2. График изменения оборотных средств фирмы 1 (синий) и фирмы 2 (зеленый). По оси ординат значения $M_1, 2$, по оси абсцисс значения $\theta = \frac{t}{\tau c_1}$ (безразмерное время)	11
0.2	Рисунок 6.1. График изменения оборотных средств фирмы 1 (синий) и фирмы 2 (зеленый). По оси ординат значения $M_1, 2$, по оси абсцисс значения $\theta = \frac{t}{\tau c_1}$ (безразмерное время)	12
0.1	Выполнение проверки для 1 случая.	18
0.2	Установка Симуляции.	19
0.3	Графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 1	20
0.4	Выполнение проверки для 2 случая.	22
0.5	Установка Симуляции.	23
0.6	Графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 2.	24

Список таблиц

Цель работы

Приобрести практические навыки при работе с моделью конкуренции двух фирм.

Теоретические сведения

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют. Обозначим:

N – число потребителей производимого продукта.

S – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

M – оборотные средства предприятия

τ – длительность производственного цикла

p – рыночная цена товара

\tilde{r} – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

δ – доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек. κ – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

$Q(S/p)$ – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p . Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представля-

ют в простейшей форме:

$$Q = q - k \frac{p}{S} = q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right)$$

(1)

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при $p = p_{cr}$ (критическая стоимость продукта) потребители отказываются от приобретения товара. Величина $p_{cr} = Sq/k$. Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть, $Q(S/p) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения. Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M\delta}{\tau} + Nq \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right)p - \kappa \quad (2)$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде

$$\frac{dp}{dt} = \gamma \left(-\frac{M\delta}{\tau \tilde{p}} + Nq \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \right) \quad (3)$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу. Параметр γ зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла τ . При заданном M уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво. В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$-\frac{M\delta}{\tau \tilde{p}} + Nq \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) = 0 \quad (4)$$

Из (4) следует, что равновесное значение цены p равно

$$p = p_{cr} \left(1 - \frac{M\delta}{\tau \tilde{p} Nq} \right) \quad (5)$$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид

$$\frac{dM}{dt} = M \frac{\delta}{\tau} \left(\frac{p_{cr}}{\tilde{p}} - 1 \right) - M^2 \left(\frac{\delta}{\tau \tilde{p}} \right)^2 \frac{p_{cr}}{Nq} - \kappa$$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию $dM/dt = 0$

$$\tilde{M}_{1,2} = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad (7)$$

где

$$a = Nq \left(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}} \right) \tilde{p} \frac{\tau}{\delta}, \quad b = \kappa Nq \frac{(\tau \tilde{p})^2}{p_{cr} \delta^2} \quad (8)$$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках (в случае $a^2 < 4b$) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, $b \ll a^2$) и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы. При $b \ll a$ стационарные значения M равны

$$\tilde{M}_+ = Nq \frac{\tau}{\delta} \left(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}} \right) \tilde{p}, \quad \tilde{M}_- = \kappa \tilde{p} \frac{\tau}{\delta(p_{cr} - \tilde{p})} \quad (9)$$

Первое состояние \tilde{M}_+ устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние \tilde{M}_- неустойчиво, так, что при $M < \tilde{M}_+$ оборотные средства падают ($dM/dt < 0$), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу \tilde{M}_- соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок. В обсуждаемой модели параметр δ всюду входит в сочетании с τ . Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в даль-

нейшем положим: $\delta = 1$, а параметр τ будем считать временем цикла, с учётом сказанного. Конкуренция двух фирм

Случай 1

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы. В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей какимлибо иным способом.) Уравнения динамики оборотных средств запишем по аналогии с (2) в виде

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{dt} &= -\frac{M_1}{\tau_1} + N_1 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) p - \kappa_1 \\ \frac{dM_2}{dt} &= -\frac{M_2}{\tau_2} + N_2 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) p - \kappa_2\end{aligned}\quad (10)$$

где использованы те же обозначения, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй фирме, соответственно. Величины N_1 и N_2 – числа потребителей, приобретших товар первой и второй фирмы. Учтем, что товарный баланс устанавливается быстро, то есть, произведенный каждой фирмой товар не накапливается, а реализуется по цене p . Тогда

$$\begin{aligned}\frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} &= N_1 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \\ \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} &= N_2 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right)\end{aligned}\quad (11)$$

где \tilde{p}_1 и \tilde{p}_2 – себестоимости товаров в первой и второй фирме. С учетом (10) представим (11) в виде

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{dt} &= -\frac{M_1}{\tau_1} \left(1 - \frac{p}{\tilde{p}_1}\right) - \kappa_1 \\ \frac{dM_2}{dt} &= -\frac{M_2}{\tau_2} \left(1 - \frac{p}{\tilde{p}_2}\right) - \kappa_2\end{aligned}\quad (12)$$

Уравнение для цены, по аналогии с (3),

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma \left(\frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} - Nq \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \right) \quad (13)$$

Считая, как и выше, что ценовое равновесие устанавливается быстро, получим:

$$p = p_{cr} \left(1 - \frac{1}{Nq} \left(\frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}\right)\right) \quad (14)$$

Подставив (14) в (12) имеем

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{dt} &= c_1 M_1 - b M_1 M_2 - a_1 M_1^2 - \kappa_1 \\ \frac{dM_2}{dt} &= c_2 M_2 - b M_1 M_2 - a_2 M_2^2 - \kappa_2\end{aligned}\quad (15)$$

где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 N q}, \quad a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}, \quad b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}, \quad c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}, \quad c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} \quad (16)$$

Исследуем систему (15) в случае, когда постоянные издержки (κ_1, κ_2) пренебрежимо малы. И введем нормировку $t = c_1 \theta$. Получим следующую систему:

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{d\theta} &= M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{dM_2}{d\theta} &= \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2\end{aligned}\quad (17)$$

Чтобы решить систему (17) необходимо знать начальные условия. Зададим начальные значения $p_{cr} = 20, \tau_1 = 10, \tau_2 = 16, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, N = 10, q = 1$

Замечание: Необходимо учесть, что значения $p_{cr}, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, N$ указаны в тысячах единиц (например $N = 10$ - означает 10 000 потенциальных потребителей), а значения $M_{1,2}$ указаны в млн. единиц. При таких условиях получаем следующие динамики изменения объемов продаж (рис.6.1)

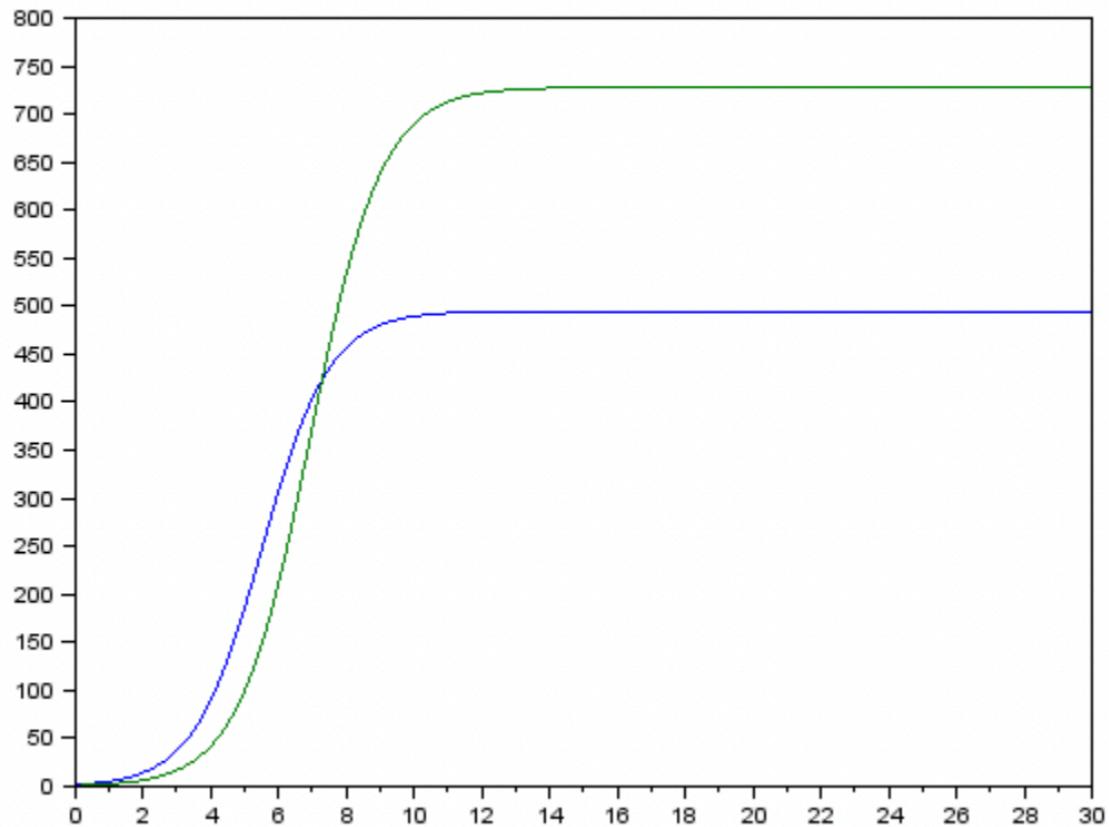
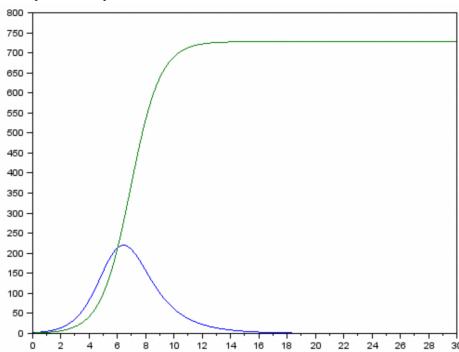


Рис. 0.1: Рисунок 6.2. График изменения оборотных средств фирмы 1 (синий) и фирмы 2 (зеленый). По оси ординат значения M_1, M_2 , по оси абсцисс значения $\theta = \frac{abc}{c_1}$ (безразмерное время).

По графику видно, что рост оборотных средств предприятий идет независимо друг от друга. В математической модели задачи он одинаковый в обоих уравнениях ($\frac{abc}{c_1}$). Это было обозначено в условиях задачи. Каждая фирма достигает свое максимальное значение объема продаж и остается на рынке с этим значением, то есть каждая фирма захватывает свою часть рынка потребителей, которая не изменяется.

Случай 2

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться. Рассмотрим следующую модель:



Начальные условия и известные параметры остаются прежними. В этом случае получим следующее решение (рис.6.2)

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{d\theta} &= M_1 - \left(\frac{b}{c_1} + 0,002 \right) M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{dM_2}{d\theta} &= \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Рис. 0.2: Рисунок 6.1. График изменения оборотных средств фирмы 1 (синий) и фирмы 2 (зеленый). По оси ординат значения M_1, M_2 , по оси абсцисс значения $\theta = \frac{t}{c_1}$ (безразмерное время).

По графику видно, что первая фирма, несмотря на начальный рост, достигнув

своего максимального объема продаж, начитает нести убытки и, в итоге, терпит банкротство. Динамика роста объемов оборотных средств второй фирмы остается без изменения: достигнув максимального значения, остается на этом уровне. Замечание: Стоит отметить, что рассматривается упрощенная модель, которая дает модельное решение. В реальности факторов, влияющих на динамику изменения оборотных средств предприятий, больше.

Вариант 16

Задача

Случай 1.

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пре-небрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{d\theta} &= M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{dM_2}{d\theta} &= \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2\end{aligned},$$

$$\text{где } a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}, \quad a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, \quad b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, \quad c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}, \quad c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}.$$

Также введена нормировка $t = c_1 \theta$.

Случай 2.

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{d\theta} &= M_1 - \left(\frac{b}{c_1} + 0,0007 \right) M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{dM_2}{d\theta} &= \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2\end{aligned}$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$$M_0^1 = 4.4, M_0^2 = 4$$

$$p_{\{cr\}} = 10.5\$, N = 28, q = 1$$

$$\tau_1 = 16, \tau_2 = 25$$

$$\tilde{p}_1 = 7.2, \tilde{p}_2 = 5.1$$

Замечание:

Необходимо учесть, что значения $p_{cr}, \tilde{p}_1, 2, N$ указаны в тысячах единиц, а значения $M_{1,2}$ указаны в млн. единиц.

N – число потребителей производимого продукта.

τ – длительность производственного цикла.

p – рыночная цена товара.

\tilde{p} – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени $\theta = \frac{1}{c_1}$ - безразмерное время.

Задание

1. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 1.
2. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 2.

Ход работы

Случай 1

Для 1 случая я написала следующий код:

```
model competition1

parameter Real p_cr = 10.5; //критическая стоимость продукта
parameter Real tau1 = 16; //длительность производственного цикла фирмы 1
parameter Real p1 = 7.2; //себестоимость продукта у фирмы 1
parameter Real tau2 = 25; //длительность производственного цикла фирмы 2
parameter Real p2 = 5.1; //себестоимость продукта у фирмы 2
parameter Real N = 28; //число потребителей производимого продукта
parameter Real q = 1; //максимальная потребность одного человека в продукте в единицах

parameter Real a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q);
parameter Real a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q);
parameter Real b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q);
parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

parameter RealM01 = 4.4;
parameter RealM02 = 4;
Real M1(start=M01);
Real M2(start=M02);
```

```

Real theta;

equation
time = c1*theta;
der(M1) = M1-(b/c1)*M1*M2 - (a1/c1)*M1*M1;
der(M2) = (c2/c1)*M2 -(b/c1)*M1*M2-(a2/c1)*M2*M2;
end competition1

```

Я выполнила проверку кода.

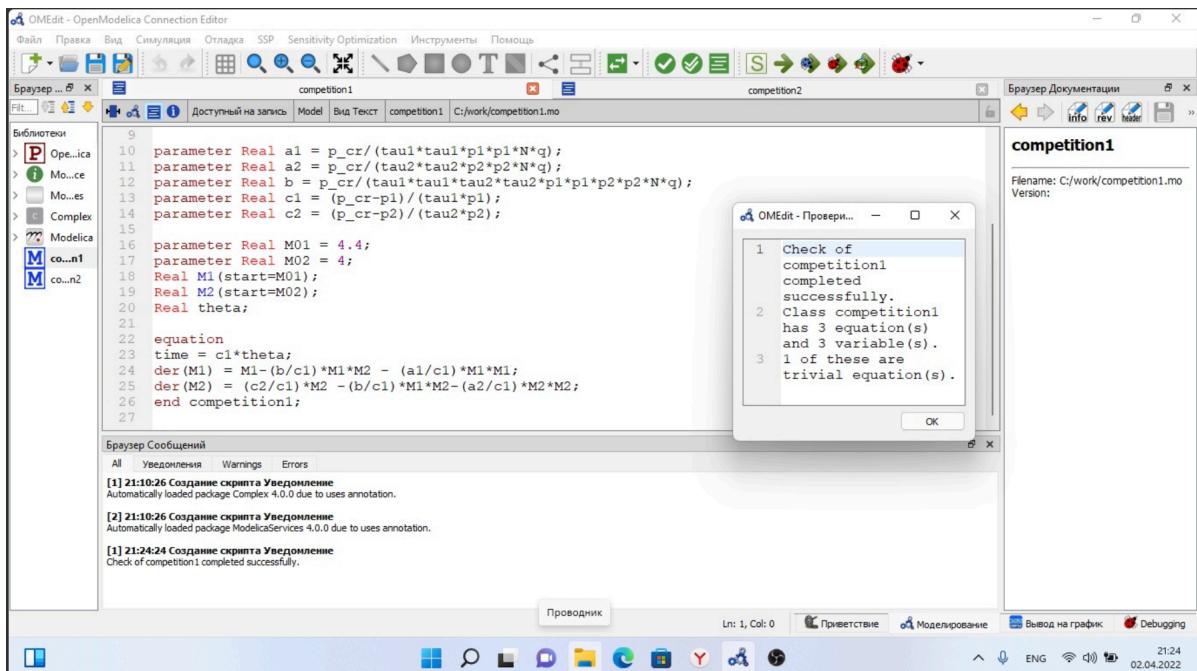


Рис. 0.1: Выполнение проверки для 1 случая.

После я делала установку симуляции.

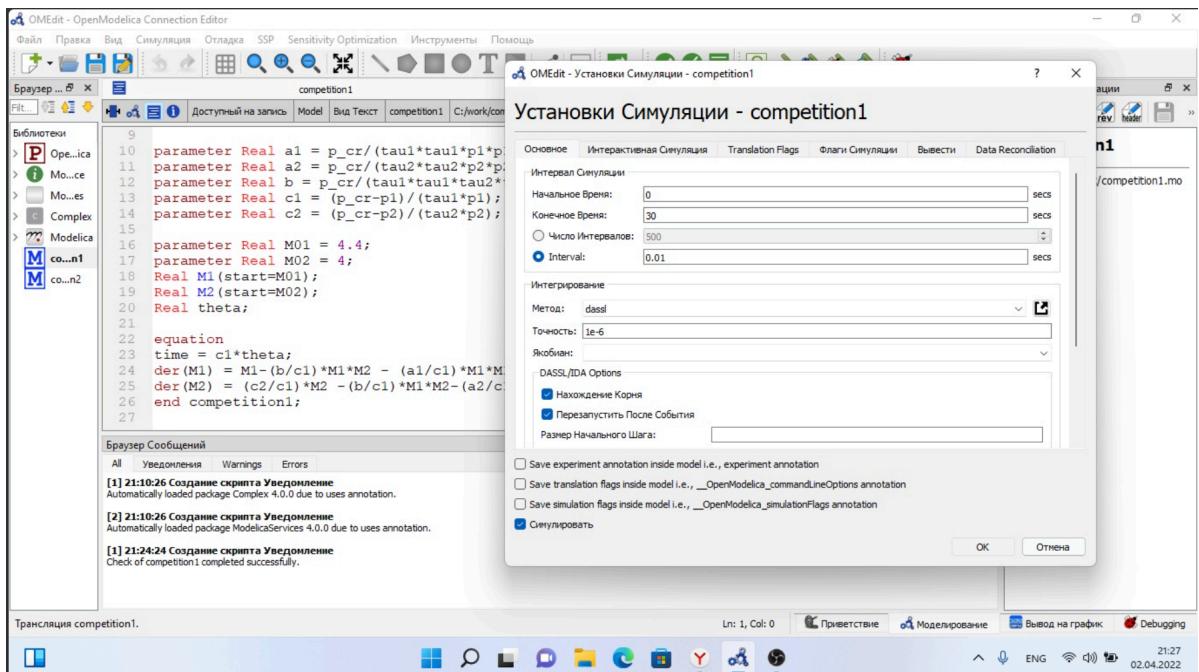


Рис. 0.2: Установка Симуляции.

В итоге, я получила следующие график:

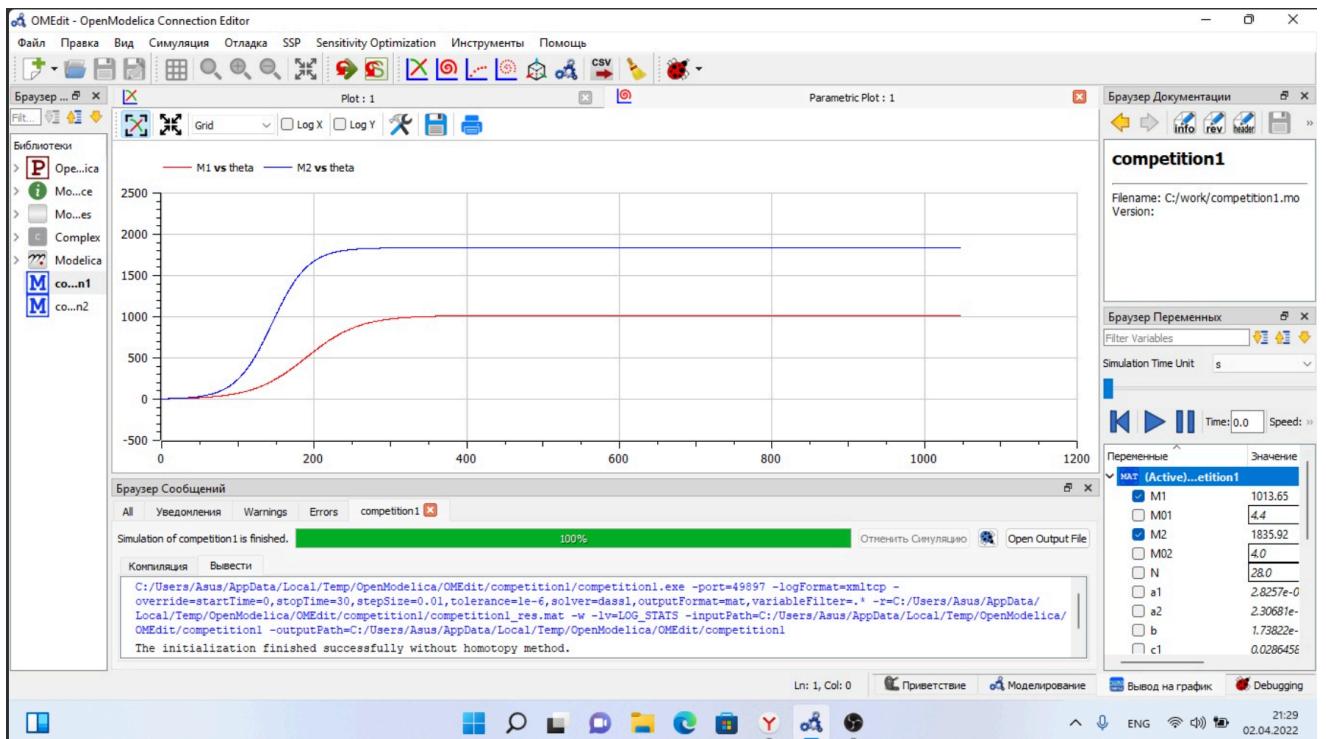


Рис. 0.3: Графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 1

Случай 2

Для 2 случая я написала следующий код:

```
model competition2
parameter Real p_cr = 10.5; //критическая стоимость продукта
parameter Real tau1 = 16; //длительность производственного цикла фирмы 1
parameter Real p1 = 7.2; //себестоимость продукта у фирмы 1
parameter Real tau2 = 25; //длительность производственного цикла фирмы 2
parameter Real p2 = 5.1; //себестоимость продукта у фирмы 2
parameter Real N = 28; //число потребителей производимого продукта
parameter Real q = 1; //максимальная потребность одного человека в продукте в единицу
```

```

parameter Real a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q);
parameter Real a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q);
parameter Real b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q);
parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

parameter RealM01 = 4.4;
parameter RealM02 = 4;
Real M1(start=M01);
Real M2(start=M02);
Real theta;

equation
time = c1*theta;
der(M1) = M1-(b/c1+0.0007)*M1*M2 - (a1/c1)*M1*M1;
der(M2) = (c2/c1)*M2 -(b/c1)*M1*M2-(a2/c1)*M2*M2;
end competition2

```

Я выполнила проверку кода.

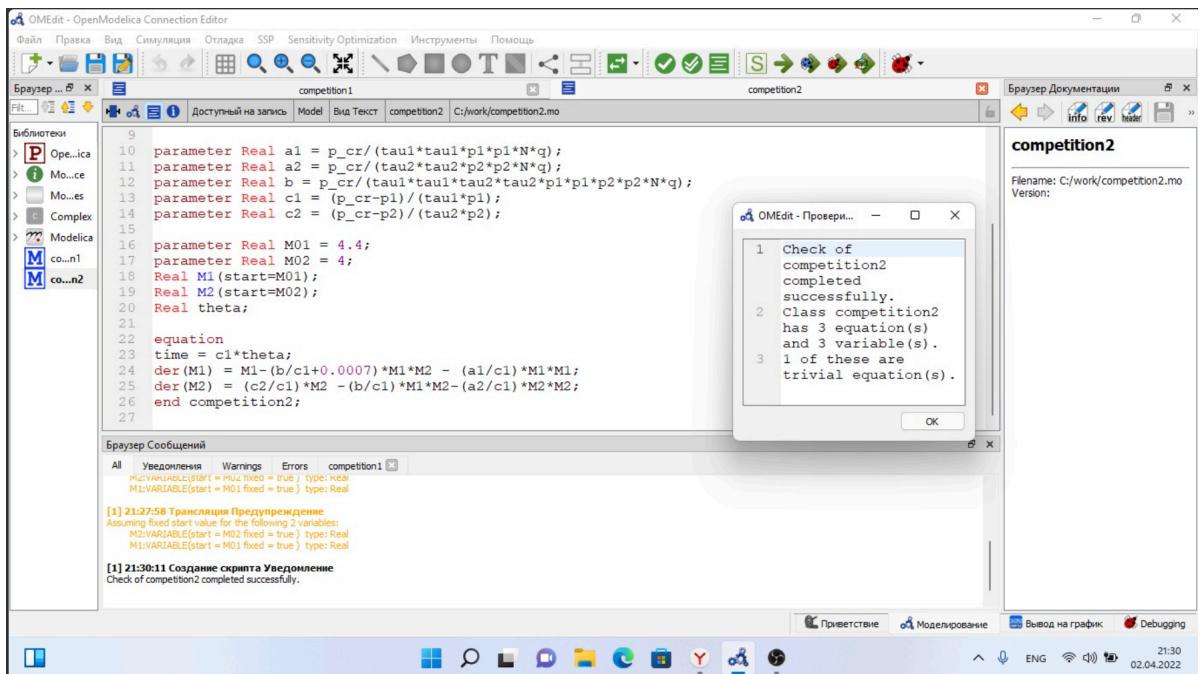


Рис. 0.4: Выполнение проверки для 2 случая.

После я сделала установку симуляции.

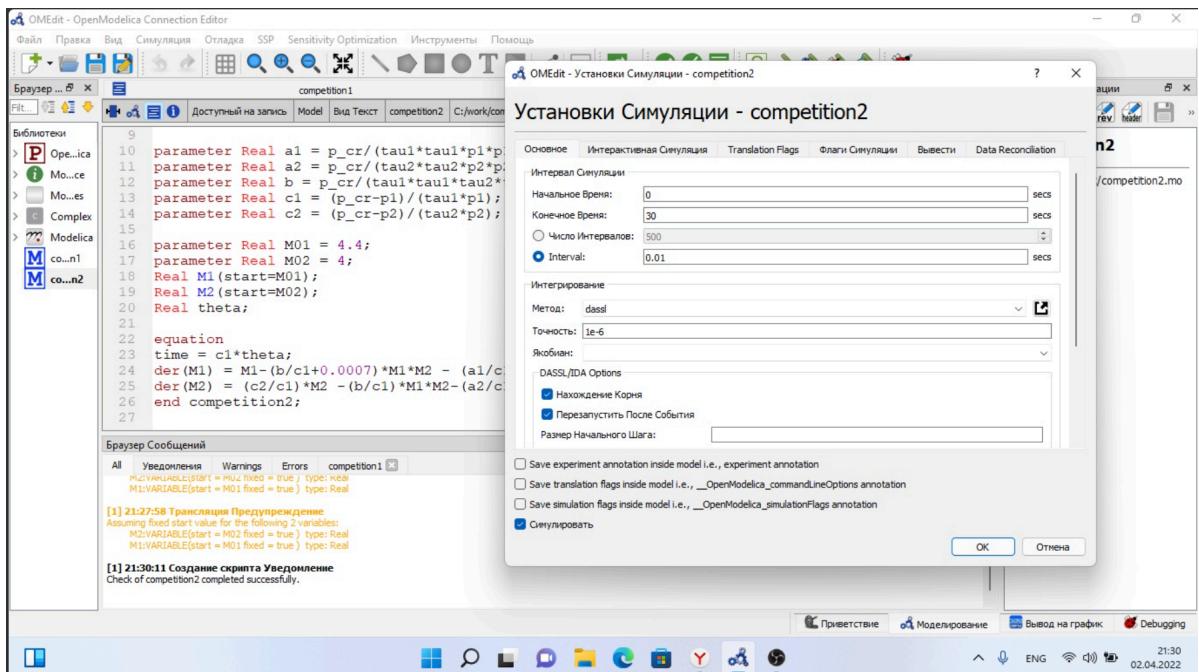


Рис. 0.5: Установка Симуляции.

В итоге, я получила следующие график:

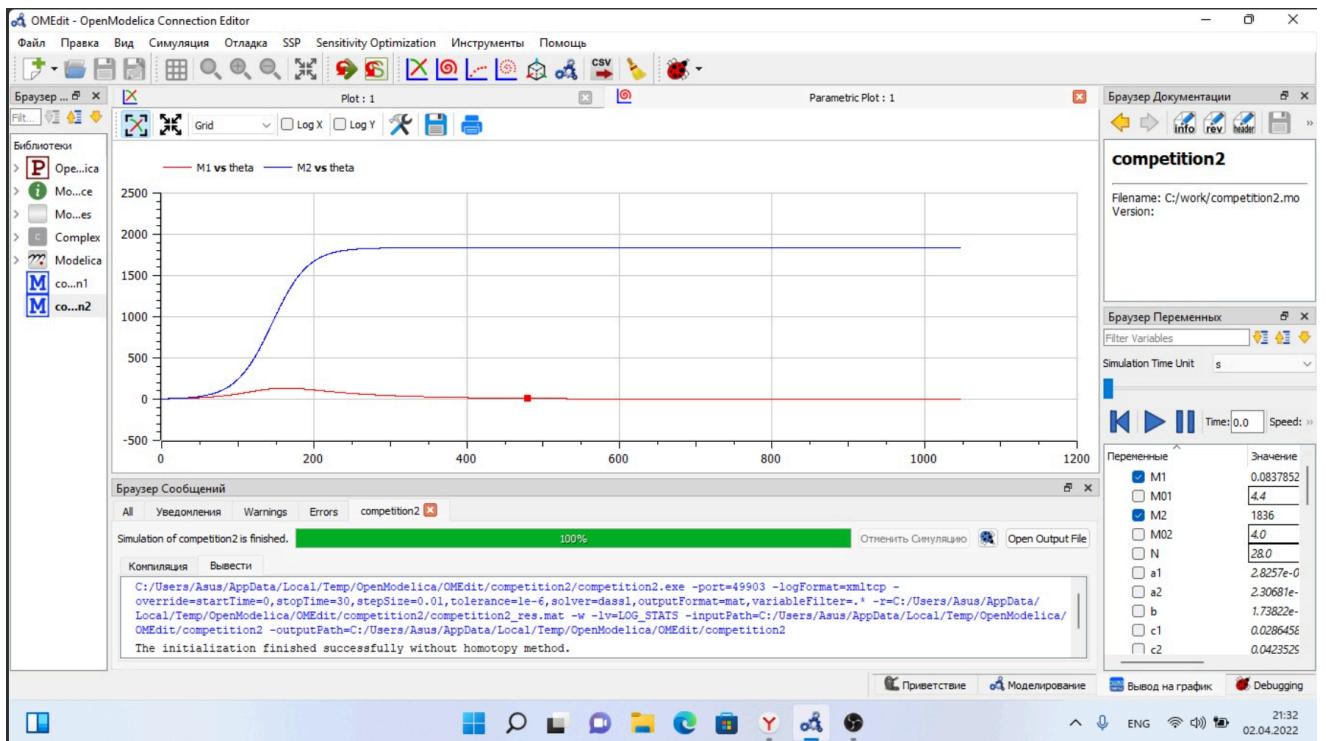


Рис. 0.6: Графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 2.

Выводы

Я приобрела практические навыки при работе с моделью “конкуренции двух фирм”.

Библиография

- Родионов, Ю.В. Основы математического моделирования: учебное электронное изда-ние / Ю.В. Родионов, А.Д. Нахман ; Тамбовский государственный технический университ-ет. – Тамбов : Тамбовский государствен-ный технический университет (ТГТУ), 2018. – 111 с. : табл., граф. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=570456>. – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-8265-1886-1. – Текст : электронный.
- Самарский Александр Андреевич. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры [Текст] / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. - 2-е изд., испр. - М. : Физматлит, 2002. - 320 с. : ил. - ISBN 5-92221-0120-X : 115.94. (ET 20)
- Введение в математическое моделирование : учебное пособие / В.Н. Ашихмин, М.Б. Гитман, И.Э. Келлер [и др.]; Под ред. П.В. Трусова. - Электронные текстовые данные. - М. : Логос, 2015. - 440 с. : ил. - (Новая Университетская Библиотека). - ISBN 978-5-98704-637-1. URL: <http://lib.rudn.ru/ProtectedView/Book/ViewBook/5847>
- Документация по системе Modelica – Режим доступа: <https://www.modelica.org/>