

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК И МАТЕМАТИКИ

Кафедра теоретической и математической физики

**АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОПУЛЯЦИЙ**

Направление подготовки 01.04.01 «Математика»

Образовательная программа «Современные проблемы математики»

Допустить к защите:

Зав. кафедрой:

д.ф.-м.н., доц. Е.А. Елфимова

---

Нормоконтролер:

к.ф.-м.н., Е.С. Пьянзина

---

Магистерская диссертация

**Абрамовой**

**Екатерины Павловны**

---



Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доц. Т.В. Перевалова

---



Екатеринбург

2020 г.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК И МАТЕМАТИКИ

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель образовательной программы

\_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_)

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Код, наименование направления: 01.04.01 Математика

Наименование программы: Современные проблемы математики

Группа: МЕНМ-280112

**ЗАДАНИЕ**

на выполнение выпускной квалификационной работы

студента Абрамовой Екатерины Павловны

(Фамилия, имя, отчество)

Квалификация: магистр

(бакалавр, специалист, магистр)

Провести научное исследование по теме: Анализ стохастических моделей

взаимодействия популяций

Срок представления работы научному руководителю: «1» июня 2020 г.

Научный руководитель \_\_\_\_\_

(Подпись)

(Т.В. Перевалова)

(И.О. Фамилия)

Задание принял к исполнению \_\_\_\_\_

## РЕФЕРАТ

Абрамова Е.П., АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОПУЛЯЦИЙ, магистерская диссертация: стр. 39, рис. 25, библи. 11 назв.

Ключевые слова: модель «хищник–жертва», модель «хищник–две жертвы», функция стохастической чувствительности, метод доверительных областей, индуцированные шумом феномены, вымирание популяций.

В работе рассматриваются двумерная популяционная модель типа «хищник–жертва» с учетом конкуренции жертв и конкуренции хищников за отличные от жертв ресурсы и трехмерная популяционная модель типа «хищник–две жертвы» с учетом внутривидовой и межвидовой конкуренции жертв и конкуренции хищников за отличные от жертв ресурсы. Проводится анализ существования и устойчивости аттракторов моделей, строятся бифуркационные диаграммы и типичные фазовые портреты. Для стохастических моделей проводится анализ чувствительности аттракторов на основе теории функции стохастической чувствительности. С использованием аппарата доверительных областей: эллипсов и эллипсоидов для равновесий, а также полос и торов – для циклов, изучаются стохастические феномены: переходы между аттракторами, генерация большеамплитудных колебаний, вымирание популяций. Изучаются вероятностные механизмы вымирания популяций.

Abramova E.P., ANALYSIS OF STOCHASTIC MODELS OF POPULATIONS INTERACTION, master thesis, p. 39, fig. 25, bibl. 11 items.

Keywords: «predator–prey» model, «predator–two preys» model, confidence domains, stochastic sensitivity function, noise-induced phenomena, extinction of populations.

The thesis considers a two-dimensional population model of the «predator–prey» type, taking into account the competition of preys and competition of predators for resources different from the preys, and a three-dimensional population model of the «predator–two preys» type, with intraspecific and interspecific competition of preys and competition predators for resources other than preys. An analysis is made of the existence and stability of attractors. Bifurcation diagrams and typical phase portraits are constructed. For stochastic models, an analysis of the sensitivity of attractors is carried out based on stochastic sensitivity function technique. Using the confidence domain method: ellipses or ellipsoids for equilibria and bands or tor for cycles, following stochastic phenomena are studied: transitions between attractors, the generation of large amplitude oscillation and the extinction of populations. The probabilistic mechanisms of extinction of populations are studied.

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ .....</b>	<b>4</b>
<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>5</b>
<b>ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ .....</b>	<b>7</b>
1    Модель «хищник–жертва» .....	7
1.1    Анализ детерминированной модели .....	7
1.2    Анализ стохастической модели .....	11
2    Двумерные подсистемы трехмерной модели «хищник–две жертвы» .....	16
2.1    Анализ детерминированных подсистем .....	16
2.2    Анализ стохастических подсистем .....	20
3    Модель «хищник–две жертвы» .....	23
3.1    Анализ детерминированной модели .....	23
3.2    Анализ стохастической модели .....	28
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>37</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....</b>	<b>38</b>
<b>СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ .....</b>	<b>39</b>

## ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

### Для модели «хищник–жертва»:

- $x$  – плотность популяции хищников,
- $y$  – плотность популяции жертв,
- $\alpha$  – коэффициент насыщения хищников,
- $\gamma$  – естественная смертность хищников,
- $\delta$  – коэффициент конкуренции хищников за отличные от жертв ресурсы,
- $\varepsilon$  – коэффициент конкуренции жертв,
- $\sigma$  – интенсивность шума,
- $w$  – стандартный винеровский процесс.

### Для модели «хищник–две жертвы»:

- $x$  – плотность популяции жертв<sub>1</sub>,
- $y$  – плотность популяции жертв<sub>2</sub>,
- $z$  – плотность популяции хищников,
- $\alpha_1$  – коэффициент рождаемости жертв<sub>1</sub>,
- $\alpha_2$  – коэффициент рождаемости жертв<sub>2</sub>,
- $\beta_1$  – коэффициент взаимодействия жертв<sub>1</sub> и хищников,
- $\beta_2$  – коэффициент взаимодействия жертв<sub>2</sub> и хищников,
- $\gamma$  – коэффициент конкуренции хищников,
- $\delta_1$  – коэффициент насыщения хищника жертвой<sub>1</sub>,
- $\delta_2$  – коэффициент насыщения хищника жертвой<sub>2</sub>,
- $\varepsilon_1$  – коэффициент конкуренции жертв<sub>1</sub> с жертвами<sub>2</sub>,
- $\varepsilon_2$  – коэффициент конкуренции жертв<sub>2</sub> с жертвами<sub>1</sub>,
- $\sigma$  – интенсивность шума,
- $w$  – стандартный винеровский процесс.

## ВВЕДЕНИЕ

Основоположниками изучения популяционной динамики считаются А. Лотка (1925 г.) и В. Вольтерра (1926 г.). Вдохновленный исследованиям Вольтерра, А.Н. Колмогоров начал изучать модель не конкретно задавая зависимости, а только вводя ограничения на функции. Большой вклад в изучение этой модели внес А.Д. Базыкин [1]. Его работы посвящены построению и изучению большого числа детерминированных моделей типа «хищник-жертва».

Биологически классическую двумерную модель «хищник–жертва» можно интерпретировать следующим образом: волки (хищники) охотятся на зайцев (жертв), зайцы конкурируют между собой, к примеру, за пропитание. Волки также конкурируют между собой за отличные от жертв ресурсы – лис.

Естественно, исследования не ограничились двумя сосуществующими популяциями. Существует также популяционная модель «хищник–две жертвы», описывающая взаимодействие уже трех популяций. Биологически модель можно интерпретировать следующим образом: волки (хищники) охотятся на зайцев (первые жертвы) и полевков (вторые жертвы). Зайцы и полевки могут конкурировать внутри своего вида за кров, а между собой – за пропитание, волки же, в свою очередь, могут конкурировать за отличный от жертв ресурс – лис.

Первый этап в работе по анализу моделей посвящен изучению двух моделей: «хищник–жертва» и «хищник–две жертвы» в детерминированном случае, то есть при отсутствии внешних факторов воздействия. Традиционно изучение детерминированных моделей нелинейной динамики сводится к анализу аттракторов и бифуркаций.

Однако, взаимодействие любых живых существ подвержено непредсказуемым внешним факторам, которые влияют на всех участников взаимодействия. С точки зрения экологии, такими факторами могут быть погодные условия, циклы солнечных и магнитных бурь, вмешательство человека или другие явления, не зависящие ни от хищников, ни от жертв. Анализу моделей под действием внешних факторов посвящен второй этап данной работы.

На сегодняшний день обе модели не изучены до конца, в связи с многообразием режимов, возникающих при различных наборах параметров.

Стохастический анализ модели «хищник–жертва» в случаях, когда, либо отсутствует конкуренция жертв ( $\varepsilon = 0$ ), либо отсутствует конкуренция хищников ( $\delta = 0$ ) проводился в работах [2] и [3], а при наличии конкуренции двух типов в работе [4]. В работах [5], [6] авторами были описаны различные возникающие бифуркации и представлены типичные динамические режимы. В работе [7] исследование данной модели было расширено на изучение стохастической модели, акцент исследований в работе сделан на изучение стохастической чувствительности циклов в зоне каскада бифуркации удвое-

ния периода.

В данной работе будет изучена популяционная модель «хищник–жертва» с учетом конкуренции двух типов в детерминированном и стохастическом случаях в зоне параметров отличной от представленной в работе [4], что подразумевает качественно отличные динамические режимы.

В популяционной модели «хищник–две жертвы» изучены детерминированные бифуркации равновесий и циклов из параметрической зоны, обратных бифуркаций удвоения периода. А также воздействие на эти аттракторы случайного возмущения и вызванные его присутствием феномены.

Анализ выбранных для данной работы моделей состоит из следующих этапов:

1. нахождение равновесий, анализ их устойчивости,
2. нахождение циклов,
3. исследование параметрических зон сосуществования аттракторов,
4. построение бифуркационных диаграмм,
5. построение бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов,
6. анализ чувствительности равновесий,
7. анализ чувствительности циклов,
8. построение доверительных областей: эллипсов и эллипсоидов для равновесий, полусферы и торов – для циклов,
9. изучение индуцированных шумом явлений.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

### 1 Модель «хищник–жертва»

Математическая форма записи модели «хищник–жертва» с учетом конкуренции двух типов выглядит следующим образом [1]:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{xy}{1+\alpha x} - \varepsilon x^2 + \sigma x \dot{w}_1, \\ \dot{y} = -\gamma y + \frac{xy}{1+\alpha x} - \delta y^2 - \sigma y \dot{w}_2. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь  $x$  – плотность популяции жертв,  $y$  – плотность популяции хищников, скорость размножения жертв в отсутствие хищников равна 1,  $\gamma > 0$  – естественная смертность хищников,  $0 < \alpha < 1$  – коэффициент, характеризующий насыщение хищников,  $\sigma$  – интенсивность шума,  $w_1, w_2$  – независимые стандартные винеровские процессы. Следует помнить, что система имеет биологический смысл только если  $x$  и  $y$  неотрицательные.

Модель учитывает три фактора взаимодействия:

1. конкуренция хищников за отличные от жертвы ресурсы, описываемая слагаемым  $-\delta y^2$ ,
2. конкуренция жертв, описываемая слагаемым  $-\varepsilon x^2$ ,
3. взаимодействие популяций, описываемая трофической функцией Холлинга второго типа  $\frac{xy}{1+\alpha x}$ .

#### 1.1 Анализ детерминированной модели

В данном разделе рассматривается детерминированный вариант модели (1.1), имеющий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{xy}{1+\alpha x} - \varepsilon x^2, \\ \dot{y} = -\gamma y + \frac{xy}{1+\alpha x} - \delta y^2. \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь и далее зафиксированы значения параметров  $\gamma = 1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  и  $\alpha = 0.87$ , согласно работе [6]. Параметр  $\delta > 0$  является бифуркационным.

Таким образом, система (1.2) приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{xy}{1+0.87x} - 0.01x^2, \\ \dot{y} = -y + \frac{xy}{1+0.87x} - \delta y^2. \end{cases} \quad (1.3)$$

Данная система максимально может иметь 6 равновесий:



1. тривиальное равновесие  $M_0(0, 0)$ , соответствующее отсутствию обеих популяций,
2. тривиальное равновесие  $M_1(100, 0)$ , соответствующее существованию только жертв,
3. равновесие  $M_5(0, -\frac{1}{\delta})$  при  $\delta > 0$  биологического смысла не имеет и в дальнейшем рассматриваться не будет,
4. нетривиальные равновесия, соответствующие сосуществованию обеих популяций:
  - $M_2(\bar{x}, \bar{y})$  существует, если  $\delta > 0$ ,
  - $M_3(\bar{x}, \bar{y})$  существует если  $0.004170193 < \delta < 0.0042456957$ ,
  - $M_4(\bar{x}, \bar{y})$  имеет биологический смысл, если  $\delta < 0.0042456957$ .

Координаты нетривиальных равновесий  $M_2$ ,  $M_3$  и  $M_4$  находятся из следующих уравнений:

$$-\delta\alpha^2\varepsilon x^3 + x^2(-\delta\alpha^2 + 2\delta\alpha\varepsilon) + x(1 - \alpha - 2\delta\alpha + \delta\varepsilon) - \delta - 1 = 0, \quad (1.4)$$

$$y = \frac{1}{\delta} \frac{x}{1 + \alpha x} - \frac{\gamma}{\delta}. \quad (1.5)$$

Таким образом, в зависимости от значения параметра  $\delta$  система (1.3) может иметь одно или три сосуществующих нетривиальных равновесия.

Нагляднее сосуществование равновесий и поведение системы видно на фазовых портретах, описанных ниже.

При  $\delta < 0.004170193$  помимо нетривиального равновесия  $M_2$  в системе существует цикл  $\Gamma_1$ , описывающий колебания обеих популяций с большой амплитудой (см. рис. 1.1a). При  $\delta = 0.004170193$  происходит седло-узловая бифуркация: появляются седловое равновесие  $M_3$  и неустойчивый узел  $M_4$ . Если  $\delta \in (0.004170193, 0.0041995)$ , система (1.3) имеет только один аттрактор – цикл  $\Gamma_1$ , все траектории сходятся к нему (см. рис. 1.1b). При  $\delta = 0.0041995$  равновесие  $M_2$  становится устойчивым, и рождается неустойчивый цикл  $\Gamma_2$ . При  $\delta = 0.004216$  неустойчивый цикл  $\Gamma_2$  касается устойчивого многообразия седловой точки  $M_3$  и исчезает. Таким образом, для  $\delta \in (0.0041995, 0.004216)$  наблюдается бистабильность: сосуществование устойчивого равновесия  $M_2$  и устойчивого цикла  $\Gamma_1$ . Здесь границей бассейна притяжения  $M_2$  и  $\Gamma_1$  является неустойчивый предельный цикл  $\Gamma_2$  (см. рис. 1.1c). Для  $\delta \in (0.004216, 0.00422)$  система (1.3) также имеет два сосуществующих аттрактора ( $M_2$  и  $\Gamma_1$ ), но здесь границей бассейна является гетероклиническая кривая, которая содержит устойчивое многообразие седловой точки  $M_3$  и неустойчивое многообразие неустойчивого узла  $M_4$  (см. рис. 1.1d). При  $\delta = 0.00422$  предельный цикл  $\Gamma_1$  соприкасается с устойчивым многообразием седловой точки  $M_3$  и исчезает. Далее для  $\delta \in (0.00422, 0.0042456957)$  существует только один устойчивый аттрактор – равновесие  $M_2$  (см. рис. 1.1e). При  $\delta = 0.0042456957$  равновесия  $M_3$  и  $M_4$  сливаются, в результате чего происходит исчезновение обоих равновесий. При дальнейшем увеличении параметра  $\delta$  в системе существует только один аттрактор – равновесие

$M_2$  (см. рис. 1.1f). Стоит отметить, что здесь существует псевдосепаратриса (красная пунктирная линия). Эта линия разделяет фазовую плоскость на две области: первая – с начальными точками, из которых траектории быстро сходятся к равновесию  $M_2$ , и второй – с начальными точками, из которых траектории идут сначала вниз, почти достигают равновесий  $M_0$  и  $M_1$  и только затем сходятся к равновесию  $M_2$ .

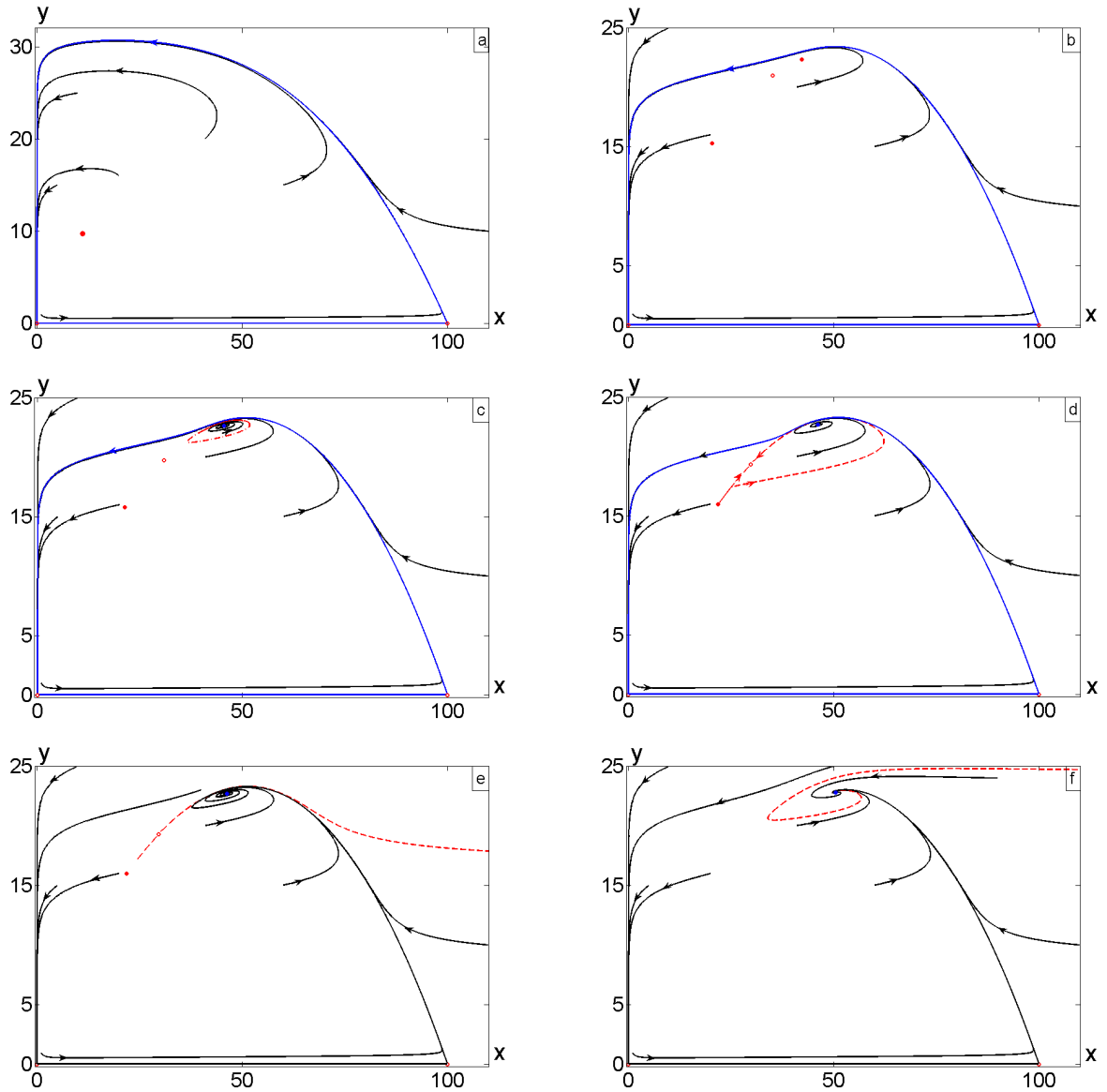


Рисунок 1.1 — Фазовые портреты системы (1.3) при а)  $\delta = 0.002$ , б)  $\delta = 0.00418$ , в)  $\delta = 0.00421$ , д)  $\delta = 0.004219$ , е)  $\delta = 0.00422$ , ф)  $\delta = 0.0043$

На рис. 1.2 представлена бифуркационная диаграмма системы (1.3) в зависимости от параметра  $\delta$ , на которой можно отследить описанные выше бифуркации. Здесь черные сплошные линии представляют экстремумы  $x$ -координат устойчивого цикла  $\Gamma_1$ , красная сплошная линия – неустойчивые равновесия  $M_2$  и  $M_4$ , синяя сплошная линия – устойчивое равновесие  $M_2$ , красная пунктирная линия –  $x$ -координаты седловой точки  $M_3$  и красные штрихпунктирные линии являются экстремумами  $x$ -координат неустойчивого

предельного цикла  $\Gamma_2$ .

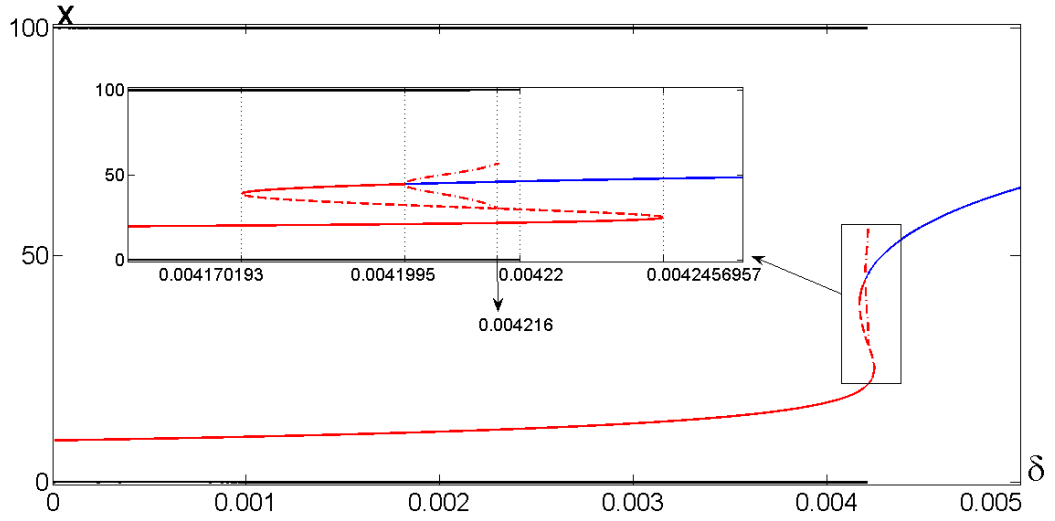


Рисунок 1.2 — Экстремумы аттракторов системы (1.3)

Показателем устойчивости равновесий являются собственные значения матрицы системы первого приближения:

$$F = \begin{pmatrix} f'_x(\bar{x}, \bar{y}) & f'_y(\bar{x}, \bar{y}) \\ g'_x(\bar{x}, \bar{y}) & g'_y(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

где  $\bar{x}, \bar{y}$  — координаты равновесия.

Равновесие  $M_0$  имеет собственные значения  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$  и всегда является седлом. Аналогично для равновесия  $M_1$ :  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \frac{3}{22}$ , оно также является седлом при любом значении параметра  $\delta$ .

Так как для системы (1.3) равновесия  $M_2, M_3$  и  $M_4$  находятся только численно, характеристические показатели матрицы системы первого приближения также были найдены численно. Сводные результаты показаны на рисунке 1.3. Здесь представлена действительная часть собственных значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (синий) равновесия  $M_2$ .

При  $0 < \delta < 0.0041995$  значения  $\lambda_1 < 0$  и  $\lambda_2 > 0$  и, значит,  $M_2$  — седло, при  $\delta > 0.0041995$  значение  $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 < 0$  и  $M_2$  — устойчивый фокус. Красным цветом на рисунке 1.3 представлены собственные значения равновесия  $M_3$ . Видно, что  $\lambda_1 > 0$  и  $\lambda_2 < 0$  для любых  $\delta \in (0.004170193; 0.0042456957)$ . Таким образом,  $M_3$  является седловой точкой. Зеленые кривые соответствуют собственным числам равновесия  $M_4$ , которые положительны при  $0.004170193 < \delta < 0.0042456957$ , то есть  $M_4$  при этих значениях параметра всегда является неустойчивым узлом.

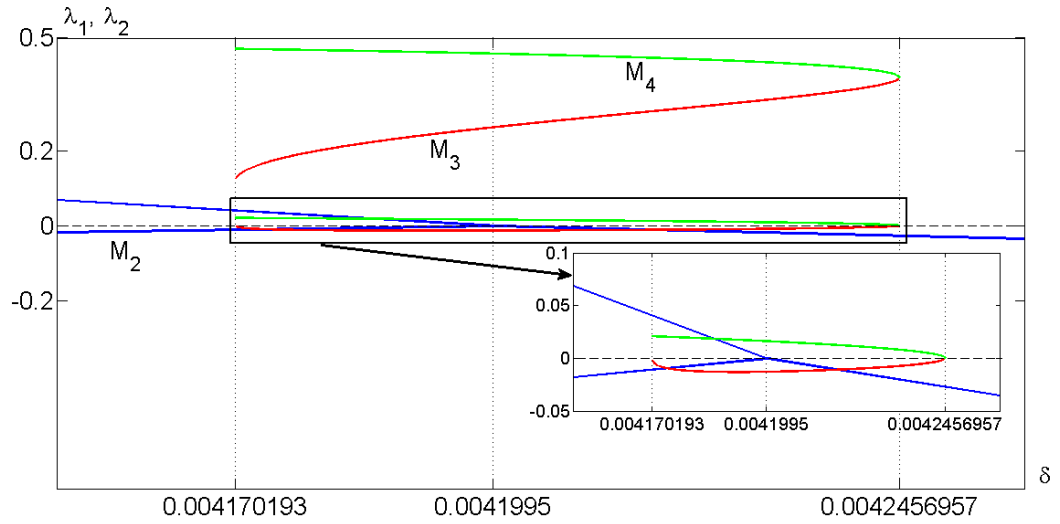


Рисунок 1.3 — Устойчивость равновесий  $M_2$ ,  $M_3$  и  $M_4$  системы (1.3)

Таким образом, в первой части этой главы диссертации проведен анализ детерминированной системы (1.2). Исследованы аттракторы модели и подробно описаны бифуркации.

## 1.2 Анализ стохастической модели

В этом разделе рассматривается стохастическая модель, описывающая влияние внешних случайных факторов на динамику двух сосуществующих популяций с учетом параметрического шума:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{xy}{1+0.87x} - 0.01x^2 + \sigma x \dot{w}_1, \\ \dot{y} = -y + \frac{xy}{1+0.87x} - \delta y^2 - \sigma y \dot{w}_2. \end{cases} \quad (1.7)$$

Здесь  $\sigma$  — интенсивность шума,  $w_1$  и  $w_2$  — независимые стандартные винеровские процессы.

Под действием случайных возмущений траектории системы (1.7) покидают детерминированный аттрактор и формируют пучок случайных состояний. А для любого случайного распределения, если известна плотность, то известны и все его характеристики. Для нахождения плотности распределения для процесса, задаваемого уравнением Ито в виде:

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon \sigma(x) \dot{w}, \quad (1.8)$$

нужно решить уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова:

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij} \rho) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i \rho) = 0, \text{ где } a_{ij} = [\sigma \sigma^T]_{ij}. \quad (1.9)$$

Однако, решение этого уравнения даже для системы второго порядка является непростой задачей. А.Д. Вентцелем и М.И. Фрейдлином была предложена аппроксимация плотности, которая основывается на функции квазипотенциала [8]:

$$v(x) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \rho(x, \varepsilon). \quad (1.10)$$

Для нахождения этой функции, нужно решить уравнение Гамильтона-Якоби для системы уравнений второго порядка, что тоже не тривиально. В работах Л.Б. Ряшко, И.А. Башкирцевой и Г.Н. Мильштейна ([9], [10], [11]) была предложена аппроксимация квазипотенциала в малой окрестности исследуемого аттрактора. Она получила название функции стохастической чувствительности, и с ее помощью можно оценивать дисперсию и изучать отклик (чувствительность) аттракторов на случайное воздействие.

Также данная методика позволяет строить области фазовой плоскости, в которых с заданной вероятностью концентрируются случайные состояния системы – доверительные эллипсы и полосы.

На рисунке 1.4, согласно описанной выше теории, построены а) стохастическая чувствительность равновесия  $M_2$  в зоне его устойчивости и б) эллипс рассеивания равновесия  $M_2$  при  $\delta = 0.00422$  и  $\sigma = 0.00001$ . Видно, что доверительный эллипс хорошо описывает разброс случайных траекторий вокруг аттрактора. Также видно, что при  $\delta$  стремящемся к бифуркационной точке  $\delta = 0.0041995$  справа, коэффициенты стохастической чувствительности равновесия  $M_2$  стремятся к бесконечности.

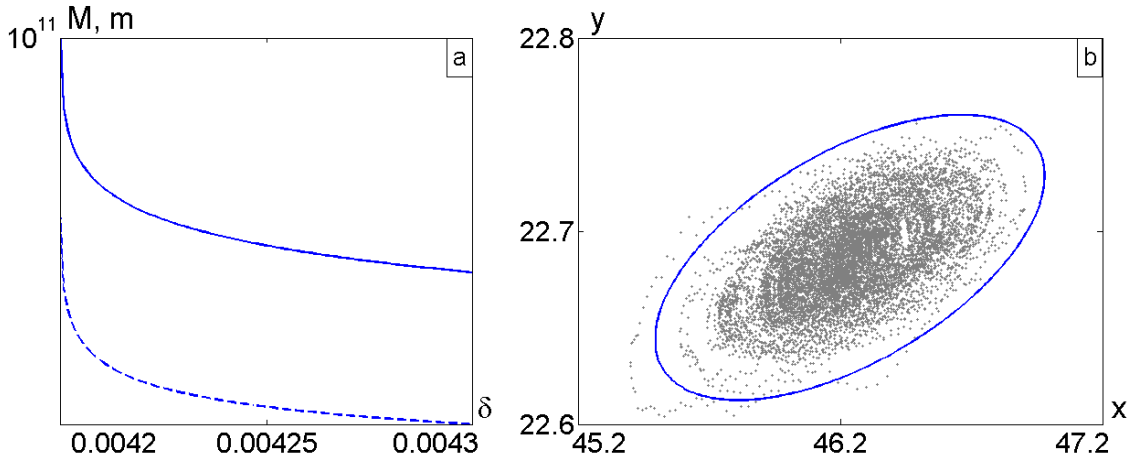


Рисунок 1.4 — Для равновесия  $M_2$  системы (1.7) а) чувствительность и б) эллипс рассеивания при  $\delta = 0.00422$  и  $\sigma = 0.00001$

Первым будет рассмотрен стохастический феномен в случае, когда  $\delta \in (0.0041995, 0.004216)$ , здесь система (1.3) имеет устойчивое равновесие  $M_2$ , устойчивый цикл  $\Gamma_1$  и неустойчивый цикл  $\Gamma_2$ . На рисунке 1.5a-b для  $\delta = 0.00421$  представлены эллипсы

рассеивания при  $\sigma = 0.001$  (зеленая кривая) и  $\sigma = 0.0001$  (синяя кривая), неустойчивый цикл  $\Gamma_2$  (красная пунктирная линия) и случайные траектории (черные кривые для  $\sigma = 0.001$ ). При малой интенсивности шума  $\sigma = 0.0001$  доверительный эллипс расположен далеко от неустойчивого цикла  $\Gamma_2$ , вероятность того, что случайные траектории покинут бассейн притяжения, мала. При большей интенсивности шума  $\sigma = 0.001$  эллипс рассеивания пересекает неустойчивый цикл  $\Gamma_2$ , и случайные траектории покидают зону притяжения и формируют колебания большой амплитуды вокруг цикла  $\Gamma_1$ . На рисунке 1.5с представлены колебания, вызванные шумом, на временных рядах. Таким образом, под воздействием шума число обеих популяций резко уменьшается, а амплитуда случайных колебаний увеличивается.

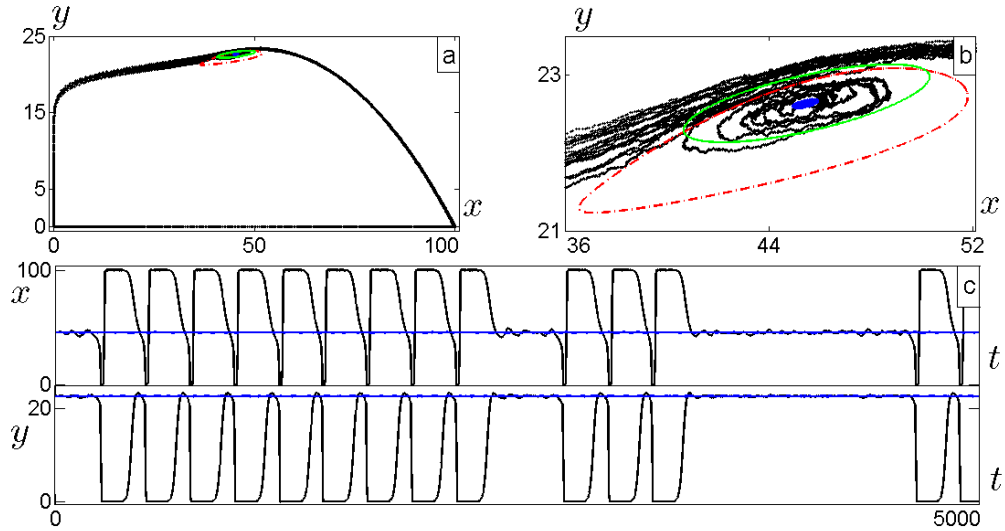


Рисунок 1.5 — Индуцированная шумом возбудимость системы (1.7) при  $\delta = 0.00421$  для  $\sigma = 0.0001$  (синие случайные состояния и эллипс) и  $\sigma = 0.001$  (черные случайные состояния и зеленый эллипс) и временные ряды

Далее будет рассмотрен случай, когда  $\delta \in (0.004216, 0.00422)$ , в этом интервале бифуркационного параметра система (1.3) имеет устойчивое равновесие  $M_2$ , устойчивый цикл  $\Gamma_1$  и гетероклиническую траекторию в качестве границы бассейнов притяжения. На рисунке 1.6a-b для  $\delta = 0.004219$  показаны доверительные эллипсы при  $\sigma = 0.002$  (зеленая кривая) и  $\sigma = 0.0005$  (синяя кривая), гетероклиническая траектория (красная пунктирная линия) и случайные траектории (черная линия для  $\sigma = 0.002$ ). Как и в предыдущем случае, для малой интенсивности шума  $\sigma = 0.0005$ , эллипс рассеивания расположен далеко от границы бассейнов притяжения, а случайные траектории концентрируются вокруг устойчивого равновесия  $M_2$ . При большей интенсивности шума  $\sigma = 0.002$  доверительный эллипс пересекает гетероклиническую траекторию, а случайные траектории покидают зону притяжения равновесия  $M_2$  и образуют колебания большой амплитуды вокруг цикла  $\Gamma_1$ . На рисунке 1.6с представлены эти колебания,

вызванные шумом, на временных рядах. В обоих описанных случаях возбудимость, вызванная шумом, обусловлена переходами из равновесия в цикл, вызванными случайным возмущением.

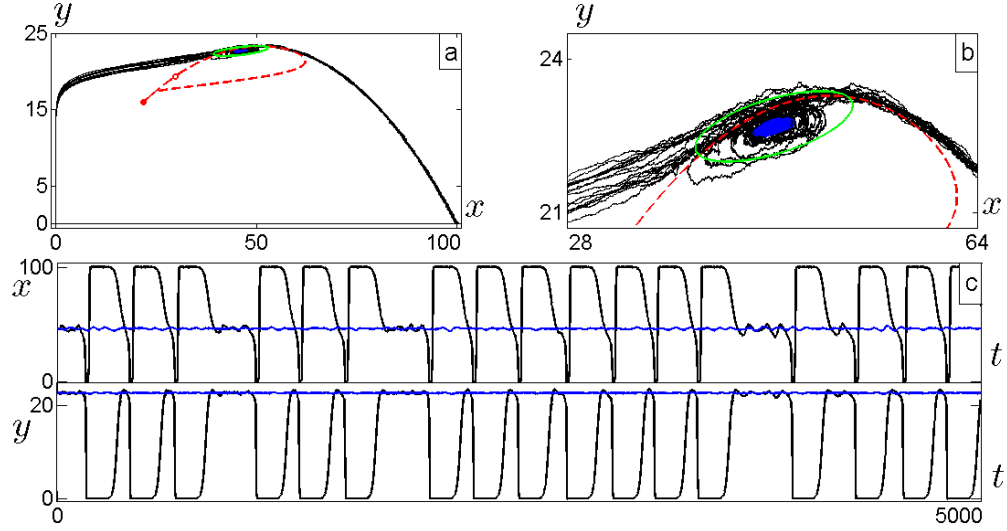


Рисунок 1.6 — Индуцированная шумом возбудимость системы (1.7) при  $\delta = 0.004219$  для  $\sigma = 0.0005$  (синие случайные состояния и эллипс) и  $\sigma = 0.002$  (черные случайные состояния и зеленый эллипс) и временные ряды

Наконец, рассматривается случай  $\delta > 0.0042$ , когда система 1.3 имеет только один аттрактор – равновесие  $M_2$ . На рисунке 1.7a-b для  $\delta = 0.0043$  показаны доверительные эллипсы при  $\sigma = 0.01$  (зеленая кривая) и  $\sigma = 0.001$  (синяя кривая), псевдосепаратриса (красная пунктирная линия) и случайные траектории (черные кривые для  $\sigma = 0.01$ ). Видно, что при меньшей интенсивности шума ( $\sigma = 0.001$ ) эллипс рассеивания расположен далеко от псевдосепаратрисы, а случайные траектории локализованы вокруг равновесия  $M_2$ . Если интенсивность шума увеличивается, то эллипс пересекает псевдосепаратрису и случайные траектории совершают колебания большой амплитуды. Чем больше интенсивность шума, тем чаще реализуются колебания большой амплитуды. На рисунке 1.7c показано такое поведение на временных рядах:  $\sigma = 0.001$  (синий цвет) и  $\sigma = 0.01$  (черный цвет). Таким образом, в этой параметрической моностабильной зоне также наблюдается индуцированная шумом возбудимость.

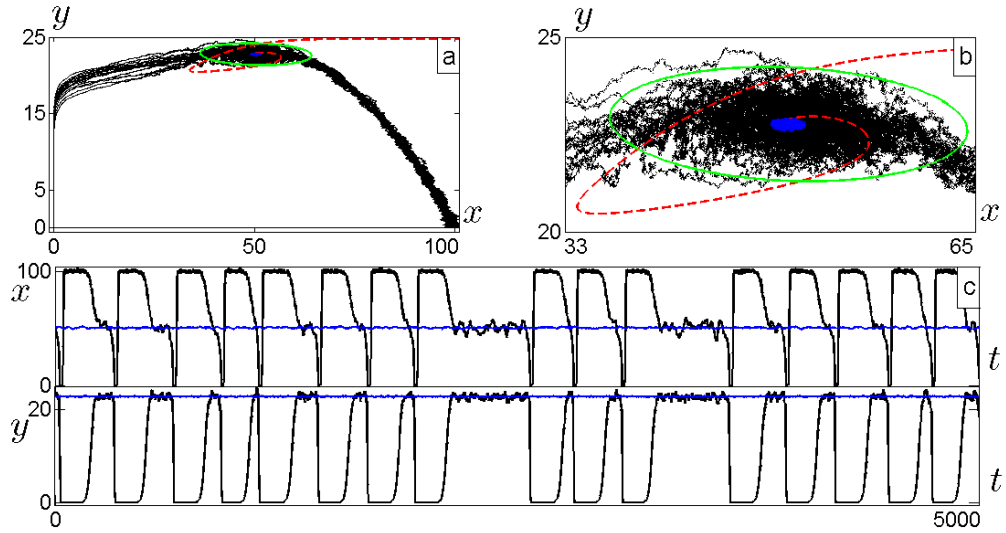


Рисунок 1.7 — Индуцированная шумом возбудимость системы (1.7) при  $\delta = 0.0043$  для  $\sigma = 0.001$  (синие случайные состояния и эллипс) и  $\sigma = 0.01$  (черные случайные состояния и зеленый эллипс) и временные ряды

Таким образом, в первой главе работы представлена двумерная популяционная модель «хищник–жертва», учитывающая внутривидовую конкуренцию как популяции жертв, так и популяции хищников за отличные от жертв ресурсы. Подробно описаны аттракторы и исследованы возникающие в системе бифуркации. В стохастической модели исследована чувствительность равновесий и исследованы возникающие стохастические феномены.



## 2 Двумерные подсистемы трехмерной модели «хищник–две жертвы»

Для перехода к изучению трехмерной модели необходимо понимать, из чего будет состоять система, описывающая данную модель. Так как количество популяций увеличивается, число подсистем также становится больше: три одномерные подсистемы и три двумерные. Так как изучение одномерных систем является тривиальной задачей, изучение их в данной работе проводиться не будет. Будут рассмотрены три двумерные системы: «жертва<sub>1</sub>–жертва<sub>2</sub>», «хищник–жертва<sub>1</sub>» и «хищник–жертва<sub>2</sub>». Здесь и далее жертва<sub>1</sub> и жертва<sub>2</sub> – два разных типа популяций жертв. Изучение данных подсистем необходимо для понимания процессов, возникающих в результате вымирания той или иной популяции, то есть переход в определенную плоскость, описанную одной из подсистем. Система, описывающая трехмерную модель по типу «хищник–две жертвы», выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\alpha_1 - x - \varepsilon_1 y - \beta_1 z) + \sigma \dot{w}_1, \\ \dot{y} = y(\alpha_2 - y - \varepsilon_2 x - \beta_2 z) + \sigma \dot{w}_2, \\ \dot{z} = -z(1 - \delta_1 x - \delta_2 y + \gamma z) + \sigma \dot{w}_3, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $x$  и  $y$  – численности популяций жертв<sub>1</sub> и жертв<sub>2</sub> соответственно,  $z$  – численность популяции хищников,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – скорость роста жертв<sub>1</sub> и жертв<sub>2</sub> соответственно,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – коэффициенты межвидовой конкуренции жертв<sub>1</sub> и жертв<sub>2</sub>,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – коэффициенты взаимодействия жертв<sub>1</sub> и жертв<sub>2</sub>,  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – коэффициенты взаимодействия хищника с жертвами<sub>1</sub> и жертвами<sub>2</sub> соответственно и  $\gamma$  – коэффициент внутривидовой конкуренции хищников,  $\sigma$  – интенсивность шума,  $w_1, w_2, w_3$  – независимые стандартные винеровские процессы. Следует помнить, что система имеет биологический смысл только если  $x$  и  $y, z$  неотрицательные.

Это вольтерровская система дифференциальных уравнений, которая изучалась в работах [6] и [5].

Для всех подсистем будут зафиксированы следующие параметры:

$$\alpha_1 = 2.4, \beta_1 = 4, \beta_2 = 10, \gamma = 1, \delta_1 = 0.25, \delta_2 = 4, \varepsilon_1 = 6, \varepsilon_2 = 1. \quad (2.2)$$

Далее изучение двумерных подсистем будет происходить в зависимости от параметра  $\alpha_2$ .

### 2.1 Анализ детерминированных подсистем

Первой будет рассмотрена подсистема «жертва<sub>1</sub>–жертва<sub>2</sub>», описываемая следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2.4 - x - 6y), \\ \dot{y} = y(\alpha_2 - y - x). \end{cases} \quad (2.3)$$

Всего данная система имеет 4 равновесия. Тривиальное равновесие  $O(0, 0)$  соответствует отсутствию обеих популяций и является неустойчивым узлом. Тривиальное равновесие  $A_1(2.4, 0)$ , описывающее существование только жертвы<sub>1</sub>, является устойчивым  $\alpha_2 < 2.4$ . Третье тривиальное равновесие  $A_2(0, \alpha_2)$  отвечает существованию только жертвы<sub>2</sub>, является седлом при  $\alpha_2 \in (0, 0.4)$  и устойчивым узлом при  $\alpha_2 > 0.4$ . Также в системе присутствует нетривиальное равновесие  $B_1(0.04(-12 + 30\alpha_2), 0.48 - 0.2\alpha_2)$ , существующее при  $\alpha_2 \in (0.4, 2.4)$  и являющееся неустойчивым на всем промежутке существования.

На рисунке 2.1 представлены фазовые портреты системы (2.3) в зонах между точками бифуркации. При  $\alpha_2 < 0.4$  в системе наблюдается только один аттрактор – равновесие  $A_1$ , соответствующее существованию только жертвы<sub>1</sub>. При любой начальной численности популяций произойдет вымирание жертвы<sub>1</sub> (рис.2.1a). При  $\alpha_2 = 0.4$  равновесие  $A_2$  становится устойчивым, и рождается равновесие  $B_1$ . На рисунке 2.1b показано сосуществование трех равновесий: двух устойчивых и неустойчивого. Бассейны притяжения аттракторов разделены сепаратрисой равновесия  $B_1$ . Таким образом, в системе наблюдается бистабильность: при различных начальных численностях популяций наблюдается либо выживание жертвы<sub>1</sub> (равновесие  $A_1$ ), либо жертвы<sub>2</sub> (равновесие  $A_2$ ). В бифуркационной точке  $\alpha_2 = 2.4$  равновесие  $B_1$  сливается с равновесием  $A_1$  и исчезает, а равновесие  $A_1$  становится неустойчивым. В результате в системе существует только один аттрактор – равновесие  $A_2$ , притягивающее к себе траектории, запущенные при любой начальной численности популяций. Популяция жертвы<sub>1</sub> в этой зоне параметров выжить не может.

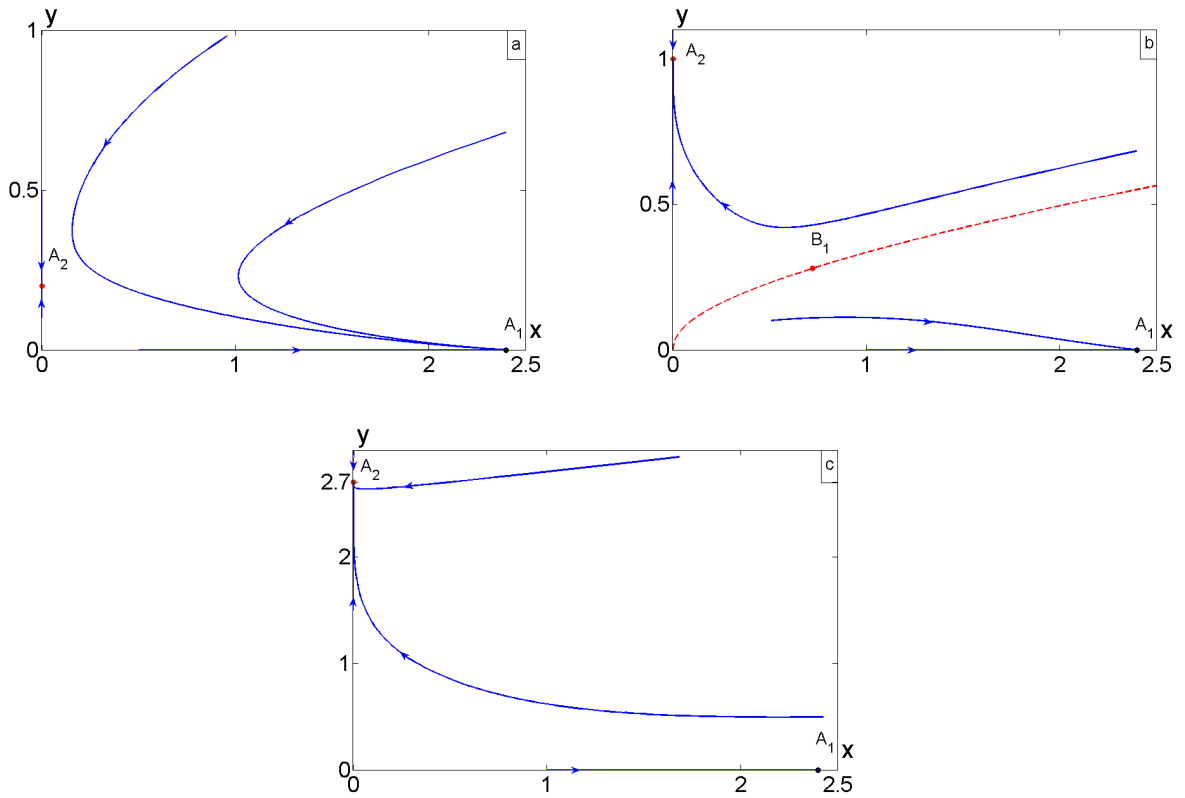


Рисунок 2.1 — Фазовые портреты системы (2.3) при а)  $\alpha_2 = 0.2$ , б)  $\alpha_2 = 1$ , в)  $\alpha_2 = 2.7$

Следующей будет рассмотрена подсистема «хищник–жертва<sub>1</sub>», описываемая следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2.4 - x - 4z), \\ \dot{z} = -z(1 - 0.25x + z). \end{cases} \quad (2.4)$$

Видно, что в данной системе бифуркационный параметр отсутствует, что говорит о структурной устойчивости данной подсистемы.

Всего система (2.4) имеет 4 равновесия. Тривиальное  $O(0, 0)$ , соответствующее отсутствию обеих популяций и являющееся седловой точкой. Тривиальное равновесие  $A_1(2.4, 0)$ , соответствующее ситуации существования только жертвы<sub>1</sub>, является устойчивым фокусом. А также равновесия  $A_3(0, -1)$  и  $B_3(3.2, -0.2)$ , не имеющие биологического смысла и далее не рассматривающиеся.

Таким образом, в системе наблюдается только одно устойчивое равновесие. На рисунке 2.2 представлен фазовый портрет системы (2.4). Видно, что при любой начальной численности популяций происходит вымирание популяции хищников и стабилизация численности популяции жертвы<sub>1</sub>.

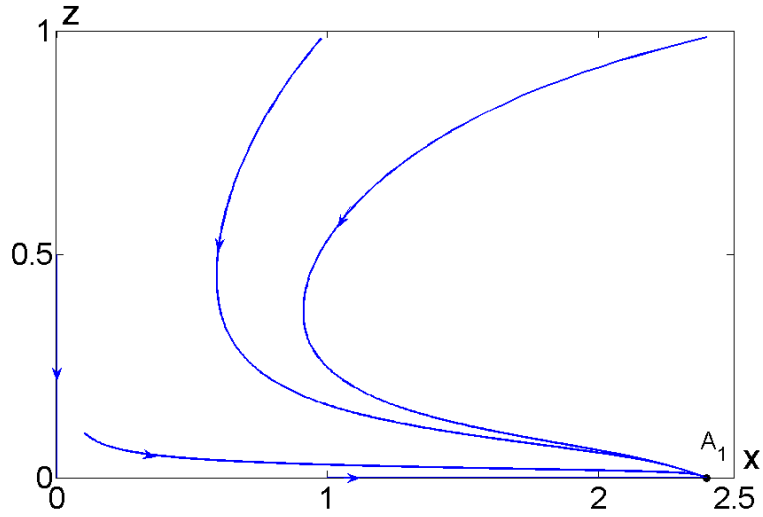


Рисунок 2.2 — Фазовый портрет системы (2.4) при любом значении  $\alpha_2$

И, наконец, будет рассмотрена подсистема «хищник–жертва<sub>2</sub>». Система, описывающая данную модель, выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{y} = y(\alpha_2 - y - 10z), \\ \dot{z} = -z(1 - 4y + z). \end{cases} \quad (2.5)$$

Эта система, как и предыдущие, имеет 4 равновесия. Тривиальное равновесие  $O(0, 0)$ , соответствующее отсутствию обеих популяций, являющееся седловым. Тривиальное равновесие  $A_2(\alpha_2, 0)$ , описывающее ситуацию существования только жертвы<sub>2</sub>, является устойчивым при  $\alpha_2 < 0.25$ . Нетривиальное равновесие  $B_2((10 + \alpha_2)/41, (4\alpha_2 - 1)/41)$ , соответствующее устойчивому сосуществованию популяций хищников и жертвы<sub>2</sub>, существует при  $\alpha_2 > 0.25$  и устойчиво на этом промежутке. Также существует тривиальное равновесие  $A_3(0, -1)$ , не имеющее биологического смысла и далее не рассматривающееся.

На рисунке 2.3 представлены фазовые портреты в зонах структурной устойчивости. При  $\alpha_2 < 0.25$  в системе существует устойчивое равновесие  $\alpha_2$ , отвечающее существованию только жертвы<sub>2</sub>. При любой начальной численности популяций (отличной от нуля), популяция хищников не выживает, а популяция жертвы<sub>2</sub> приходит в стабильное существование. При  $\alpha_2 = 0.25$  из равновесия  $A_2$  рождается устойчивое равновесие  $B_2$ , а равновесие  $A_2$  становится неустойчивым. Таким образом, при  $\alpha_2 > 0.25$  в системе (2.5) появляется устойчивое нетривиальное равновесие. При любой начальной численности популяций (отличной от нуля) обе популяции выживают, приходя к равновесному сосуществованию.

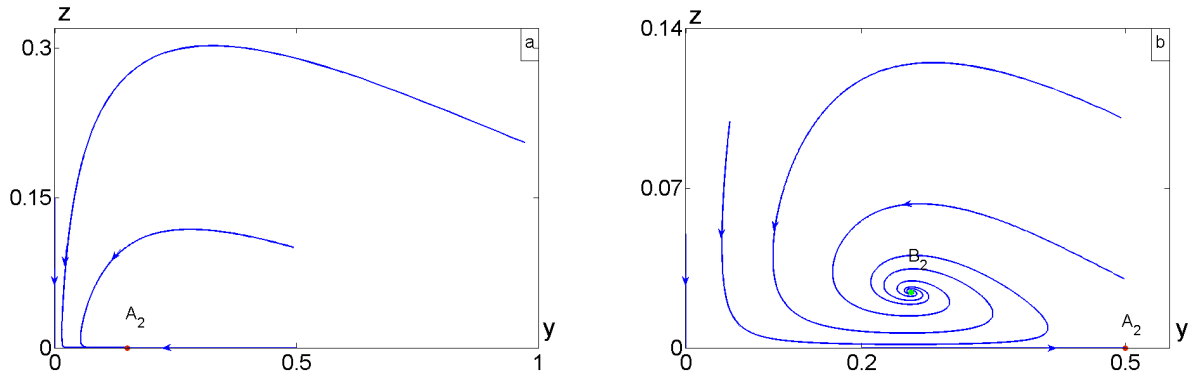


Рисунок 2.3 — Фазовые портрет системы (2.5) при а)  $\alpha_2 = 0.15$ , б)  $\alpha_2 = 0.5$

## 2.2 Анализ стохастических подсистем

В связи с отсутствием в подсистемах (2.3) и (2.4) устойчивого нетривиального равновесия, рассматривать их в стохастическом случае смысла не имеет. Но в подсистеме (2.5) такое равновесие имеется, под влиянием внешнего воздействия будет рассмотрена именно она.

Стохастическая интерпретация системы (2.5), учитывающая присутствие аддитивного воздействия, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{y} = y(\alpha_2 - y - 10z) + \sigma \dot{w}_1, \\ \dot{z} = -z(1 - 4y + z) + \sigma \dot{w}_2. \end{cases} \quad (2.6)$$

С помощью техники функции стохастической чувствительности, описанной в разделе 1.2, можно найти чувствительность и доверительные эллипсы для равновесия  $B_2$ . На рисунке 2.4 построены а) стохастическая чувствительность равновесия  $B_2$  в зоне его устойчивости и б) эллипс рассеивания вокруг равновесия  $B_2$  при  $\alpha_2 = 0.5$  и  $\sigma = 10^{-3}$ . Видно, что доверительный эллипс хорошо описывает разброс случайных состояний вокруг аттрактора. Также легко заметить, что при  $\alpha_2$  стремящемся к бифуркационной точке  $\alpha_2 = 0.25$  справа, коэффициенты стохастической чувствительности равновесия  $B_2$  стремятся к бесконечности.

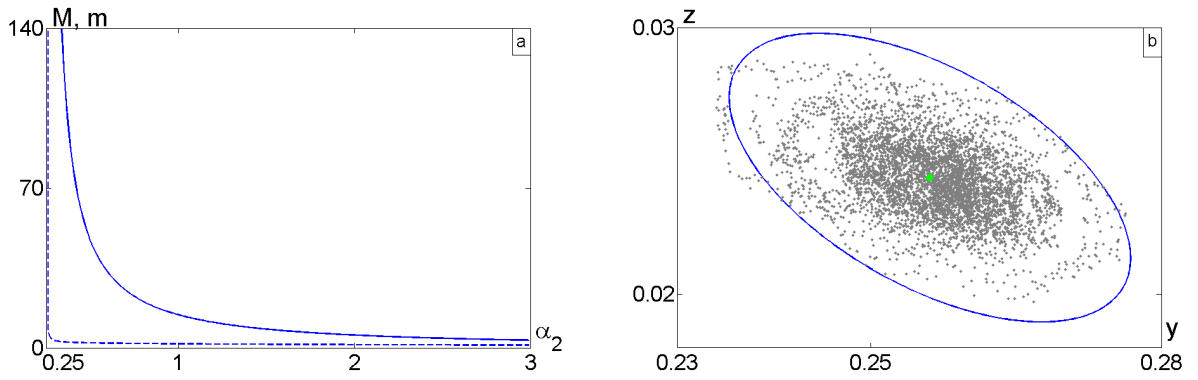


Рисунок 2.4 — Для равновесия  $B_2$  системы (2.5) а) собственные значения матрицы чувствительности и б) эллипс рассеивания при  $\alpha_2 = 0.5$  и  $\sigma = 10^{-3}$

Даже в простых системах сосуществования популяций при наличии случайного возмущения могут происходить различные стохастические феномены что будет описано далее с помощью функции стохастической чувствительности.

На рисунке 2.5 представлено вымирание популяции хищников для  $\alpha_2 = 0.5$  при  $\sigma = 5 * 10^{-3}$ . На рисунке 2.5а видно, что при малой интенсивности шума  $\sigma = 10^{-3}$  случайные состояния (зеленые) концентрируются вокруг равновесия  $B_2$  и не покидают доверительного эллипса (зеленый). При большей интенсивности шума ( $\sigma = 5 * 10^{-3}$ ) разброс случайных состояний увеличивается, а доверительный эллипс (синий) пересекает критическую границу – ось  $Oy$ , в результате чего случайные состояния (серые) попадают на устойчивое многообразие седла  $A_2$  и концентрируются вокруг этого равновесия. Таким образом, происходит вымирание популяции хищников, а популяция жертвы<sub>2</sub> продолжает существовать. На рисунке 2.5б данный феномен представлен временными рядами. На них видно, что при малой интенсивности шума  $\sigma = 10^{-3}$  происходят незначительные колебания численности популяций (зеленый) вокруг равновесия  $B_2$ . При увеличении интенсивности шума ( $\sigma = 5 * 10^{-3}$ ) происходят колебания большей амплитуды (серый) с последующим вымиранием популяции хищников.

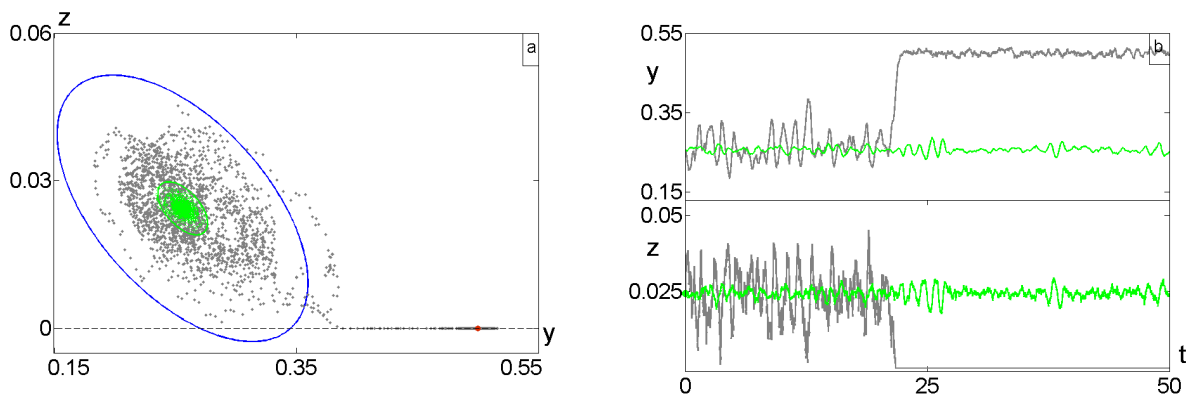


Рисунок 2.5 — Индуцированное шумом вымирание для системы (2.6) при  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\sigma = 10^{-3}$  (зеленый) и  $\sigma = 5 * 10^{-3}$  (серый) а) фазовый портрет и б) временные ряды

На рисунке 2.6 серым цветом представлена вероятность выживания популяции хищников, а синим цветом – вымирания, в зависимости от интенсивности шума  $\sigma$  при  $\alpha_2 = 0.5$ . Видно, что изначально вероятность вымирания весьма близка к нулю, а вероятность выживания – к единице, но при увеличении интенсивности шума возрастает и вероятность вымирания хищников, а вероятность выживания уменьшается, что показано выше на рисунке 2.5.

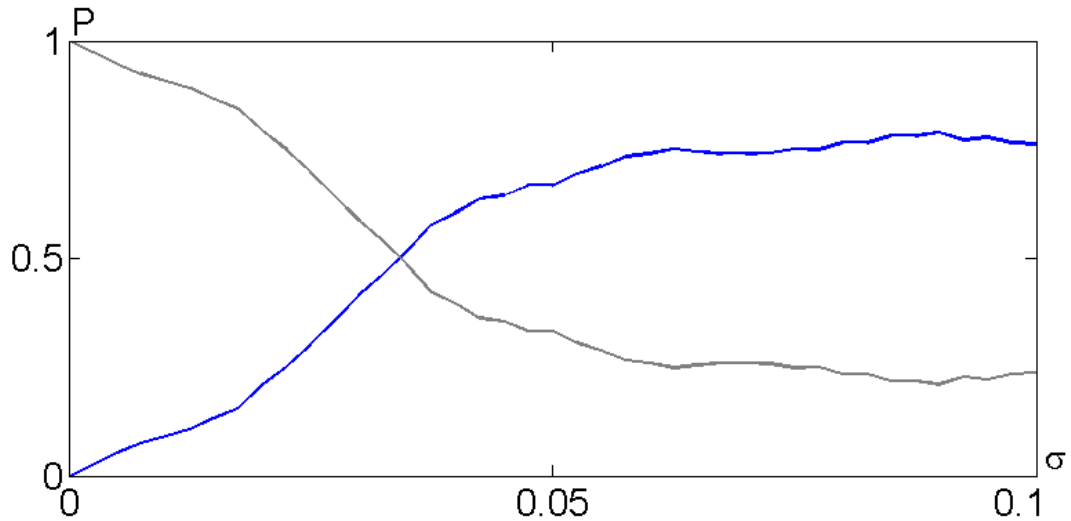


Рисунок 2.6 — Для модели «хищник–жертва<sub>2</sub>» при  $\alpha_2 = 0.5$  выживание хищников (серый) и вымирание хищников (синий)

Таким образом, в данной главе изучены двумерные подсистемы трехмерной популяционной модели «хищник–две жертвы», описаны равновесия, их устойчивость и возникающие бифуркации. Кроме того, представлены типичные фазовые портреты. Для подсистемы «хищник–жертва<sub>2</sub>» для нетривиального устойчивого равновесия была найдена чувствительность и описан индуцированный шумом феномен – вымирание популяции хищников.

### 3 Модель «хищник–две жертвы»

#### 3.1 Анализ детерминированной модели

Далее полная система (2.1) будет рассмотрена в детерминированном случае, то есть при отсутствии внешнего воздействия, в зависимости от бифуркационного параметра  $\alpha_2$  с зафиксированными значениями согласно (2.2). Таким образом, система (2.1) приобретает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2.4 - x - 6y - 4z), \\ \dot{y} = y(\alpha_2 - x - y - 10z), \\ \dot{z} = -z(1 - 0.25x - 4y + z). \end{cases} \quad (3.1)$$

Система (3.1) всего имеет 7 равновесий. Равновесие  $O(0, 0, 0)$  соответствует ситуации отсутствия хищников и обеих популяций жертв.

Равновесия  $A_1(2.4, 0, 0)$  и  $A_2(0, \alpha_2, 0)$  отражают существование популяции жертв<sub>1</sub> и жертв<sub>2</sub> соответственно при отсутствии одной из популяций жертв и популяции хищников.

Равновесие  $B_1((6\alpha_2 - 2.4)/5, (-\alpha_2 + 2.4)/5, 0)$  соответствует ситуации сосуществования обеих популяций жертв при отсутствии популяции хищников. Данное равновесие существует при  $\alpha_2 \in [0.4, 2.4]$ .

Равновесие  $B_2(0, (\alpha_2 + 10)/41, (4\alpha_2 - 1)/41)$  показывает сосуществование популяций жертв<sub>2</sub> и хищников. Оно имеет биологический смысл при  $\alpha_2 \geq 0.25$ .

Равновесие  $B_3(3.2, 0, -0.2)$  отвечает ситуации сосуществования хищников и популяции жертвы<sub>1</sub>, но биологического смысла не имеет из-за отрицательной численности популяции хищников.

Седьмое равновесие  $M((-22\alpha_2 + 42.4)/5, (2\alpha_2 - 2.4)/5, (2.5\alpha_2 - 4)/5)$  соответствует ситуации сосуществования популяций обеих типов жертв и популяции хищника. Данное равновесие имеет смысл при  $\alpha_2 \in (1.6, 1.92727)$ .

Также в системе существуют предельные циклы и хаотические аттракторы. На рисунке 3.1 представлена бифуркационная диаграмма существования и изменения предельных циклов и хаотических аттракторов. Видно, что при увеличении параметра  $\alpha_2$  происходит последовательность бифуркаций удвоения периода, которая ведет к установлению хаотического режима, после чего происходит формирование цикла кратности 3. При последующем увеличении бифуркационного параметра снова происходит формирование хаотического режима, после которого происходит каскад обратных бифуркаций и возвращение к циклу одного периода.



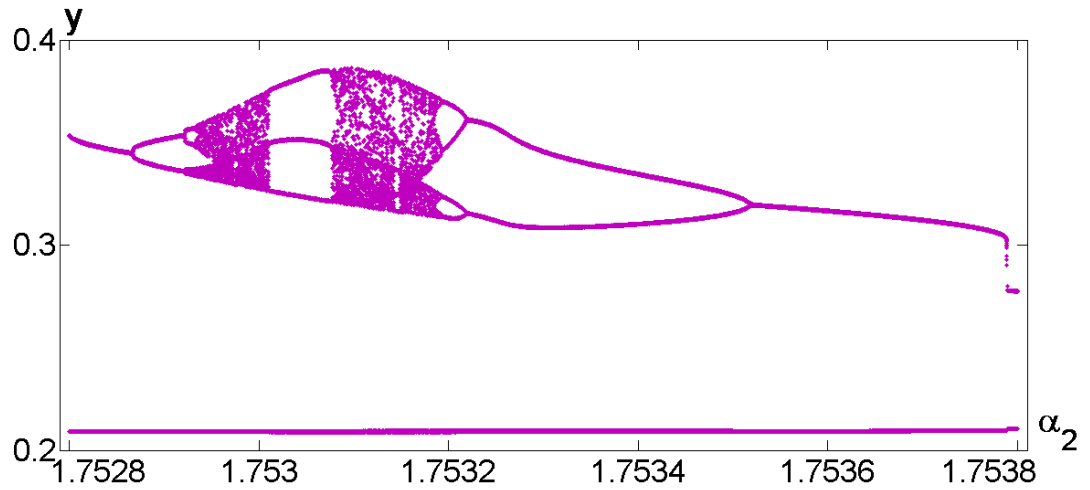


Рисунок 3.1 — Бифуркационная диаграмма существования циклов и хаотических аттракторов системы (3.1)

Равновесие  $O$  является седловой точкой. На рис.3.2 иллюстрируется устойчивость равновесий  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  и  $M$ . Пунктирными линиями на рисунках показана ситуация, когда равновесия являются неустойчивыми. Сплошной линией показано равновесие на участке его устойчивости. Равновесие  $A_1$  (черный) устойчиво в пространстве при  $\alpha_2 < 2.4$  и в плоскости  $xOz$ . Равновесие  $A_2$  (коричневый) является устойчивым в плоскости  $xOy$  при  $\alpha_2 < 0.25$  и  $\alpha_2 > 0.4$ . Равновесие  $B_1$  (красный) является неустойчивым при любом значении параметра  $\alpha_2$ . Равновесие  $B_2$  (зеленый) является устойчивым в плоскости  $xOz$  при  $\alpha_2 \in (0.25, 1.92727)$  и устойчивым в пространстве  $xOy$  при  $\alpha_2 < 1.92727$ . Равновесие  $M$  (синий) является устойчивым в пространстве при  $\alpha_2 < 1.7638$ .

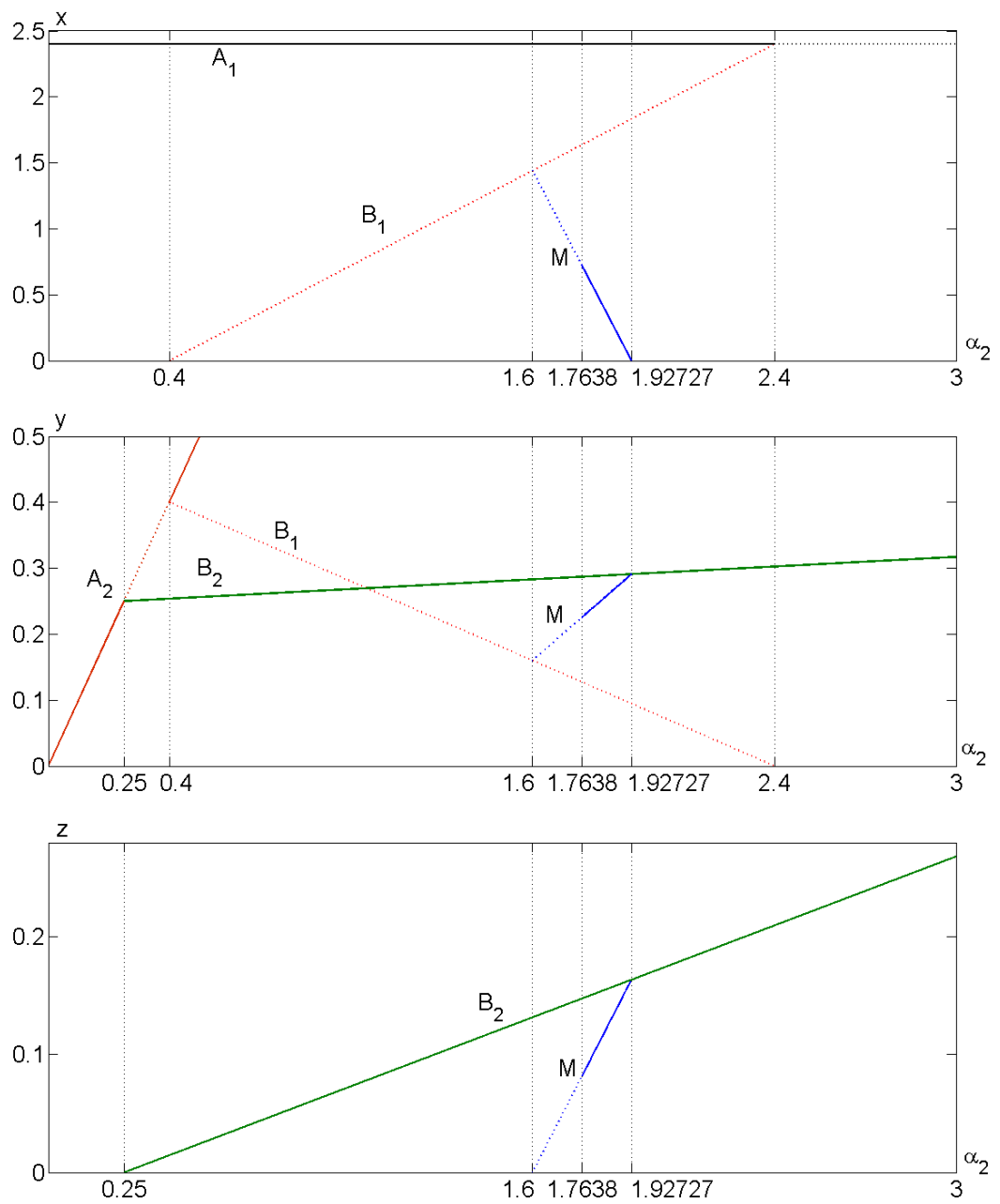


Рисунок 3.2 — Устойчивость равновесий системы (3.1)

В таблице 1 обобщены сведения, описанные выше.

Таблица 1 — Существование и устойчивость равновесий системы (3.1)

Равновесие	Существование	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
O	$\alpha_2 > 0$	0	$> 0$	$> 0$
$A_1$	$\alpha_2 > 0$	0	$< 0$	$< 0$ , если $\alpha_2 < 2.4$
$A_2$	$\alpha_2 > 0$	0	$< 0$	$< 0$ , если $\alpha_2 < 0.25$ и $\alpha_2 > 0.4$
$B_1$	$0.4 < \alpha_2 < 2.4$	$> 0$	$< 0$	$< 0$ , если $\alpha_2 > 1.6$
$B_2$	$\alpha_2 > 0.25$	$< 0$	$< 0$	$< 0$ , если $\alpha_2 > 1.92727$
$M$	$1.6 < \alpha_2 < 1.92727$	$< 0$	$< 0$ , если $\alpha_2 > 1.7638$	$< 0$ , если $\alpha_2 > 1.7638$

Для удобства на фазовых портретах траектории представлены цветами, аналогичными равновесиям, к которым эти траектории притягиваются.

При  $\alpha_2 < 0.25$  сосуществуют устойчивое в пространстве равновесие  $A_1$  и устойчивое в плоскости  $yOz$   $A_2$ . Траектории, запущенные из пространства и плоскостей  $xOy$  и  $xOz$  притягиваются к равновесию  $A_1$ , а, запущенная из плоскости  $yOz$ , – к равновесию  $A_2$  (рис.3.3а).

При  $\alpha_2 = 0.25$  равновесие  $A_2$  теряет свою частичную устойчивость. Также рождается устойчивое в плоскости  $yOz$  равновесие  $B_2$ .

На рис.3.3b, описывающем поведение системы при  $\alpha_2 \in (0.25, 0.4)$ , видно, что появилось равновесие  $B_2$ , и траектории, запущенные из плоскости  $yOz$ , притягиваются к нему, а не к равновесию  $A_2$ . При  $\alpha_2 = 0.4$  равновесие  $A_2$  вновь приобретает устойчивость в плоскости  $yOz$ . В этот же момент рождается равновесие  $B_1$ , которое является неустойчивым. Равновесие  $B_2$  меняет свой тип и становится устойчивым в плоскости  $yOz$  фокусом. Рис.3.3с отражает описанные выше изменения при  $\alpha_2 \in (0.4, 1.6)$ . Видно, что траектория, запущенная из плоскости  $yOz$ , притягивающаяся к равновесию  $B_2$ , является спиралевидной, что показывает изменение типа равновесия.

При  $\alpha_2 = 1.6$  в системе (3.1) рождается неустойчивое пространственное равновесие  $M$ , не меняющее свой тип при  $\alpha_2 \in (1.6, 1.7638)$ . Кроме того, на этом участке существуют устойчивые циклы. На рисунке 3.3d представлено существование цикла  $\Gamma$  периода 2 вокруг неустойчивого равновесия  $M$ . Траектория, сходящаяся на этот цикл окрашена в фиолетовый цвет. Видно, что в зависимости от различных пространственных начальных состояний, есть два устанавливающих режима: цикл  $\Gamma$  и равновесие  $A_1$ .

При  $\alpha_2 = 1.7368$  равновесие  $M$  становится устойчивым в пространстве и остается таким при значении параметра  $\alpha_2 \in (1.7368, 1.92727)$  (рис.3.3e). Видно, что в зависимости от различных пространственных начальных состояний, есть два устанавливающих режима: равновесия  $M$  и  $A_1$ .

При  $\alpha_2 = 1.92727$  равновесие  $M$  сливается с равновесием  $B_2$  и исчезает (см. рис.3.2). Равновесие  $B_2$  становится устойчивым в пространстве и остается таким при возрастании значения параметра  $\alpha_2$ . На рис.3.3f можно увидеть описанные выше изменения. В таком состоянии система остается при  $\alpha_2 \in (1.92727, 2.4)$ .

При  $\alpha_2 = 2.4$  равновесие  $B_1$  сливается с равновесием  $A_1$  и исчезает, а равновесие  $A_1$  становится устойчивым только в плоскости  $xOz$ . При последующем увеличении бифуркационного параметра  $\alpha_2$  качественных изменений в системе происходить не будет, то есть остаётся устойчивое равновесие  $B_2$ , устойчивое в плоскости  $xOz$  равновесие  $A_1$  и устойчивое в плоскости  $yOz$  равновесие  $A_2$ . Описанное выше состояние системы показано на рис.3.3g. Видно, что траектория, запущенная из плоскости  $xOz$ , притягивается к равновесию  $A_1$ , траектории, запущенные из пространства и плоскости  $yOz$ , – к равновесию  $B_2$ , а траектория, запущенная из плоскости  $xOy$ , – к равновесию  $A_2$ .

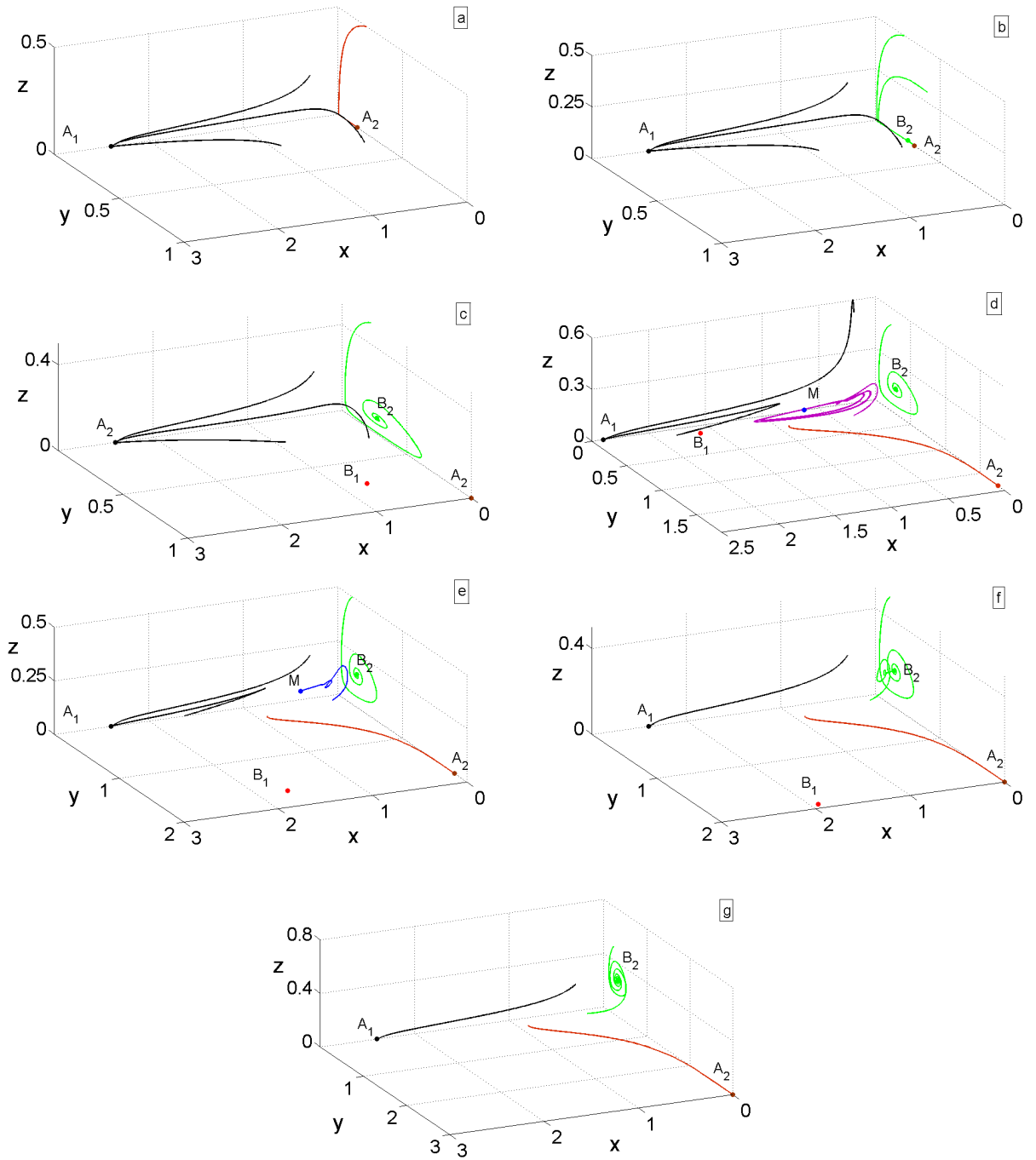


Рисунок 3.3 — Фазовые портреты системы (3.1) при а)  $\alpha_2 = 0.15$ , б)  $\alpha_2 = 0.3$ ,  
 в)  $\alpha_2 = 1$ , д)  $\alpha_2 = 1.7534$ , е)  $\alpha_2 = 1.8$ , ф)  $\alpha_2 = 2$ , г)  $\alpha_2 = 3$

### 3.2 Анализ стохастической модели

Система, описывающая влияние случайного внешнего воздействия, описываемого аддитивным шумом, записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2.4 - x - 6y - 4z) + \sigma \dot{w}_1, \\ \dot{y} = y(\alpha_2 - x - y - 10z) + \sigma \dot{w}_2, \\ \dot{z} = -z(1 - 0.25x - 4y + z) + \sigma \dot{w}_3, \end{cases} \quad (3.2)$$

где  $\sigma$  — интенсивность случайного воздействия, а  $w_1$ ,  $w_2$  и  $w_3$  — случайные независимые некоррелированные винеровские процессы.

Добавление внешнего случайного воздействия в виде аддитивного шума, который может интерпретироваться как некие погодные условия, влияние человека и другие внешние факторы, не зависящие от популяций, может приводить в феноменам, не наблюдаемым в детерминированной системе. Примерами таких феноменов являются переходы от одного равновесного режима в другой, возникновение колебаний разных амплитуд, вымирание одной или нескольких популяций и так далее. Далее в работе для описания наблюдаемых феноменов будет использоваться аппарат функции стохастической чувствительности аналогичный двумерной системе ([9], [10], [11]).

В случае, когда порядок систем  $n = 3$  и существует экспоненциально устойчивое равновесие  $\bar{x}$ , можно использовать квадратичную аппроксимацию квазипотенциала  $v(x) \approx \frac{1}{2}(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))$ , и асимптотика стационарной плотности распределения случайных состояний системы (1.8) может быть записана в виде распределения Гаусса:

$$\rho(x, \varepsilon) \approx K \cdot \exp \left( -\frac{(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))}{2\varepsilon^2} \right)$$

с матрицей ковариации  $\varepsilon^2 W$ .

Здесь положительно определенная  $n \times n$ -матрица  $W$  является единственным решением [11] следующего матричного уравнения:

$$FW + WF^\top = -S, \quad F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad S = \sigma(\bar{x})\sigma^\top(\bar{x}).$$

Матрица  $W$  называется матрицей стохастической чувствительности равновесия  $\bar{x}$ . Основываясь на матрице  $W$ , можно строить доверительные области, в которой с заданной вероятностью концентрируются случайные состояния системы. Для случая системы  $n = 3$  такой доверительной областью для равновесия является эллипсоид, задаваемый следующим уравнением:

$$\frac{\beta_1^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_2^2}{\lambda_2} + \frac{\beta_3^2}{\lambda_3} = \varepsilon^2 K(P),$$

где  $\beta_1 = (x - \bar{x}, v_1)$ ,  $\beta_2 = (x - \bar{x}, v_2)$ ,  $\beta_3 = (x - \bar{x}, v_3)$ ,  $\lambda_i$  — собственные значения и  $v_i$  — нормированные собственные векторы матрицы чувствительности  $W$ . Здесь  $P$  является доверительной вероятностью и функция  $K(P)$  является обратной к функции  $P(K)$ :

$$P(K) = \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{K}{2}} \right) - \sqrt{\frac{2K}{\pi}} e^{-\frac{K}{2}}.$$

На рисунке 3.4 для системы (3.2) представлены собственные значения матрицы чувствительности невырожденного равновесия  $M$  и эллипсоид рассеивания для  $\alpha_2 = 1.77$ ,  $\sigma = 10^{-4}$ . Видно, что эллипсоид хорошо описывает случайные состояния системы. Кроме того, можно заметить, что при приближении к обеим точкам бифуркации чувствительность равновесия  $M$  стремится к бесконечности.

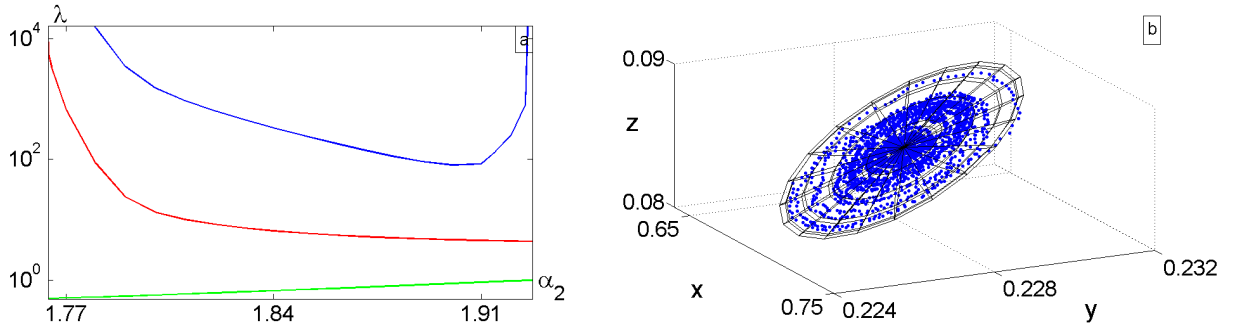


Рисунок 3.4 — Для системы (3.2): а) собственные значения матрицы чувствительности для равновесия  $M$ , и б) эллипсоид рассеивания для  $\alpha_2 = 1.77$  и  $\sigma = 10^{-4}$

На рисунке 3.5а представлены случайные состояния при  $\alpha_2 = 1.7639$  для  $\sigma = 10^{-4}$  (серый). При малой интенсивности шума ( $\sigma = 10^{-5}$ ) случайные состояния почти не отличаются от детерминированного равновесия, представленного синим кружком, то есть существенного изменения плотности популяций не происходит. Если интенсивность шума увеличить ( $\sigma = 10^{-4}$ ), случайные состояний начинают отдаляться от равновесия и совершать колебания более значительных амплитуд. На рисунке 3.5б это поведение представлено временными рядами для плотностей популяций хищников и обеих жертв при  $\alpha_2 = 1.7639$  для  $\sigma = 10^{-5}$  (синий цвет) и  $\sigma = 10^{-4}$  (серый). Хорошо видно, что при интенсивности шума  $\sigma = 10^{-4}$  происходят колебания численностей популяций, причем резкий рост и резкое снижение численностей происходят у популяции хищника и популяции жертвы<sub>2</sub> одновременно, в то время как численность популяции жертвы<sub>1</sub> имеет прямо противоположную динамику.

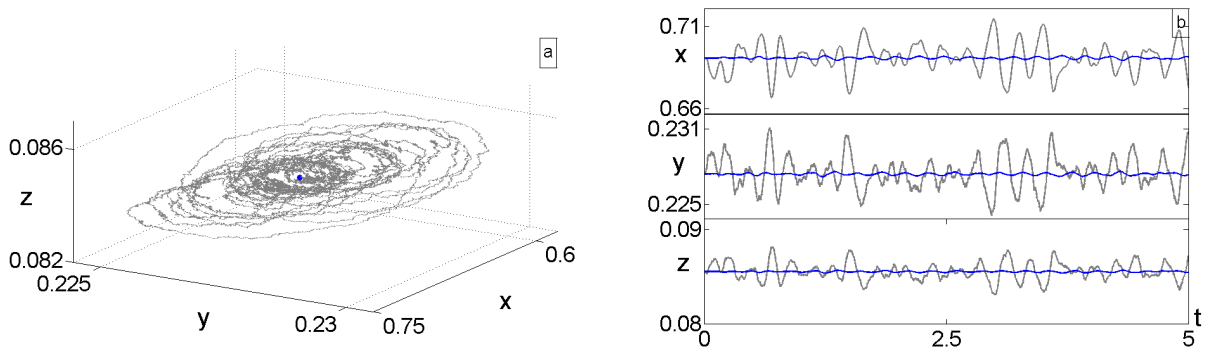


Рисунок 3.5 — Для системы (3.2) при  $\alpha_2 = 1.7639$ : а) равновесие  $M$  и случайные состояния для  $\sigma = 10^{-4}$  (серый), и б) временные ряды для колебаний различных амплитуд для  $\sigma = 10^{-5}$  (синий) и  $\sigma = 10^{-4}$  (серый)

В связи с тем, что величина разброса случайных состояний системы (3.2) под действием шума увеличивается при увеличении интенсивности шума, в системе могут происходить необратимые качественные изменения. Эти изменения связаны с опасной близостью случайных состояний к границам, таким как граница бассейна притяжения того или иного равновесия и координатные плоскости  $xOy$ ,  $xOz$  или  $yOz$ . И здесь удобным инструментом в описании индуцированных шумом переходов является функция стохастической чувствительности, описанная выше. Когда эллипсоид рассеивания лежит полностью внутри бассейна притяжения равновесия, качественных изменений не наблюдается. Если интенсивность шума достигла критического значения и эллипсоид выходит за границы бассейна притяжения, то и случайные состояния с заданной доверительной вероятностью будут покидать бассейн притяжения и формировать новый стохастический режим.

На рисунке 3.6, а для  $\alpha_2 = 1.77$  показана поверхность, являющаяся границей притяжения двух равновесий  $M$  и  $A_1$ . Точки, лежащие в положительном октанте и ниже этой поверхности, сходятся на равновесие  $M$ . Точки, лежащие в положительном октанте, но выше этой поверхности, сходятся на равновесие  $A_1$ . Точки из плоскости  $xOy$  сходятся на равновесие  $A_2$ . Здесь же черными точками изображены случайные состояния при интенсивности шума  $\sigma = 0.05$ , черным кружочком — равновесие  $A_1$ . При интенсивности шума  $\sigma = 0.05$  эллипсоид рассеивания пересекает сепарабельную поверхность, и траектории переходят из бассейна притяжения равновесия  $M$  в бассейн притяжения  $A_1$ . Таким образом, происходит качественное изменение динамики сосуществования трех популяций — вымирает популяция жертвы<sub>2</sub> и популяция хищников, в то время как популяция жертвы<sub>1</sub> стабилизируется в равновесном состоянии.

При увеличении интенсивности шума эллипсоид рассеивания будет увеличиваться и, рано или поздно, пересечет координатные плоскости, являющиеся так же условиями вымирания какой-либо популяции. На рисунке 3.6b, для того же значения параметра  $\alpha_2 = 1.77$  при интенсивности шума  $\sigma = 3 * 10^{-3}$  показан эллипсоид рассеивания и две координатные плоскости. Как видно из рисунка, эллипсоид пересекает обе эти координатные плоскости. Это означает, что возможно вымирание как популяции жертв<sub>1</sub>, так и популяции хищников. В первом случае возникает сосуществование популяции жертв<sub>2</sub> и хищников. Однако, при заданной интенсивности шума данное сосуществование также не является устойчивым (см. рис. 2.5), и, со временем, популяция хищников вымирает. Во втором случае в отсутствие хищников популяция жертв<sub>1</sub> не имеет шанса на выживание. С математической точки зрения, это объясняется отсутствием отличного от  $A_2$  аттрактора в плоскости  $xOy$ , все точки этой плоскости с координатами  $x \neq 0$  притягиваются к равновесию  $A_2$ .

На рисунке 3.6с представлены временные ряды, иллюстрирующие оба эти феномена: синим цветом для интенсивности шума  $\sigma = 10^{-6}$ , черным цветом — для  $\sigma = 0.10^{-3}$  и красным для  $\sigma = 3 * 10^{-2}$ .



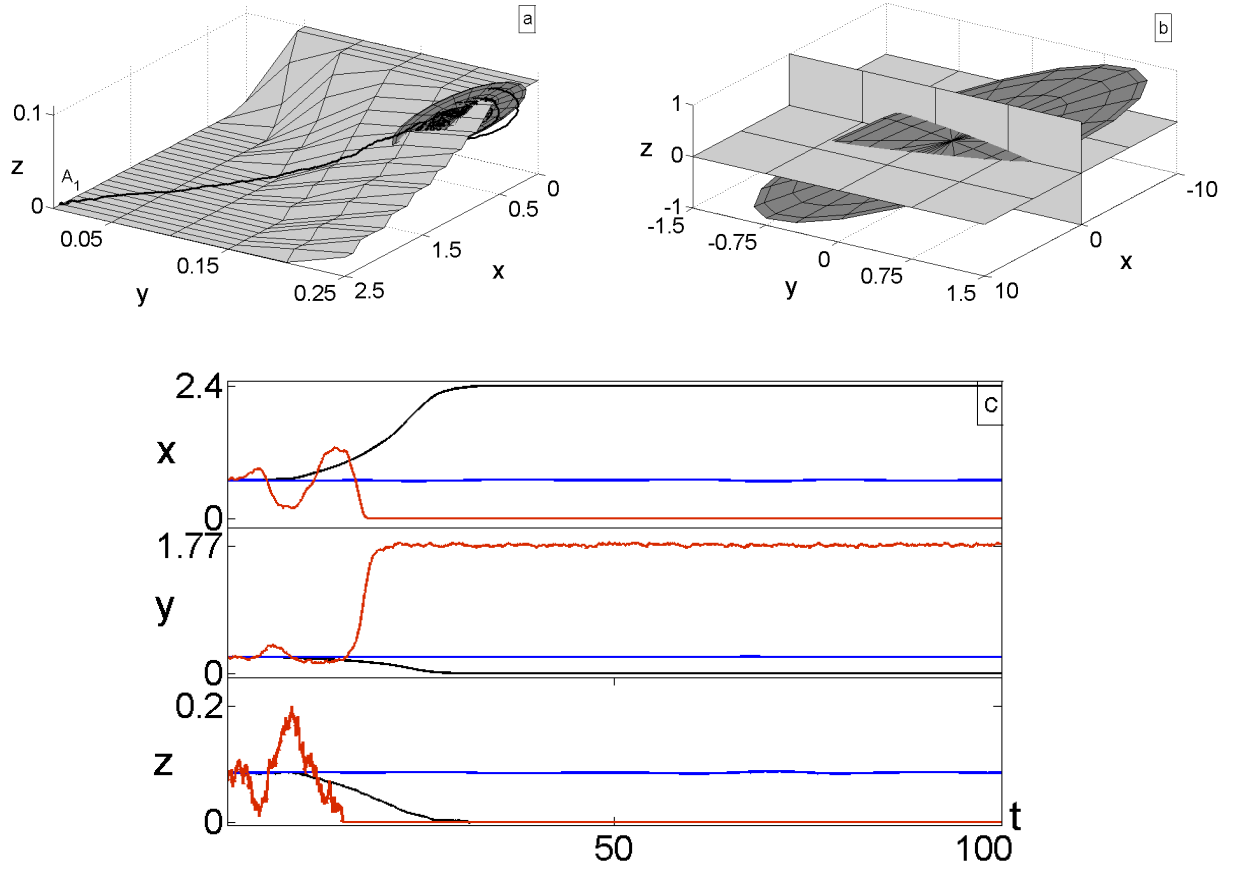


Рисунок 3.6 — Для системы (3.2) для  $\alpha_2 = 1.77$ : а) хищников и жертв<sub>2</sub> при  $\sigma = 10^{-3}$ ; б) хищников и жертв<sub>1</sub> при  $\sigma = 3 \cdot 10^{-2}$ ; в) временные ряды для  $\sigma = 10^{-6}$  (синий),  $\sigma = 10^{-3}$  (черный) и  $\sigma = 3 \cdot 10^{-2}$  (коричневый)

Таким образом, из всего вышеизложенного легко заметить, что при разных интенсивностях шума при одном и том же значении бифуркационного параметра может происходить вымирание той или иной популяции. На рисунке 3.7 представлены вероятности вымирания популяций двух типов, в зависимости от бифуркационного параметра  $\alpha_2$  и интенсивности шума  $\sigma$ . Синим цветом представлено изменение вероятности вымирания популяции хищников и популяции жертв<sub>2</sub> (первый тип вымирания) и красным — популяции хищников и популяции жертв<sub>1</sub> (второй тип вымирания). Легко заметить неоднородность в поведении вероятности вымирания первого типа (рисунок 3.7а). При почти нулевой интенсивности шума вероятность вымирания сильно отличается в зависимости от значения параметра. При увеличении интенсивности шума, для больших значений параметра вероятность растет, для меньших, наоборот, убывает. Для вероятности вымирания второго типа (рисунок 3.7б) наблюдается монотонный рост вероятности при увеличении интенсивности. Таким образом, наиболее выгодные для выживаемости всех трех популяций равновесные состояния соответствуют значениям параметра  $\alpha_2 \in (1.85, 1.92727)$ .

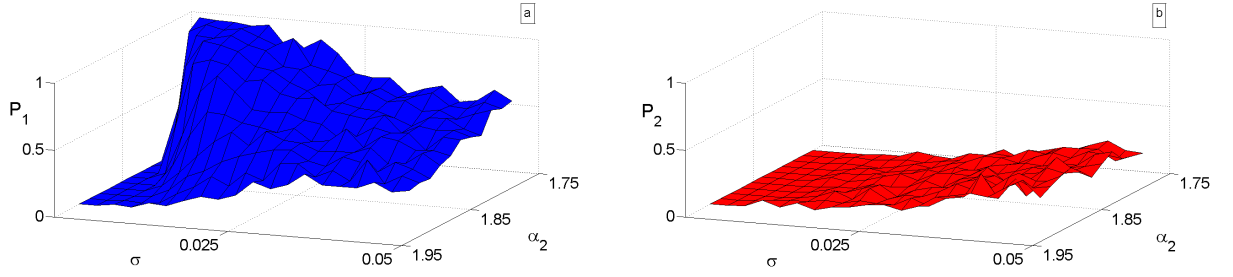


Рисунок 3.7 — Зависимости от параметра  $\alpha_2$  и интенсивности шума  $\sigma$  для модели (3.2) вероятности вымирания: а) первого типа; б) второго типа

Для трехмерного цикла, задаваемого периодическим решением  $\xi(t)$ , построение доверительных областей – торов основывается на методе сингулярного разложения [10]. В этом случае матрица  $W(t)$  может быть представлена в следующем виде:

$$W(t) = \lambda_1(t)v_1(t)v_1^T(t) + \lambda_2(t)v_2(t)v_2^T(t), \quad (3.3)$$

где  $\lambda_1(t) > \lambda_2(t)$  и  $\lambda_3 = 0$  – собственные числа и  $v_1(t), v_2(t)$  – собственные векторы матрицы  $W(t)$ . Для нахождения собственных значений и векторов используются формулы, подробно описанные в [10].

Уравнение эллипса рассеивания в гиперплоскости ортогональной циклу в точке  $\xi(t)$  задается следующим уравнением:

$$\frac{\eta_1^2}{\lambda_1} + \frac{\eta_2^2}{\lambda_2} = 2k^2\epsilon^2, \quad (3.4)$$

где  $\eta_i = (x - \xi(t), v_i(t))$ ,  $k^2 = -\ln(1 - P)$  и  $P$  – доверительная вероятность.

На рисунке 3.8 представлены собственные числа матрицы  $W(t)$  в логарифмическом масштабе для цикла  $\Gamma$  системы (3.2) при  $\alpha_2 = 1.7534$ . Видно, что собственные числа имеют высокий порядок, что говорит о высокой чувствительности детерминированного цикла к вносимому шуму.

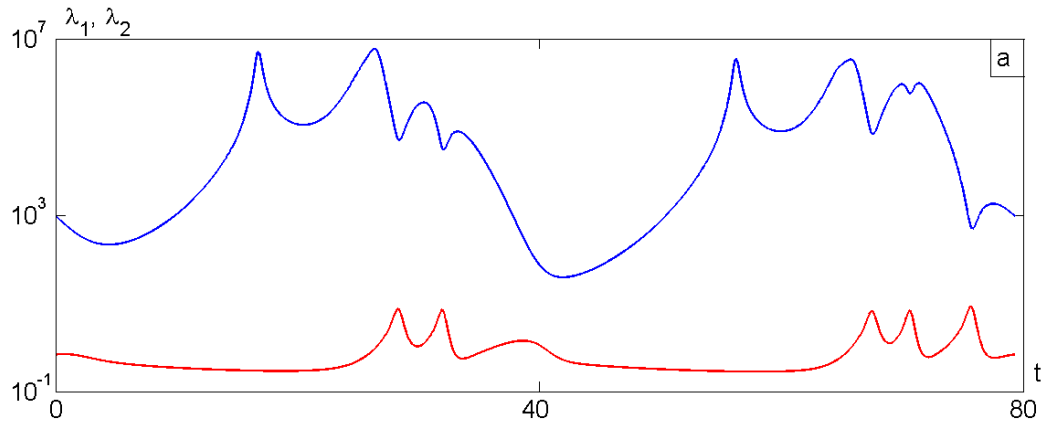


Рисунок 3.8 — Для системы (3.2) собственные значения матрицы чувствительности для цикла  $\Gamma$  в точке  $\alpha_2 = 1.7534$

Основываясь на технике функции стохастической чувствительности, можно прогнозировать уровень интенсивности шума, необходимый для возникновения переходов не только между равновесиями, но и между циклами и равновесиями. Критическая интенсивность означает наименьший уровень интенсивности шума, для которого доверительный тор вокруг цикла пересекает границу своей зоны притяжения. На рисунке 3.9а показаны зеленые точки цикла  $\Gamma$ , для которых критическая интенсивность равна  $\sigma = 10^{-4}$ . На рисунке 3.9b зеленый цвет представляет эллипсы рассеивания в некоторых точках цикла, которые формируют доверительный тор вокруг цикла. Видно, что размеры эллипсов различны, что указывает на разницу в дисперсии случайных состояний вдоль детерминированного цикла.

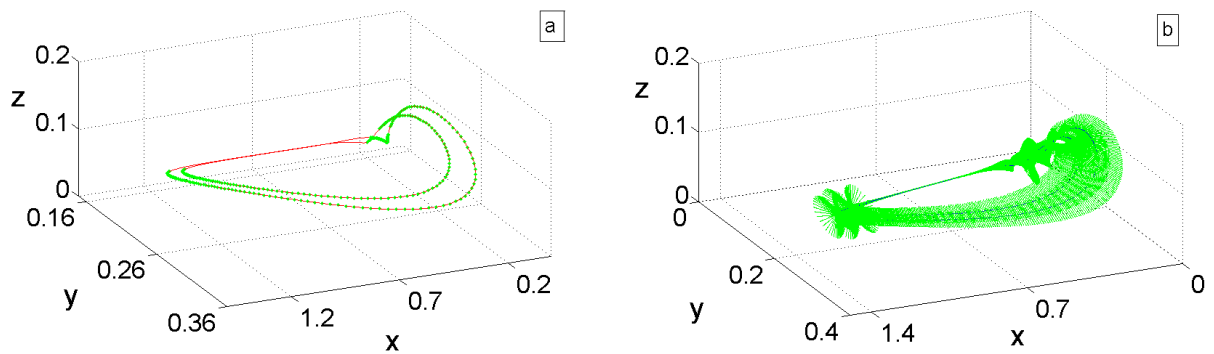


Рисунок 3.9 — Для цикла  $\Gamma$  системы (3.2) при  $\alpha_2 = 1.7534$  а) критическая интенсивность, б) доверительный тор при  $\sigma = 10^{-4}$

На рисунке 3.10а показаны случайные состояния при  $\alpha_2 = 1.7534$  для  $\sigma = 10^{-4}$ . Для малой интенсивности ( $\sigma = 10^{-5}$ ) случайные состояния практически неотличимы от детерминированного цикла  $\Gamma$ . Это означает, что принципиального изменения плотности популяций не происходит. Если интенсивность шума выше ( $\sigma = 10^{-4}$ ), случайные состояния начинают отдаляться от цикла и совершать колебания с большей амплитудой. Амплитуда колебаний будет увеличиваться до тех пор, пока траектория не пересечет сепарабельную поверхность. После пересечения поверхности случайные состояния попадают в бассейн притяжения равновесия  $A_1$ , что приводит к постепенному вымиранию популяций жертвы<sub>2</sub> и хищников. На рисунке 3.10b это поведение представлено временными рядами плотности популяций хищников и жертв обоих типов при  $\alpha_2 = 1.7534$  для  $\sigma = 10^{-5}$  (синий) и  $\sigma = 10^{-4}$  (черный). Хорошо видно, что вначале происходят колебания численности популяции с резким увеличением и резким уменьшением, происходящими одновременно в популяции хищников и популяции жертвы<sub>2</sub>, тогда как у численности популяции жертвы<sub>1</sub> противоположная динамика. Кроме того, полный обход цикла траекториями при меньшем шуме ( $\sigma = 10^{-5}$ ) происходит быстрее, чем при  $\sigma = 10^{-4}$ , что также говорит о большем разбросе случайных состояний при увеличении шума.

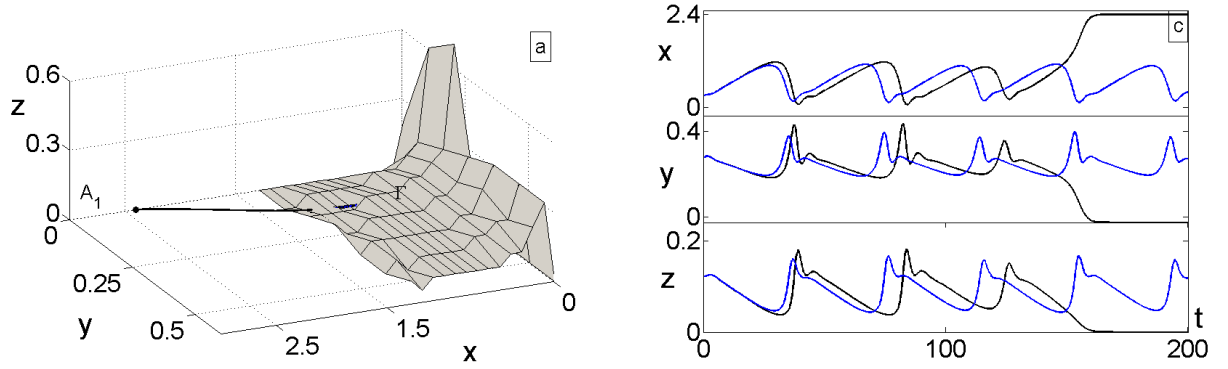


Рисунок 3.10 — Индуцированное шумом вымирание первого типа для модели (3.2) при  $\alpha_2 = 1.7534$  а)  $\sigma = 10^{-4}$ , б) временные ряды для  $\sigma = 10^{-5}$  (синий) и  $\sigma = 10^{-4}$  (черный)

На рисунке 3.11а показаны сепаратриса седловой точки  $B_1$  (красный), детерминированный цикл  $\Gamma$  (синий), случайные состояния (коричневый) при  $\alpha_2 = 1.7534$  для  $\sigma = 6 \cdot 10^{-2}$ . При такой интенсивности шума доверительный тор пересекает критическую границу  $z = 0$ . Это означает, что возникает возможность вымирания хищников, но сосуществование жертв<sub>1</sub> и жертв<sub>2</sub> не является устойчивым (см. рис. 2.1б). В зависимости от того, в чей бассейн притяжения попадают случайные состояния (равновесия  $A_1$  или  $A_2$ ), устанавливается режим существования только жертв<sub>1</sub> или только жертв<sub>2</sub>. На рисунке 3.11а видно, что случайные состояния пересекли критическую границу  $z = 0$  и оказались в бассейне притяжения равновесия  $A_2$ . На рисунке 3.11б это поведение представлено временными рядами плотности популяций хищников (синий), жертв<sub>1</sub> (черный) и жертв<sub>2</sub> (коричневый) для  $\alpha_2 = 1.7534$  и  $\sigma = 6 \cdot 10^{-2}$ . Хорошо видно, что колебаний случайных состояний почти не происходит, первой вымирает популяция хищников, после чего происходит вымирание жертв<sub>1</sub>, а плотность популяции жертв<sub>2</sub> возрастает и приходит к небольшим колебаниям вокруг равновесия  $A_2$ .

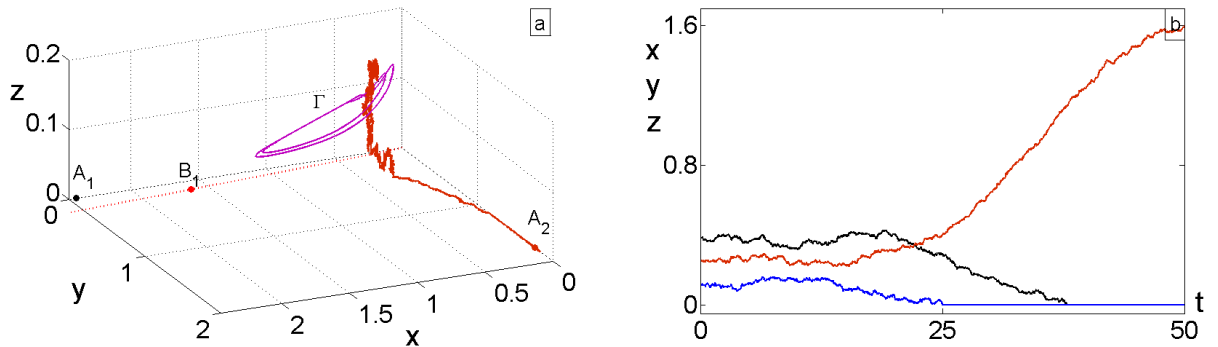


Рисунок 3.11 — Индуцированное шумом вымирание второго типа для модели (3.2) при  $\alpha_2 = 1.7534$  а)  $\sigma = 6 \cdot 10^{-2}$ , б) временные ряды

Из описанных выше случаев вымирания легко заметить, что при разных интенсивностях шума при одном и том же значении бифуркационного параметра может происходить вымирание той или иной популяции. На рисунке 3.12 представлены вероятности

вымирания популяций двух типов, в зависимости от бифуркационного параметра  $\alpha_2$  и интенсивности шума  $\sigma$ . Синим цветом представлено изменение вероятности вымирания популяции хищников и популяции жертвы<sub>2</sub> (первый тип вымирания) и красным — популяции хищников и популяции жертвы<sub>1</sub> (второй тип вымирания). Легко заметить неоднородность в поведении вероятности вымирания первого типа: резкий скачок вероятности при малой интенсивности шума и постепенное убывание при увеличении  $\sigma$  (рисунок 3.12a). Для вероятности вымирания второго типа (рисунок 3.12b) наблюдается почти нулевая вероятность при малой интенсивности шума и резкое возрастание при увеличении интенсивности, что хорошо согласуется с описанными выше случаями вымирания.

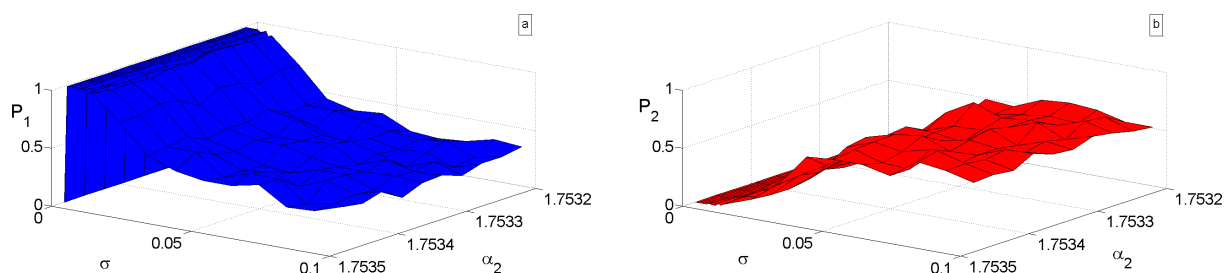


Рисунок 3.12 — Зависимости от параметра  $\alpha_2$  и интенсивности шума  $\sigma$  для модели (3.2) вероятности вымирания: а) первого типа; б) второго типа

Таким образом, для модели «хищник–две жертвы» рассмотрен детерминированный случай, описаны существующие равновесия и их устойчивость, а также циклы различной кратности, представлены типичные фазовые портреты. Для стохастической модели, учитывающей влияние внешних факторов, представлена чувствительность аттракторов, построены доверительные области и описаны возникающие стохастические феномены, изучена вероятность возникновения вымирания популяций.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты исследования популяционных моделей следующих типов: «хищник–жертва» с учетом двух видов конкуренции и «хищник–две жертвы» с учетом конкуренции трех типов в детерминированном и стохастическом случаях.

В ходе анализа существования и устойчивости аттракторов были построены бифуркационные диаграммы детерминированных моделей. Для параметрических зон, где реализуются различные динамические режимы, построены фазовые портреты и проанализировано их взаимное расположение. Найдены значения параметров, в которых происходят бифуркации. Проведено описание этих бифуркаций и определены зоны параметра, где у систем сосуществуют два устойчивых аттрактора.

Также была изучена чувствительность аттракторов модели к внешнему (аддитивному или параметрическому) возмущению. Найдены зависимости коэффициентов стохастической чувствительности от параметра модели. На основе найденной чувствительности построены доверительные области, описывающие разброс случайных состояний вокруг детерминированного аттрактора.

И, наконец, изучены индуцированные шумом феномены, такие как переходы между аттракторами, генерация большеамплитудных колебаний и вымирание популяций (обнаружены и описаны вымирания нескольких типов). Для всех случаев вымирания найдены критические значения интенсивности шума необходимые для их возникновения. Представлены вероятности вымирания популяций, подверженных случайному внешнему воздействию.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Базыкин А.Д. Система Вольтерра и уравнение Михаэлиса-Ментен // Вопросы математической генетики. Новосибирск, 1974, с. 103-143.
- 2 Башкирцева И.А., Бояршинова П.В., Рязанова Т.В., Ряшко Л.Б. Анализ индуцированного шумом разрушения режимов сосуществования в популяционной системе «хищник–жертва» // Компьютерные исследования и моделирование 2016 Т. 8 № 4 с. 647–660.
- 3 Башкирцева И.А., Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б. Анализ аттракторов стохастически возмущенной модели «хищник-жертва» // Изв. вузов «ПНД», т. 17, №2, 2009 с. 37-53.
- 4 Абрамова Е.П., Рязанова Т.В. Динамические режимы стохастической модели «хищник – жертва» с учетом конкуренции и насыщения. // Компьютерные исследования и моделирование, 2019, 11(3), 515-531.
- 5 Апонина Е.А., Апонин Ю.М., Базыкин А.Д. Анализ динамического поведения в модели «хищник–две жертвы» // Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. Л.: Гидрометеиздат, 1982. Т. 5. С. 163.
- 6 Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985.
- 7 И.А. Башкирцева, Л.В. Карпенко, Л.Б. Ряшко, Стохастическая чувствительность предельных циклов модели «хищник–две жертвы» // Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн. Изв. вузов «ПНД», 2010. т. 18, № 6, с. 42-64.
- 8 Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. // М.: Наука, 1979.
- 9 Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б. Метод квазипотенциала в исследовании локальной устойчивости предельных циклов к случайным возмущениям. // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика, 2001 Т. 9. № 6. С. 104-114.
- 10 Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Stochastic sensitivity of 3D-cycles. // Mathematics and Computers in Simulation, 2004. Vol. 66. P. 55-67.
- 11 Мильштейн Г.Н., Ряшко Л.Б. Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями. // Прикл. математика и механика, — Т. 59, No. 1, 1995. — С. 53–63.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

Результаты данной работы были представлены и опубликованы в следующих работах:

### 1. Конференции:

- Современные проблемы математики и ее приложений. Международная молодежная школа-конференция (2018-2020).
- XXVI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов - 2019».
- VI Международная молодежная научная конференция Физика. Технологии. Инновации ФТИ-2019.
- VII Международная молодежная научная конференция Физика. Технологии. Инновации ФТИ-2020 (лучший доклад на секции).

### 2. Публикации:

- Абрамова, Е.П., Рязанова, Т.В. Анализ влияния параметрического шума на динамику взаимодействия двух популяций // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета, т. 53, с. 3-14. <https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-53-01> (2019).
- Абрамова Е.П., Рязанова Т.В. Динамические режимы стохастической модели «хищник – жертва» с учетом конкуренции и насыщения // Компьютерные исследования и моделирование, т. 11(3), с. 515-531. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-3-515-531> (2019).
- Analysis of stochastic excitability in the population dynamics model // AIP Conference Proceedings Volume 2174. <https://doi.org/10.1063/1.5134230> (2019).
- Абрамова Е.П., Перевалова Т.В., Влияние случайного воздействия на равновесные режимы модели популяционной динамики // Известия института математики и информатики УдГУ (2020) (принята к публикации).
- Abramova E.P., Perevalova T.V., Stochastic Destruction of the Oscillatory Regime of Coexistence of Population in the “Predator-Two Preys” Model // AIP Conference Proceedings (2020) (на рецензии).

### 3. Заявка на регистрацию программы ЭВМ:

- Компьютерное моделирование стохастических эффектов в модели «хищник-жертва».