Отчёт по НИР

Модель ‘Хищник-Жертва’ с учетом конкуренции двух типов

Виктория Михайловна Шутенко

Содержание

List of Figures

List of Tables

1 Анализ детерминированной модели

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{xy}{1+\alpha x} - \varepsilon x^2 \\ \dot{y} = \gamma y - \frac{xy}{1+\alpha x} - \delta y^2 \end{cases}$$

Здесь x – плотность популяции жертв, y – плотность популяции хищников.

1.1 Поиск состояний равновесия

Для нахождения состояний равновесия решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x - \frac{xy}{1+\alpha x} - \varepsilon x^2 = 0 \\ y = \gamma y - \frac{xy}{1+\alpha x} - \delta y^2 = 0 \end{cases}$$

Выражаем 2-е уравнение через x:

$y(\gamma - \frac{x}{1+\alpha x} - \delta y) = 0$

1) $y_1 = 0$

2) $\gamma - \frac{x}{1+\alpha x} - \delta y = 0$; $y_2 = \frac{\gamma}{\delta} - \frac{x}{\delta(1+\alpha x)}$

При $y = 0$:

$x - \varepsilon x^2 = 0; x(1 - \varepsilon x) = 0$

1. $x_1 = 0$
2. $1 - \varepsilon x = 0; x_2 = \frac{1}{\varepsilon}$

Отсюда получаем 2 точки:

$M_1(0;0)$ и $M_2(\frac{1}{\varepsilon};0)$

Точка M_1 является точкой тривиального равновесия, при котором несуществуют и хищники, и жерты.

Точка M_2 не имеет биологического смысла, поскольку невозмозжно существование жертв без хищников.

При $y = \frac{\gamma}{\delta} - \frac{x}{\delta(1+\alpha x)}$

$x - \frac{x(\frac{\gamma}{\delta} - \frac{x}{\delta(1+\alpha x)})}{1+\alpha x} - \varepsilon x^2 = 0$

$x - \frac{\frac{x\gamma}{\delta} - \frac{x^2}{\delta(1+\alpha x)}}{1+\alpha x} - \varepsilon x^2 = 0$

$$x\frac{\delta(\varepsilon x - 1)(\alpha x + 1)^2 + \alpha\gamma x + \gamma - x}{\alpha\delta x + \delta} = 0$$

1. $x_1 = \frac{\alpha^2 - 2\varepsilon\alpha\delta}{3\varepsilon\alpha^2\delta} - \frac{1}{3\sqrt[3]{2}\varepsilon\alpha^2\delta}$
2. $x_2 = \frac{\alpha^2 - 2\varepsilon\alpha\delta}{3\varepsilon\alpha^2\delta b} + \frac{1}{6\sqrt[3]{2}\varepsilon\alpha^2\delta}$

Отсюда получаем 3 и 4 точку:

$M_3(\frac{\alpha^2 - 2\varepsilon\alpha\delta}{3\varepsilon\alpha^2\delta} - \frac{1}{3\sqrt[3]{2}\varepsilon\alpha^2\delta}; \frac{\gamma}{\delta} - \frac{x}{\delta(1+\alpha x)})$ и $M_4(\frac{\alpha^2 - 2\varepsilon\alpha\delta}{3\varepsilon\alpha^2\delta b} + \frac{1}{6\sqrt[3]{2}\varepsilon\alpha^2\delta}; \frac{\gamma}{\delta} - \frac{x}{\delta(1+\alpha x)})$

Точки M_3 и M_4 являются точками нетривиального равновесия, при котором существуют обе популяции.

1.2 Матрица Якоби.

Для начала найдем частные производные:

$$\frac{\partial(x)}{\partial x} = 1 - \frac{y}{(1+\alpha x)^2} - 2\varepsilon x$$

$$\frac{\partial(y)}{\partial x} = \frac{-x}{1+\alpha x}$$

$$\frac{\partial(y)}{\partial y} = -\gamma + \frac{x}{1+\alpha x} - 2\delta x$$

$$\frac{\partial(x)}{\partial y} = \frac{y}{(1+\alpha x)^2}$$

Общий вид матрицы якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{y}{(1+\alpha x)^2} - 2\varepsilon x & \frac{-x}{1+\alpha x} \\ \gamma + \frac{x}{1+\alpha x} - 2\delta x & \frac{y}{(1+\alpha x)^2} \end{pmatrix}$$

Для точки $M_3(\frac{\alpha^2-2\varepsilon\alpha\delta}{3\varepsilon\alpha^2\delta} - \frac{1}{3\sqrt[3]{2}\varepsilon\alpha^2\delta}; \frac{\gamma}{\delta} - \frac{x}{\delta(1+\alpha x)})$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{\alpha+\varepsilon} \\ -\gamma + \frac{1}{\alpha+\varepsilon} - 2\frac{\delta}{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}$$

Характерестическое уравнение

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & \frac{-1}{\alpha+\varepsilon} \\ -\gamma + \frac{1}{\alpha+\varepsilon} - 2\frac{\delta}{\varepsilon} & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$

1.3 Построение графиков

Прграммный код для построения графиков данной модели:

```
using Plots

using DifferentialEquations

using ParameterizedFunctions

using ImplicitEquations


g = 1

e = 0.01
```

```
a = 0.87
d = 0.0042
x0 = 5
y0 = 10

pp! = @ode_def PP begin
    dx = x - ((x*y)/(1+a*x)) - e*x^2
    dy = -g*y+((x*y)/(1+a*x))-d*y^2
end g e a d

M = [x0,y0]

param=[g, e, a, d]

timespan = (0, 100)

problem = ODEProblem(pp!, M, timespan, param)

solution1 = solve(problem)

plot(solution1, title = "Детерминированная модель Хищник-Жертва", xlabel = "t", y

plot(solution1, vars=(1, 2), xaxis="Жертва", yaxis="Хищник",legend=false)
```

В результате выполнения данного кода, получается два графика:

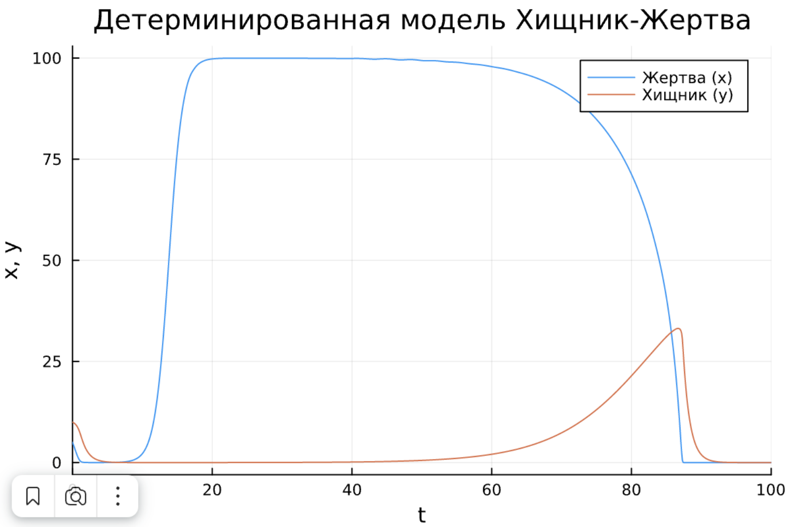

Figure 1.1: График функций.

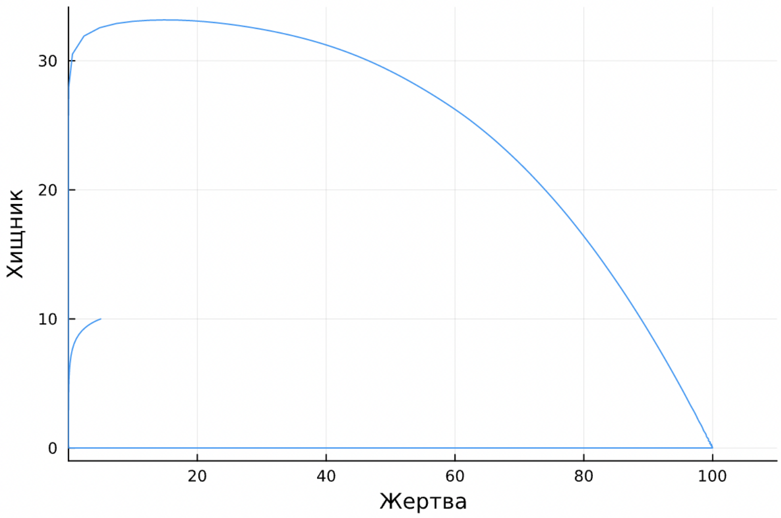

Figure 1.2: Фазовый портрет.

2 Построение классической модели Хищник-Жертва

```
using Plots
using DifferentialEquations
using ParameterizedFunctions
using ImplicitEquations

g = 0.37
e = 0.038
a = 0.36
d =  0.037
x0 = 9
y0 = 20

pp! = @ode_def PP begin
    dx = -g*x+e*x*y
    dy = a*y-d*x*y
end g e a d

M = [x0,y0]

param=[g, e, a, d]
```

```
timespan = (0.0, 25.0)

problem = ODEProblem(pp!, M, timespan, param)

solution1 = solve(problem)

plot(solution1, title = "Детерминированная модель Хищник-Жертва", xlabel = "t", y

plot(solution1, vars=(1, 2), xaxis="Жертва", yaxis="Хищник",legend=false)
```

В результате выполнения данного кода, получается два графика:

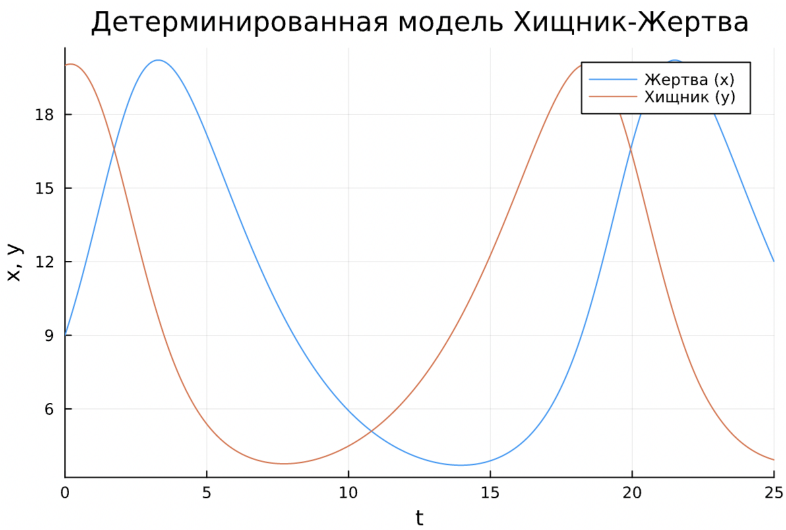

Figure 2.1: График функций.

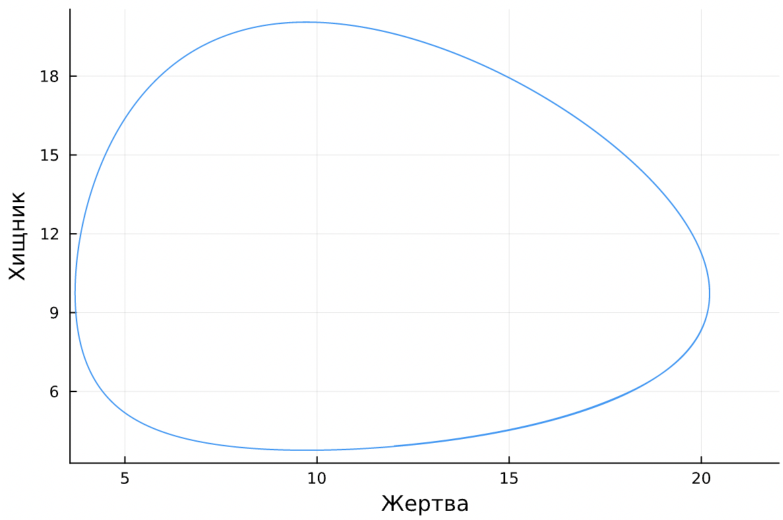

Figure 2.2: Фазовый портрет.