

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2024 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了《全国大学生数学建模竞赛章程》和《全国大学生数学建模竞赛参赛规则》（以下简称“竞赛章程和参赛规则”，可从 <http://www.mcm.edu.cn> 下载）。

我们完全清楚，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式，包括电话、电子邮件、“贴吧”、QQ 群、微信群等，与队外的任何人（包括指导教师）交流、讨论与赛题有关的问题；无论主动参与讨论还是被动接收讨论信息都是严重违反竞赛纪律的行为。

我们以中国大学生名誉和诚信郑重承诺，严格遵守竞赛章程和参赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号（从 A/B/C/D/E 中选择一项填写）： A

我们的报名参赛队号（12 位数字全国统一编号）： 202401023029

参赛学校（完整的学校全称，不含院系名）： 中国矿业大学(北京)

参赛队员 (打印并签名)：1. 舒童乐

2. 余祥

3. 臧文轩

指导教师或指导教师组负责人 (打印并签名)： 李金蒋

（指导教师签名意味着对参赛队的行为和论文的真实性负责）

日期： 2024 年 09 月 8 日

（请勿改动此页内容和格式。此承诺书打印签名后作为纸质论文的封面，注意电子版论文中不得出现此页。以上内容请仔细核对，如填写错误，论文可能被取消评奖资格。）

赛区评阅编号：
(由赛区填写)

全国评阅编号：
(全国组委会填写)

2024 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评阅人						
备注						

送全国评阅统一编号：
(赛区组委会填写)

(请勿改动此页内容和格式。此编号专用页仅供赛区和全国评阅使用，参赛队打印后装订到纸质论文的第二页上。注意电子版论文中不得出现此页。)

“板凳龙”盘出与盘入模型

摘要

板凳龙”，又称“盘龙”，是浙闽地区的传统地方民俗文化活动。本文通过对板凳龙连接把手进行研究，得到了板凳龙的运动模型，用以研究板凳龙盘入与盘出的运动。

在建立模型方面，对于问题一，本组建立了一点以恒定线速度前进的阿基米德螺线模型，并基于 Taylor 公式和最小二乘法进行优化；对于问题二，本组建立了基于螺线方程的碰撞模型；对于问题四，本组建立了两平行线间的相切伸缩圆模型和圆环上的刚性杆运动模型；

对于问题一，首先将模型简化成板凳上节点的运动，将板凳龙的运动抽象成，板凳龙每个节点都沿着等距螺线进行运动的模型，将运动的点通过极坐标来描述，得出螺线的方程为 $r(\theta) = 0.0875\theta$ ，其中 r 是螺线半径， θ 是角度。由螺线的弧长公式 $s = \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2}\theta$ ，且龙头的速度固定，可以求出角度 θ 随时间的变化率。通过迭代求得每秒的 r 和 θ 。然后通过龙头与后面龙身，以及龙身之间的距离一定，即板凳的长度 l 固定，通过极坐标下两点距离公式计算出龙身龙尾节点的位置，在进行计算中为了简化计算，我们利用 Taylor 公式将得到非线性方程简化为多项式方程，并利用最小二乘法,Euler 方法,Runge-Kutta 法对其进行求解。最后由得到的各点在不同时间的位置数据由数值微分求得板凳龙的速度。

针对问题二的碰撞模型，我们运用了 MATLAB 软件工具箱进行碰撞仿真，并依据软件仿真结果分析了碰撞的必要条件，优化碰撞条件后我们得到与仿真结果较为相近的碰撞模型，碰撞时间为 273s。

对于问题三，设板凳龙运动的螺距为 p ，我们根据第一问与第二问的结果，可以得到板凳龙各节点在不同时间的位置，以及碰撞时刻的位置，由题目可知碰撞时龙头刚好进入掉头空间，即此时龙头的极径刚好等于掉头空间的半径 $r = \frac{9}{2} = 4.5$ ，利用这一条件，我们可以得到一个含参数 p 的方程，进而解方程求得螺距 p 。

对于问题四，我们首先利用几何关系建立了伸缩圆模型，利用外圆内两圆圆心连线是一条直线，可建立方程组求出了大圆弧和小圆弧的圆心位置和半径，同时计算出龙头沿两圆弧运动的轨迹，利用板凳龙把手之间距离关系，进而求得各龙把手的位置和速度，最后由伸缩圆的性质得出无法通过改变圆弧大小的比例关系得出更小的掉头曲线。

针对问题五，我们改进问题一的迭代模型，加入参数 v ，并通过等距二分和等比方式多次对 v 取值，通过 MATLAB 软件对每点进行迭代求解，对得到的各点速度最大值进行检验，最后得到局部最优解

关键字： 板凳龙 阿基米德螺线 最小二乘法解非线性方程 伸缩圆模型 二分法求解方程

目录

一、问题重述	3
1.1 问题背景	3
1.2 问题的提出	3
二、问题分析	4
2.1 问题一	4
2.2 问题二	4
2.3 问题三	4
2.4 问题四	4
2.5 问题五	5
三、模型的假设	5
四、符号说明	5
五、模型的建立与性质	6
5.1 基本模型——阿基米德螺旋线 (Archimedean spiral)	6
5.2 等速螺旋运动	6
5.2.1 板凳龙碰撞模型	6
5.2.2 伸缩圆模型	7
5.2.3 圆环上的刚性杆运动	8
六、模型求解	8
6.1 问题 1	8
6.1.1 龙头运动问题的求解	8
6.1.2 龙身到龙尾运动问题的求解	9
6.2 问题二	11
6.3 计算龙头前把手到各龙身的距离	11
6.4 问题三	12
6.5 问题四	13
6.5.1 计算大小圆弧的半径	13
6.5.2 大圆弧上的运动	13
6.5.3 小圆弧上的运动	13

6.5.4 小圆弧后的运动	13
6.5.5 结论	13
6.6 问题五	14
七、总结	15
7.1 优点	15
7.2 缺点	15
7.3 改进方法	15
参考文献	16

一、问题重述

1.1 问题背景

板凳龙”，又称“盘龙”，是浙闽地区的传统地方民俗文化活动。人们将少则几十条，多则上百条的板凳首尾相连，形成蜿蜒曲折的板凳龙。盘龙时，龙头在前领头，龙身和龙尾相随盘旋，整体呈圆盘状。一般来说，在舞龙队能够自如地盘入和盘出的前提下，盘龙所需要的面积越小、行进速度越快，则观赏性越好。

1.2 问题的提出

某板凳龙由 223 节板凳组成，其中第 1 节为龙头，后面 221 节为龙身，最后 1 节为龙尾。龙头的板长为 341 cm，龙身和龙尾的板长均为 220 cm，所有板凳的板宽均为 30 cm。每节板凳上均有两个孔，孔径（孔的直径）为 5.5 cm，孔的中心距离最近的板头 27.5 cm。相邻两条板凳通过把手连接。

问题一：舞龙队沿螺距为 55cm 的等距螺线顺时针盘入舞龙队沿螺距为 55 cm 的等距螺线顺时针盘入，各把手中心均位于螺线上。龙头前把手的行进速度始终保持 1 m/s。初始时，龙头位于螺线第 16 圈 A 点。请给出从初始时刻到 300 s 为止，每秒整个舞龙队的位置和速度。

问题二：舞龙队沿问题 1 设定的螺线盘入，请确定舞龙队盘入的终止时刻，使得板凳之间不发生碰撞（即舞龙队不能再继续盘入的时间），并给出此时舞龙队的位置和速度。

问题三：从盘入到盘出，舞龙队将由顺时针盘入调头切换为逆时针盘出，这需要一定的调头空间。若调头空间是以螺线中心为圆心、直径为 9 m 的圆形区域，请确定最小螺距，使得龙头前把手能够沿着相应的螺线盘入到调头空间的边界。

问题四：盘入螺线的螺距为 1.7 m，盘出螺线与盘入螺线关于螺线中心呈中心对称，

舞龙队在问题 3 设定的调头空间内完成调头，调头路径是由两段圆弧相切连接而成的 S 形曲线，前一段圆弧的半径是后一段的 2 倍，它与盘入、盘出螺线均相切。能否调整圆弧，仍保持各部分相切，使得调头曲线变短？

问题五：舞龙队沿问题 4 设定的路径行进，龙头行进速度保持不变，请确定龙头的最大行进速度，使得舞龙队各把手的速度均不超过 2 m/s 。

二、问题分析

2.1 问题一

第一小问：求各把手（节点）在不同时间的位置。首先问题定义了板凳龙的盘入方式沿等距螺线即阿基米德螺线盘入，其次规定了龙头盘入的速度为 1m/s ，并提出“计算各节点每秒的位置及速度”的要求。由龙头的运动，利用板凳长度固定求各节点的位置和速度第二小问：求各把手（节点）在不同时间的速度，将各节点的位置由极坐标化成直角坐标，利用数值微分计算

2.2 问题二

题意表明，当板凳龙之间各节发生碰撞时，板凳龙停止盘入。而龙身龙尾的运动轨迹可近似看作龙头运动的复演，因此只需计算得到龙头首次与外圈龙身发生碰撞即可

2.3 问题三

题目要求我们求板凳龙龙头进入以原点为圆心，直径 9m 的掉头空间时恰好发生碰撞的情况下，等距螺线的螺距为多少。我们可以设置参数 p 作为螺距，利用第一二问的思路求得板凳龙的各时间的轨迹，利用碰撞发生时板凳龙刚好盘入掉头空间构造方程求解。

2.4 问题四

第一小问：题目在问题三的基础上，新增了盘出的曲线和掉头曲线，这要求我们先研究掉头曲线的性质，确定其轨迹。由几何性质判断是否可以调整大小圆弧的长度的关系。第二小问：该题要求我们求出龙头龙身龙尾各把手的位置，速度随时间变化的不同取值，这要求我们分别计算龙头在掉头曲线大圆弧，小圆弧上以及小圆弧后的运动轨迹，在根据节点间长度的关系计算出各节点的位置和长度

2.5 问题五

题目要求在速度小于 2m/s 的情况下，求最大行进速度，我们可以改进问题一的迭代模型，加入参数 v ，并通过等距二分和等比方式多次对 v 取值，通过 MATLAB 软件对每点进行迭代求解，对得到的各点速度最大值进行检验，最后得到局部最优解

三、模型的假设

1. 只考虑板凳龙在平面上的运动，不考虑在模型在纵坐标的变化。
2. 板凳龙运动稳定，不会出现特殊情况导致板凳龙各板凳间发生碰撞
3. 假设舞龙队在螺线盘入时的运动不受外部干扰，且所有把手位置和速度仅受螺线几何参数影响
4. 假设每个把手在时间的推移中沿螺线均匀移动，且速度分布不受其他因素影响。
5. 假设每节板凳通过把手连接，且所有把手的连接方式和位置均匀一致。假设每个把手的连接强度足以支持整个板凳龙在盘旋过程中的稳定性
6. 假设龙头、龙身和龙尾的板凳在盘旋过程中不会因板凳的几何特性而发生形变。

四、符号说明

符号	意义
r	(极径 m)
θ	极角 (rad)
t	时间 (s)
p	螺距 (m)
l	板凳长 (m)
d	板凳宽 (m)
R	龙头前把手到板凳角长 (m)
d'	龙头到外圈龙身的距离

五、模型的建立与性质

5.1 基本模型——阿基米德螺旋线（Archimedean spiral）

以板凳龙的每一个节点为研究对象，以点的运动的角度研究其位置速度的变化。设螺距为 p ，建立以 O 点为圆心的极坐标系和直角坐标系， θ 取值 $(32\pi, 0)$ 若点在阿基米德螺线运动，则满足运动方程 $r = k\theta$ ，且满足以下性质

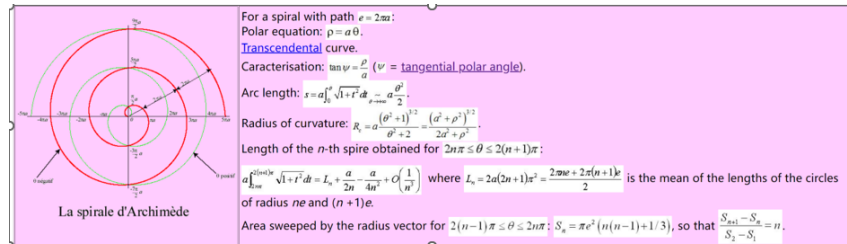


图 1

1. 螺距 $p=0.55\text{m}$ ，每增加 2π 的角度（即转过一圈），半径增加 0.55 米，因此

$$r = \frac{p}{2\pi}\theta = \frac{0.55}{\pi}\theta \approx 0.0875\theta \quad (1)$$

2. 特征极角（tangential polar angle）满足方程

$$\tan \psi = \frac{\rho}{a} \quad (2)$$

3. 弧长公式

$$S = a \int_0^\theta \sqrt{1+t^2} dt \underset{\theta \rightarrow +\infty}{\sim} a \frac{\theta^2}{2} \quad (3)$$

5.2 等速螺旋运动

点沿着阿基米德螺线做单位时间内滑过相同距离的运动，由阿基米德螺线的弧长公式 (2) 此时弧长随时间的变化量为定值，因而我们可以求得角度随时间的变化率

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{1}{\sqrt{r^2 + k^2}} \quad (4)$$

5.2.1 板凳龙碰撞模型

板凳龙发生碰撞的情况如下图所示

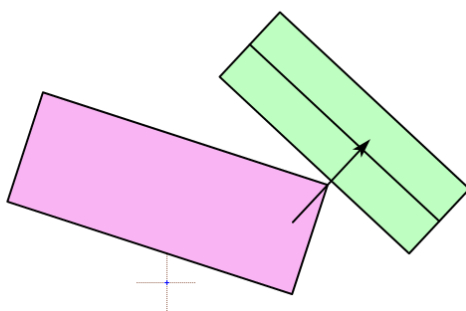


图 2

此时满足该模型满足的方程如下

$$d' = R + \frac{d}{2} \quad (5)$$

5.2.2 伸缩圆模型

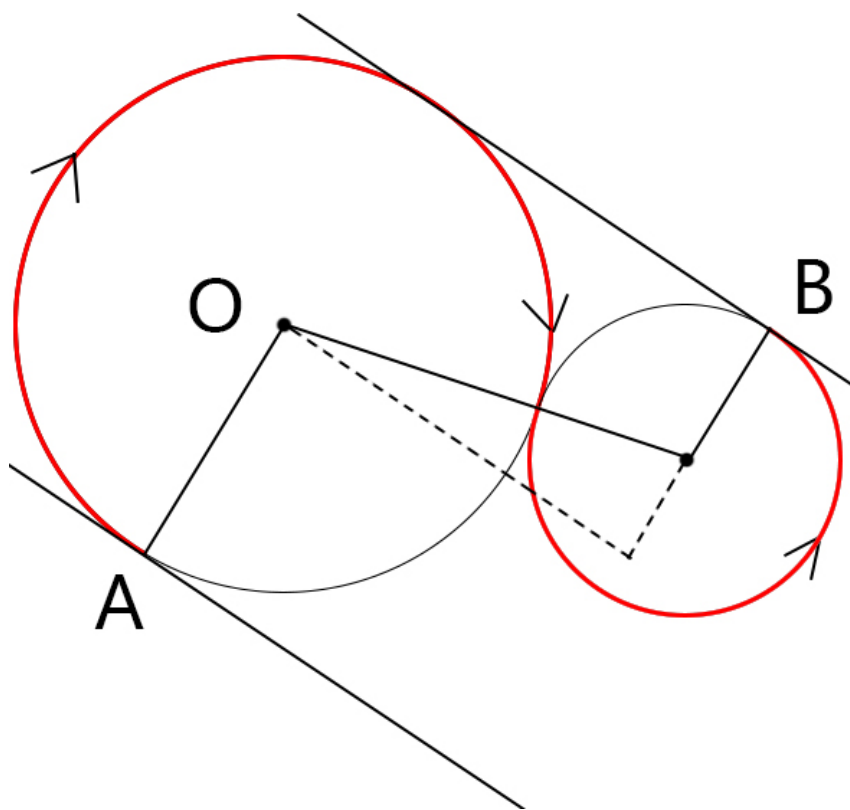


图 3

圆心在一条直线上滑动，使得半径变化。

性质：两圆心连线是一条直线

5.2.3 圆环上的刚性杆运动

将每一节板凳视为刚性杆，杆的端点为 AB 由 $v = \omega r$ 。可得其角速度固定 $\omega = \frac{v}{2r} = \frac{1}{2r}$ ，利用圆的参数方程，可得每秒的 A 点位置由于 AB 速度，角速度均相同，故 B 点位置时间函数可以看作是 y 滞后一段时间的 A 点位置时间函数

六、模型求解

6.1 问题 1

6.1.1 龙头运动问题的求解

由题意龙头绕阿基米德螺线做 1m/s 的等速运动，我们将 (3) 与 (4) 联立得到以下方程

$$r = 0.0875(32\pi - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 0.0875^2}}t) \quad (6)$$

以 (5) 为基础，构造递推公式

$$r(t+1) = 0.0875(32\pi - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 0.0875^2}}) \quad (7)$$

以 0.01s 为步长，计算龙头对应的极径，再将所得数据带入 (1) 中可得到龙头对应的极角得到数据在极坐标中图像如下所示：利用极坐标与直角坐标的相互转化公式 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 将龙头的坐标由极坐标系转入直角坐标系，龙头的运动轨迹如下所示

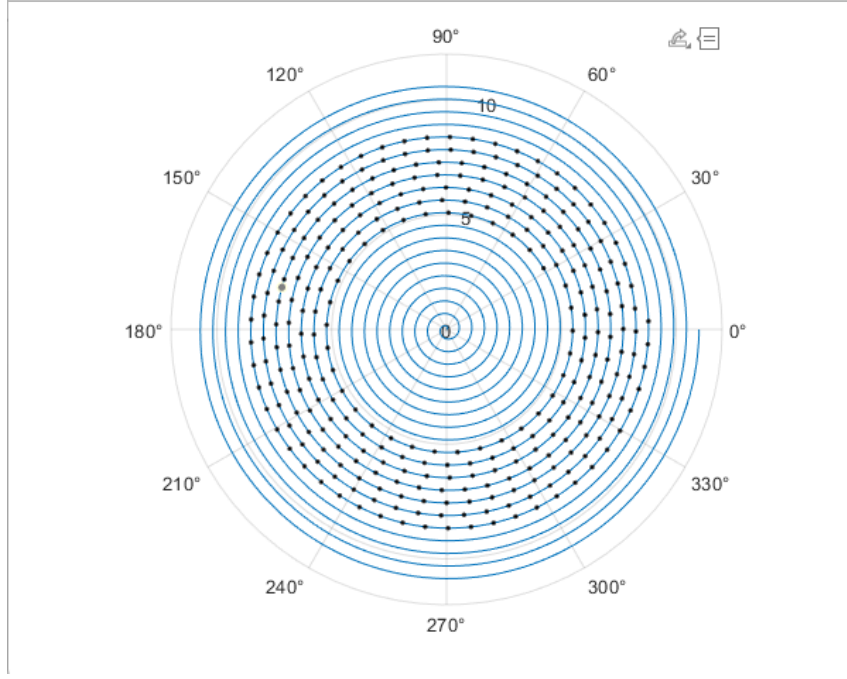


图 4

之后再利用 matlab 的 diff 函数对横纵坐标数值微分得到龙头在该位置的速度。

6.1.2 龙身到龙尾运动问题的求解

根据题目中板凳龙各节点的连接情况知，相邻节点的距离为一定值，由极坐标下两点的距离公式和螺线方程得到如下方程

$$r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(0.0875r_1 - 0.0875r_2) = l \quad (8)$$

将龙头板凳长 $l_0 = 2.86m$, 龙身龙尾板凳长 $l_i = 1.65m (i = 1, 2 \dots 223)$ 分别代入求解。为了简便计算我们利用泰勒公式，将 (7) 变形为

$$l = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(0.0875r_1 - 0.0875r_2) \quad (9)$$

$$\approx r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \left(1 - \frac{(0.0875r_1 - 0.0875r_2)^2}{2} + \frac{(0.0875r_1 - 0.0875r_2)^4}{24} - \frac{(0.0875r_1 - 0.0875r_2)^6}{720} \right) \quad (10)$$

由龙头的运动数据依次迭代求得龙身龙尾各节点的极径和极角。再转化为直角坐标。

然后利用数值微分

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \approx \sqrt{\frac{x(t) - x(t+h)^2}{h} + \frac{y(t) - y(t+h)^2}{h}} \quad (11)$$

以步长 $h = 0.01s$ 计算出各点的速度

表 1 板凳龙的位置

时间 (s)	0	60	120	180	240	300
龙头 x (m)	8.792797	6.037075	-3.797228	-3.267705	2.91318	4.226111
龙头 y (m)	0.355983	-5.522357	-6.482873	5.939213	-5.193613	2.666956
第 1 节龙身 x (m)	8.242625	7.595146	-1.110898	-5.450995	5.028205	2.106607
第 1 节龙身 y (m)	3.162567	-3.12402	-7.464316	4.091824	-3.268446	4.587191
第 51 节龙身 x (m)	-9.565033	-8.784965	-5.81943	2.53838	6.183975	-6.321872
第 51 节龙身 y (m)	0.953433	2.174622	6.127539	7.381079	-3.492677	0.035114
第 101 节龙身 x (m)	3.317799	6.017532	5.687993	2.29598	-4.574456	-6.475207
第 101 节龙身 y (m)	-9.790024	-7.755596	-7.315531	-8.373356	-6.631737	3.537021
第 151 节龙身 x (m)	10.775742	6.332191	1.959845	0.564304	2.52935	6.766447
第 151 节龙身 y (m)	2.277535	8.40929	9.82262	9.461658	8.542107	4.808059
第 201 节龙身 x (m)	4.099622	-6.998743	-10.676392	-9.079891	-7.13414	-7.141337
第 201 节龙身 y (m)	10.906271	8.73392	0.889823	-4.674491	-6.551727	-5.688759
龙尾 (后) x (m)	-4.848258	7.73508	10.925717	7.026688	2.757935	1.246958
龙尾 (后) y (m)	-10.890618	-8.472912	1.328255	7.828151	9.621569	9.389694

表 2 龙的速度数据

时间 (s)	0	60	120	180	240	300
龙头 (m/s)	0.999299	0.999125	0.998888	0.998543	0.997994	0.996607
第 1 节龙身 (m/s)	0.999274	0.999092	0.99884	0.99847	0.997869	0.996354
第 51 节龙身 (m/s)	0.999128	0.998901	0.998582	0.998097	0.997285	0.995317
第 101 节龙身 (m/s)	0.999022	0.99877	0.99841	0.997868	0.996963	0.994835
第 151 节龙身 (m/s)	0.998941	0.998671	0.998289	0.997713	0.996759	0.994556
第 201 节龙身 (m/s)	0.998878	0.998596	0.998198	0.997602	0.996618	0.994374
龙尾 (后) (m/s)	0.998854	0.998569	0.998166	0.997563	0.99657	0.994314

6.2 问题二

6.3 计算龙头前把手到各龙身的距离

利用点到直线距离公式的两点式形式

$$d' = \frac{|(x_2 - x_1)(y - y_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1)|}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad (12)$$

代入第一间中龙头前把手的坐标，求得 d' ，利用下述公式

$$\left| d' - \sqrt{0.15^2 + 0.3124^2} \right| \quad (13)$$

寻找结果中最接近 0 的值，该值对应的时刻即为碰撞时刻。

计算得出的碰撞时刻是 227s

表 3 227 秒位置结果

	227 s
龙头 x (m)	1.940721
龙头 y (m)	5.843085
第 1 节龙身 x (m)	-0.904704
第 1 节龙身 y (m)	6.131442
第 51 节龙身 x (m)	2.611164
第 51 节龙身 y (m)	6.765963
第 101 节龙身 x (m)	6.476571
第 101 节龙身 y (m)	-5.011455
第 151 节龙身 x (m)	-7.983277
第 151 节龙身 y (m)	4.217452
第 201 节龙身 x (m)	4.133676
第 201 节龙身 y (m)	-8.881879
龙尾（后） x (m)	-9.060700
龙尾（后） y (m)	4.530714

此时各把手运动的情况如下图所示

表 4 227 秒速度结果

	227 s
龙头 (m/s)	0.998148
第 1 节龙身 (m/s)	0.99804
第 51 节龙身 (m/s)	0.997526
第 101 节龙身 (m/s)	0.997228
第 151 节龙身 (m/s)	0.997036
第 201 节龙身 (m/s)	0.996902
龙尾 (后) (m/s)	0.996853

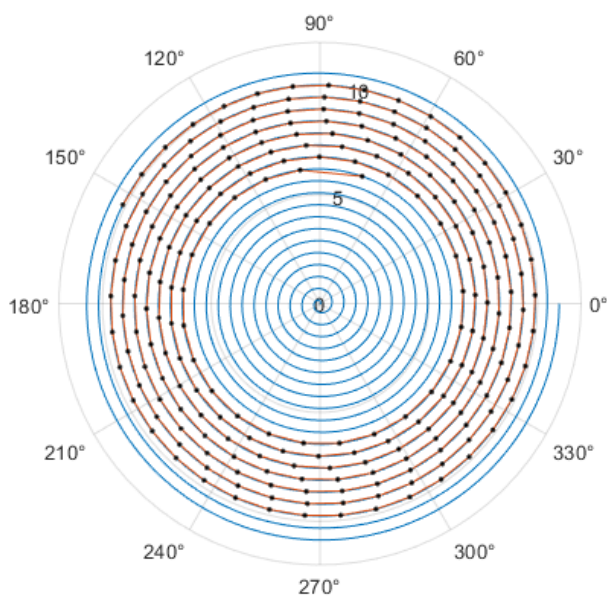


图 5

6.4 问题三

设螺线螺距为 p ，将 p 作为参数代回 (6)(7) 式中即可求得含参的龙头运动轨迹，利用 (10) 解得板凳龙的整个运动轨迹，再利用 (12) (13) 对数据进行检验，得出当螺距为 p 时，龙头的极径 r' 代入下述方程求解 p

$$r'(p) = 4.5 \quad (14)$$

解得 p 的值为 0.300098m

6.5 问题四

6.5.1 计算大小圆弧的半径

设 ABEF 点, 两圆交点是 G, A 点 B 点斜率 = dy/dx , 则矩形 AEBF 各边方程易知, 则推得矩形长宽, 以其列出关于圆半径和圆心角的二元非线性方程, 求得唯一解 $r \approx 8.9525$; $\theta \approx 2.806$ 故可得圆心 O_1 O_2 坐标。先以大圆弧的 O_1 作为原点建立直角坐标系, 再以小圆弧 O_2 作为原点构建直角坐标系, 转换两个直角坐标系通过如下的迭代公式可得每秒龙头龙身龙尾的位置。

6.5.2 大圆弧上的运动

龙头初始位置即 A 点的坐标为 $A(x_0, y_0) = (-2.672485, -3.624315)$ 龙头在大圆弧上运动时板凳龙各节点的坐标满足如下方程

$$\begin{cases} x(t, i) = x_0 - 17.905 \cos\left(\frac{t-2.64994-1.64726(i-2)}{17.905}\right), \\ y(t, i) = y_0 - 17.905 \sin\left(\frac{t-2.64994-1.64726(i-2)}{17.905}\right), \end{cases} \quad (15)$$

其中 $0 < t < 62$

6.5.3 小圆弧上的运动

同上述大圆弧上的运动我们可以得到龙头在小圆弧上运动的坐标的迭代方程

$$\begin{cases} x(t, i) = (39.484) - 8.9525 \cos\left(\frac{t}{8.9525}\right), \\ y(t, i) = (38.160) - 8.9525 \sin\left(\frac{t}{8.9525}\right), \end{cases} \quad (16)$$

其中 $63 < t < 95$

6.5.4 小圆弧后的运动

即为旋出螺线运动。由于是中心对称, 初始点 $B(1.97248, 4.04467)$ 其中 $t > 95$

6.5.5 结论

调头曲线唯一不可改变因为 S 形曲线与盘出盘入螺旋线均相切, 故 S 形曲线的两段圆弧是夹在两段平行线之间的伸缩圆模型, 且两个伸缩圆一定相交 (即相切), 又因为大圆半径是小圆半径的 2 倍, 故能确定唯一的 R

表 5 问题四中板凳龙的位置

	123s	128 s	133 s	50 s	100 s
龙头 x (m)	4.037435	2.374023	4.487289	-0.778687	5.646171
龙头 y (m)	7.814619	6.726558	-2.156936	-0.775785	4.674332
第 1 节龙身 x (m)	-9.851614	-9.159364	4.768786	-0.776878	5.643217
第 1 节龙身 y (m)	5.550597	-1.876782	-2.156936	-0.775785	4.396721
第 51 节龙身 x (m)	-9.764343	-9.486317	4.434537	-0.737621	5.324731
第 51 节龙身 y (m)	5.346195	-6.161377	-2.159632	-0.771936	4.173564
第 101 节龙身 x (m)	-9.715629	-9.592175	4.762542	-0.734348	5.124793
第 101 节龙身 y (m)	5.783738	-6.178678	-2.156945	-0.715233	3.297880
第 151 节龙身 x (m)	-9.634643	-9.478636	4.436752	-0.734534	-2.765412
第 151 节龙身 y (m)	5.558879	-6.125136	-2.156377	-0.798562	4.324713
第 201 节龙身 x (m)	-9.387294	-9.159632	4.372835	-0.736293	-5.434921
第 201 节龙身 y (m)	5.557888	-6.467865	-2.156387	-0.712362	6.274232
龙尾（后） x (m)	-9.384634	-9.159631	4.732856	-0.731145	5.534243
龙尾（后） y (m)	5.557868	-6.168766	-2.156348	-0.744566	7.6431

表 6 问题四中板凳龙的速度

	-100 s	-50 s	0 s	50 s	100 s
龙头 (m/s)	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
第 1 节龙身 (m/s)	1.059065	1.089579	0.794186	1	1.114514
第 51 节龙身 (m/s)	1.059065	1.011451	4.259865	0.794186	0.053710
第 101 节龙身 (m/s)	1.059452	6.93851	0.795689	0.052721	0.994156
第 151 节龙身 (m/s)	1.055476	7.603639	0.827310	0.537945	0.845415
第 201 节龙身 (m/s)	1.055665	7.250217	0.794186	0.053698	0.813210
龙尾（后）(m/s)	1.056456	9.782569	0.794177	0.053711	0.798864

6.6 问题五

我们首先研究在问题四设定的路径下，速度的变化情况 1. 首先考虑旋进时的螺线运动, 速度改变意味着 $ds/dt=v$, 由问题一中 (6) 我们将迭代公式中的螺距改变即

$$r = \left(\frac{1.7}{2\pi}\right)32\pi - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1.7}{2\pi}\right)^2}}t$$

此外，此部分已知大致的递增递减规律——龙尾速度随时间变大，对找到 $\text{Max } V$ (各个把手) 很有帮助

2. 进入 D 大圆和小圆在大圈和小圈运动的点永远速度等于龙头速度 V ，最小值就是 V 证明：根据问题三解答中所述的圆环刚性杆模型可得杆两端点速度相等 ($v = \omega r$)

3. 旋出螺线由中心对称初步猜想 v 递增递减规律与旋入相反。利用中心对称可以得到各把手位置，那么速度和 1 相同，

首先观察到龙头 $v=1$ 时，为了不断迭代出 $\text{Max } V(i)$ ，龙头 v 的值，现分别给出等差二分，等比两种第二代方式

利用等差二分法计算

$$V_0 = (2 - 1)/2$$

, 得 $\text{Max}V(i)$ 的值，即利用二分法趋近利用等比二分法计算

$$\frac{1}{\text{max}V(i)} = \frac{V(i)}{2}$$

可得 V 下一次迭代的值，带入模型，观察 $\text{Max}V(i)$ 的值再次迭代，直到精度足够小，解得 $V=1.423428$

七、总结

7.1 优点

1. 模型在一定程度上准确而精巧的描述了问题，并对其进行了相对的优化，易于理解与操作

2. 在该问题规模下，程序运行时间较快，空间占用少

7.2 缺点

1. 由于对板凳龙龙头的运动采用了离散的数据进行迭代看，模型始终存在误差

2. 当模拟数据量过大的计算中可能出现速度的偏差较大

3. 模型的空间复杂度与时间复杂度较高

7.3 改进方法

1. 对于龙头的运动方程

$$r = k(32\pi - \frac{1}{\sqrt{k^2 + r^2}})t$$

利用非线性方程求解，或用精度更高的数值方法迭代

2. 对于龙身龙尾数据的求解，可以利用 Taylor 公式展开更多项以减少误差
3. 在求各点速度的数值计算可以减少步长以提高精度

参考文献

[1] 刘崇军. 等距螺线的原理与应用. 数学的实践与认识, 2018

[1] 李庆扬, 王能超, 易大义 数值分析 华中科技大学出版社, 第 5 版

支撑文件列表: result1 result2 result3

计算代码:

```

theta = zeros(301, 224);
r = zeros(301, 224);
theta(1, 1) = 32 * pi;
r(1, 1) = 8.8;
for i = 2 : 301
    theta(i, 1) = theta(i - 1, 1) - 1./sqrt((r(i - 1, 1)).^2 + (0.0875).^2);
end
format long
k = zeros(301, 224)
k(:, 1) = r(:, 1)
for i = 1 : 301
    fuck = @(k) k^2 + r(i, 1)^2 - 2 * r(i, 1) * k * (1 - (r(i, 1) / 0.0875 - k / 0.0875)^2 / 2 + (r(i, 1) / 0.0875 - k / 0.0875)^4 / 24 - (r(i, 1) / 0.0875 - k / 0.0875)^6 / 720 + (r(i, 1) / 0.0875 - k / 0.0875)^8 / 40320) - 2.86^2;
    k(i, 2) = fsolve(fuck, r(i, 1));
end
for i = 1 : 301
    for j = 3 : 224
        fuck = @(t) t^2 + k(i, j - 1)^2 - 2 * k(i, j - 1) * t * (1 - (k(i, j - 1) / 0.0875 - t / 0.0875)^2 / 2 + (k(i, j - 1) / 0.0875 - t / 0.0875)^4 / 24 - (k(i, j - 1) / 0.0875 - t / 0.0875)^6 / 720 + (k(i, j - 1) / 0.0875 - t / 0.0875)^8 / 40320) - 1.65^2;
        k(i, j) = fsolve(fuck, k(i, j - 1));
    end
end
gamma = k ./ 0.0875

```

```

x = k.*cos(gamma)
y = k.*sin(gamma)
result = zeros(301,448)
for i = 1 : 448
    if mod(i,2) == 1
        result(:,i) = x(:,(i+1)./2);
    else
        result(:,i) = y(:,i/2);
    end
end
result = result'
result = roundn(result,-6)
figure
plot(x,y)
x = roundn(x,-6)
y = roundn(result,-6)
for i = 1 : 301
    for j = 2 : 223
        d(i,j) = abs(abs((y(i,j)-y(i,j+1)).*x(i,1)-(x(i,j)-x(i,j+1)).*y(i,1))+x(i,j+1).*
        y(i,j)-x(i,j)).*y(i,j+1))./sqrt((x(i,j)-x(i,j+1)).^2-(y(i,j)-y(i,j+1)).^2)-0.313249);
    end
end
end
d = d(:,2 : 223)
k(m)
x2 = x(227,51 : 50 : 224)
y2 = y(227,51 : 50 : 224)
v2 = v(227,51 : 50 : 224)
x2 = [x(227,1),x(227,2),x2,x(227,224)]
y2 = [y(227,1),y(227,2),y2,y(227,224)]
v2 = [v(227,1),v(227,2),v2,v(227,224)]

```

支撑材料:

表 7 问题一板凳龙的位置

时间 (s)	0	60	120	180	240	300
龙头 x (m)	8.792797	6.037075	-3.797228	-3.267705	2.91318	4.226111
龙头 y (m)	0.355983	-5.522357	-6.482873	5.939213	-5.193613	2.666956
第 1 节龙身 x (m)	8.242625	7.595146	-1.110898	-5.450995	5.028205	2.106607
第 1 节龙身 y (m)	3.162567	-3.12402	-7.464316	4.091824	-3.268446	4.587191
第 51 节龙身 x (m)	-9.565033	-8.784965	-5.81943	2.53838	6.183975	-6.321872
第 51 节龙身 y (m)	0.953433	2.174622	6.127539	7.381079	-3.492677	0.035114
第 101 节龙身 x (m)	3.317799	6.017532	5.687993	2.29598	-4.574456	-6.475207
第 101 节龙身 y (m)	-9.790024	-7.755596	-7.315531	-8.373356	-6.631737	3.537021
第 151 节龙身 x (m)	10.775742	6.332191	1.959845	0.564304	2.52935	6.766447
第 151 节龙身 y (m)	2.277535	8.40929	9.82262	9.461658	8.542107	4.808059
第 201 节龙身 x (m)	4.099622	-6.998743	-10.676392	-9.079891	-7.13414	-7.141337
第 201 节龙身 y (m)	10.906271	8.73392	0.889823	-4.674491	-6.551727	-5.688759
龙尾（后）x (m)	-4.848258	7.73508	10.925717	7.026688	2.757935	1.246958
龙尾（后）y (m)	-10.890618	-8.472912	1.328255	7.828151	9.621569	9.389694

表 8 问题一龙的速度数据

时间 (s)	0	60	120	180	240	300
龙头 (m/s)	0.999299	0.999125	0.998888	0.998543	0.997994	0.996607
第 1 节龙身 (m/s)	0.999274	0.999092	0.99884	0.99847	0.997869	0.996354
第 51 节龙身 (m/s)	0.999128	0.998901	0.998582	0.998097	0.997285	0.995317
第 101 节龙身 (m/s)	0.999022	0.99877	0.99841	0.997868	0.996963	0.994835
第 151 节龙身 (m/s)	0.998941	0.998671	0.998289	0.997713	0.996759	0.994556
第 201 节龙身 (m/s)	0.998878	0.998596	0.998198	0.997602	0.996618	0.994374
龙尾（后）(m/s)	0.998854	0.998569	0.998166	0.997563	0.99657	0.994314

表 9 问题二 227 秒位置结果

	227 s
龙头 x (m)	1.940721
龙头 y (m)	5.843085
第 1 节龙身 x (m)	-0.904704
第 1 节龙身 y (m)	6.131442
第 51 节龙身 x (m)	2.611164
第 51 节龙身 y (m)	6.765963
第 101 节龙身 x (m)	6.476571
第 101 节龙身 y (m)	-5.011455
第 151 节龙身 x (m)	-7.983277
第 151 节龙身 y (m)	4.217452
第 201 节龙身 x (m)	4.133676
第 201 节龙身 y (m)	-8.881879
龙尾（后） x (m)	-9.060700
龙尾（后） y (m)	4.530714

表 10 问题二 227 秒速度结果

	227 s
龙头 (m/s)	0.998148
第 1 节龙身 (m/s)	0.99804
第 51 节龙身 (m/s)	0.997526
第 101 节龙身 (m/s)	0.997228
第 151 节龙身 (m/s)	0.997036
第 201 节龙身 (m/s)	0.996902
龙尾（后）(m/s)	0.996853

表 11 问题四中板凳龙的位置

	123s	128 s	133 s	50 s	100 s
龙头 x (m)	4.037435	2.374023	4.487289	-0.778687	5.646171
龙头 y (m)	7.814619	6.726558	-2.156936	-0.775785	4.674332
第 1 节龙身 x (m)	-9.851614	-9.159364	4.768786	-0.776878	5.643217
第 1 节龙身 y (m)	5.550597	-1.876782	-2.156936	-0.775785	4.396721
第 51 节龙身 x (m)	-9.764343	-9.486317	4.434537	-0.737621	5.324731
第 51 节龙身 y (m)	5.346195	-6.161377	-2.159632	-0.771936	4.173564
第 101 节龙身 x (m)	-9.715629	-9.592175	4.762542	-0.734348	5.124793
第 101 节龙身 y (m)	5.783738	-6.178678	-2.156945	-0.715233	3.297880
第 151 节龙身 x (m)	-9.634643	-9.478636	4.436752	-0.734534	-2.765412
第 151 节龙身 y (m)	5.558879	-6.125136	-2.156377	-0.798562	4.324713
第 201 节龙身 x (m)	-9.387294	-9.159632	4.372835	-0.736293	-5.434921
第 201 节龙身 y (m)	5.557888	-6.467865	-2.156387	-0.712362	6.274232
龙尾（后） x (m)	-9.384634	-9.159631	4.732856	-0.731145	5.534243
龙尾（后） y (m)	5.557868	-6.168766	-2.156348	-0.744566	7.6431

表 12 问题四中板凳龙的速度

	-100 s	-50 s	0 s	50 s	100 s	
龙头 (m/s)	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1
第 1 节龙身 (m/s)	1.059065	1.089579	0.794186	1	1.114514	
第 51 节龙身 (m/s)	1.059065	1.011451	4.259865	0.794186	0.053710	
第 101 节龙身 (m/s)	1.059452	6.93851	0.795689	0.052721	0.994156	
第 151 节龙身 (m/s)	1.055476	7.603639	0.827310	0.537945	0.845415	
第 201 节龙身 (m/s)	1.055665	7.250217	0.794186	0.053698	0.813210	
龙尾（后）(m/s)	1.056456	9.782569	0.794177	0.053711	0.798864	