応用数学

１．線形代数

１．１　行列についてまとめ

（１）行列の性質

交換法則

$$A + B = B + A$$

結合法則

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
$$(AB)C = A(BC)$$

分配法則

$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(A + B)C = AC + BC$$

指数法則　（nとmmが共に整数であるとき、）

$$A^n A^m = A^{n+m}$$
$$(A^n)^m = A^{nm}$$

直交行列の定義

実正方行列（サイズを$n \times n$とする）Uに対して以下の5つの条件は同値です。
この条件のいずれか一つ（従って全部）を満たすときUを直交行列と言います。
1. $U^\top = U^{-1}$
2. Uのn本の行ベクトルが正規直交基底をなす
3. Uのn本の列ベクトルが正規直交基底をなす
4. 任意の$x \in Rn$に対して $\| Ux \| = \| x \|$ (変換でベクトルのノルム（長さ）が変わらない)
5. 任意の$x, y \in Rn$に対して$Ux \cdot Uy = x \cdot y$

「正規直交」とは，全てのベクトルの長さが1で異なる二本のベクトルの内積が0であることを意味します。
直交行列の行列式は ± 1である。
直交行列の逆行列も直交行列
$(AB)^T = B^T A^T$

対角行列の性質

対角行列の行列式は、各対角成分の総乗Πciに等しい。
対角行列の行列式は、対角成分が等しい上三角行列、下三角行列の行列式とも等しくなる。
対角行列の転置行列は同一である。そのため対角行列は対称行列でもある。
対角行列の逆行列は対角成分の逆数を並べた対角行列である。

（２）行列式について調べてみた

置換

n個の要素$1, 2, \cdots, n$を適当な順番に並べた$p_1, p_2, \cdots, p_n$について、
iとp_iの対応づけを$\sigma(i) = p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$と表し、
これらをまとめて

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

と表す。

n文字の置換は全部で$n!$パターンある

ある列に同じ数字が並ぶこと（同じ数字が上下に対応すること）がありますが、
そのような列は基本的に省略して記します。

【例】$1,2,3,4 \to 2,4,3,1$のとき

$$\sigma = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 42 \quad 4 \quad 3 \quad 1) = (1 \quad 2 \quad 42 \quad 4 \quad 1)$$

長さiの巡回置換

ある置換σについて、

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3 \quad \cdots \sigma(p_m) = i_1$$

という風に対応関係が一巡する置換を長さiの巡回置換と言い、

$$(i_1 i_2 \cdots i_m)$$

で表す。

例えば、以下の置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

について、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1 \quad 3 \quad 6 \quad 4)(2 \quad 5)$$

巡回置換の積で表せられます。

互換

巡回置換のうち，特に2文字の巡回置換$(i_1 i_2)$を互換という．
任意の巡回置換は互換の積として表される．

$$(i_1 i_2 i_3 \cdots i_m) = (i_1 i_3 \cdots i_m)(i_1 i_2)$$
$$= (i_1 i_4 i_5 \cdots i_m)(i_1 i_3)(i_1 i_2) = \cdots$$

と繰り返していけば，

$(i_1 i_1 i_1 \cdots i_m) = (i_1 i_m)(i_1 i_{m-1}) \cdots (i_1 i_2)$を得る

置換の符号

置換σがm個の互換の積で表されるとき，$sgn(\sigma) := (-1)^m$をσの符号という．
（注意）置換を互換の積として表す表し方は必ずしも一意ではない．
しかし，置換の符号は互換の積の表し方によらず一意に定まる．

$$sgn(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \text{互換の数が偶数} \\ -1 & \text{if} \quad \text{互換の数が奇数} \end{cases}$$

行列式　（ |A|や det(A) で表記　）

n次の正方行列$A = [a_{ij}]$について、行列式$|A|$は以下の式で定義される。

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ただしSnはn文字の置換（全$n!$通り）の集合である。

3次正方行列の行列式の計算

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{の行列式を計算する}$$

3次正方行列の置換とsgn(σ)を

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1 \quad 2)(1 \quad 2) \quad sgn(\sigma) = 1$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2 \quad 3) \quad sgn(\sigma) = -1$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3) = (1 \quad 3)(1 \quad 2) \quad sgn(\sigma) = 1$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \quad 2) \quad sgn(\sigma) = -1$$
$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 3 \quad 2) = (1 \quad 2)(1 \quad 3) \quad sgn(\sigma) = 1$$
$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 3) \quad sgn(\sigma) = -1$$
$$|A| = \sum_{\sigma \in S_3} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}c_{22})$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

（３）正則行列と逆行列

正則行列

n次正方行列Aについて、

$$AB = BA = I$$

となる n次正方行列 B が存在するとき、

$$A\text{は正則行列という。}$$
$$\text{この}n\text{次正方行列}B\text{を逆行列といい、}$$
$$A^{-1}\text{で表す。}$$

逆行列の性質

$$A\text{と}B\text{が}n\text{次の正則行列ならば、}AB\text{も正則で、}(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$A^{-1}\text{の逆行列}(A^{-1})^{-1}\text{は}A$$

逆行列の計算　掃き出し法

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\text{の逆行列を求める}$$
$$(A \quad I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1行目の2倍を2行目に加える：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

二列目（の第2成分以外）に 0 を並べるように ：2行目の-1/2倍を1行目に加える : 2行目の-1倍を3行目に加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

三列目（の第3成分以外）に 0 を並べるように：：3行目の1/4倍を1行目に加える : 3行目の1/2倍を2行目に加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

左側を単位行列にする : ２行目を1/2倍に　3行目を1/2倍に

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

逆行列は

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

１．２　固有値，固有ベクトル 固有値分解

正方行列に対して、以下を満たす定数λと、0でないベクトルxのことを、それぞれ 固有値・固有ベクトル と言います。

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

固有値　の求め方

$$\text{上式より}$$
$$(A - \lambda I)\vec{x} = 0$$
$$\vec{x} \neq \vec{0}\text{より}\quad (A - \lambda I)\quad \text{は逆行列を持たないので}$$
$$\left|A - \lambda I\right| = 0 \quad \text{を解いて}\quad \lambda \quad \text{を計算する}$$

固有ベクトル　の求め方

$$\text{求めた}\quad \lambda \quad \text{を}\quad (A - \lambda I)\vec{x} = 0 \quad \text{に代入して}$$
$$\text{連立方程式を解いて}\quad \vec{x} \quad \text{を求める}$$

固有値を計算してみる

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\text{の固有値・固有ベクトルを求める}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$
$$\lambda = 1, 2, 3$$

固有ベクトルを計算してみる

$$\lambda = 1\text{の時}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$(x, y, z) = (1, 0, 0)$$

$$\lambda = 2\text{の時}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$(x, y, z) = (1, 1, 0)$$
$$\lambda = 3\text{の時}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$(x, y, z) = (1, -2, 2)$$

固有値分解は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

１．３　特異値，特異ベクトル 特異値分解

$$\boldsymbol{M}\vec{v} = \sigma\vec{u}$$
$$\boldsymbol{M}^T\vec{u} = \sigma\vec{v} \qquad \text{(b)}$$
$$(\sigma > 0, \vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0})$$

このような特殊な単位ベクトルがあれば特異値分解できる。

Mを、$rank$がRのMxN行列とする。

このとき、以下の式を満たすMxMの直交行列$\boldsymbol{U}$、NxNの直交行列$\boldsymbol{V}$、

および、MxNの対角行列Sが存在する。

$$\mathrm{M} = \boldsymbol{USV}^T$$

ただし、$\boldsymbol{U}, V$　は直行行列

特異値の計算

$$\boldsymbol{M}V = US$$
$$\boldsymbol{M}^T U = VS^T$$

より

$$\boldsymbol{M} = USV^{-1}$$
$$\boldsymbol{M}^T = VS^T U^{-1}$$

$$\boldsymbol{M}M^T = USV^{-1}VS^TU^{-1}$$
$$= USS^TU^{-1}$$
$$= US^2U^{-1}$$
$$= US^2U^T$$

$\boldsymbol{M}M^T$の固有値を計算して、固有値ベクトル　U　を求める

$$\boldsymbol{M}^T M = VS^TU^{-1}USV^{-1}$$
$$= VS^TSV^{-1}$$
$$= VS^2V^{-1}$$
$$= VS^2V^T$$

$\boldsymbol{M}M^T$の固有値ベクトル　V　を求める

特異値分解をやってみる

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{の特異値分解をやってみる}$$

$$\boldsymbol{MM^T} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M^TM} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

特異値分解をやってみる

$\boldsymbol{M}M^T$の固有値、固有ベクトルを計算する。

$$\left|\boldsymbol{M}M^T-\lambda^2 I\right|=\vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} 16-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & -4 \\ 0 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix}=\vec{0}$$

$$(16-\lambda)((4-\lambda)^2-16)=0$$

$$(16-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+16-16)=0$$

$$(16-\lambda)(\lambda^2-8\lambda)=0$$

$$\lambda(16-\lambda)(\lambda-8)=0$$

$$\lambda=16,8,0$$

$$\lambda=0\text{のとき}\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

固有値　0　固有ベクトル　（０、１、１）

$$\lambda=8\text{のとき}\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=8\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

固有値　8　固有ベクトル　（０、ー１、１）

$$\lambda=16\text{のとき}\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=16\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

固有値　１６　固有ベクトル　（１、０、０）

特異値、左特異値ベクトル

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

特異値

$$\lambda=4,2,0$$

左特異ベクトル

$$(1,0,0)$$

$$(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

$$(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$$

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

右特異値ベクトル

$\boldsymbol{M}^T M$の　固有ベクトルを計算する。

$$\lambda = 0のとき \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

固有値　0　固有ベクトル　（0、－1、0、1），　（－1、0、1、0）

$$\lambda = 8のとき \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

固有値　8　固有ベクトル　（－1、1、－1、1）

$$\lambda = 16のとき \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

固有値　１６　固有ベクトル　（1、1、1、1）

特異値

$$\lambda = 0$$

左特異ベクトル

$$（0、-\frac{1}{\sqrt{2}}、0、\frac{1}{\sqrt{2}}）$$

$$（-\frac{1}{\sqrt{2}}、0、\frac{1}{\sqrt{2}}、0）$$

特異値

$$\lambda = 2\sqrt{2}$$

左特異ベクトル

$$（-\frac{1}{2}、\frac{1}{2}、-\frac{1}{2}、\frac{1}{2}）$$

特異値

$$\lambda = 4$$

左特異ベクトル

$$（\frac{1}{2}、\frac{1}{2}、\frac{1}{2}、\frac{1}{2}）$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V^{-1}} = \quad V^T \quad = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

特異値分解

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

2．確率・統計

２．１ 確率変数と確率分布

頻度確率（客観確率）

発生する頻度

ベイズ確率（主観確率）

信念の度合い

確率の定義

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\text{事象}A\text{が起こる数}}{\text{全ての事象の数}}$$
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

条件付き確率

ある事象Bが与えられた下で、Aとなる確率

$$\boldsymbol{P}(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

同時確率 お互いの発生には因果関係のない事象A, Bが同時に起こる確率

$$\boldsymbol{P}(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$
$$= P(A)P(B)$$

P(A∩B)P(A∩B)とP(B∩A)P(B∩A)は同じなので

$$\boldsymbol{P}(A)(B|A) = P(B)P(A|B)$$

P(A∩B)P(A∩B)は重複して数えているのでひとつ除く

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ベイズ測

一般的に事象 X=x と事象 Y=y に対して...

$$\boldsymbol{P}(X = x|Y = y)P(Y = y) = P(Y = y|X = x)P(X = x)$$

２．２　統計

記述統計と推測統計

記述統計：集団の性質を要約し記述する
推測統計：集団から一部を取り出し元の集団（母集団）の性質を推測する

確率変数と確率分布

確率変数：事象と結びつけられた数値
確率分布：事象の発生する確率の分布

期待値

その分布における、確率変数の平均の値 or あり得そうな値

$$\text{事象}X_n, \text{確率変数}f(X_n), \text{確率}P(X_n)$$
$$\text{期待値：}E(f) = \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k)f(X = x_k)$$

連続する値なら

$$\text{事象}X_n, \text{確率変数}f(X_n), \text{確率}P(X_n)$$
$$\text{期待値：}E(f) = \int P(X = x)f(X = x)dx$$

期待値の公式

$$a, b, c, d：定数$$
$$X, Y：確率変数\quad のとき$$
$$E(a) = a$$
$$E(aX) = aE(X)$$
$$E(X + b) = E(X) + b$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$
$$E(cX + dY) = cE(X) + dE(Y)$$
$$XYが互いに独立ならE(XxY) = E(X)xE(Y)$$

分散と共分散

分散：データの散らばり具合、データの各々の値が、期待値からどれだけズレているのか平均したもの

$$
\begin{aligned}
分散：Var(f) &= E((f_{(X=x)} - E_{(f)})^2) \\
&= E(f^2_{(X=x)}) - E(2f_{(X=x)}E_{(f)}) + E((E_{(f)})^2) \\
&= E(f^2_{(X=x)}) - 2E_{(f)}E(f_{(X=x)}) + (E_{(f)})^2 \\
&= E(f^2_{(X=x)}) - 2E_{(f)}E_{(f)} + (E_{(f)})^2 \\
&= E(f^2_{(X=x)}) - (E_{(f)})^2
\end{aligned}
$$

共分散：２つのデータ系列の傾向の違い、正の値＝似た傾向、負の値＝逆の傾向、関係性に乏しい→０に近付く

$$
\begin{aligned}
共分散：Cov(f, g) &= E((f_{(X=x)} - E(f))(g_{(Y=y)} - E(g))) \\
&= E(fg) - E(f)E(g)
\end{aligned}
$$

分散と標準偏差

分散は２乗してしまっているので元のデータと単位が違う -> 2乗することの逆演算（つまり平方根を求める）をすれば元の単位に戻る

$$標準偏差\sigma = \sqrt{Var(f)} = \sqrt{E((f_{(X=x)} - E_{(f)})^2)}$$

様々な確率分布

ベルヌーイ分布 (Bernoulli distribution)

二値確率変数 $x \in \{0, 1\}$ をとる離散分布
$x=1$ となる確率を $\mu (0 \le \mu \le 1)$
$x=0$ となる確率を $1-\mu$

$$P(x|\mu) = \mu^x (1-\mu)^{1-x}$$

$$期待値：E(X) = 0 \times \mu^0 (1-\mu)^1 + 1 \times \mu^1 (1-\mu)^{1-1} = \mu$$
$$E(X^2) = 0^2 \times \mu^0 (1-\mu)^1 + 1^2 \times \mu^1 (1-\mu)^{1-1} = \mu$$
$$分散：V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \mu - \mu^2 = \mu(1-\mu)$$

マルチヌーイ（カテゴリカル）分布

ベルヌーイ分布を一般化した確率分布で、二値ではなく、K値の場合をとる離散確率分布である。
各事象の確率 λ をパラメータとした $P(x)$ の確率密度関数は

$$P(x = k; \lambda) = \lambda_k と評される。$$
$$P(x \mid \lambda) = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{[x=i]}$$
$$ここで[x = i]はxがiの場合に1となりそれ以外は0となる。$$

二項分布

ベルヌーイ分布の多試行版
n 個の独立なベルヌーイ試行の「成功」の数の確率分布であり、各試行の「成功」確率 λ は同じである。

$$
\begin{aligned}
P(x \mid \lambda, n) &= {}_n\mathrm{C}_x \lambda^x (1-\lambda)^{(n-x)} \\
&= \frac{n!}{x!(n-x)!} \lambda^x (1-\lambda)^{(n-x)}
\end{aligned}
$$

二項分布の期待値

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{(n-k)!k!} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \lambda \lambda^{k-1} (1-\lambda)^{n-k} \\
&= n\lambda \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} \lambda^{k-1} (1-\lambda)^{n-k}
\end{aligned}
$$

この部分の$n-1$をn'、$k-1$をk'とおくと、

$$
\begin{aligned}
&= n\lambda \sum \frac{n'!}{(n'-k')!k'!} \lambda^{k'} (1-\lambda)^{(n'-k')} \quad \sum \frac{n'!}{(n'-k')!k'!} \lambda^{k'} (1-\lambda)^{(n'-k')} = 1 \\
&= n\lambda
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \lambda(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{(n-k)!k!} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k(k-1)+k) \frac{n!}{(n-k)!k!} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \frac{n!}{(n-k)!k!} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{(n-k)!k!} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k}
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{(n-k)!k!} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} = n\lambda$ より

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \frac{n!}{(n-k)!k!} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} + n\lambda \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!} \lambda^2 \lambda^{k-2} (1-\lambda)^{n-k} + n\lambda
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)!}{((n-2)-(k-2))!(k-2)!} \lambda^2 \lambda^{k-2} (1-\lambda)^{(n-2)-(k-2)} + n\lambda \\
&= n(n-1)\lambda^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-2)!}{((n-2)-(k-2))!(k-2)!} \lambda^{k-2} (1-\lambda)^{((n-2)-(k-2))} + n\lambda
\end{aligned}
$$

この部分の$n-2$をn'、$k-2$をk'とおくと、

$$
= n(n-1)\lambda^2 \sum \frac{n'!}{(n'-k')!k'!} \lambda^{k'} (1-\lambda)^{(n'-k')} + n\lambda
$$

$\displaystyle\sum \frac{n'!}{(n'-k')!k'!} \lambda^{k'} (1-\lambda)^{(n'-k')} = 1$ より

$$
= n(n-1)\lambda^2 + n\lambda
$$

二項分布の分散

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= n(n-1)\lambda^2 + n\lambda - (n\lambda)^2 \\
&= n\lambda(1-\lambda)
\end{aligned}
$$

正規分布（ガウス分布）

中央の峰のX座標がμで、峰の幅がσで制御される「ベル型曲線」

一変量の確率変数Xが、平均μ、分散σ^2の正規分布に従うとき、その確率密度関数は次の式です、

$$N(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]$$

$$期待値（平均）：E(X)=\mu$$

$$分散：V(X)=\sigma^2$$

$$標準偏差：SD(X)=\sigma$$

中心極限定理

平均μ、分散σ^2をもつあらゆる分布からの無作為標本の標本平均Xの分布はnが十分大きいとき以下の式が成立する。

$$\lim_{n\to\infty}P(Z_n\leq z)=\Phi(z)=\int_{\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

あらゆる同一の分布に従う確率変数の標本平均の分布が、確率変数の数が多くなったときに、もとの分布に関係なく、正規分布に収束する

3　情報理論

自己情報量・シャノンエントロピーの定義

自己情報量

$$I(x)=-log(P(x))=log(W(x))$$

情報量の単位

・対数の底が２のとき，単位はビット(bit)

・対数の底がネイピアのeeのとき，単位は(nat)

シャノンエントロピー（平均情報量、情報エントロピー）

・微分エントロピーともいうが，微分しているわけではない（differentialの誤訳か？）

・自己情報量の期待値

$$H(x)=E(I(x))=-E(log(P(x)))=-\sum(P(x)log(P(x)))$$

KLダイバージェンス・交差エントロピーの概要

KL(カルバック・ライブラー) ダイバージェンス

・同じ事象・確率変数における異なる確率分布P,Qの違いを表す

$$DKL(P||Q)=Ex\sim P[logP(x)Q(x)]$$
$$=E_x\sim_P[logP(x)-logQ(x)]$$

logP(x)−logQ(x)は

$$logP(x)-logQ(x)=(-log(Q(x)))-(-log(P(x)))$$
$$=I(Q(x))-I(P(x))$$

平均値（期待値）は

$$E(f(x))=\sum_x P(x)f(x)$$

これより

$$DKL(P||Q)=\sum_x P(x)(-log(Q(x)))-(-log(P(x)))$$
$$=\sum_x P(x)logP(x)Q(x)$$

交差エントロピー

・KLダイバージェンスの一部分を取り出したもの

・Qについての自己情報量をPの分布で平均している

$$H(P,Q)=H(P)+DKL(P||Q)$$
$$H(P,Q)=-E_x\sim_P logQ(x)$$

・交差エントロピーはKLダイバージェンスの一部分を取り出したもの

$$
\begin{aligned}
DKL(P||Q) = \Sigma_x P(x)(-log(Q(x))) - (-log(P(x))) \\
= \sum_x (-P(x)log(Q(x))) - (-P(x)log(P(x))) \\
= \sum_x (-P(x)log(Q(x))) - \sum_x (-P(x)log(P(x))) \\
= -\sum_x P(x)log(Q(x)) - (-\sum_x P(x)log(P(x))) \\
= H(P,Q) - H(P)
\end{aligned}
$$

・交差エントロピーはQについての自己情報量をPの分布で平均している

$$
\begin{aligned}
H(P,Q) = -E_x \sim_P logQ(x) \\
= -\sum_x P(x)log(P(x))
\end{aligned}
$$

● ×