

▼ 応用数学

▼ 1. 線形代数

▼ 1. 1 行列についてまとめ

(1) 行列の性質

交換法則

$$A + B = B + A$$

結合法則

$$\begin{aligned}(A + B) + C &= A + (B + C) \\ (AB)C &= A(BC)\end{aligned}$$

分配法則

$$\begin{aligned}A(B + C) &= AB + AC \\ (A + B)C &= AC + BC\end{aligned}$$

指数法則 (nとmが共に整数であるとき、)

$$\begin{aligned}A^n A^m &= A^{n+m} \\ (A^n)^m &= A^{nm}\end{aligned}$$

直交行列の定義

実正方行列（サイズを $n \times n$ とする） U に対して以下の5つの条件は同値で
この条件のいずれか一つ（従って全部）を満たすとき U を直交行列と言い

1. $U^T = U^{-1}$
 2. U の n 本の行ベクトルが正規直交基底をなす
 3. U の n 本の列ベクトルが正規直交基底をなす
 4. 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\|Ux\| = \|x\|$ （変換でベクトルのノルム（長さ）が変
 5. 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して $Ux \cdot Uy = x \cdot y$
- 「正規直交」とは、全てのベクトルの長さが1で異なる二本のベクトルの内積が0で
直交行列の行列式は ± 1 である。

直交行列の逆行列も直交行列

$$(AB)^T = B^T A^T$$

対角行列の性質

対角行列の行列式は、各対角成分の総乗 $\prod c_i$ に等しい。
対角行列の行列式は、対角成分が等しい上三角行列、下三角行列の行列式と、
対角行列の転置行列は同一である。そのため対角行列は対称行列でもある。
対角行列の逆行列は対角成分の逆数を並べた対角行列である。

（２）行列式について調べてみた

置換

n 個の要素 $1, 2, \dots, n$ を適当な順番に並べた p_1, p_2, \dots, p_n について、
 i と p_i の対応づけを $\sigma(i) = p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ と表し、

これらをまとめて

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

と表す。

n 文字の置換は全部で $n!$ パターンある

ある列に同じ数字が並ぶこと（同じ数字が上下に対応すること）がありますが、
そのような列は基本的に省略して記します。

【例】 $1, 2, 3, 4 \rightarrow 2, 4, 3, 1$ のとき

$$\sigma = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 2 \ 4 \ 3 \ 1) = (1 \ 2 \ 4 \ 2 \ 4 \ 1)$$

長さ i の巡回置換

ある置換 σ について、
 $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3 \cdots \sigma(i_m) = i_1$
 という風に対応関係が一巡する置換を長さ i の巡回置換と言い、
 $(i_1 i_2 \cdots i_m)$
 で表す。

例えば、以下の置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
 について、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 6 \ 4)(2 \ 5)$$

 巡回置換の積で表せられます。



互換

巡回置換のうち、特に2文字の巡回置換 $(i_1 i_2)$ を互換という。
 任意の巡回置換は互換の積として表される。

$$\begin{aligned} (i_1 i_2 i_3 \cdots i_m) &= (i_1 i_3 \cdots i_m)(i_1 i_2) \\ &= (i_1 i_4 i_5 \cdots i_m)(i_1 i_3)(i_1 i_2) = \cdots \\ &\text{と繰り返していけば,} \\ (i_1 i_2 i_3 \cdots i_m) &= (i_1 i_m)(i_1 i_{m-1}) \cdots (i_1 i_2) \text{を得る} \end{aligned}$$

置換の符号

置換 σ が m 個の互換の積で表されるとき、 $\text{sgn}(\sigma) := (-1)^m$ を σ の符号という。
 (注意) 置換を互換の積として表す表し方は必ずしも一意ではない。
 しかし、置換の符号は互換の積の表し方によらず一意に定まる。

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{if 互換の数が偶数} \\ -1 & \text{if 互換の数が奇数} \end{cases}$$

行列式 ($|A|$ や $\det(A)$ で表記)

n 次の正方行列 $A = [a_{ij}]$ について、行列式 $|A|$ は以下の式で定義される。

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ただし S_n は n 文字の置換 (全 $n!$ 通り) の集合である。

3次正方行列の行列式の計算

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ の行列式を計算する}$$

3 次正方行列の置換と $\text{sgn}(\sigma)$ を

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 2)(1 \ 2) \quad \text{sgn}(\sigma) = 1$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2 \ 3) \quad \text{sgn}(\sigma) = -1$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3)(1 \ 2) \quad \text{sgn}(\sigma) = 1$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 2) \quad \text{sgn}(\sigma) = -1$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 2) = (1 \ 2)(1 \ 3) \quad \text{sgn}(\sigma) = 1$$

$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 3) \quad \text{sgn}(\sigma) = -1$$

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

$$= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{21} (a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32}) + a_{31} (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

(3) 正則行列と逆行列

正則行列

n 次正方行列 A について、

$$AB = BA = I$$

となる n 次正方行列 B が存在するとき、

A は正則行列という。

この n 次正方行列 B を逆行列といい、

$$A^{-1} \text{ で表す。}$$

逆行列の性質

$$A \text{ と } B \text{ が } n \text{ 次の正則行列ならば、} AB \text{ も正則で、} (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$A^{-1} \text{ の逆行列 } (A^{-1})^{-1} \text{ は } A$$

逆行列の計算 掃き出し法

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ の逆行列を求める}$$

$$(\mathbf{A} \quad \mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1行目の2倍を2行目に加える：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

二列目（の第2成分以外）に0を並べるように：2行目の-1/2倍を1行目に加える：2行目の-1倍を3行目に加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

三列目（の第3成分以外）に0を並べるように：3行目の1/4倍を1行目に加える：3行目の1/2倍を2行目に加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

左側を単位行列にする：2行目を1/2倍に 3行目を1/2倍に

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

逆行列は

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

▼ 1. 2 固有値, 固有ベクトル 固有値分解

正方行列に対して、以下を満たす定数 λ と、0でないベクトル \mathbf{x} のことを、それぞれ 固有値・固有ベクトル と言います。

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

固有値 の求め方

上式より

$$(A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

 $\vec{x} \neq \vec{0}$ より $(A - \lambda I)$ は逆行列を持たないので

$$|A - \lambda I| = 0 \text{ を解いて } \lambda \text{ を計算する}$$

固有ベクトル の求め方

求めた λ を $(A - \lambda I)\vec{x} = 0$ に代入して連立方程式を解いて \vec{x} を求める

固有値を計算してみる

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ の固有値・固有ベクトルを求める}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$$

$$\lambda = 1, 2, 3$$

固有ベクトルを計算してみる

 $\lambda = 1$ の時

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) = (1, 0, 0)$$

 $\lambda = 2$ の時

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) = (1, 1, 0)$$

$\lambda = 3$ の時

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) = (1, -2, 2)$$

固有値分解は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

▼ 1. 3 特異値, 特異ベクトル 特異値分解

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\vec{v} &= \sigma\vec{u} \\ \mathbf{M}^T\vec{u} &= \sigma\vec{v} \\ (\sigma > 0, \vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}) \end{aligned} \tag{b}$$

このような特殊な単位ベクトルがあれば特異値分解できる。

\mathbf{M} を、*rank*が R の $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 行列とする。

このとき、以下の式を満たす $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ の直交行列 \mathbf{U} 、 $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の直交行列 \mathbf{V} 、
および、 $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ の対角行列 \mathbf{S} が存在する。

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$$

ただし、 \mathbf{U}, \mathbf{V} は直交行列

特異値の計算

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{V} &= \mathbf{U}\mathbf{S} \\ \mathbf{M}^T\mathbf{U} &= \mathbf{V}\mathbf{S}^T \\ &\text{より} \\ \mathbf{M} &= \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{-1} \\ \mathbf{M}^T &= \mathbf{V}\mathbf{S}^T\mathbf{U}^{-1} \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{S}^T\mathbf{U}^{-1}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^T\mathbf{M} &= \mathbf{V}\mathbf{S}^T\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{-1} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{S}^T\mathbf{S}\mathbf{V}^{-1} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{S}^2\mathbf{V}^{-1} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{S}^2\mathbf{V}^T\end{aligned}$$

$\mathbf{M}\mathbf{M}^T$ の固有値ベクトル \mathbf{V} を求める

特異値分解をやってみる

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ の特異値分解をやってみる}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

特異値分解をやってみる

MM^T の固有値、固有ベクトルを計算する。

$$|MM^T - \lambda^2 I| = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} 16 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4 - \lambda & -4 \\ 0 & -4 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$(16 - \lambda)((4 - \lambda)^2 - 16) = 0$$

$$(16 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 16 - 16) = 0$$

$$(16 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda) = 0$$

$$\lambda(16 - \lambda)(\lambda - 8) = 0$$

$$\lambda = 16, 8, 0$$

$$\lambda = 0 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

固有値 0 固有ベクトル (0, 1, 1)

$$\lambda = 8 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

固有値 8 固有ベクトル (0, -1, 1)

$$\lambda = 16 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

固有値 16 固有ベクトル (1, 0, 0)

特異値、左特異値ベクトル

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

特異値

$$\lambda = 4, 2, 0$$

左特異ベクトル

$$(1, 0, 0)$$

$$(0, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

右特異値ベクトル

$\mathbf{M}^T \mathbf{M}$ の固有ベクトルを計算する。

$$\lambda = 0 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

固有値 0 固有ベクトル $(0, -1, 0, 1), (-1, 0, 1,$

$$\lambda = 8 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

固有値 8 固有ベクトル $(-1, 1, -1, 1)$

$$\lambda = 16 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

固有値 16 固有ベクトル $(1, 1, 1, 1)$

特異値

$$\lambda = 0$$

左特異ベクトル

$$\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

特異値

$$\lambda = 2\sqrt{2}$$

左特異ベクトル

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

特異値

$$\lambda = 4$$

左特異ベクトル

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

特異値分解

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

▼ 2. 確率・統計

▼ 2. 1 確率変数と確率分布

頻度確率（客観確率）

発生する頻度

ベイズ確率（主観確率）

信念の度合い

確率の定義

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\text{事象}A\text{が起こる数}}{\text{全ての事象の数}}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

条件付き確率

ある事象Bが与えられた下で、Aとなる確率

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

同時確率 お互いの発生には因果関係のない事象A, Bが同時に起こる確率

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$= P(A)P(B)$$

$P(A \cap B)$ と $P(B \cap A)$ は同じなので

$$P(A)(B|A) = P(B)P(A|B)$$

$P(A \cap B)$ は重複して数えているのでひとつ除く

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ベイズ測

一般的に事象 $X=x$ と事象 $Y=y$ に対して...

$$P(X = x|Y = y)P(Y = y) = P(Y = y|X = x)P(X = x)$$



▼ 2. 2 統計

記述統計と推測統計

記述統計：集団の性質を要約し記述する

推測統計：集団から一部を取り出し元の集団（母集団）の性質を推測する

確率変数と確率分布

確率変数：事象と結びつけられた数値

確率分布：事象の発生する確率の分布

期待値

その分布における、確率変数の平均の値 or あり得そうな値

事象 X_n , 確率変数 $f(X_n)$, 確率 $P(X_n)$

$$\text{期待値: } E(f) = \sum_{k=1}^n P(X = x_k) f(X = x_k)$$

連続する値なら

事象 X_n , 確率変数 $f(X_n)$, 確率 $P(X_n)$

$$\text{期待値: } E(f) = \int P(X = x) f(X = x) dx$$

期待値の公式

a, b, c, d : 定数

X, Y : 確率変数 のとき

$$E(a) = a$$

$$E(aX) = aE(X)$$

$$E(X + b) = E(X) + b$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(cX + dY) = cE(X) + dE(Y)$$

$$XY \text{ が互いに独立なら } E(XY) = E(X)E(Y)$$

分散と共分散

分散：データの散らばり具合、データの各々の値が、期待値からどれだけズレているのか平均したもの

$$\begin{aligned}
 \text{分散: } Var(f) &= E((f_{(X=x)} - E(f))^2) \\
 &= E(f_{(X=x)}^2) - E(2f_{(X=x)}E(f)) + E((E(f))^2) \\
 &= E(f_{(X=x)}^2) - 2E(f)E(f_{(X=x)}) + (E(f))^2 \\
 &= E(f_{(X=x)}^2) - 2E(f)E(f) + (E(f))^2 \\
 &= E(f_{(X=x)}^2) - (E(f))^2
 \end{aligned}$$

共分散：2つのデータ系列の傾向の違い、正の値＝似た傾向、負の値＝逆の傾向、関係性に乏しい→0に近い

$$\begin{aligned}
 \text{共分散: } Cov(f, g) &= E((f_{(X=x)} - E(f))(g_{(Y=y)} - E(g))) \\
 &= E(fg) - E(f)E(g)
 \end{aligned}$$

分散と標準偏差

分散は2乗してしまっているなので元のデータと単位が違う -> 2乗することの逆演算（つまり平方根を求める）をすれば元の単位に戻る

$$\text{標準偏差 } \sigma = \sqrt{Var(f)} = \sqrt{E((f_{(X=x)} - E(f))^2)}$$

▼ 様々な確率分布

ベルヌーイ分布 (Bernoulli distribution)

二値確率変数 $x \in \{0, 1\}$ をとる離散分布

$x=1$ となる確率を $\mu (0 \leq \mu \leq 1)$

$x=0$ となる確率を $1-\mu$

$$P(x|\mu) = \mu^x(1-\mu)^{1-x}$$

$$\text{期待値: } E(X) = 0 \times \mu^0(1-\mu)^1 + 1 \times \mu^1(1-\mu)^{1-1} = \mu$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \mu^0(1-\mu)^1 + 1^2 \times \mu^1(1-\mu)^{1-1} = \mu$$

$$\text{分散: } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \mu - \mu^2 = \mu(1-\mu)$$

マルチヌーイ（カテゴリカル）分布

ベルヌーイ分布を一般化した確率分布で、二値ではなく、K値の場合をとる離散確率分布である。

各事象の確率 λ をパラメータとした $P(x)$ の確率密度関数は

$$P(x = k; \lambda) = \lambda_k \text{ と評される。}$$

$$P(x | \lambda) = \prod_{i=1}^k \lambda_i^{[x=i]}$$

ここで $[x = i]$ は x が i の場合に1となりそれ以外は0となる。

▼ 二項分布

ベルヌーイ分布の多試行版

n 個の独立なベルヌーイ試行の「成功」の数の確率分布であり、各試行の「成功」確率 λ は同じである。

$$\begin{aligned} P(x | \lambda, n) &= {}_n C_x \lambda^x (1 - \lambda)^{(n-x)} \\ &= \frac{n!}{x!(n-x)!} \lambda^x (1 - \lambda)^{(n-x)} \end{aligned}$$

二項分布の期待値

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{(n-k)!k!} \lambda^k (1 - \lambda)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \lambda \lambda^{k-1} (1 - \lambda)^{n-k} \\ &= n\lambda \sum_{k=0}^n \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} \lambda^{k-1} (1 - \lambda)^{(n-1)-(k-1)} \end{aligned}$$

この部分の $n-1$ を n' 、 $k-1$ を k' とおくと、

$$\begin{aligned} &= n\lambda \sum \frac{n'!}{(n'-k')!k'!} \lambda^{k'} (1 - \lambda)^{(n'-k')} \sum \\ &= n\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 \lambda (X = k) \\
 &= \sum_{k=0}^n k^2 \frac{n!}{(n-k)!k!} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n (k(k-1) + k) \frac{n!}{(n-k)!k!} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \frac{n!}{(n-k)!k!} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} + \sum_{k=0}^n
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n k \frac{n!}{(n-k)!k!} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} = n\lambda \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \frac{n!}{(n-k)!k!} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} + n\lambda \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!} \lambda^2 \lambda^{k-2} (1-\lambda)^{n-k} + n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)(n-2)!}{((n-2)-(k-2))!(k-2)!} \lambda^2 \lambda^{k-2} (1-\lambda)^{n-k} \\
 &= n(n-1)\lambda^2 \sum_{k=0}^n \frac{(n-2)!}{((n-2)-(k-2))!(k-2)!} \lambda^{k-2} (1-\lambda)^{n-k}
 \end{aligned}$$

この部分の $n-2$ を n' 、 $k-2$ を k' とおくと、

$$= n(n-1)\lambda^2 \sum \frac{n!}{(n'-k')!k'!} \lambda^{k'} (1-\lambda)^{(n'-k')}$$

$$\sum \frac{n!}{(n'-k')!k'!} \lambda^{k'} (1-\lambda)^{(n'-k')} = 1 \quad \text{より}$$

$$= n(n-1)\lambda^2 + n\lambda$$

二項分布の分散

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
 &= n(n-1)\lambda^2 + n\lambda - (n\lambda)^2 \\
 &= n\lambda(1-\lambda)
 \end{aligned}$$

▼ 正規分布（ガウス分布）

中央の峰のX座標が μ で、峰の幅が σ で制御される「ベル型曲線」

一変量の確率変数 X が、平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従うとき、その確率密度関

$$N(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

期待値（平均）： $E(X) = \mu$

分散： $V(X) = \sigma^2$

標準偏差： $SD(X) = \sigma$

中心極限定理

平均 μ 、分散 σ^2 をもつあらゆる分布からの無作為標本の標本平均 X の分布は n が十分大

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

あらゆる同一の分布に従う確率変数の標本平均の分布が、確率変数の数が多くなったときに、もとの分布に関係なく、正規分布に収束する

3 情報理論

▼ 自己情報量・シャノンエントロピーの定義

自己情報量

$$I(x) = -\log(P(x)) = \log(W(x))$$

情報量の単位

- ・対数の底が2のとき、単位はビット(bit)
- ・対数の底がネイピアの e のとき、単位は(nat)

シャノンエントロピー（平均情報量、情報エントロピー）

- ・微分エントロピーともいうが、微分しているわけではない（differentialの誤訳か？）
- ・自己情報量の期待値

$$H(x) = E(I(x)) = -E(\log(P(x))) = -\sum (P(x) \log(P(x)))$$

▼ KLダイバージェンス・交差エントロピーの概要

KL(カルバック・ライブラー) ダイバージェンス

- ・ 同じ事象・確率変数における異なる確率分布P,Qの違いを表す

$$\begin{aligned} DKL(P||Q) &= E_{x \sim P} [\log P(x) - \log Q(x)] \\ &= E_{x \sim P} [\log P(x) - \log Q(x)] \end{aligned}$$

$\log P(x) - \log Q(x)$ は

$$\begin{aligned} \log P(x) - \log Q(x) &= (-\log(Q(x))) - (-\log(P(x))) \\ &= I(Q(x)) - I(P(x)) \end{aligned}$$

平均値（期待値）は

$$E(f(x)) = \sum_x P(x) f(x)$$

これより

$$\begin{aligned} DKL(P||Q) &= \sum_x P(x) (-\log(Q(x))) - (-\log(P(x))) \\ &= \sum_x P(x) \log P(x) - \log Q(x) \end{aligned}$$

▼ 交差エントロピー

- ・ KLダイバージェンスの一部分を取り出したもの
- ・ Qについての自己情報量をPの分布で平均している

$$\begin{aligned} H(P, Q) &= H(P) + DKL(P||Q) \\ H(P, Q) &= -E_{x \sim P} \log Q(x) \end{aligned}$$

- ・ 交差エントロピーはKLダイバージェンスの一部分を取り出したもの

$$\begin{aligned} DKL(P||Q) &= \sum_x P(x) (-\log(Q(x))) - (-\log(P(x))) \\ &= \sum_x (-P(x) \log(Q(x))) - (-\sum_x P(x) \log(P(x))) \\ &= \sum_x (-P(x) \log(Q(x))) - \sum_x (-P(x) \log(P(x))) \\ &= -\sum_x P(x) \log(Q(x)) - (-\sum_x P(x) \log(P(x))) \\ &= H(P, Q) - H(P) \end{aligned}$$

- ・ 交差エントロピーはQについての自己情報量をPの分布で平均している

$$\begin{aligned} H(P, Q) &= -E_{x \sim P} \log Q(x) \\ &= -\sum_x P(x) \log(Q(x)) \end{aligned}$$

