

Nøytrinoemisjoner fra nøytronstjerners indre

Ronny Kjelsberg

2003

"...and it is feared that the French public, always impatient to come to a conclusion, eager to know the connections between general principles and the immediate questions that have aroused their passions, may be disheartened because they will be unable to move on at once.

That is a disadvantage I am powerless to overcome, unless it be by forewarning and forearming those readers who zealously seek the truth. There is no royal road to science, and only those who do not dread the fatiguing climb of its steep paths have a chance of gaining its luminous summits."

Karl Marx i forordet til den franske utgaven av Kapitalen (Progress Publishers, Moskva, 1954).

Forord

Denne oppgaven tar for seg nøytrinoemisjoner fra nøytronstjerners indre, med hovedvekt på den direkte Urca¹-prosessen. Den begynner med en generell introduksjon til nøytronstjerner, fysikken rundt kompakte objekter og den historiske utviklingen til nøytronstjernefysikken. Videre følger en oversikt over generell relativitetsteori og den såkalte TOV-ligningen utledet av Tolman, Oppenheimer og Volkoff for å gi et innblikk i fysikken som ligger bak utarbeidelsen av en tilstandsligning. Deretter skal vi kort se på sammensetningen av ulike tilstandsligninger, før vi undersøker hvilke konsekvenser en inklusjon av hyperoner får for tilstandsligningen og hvilke vekselvirkninger som da må inkluderes.

Videre gis en oversikt over forskjellige kjølingsprosesser, hvorpå vi fordyper oss i den direkte Urca-prosessen som utgjør det sentrale arbeidet i denne oppgaven. Vi gjør beregninger på nøytrinoemissiviteten fra den direkte Urca-prosessen, og lager plot over materiesammensetning, kjemisk potensial og nøytrinoemissivitet fra prosessen med forskjellige vekselvirkninger inkludert. Til slutt drøftes resultatene, og den direkte Urca-prosessen sammenlignes med andre kjølingsprosesser.

Denne oppgaven er blitt skrevet ved Institutt for fysikk ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet under veiledning av Prof. Morten Hjorth-Jensen ved Universitetet i Oslo. Jeg vil spesielt takke Prof. Morten Hjorth-Jensen for et godt samarbeid og en god faglig veiledning under tidvis vanskelige praktiske forhold. Uten hans arbeid ville denne oppgaven ikke sett dagens lys. Videre ønsker jeg også å takke min opprinnelige veileder, Prof. Erlend Østgaard ved NTNU som dessverre ikke var i stand til å fullføre min veiledning, og min interne veileder ved NTNU, førsteamanuensis Sigmund Waldenstrøm for hjelp med navigering innad i skjemaveldet på NTNU.

I tillegg må jeg også gi en generell takk til mine medstudenter for mer og mindre nyttige faglige og utenomfaglige diskusjoner. Spesielt vil jeg takke

¹Akronymet Urca stammer fra fysikeren Gamow, og var navnet på et kasino i Rio de Janeiro. Kasinoet var visstnok et pengesluk for den uinnsidde. Ifølge Gamows russiske dialekt, kan urca også bety lommetyv.

Sverre G. Johnsen og Anette Wrålsen for gjennomlesing og nyttige kommentarer til oppgaven. Videre vil jeg takke diverse gamle og ikke fullt så gamle herrer i femte etasje på Realfagbygget, som har vært behjelpelige med å gi meg små dytt i riktig retning av og til. Jeg vil også takke Rolf G. Lunder for nyttige programmeringstips. Til slutt vil jeg gi en generell takk til alle de som har gitt meg inspirasjon og kunnskap under utdanningen.

Innhold

Forord

i

1	Introduksjon til nøytronstjernefysikk	1
1.1	Nøytronstjerner	1
1.2	Nøytronproduksjon	2
1.3	Nøytronstjernefysikkens historie	4
1.4	Pulsarer	6
1.4.1	Den observasjonelle basisen for nøytronstjerner	6
1.4.2	Identifikasjon av sammenhenger mellom nøytronstjerner og supernovaer	7
1.4.3	Hvorfor pulsarer er nøytronstjerner	8
2	Tilstandsaligning og observable	9
2.1	Den generelle relativitetsteorien og TOV-ligningen	9
2.1.1	Generell relativitetsteori	9
2.1.2	TOV-ligningen	19
2.2	Tilstandsaligningen og nøytronstjerneobservable	21
2.3	Tilstandsaligningen	23
3	Sammensetningen av tilstandsaligninger	25
3.1	Ideell Fermigass av nøytroner	25
3.2	Kvarkmaterie	28
3.3	Superflytende baryonmaterie	29
3.4	Kaonkondensasjon	30
3.5	Pionkondensasjon	31
3.6	Faseoverganger	32

4 Hyperonmaterie	34
4.1 Beskrivelse av kompakt materie med hyperoner	34
4.2 Parametrisering av tilstandsligningen for kjernematerie	38
4.3 Hyperonmaterie	41
5 Kjølingsprosesser	51
5.1 Kjølingsprosesser i nøytronstjerner	51
5.2 Direkte Urca	54
5.2.1 Direkte Urca-prosesser	54
5.2.2 Direkte Urca med nukleoner	55
5.2.3 Direkte Urca med myoner	57
5.2.4 Direkte Urca med hyperoner	57
6 Nøytrinoemissivitet	58
6.1 Nøytrinoemissivitet fra den direkte Urca-prosessen	58
6.2 En mer eksakt beregning av nøytrinoemissiviteten	63
7 Resultater	71
8 Konklusjon	82
A Program for beregning av emissivitet	84
B Beregninger i Maple	97
C Tabuleringer	98

Kapittel 1

Introduksjon til nøytronstjernefysikk

1.1 Nøytronstjerner

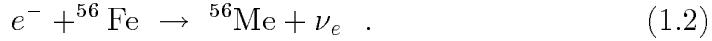
Kompakte objekter er endepunktene i stjerners utvikling. Når fusjon av hydrogen til helium ikke lenger kan opprettholde strålingstrykket i stjernen, og den balansen som eksisterer mellom dette og gravitasjonen blir forrykket, vil stjernen trekkes sammen av gravitasjonen til den når en temperatur som gjør at en annen prosess vil kunne antenne, og slik opprette en ny平衡. Til slutt går stjernen likevel helt tom for kjernefysisk brennstoff, og den trekker seg sammen til en kompakt stjerne; en hvit dverg, en nøytronstjerne eller et sort hull. Dersom kjernemassen er mindre enn den såkalte Chandrasekharmassen (ca $1,4 M_{\odot}$, hvor M_{\odot} er solmassen), vil degenererte elektroner skape et trykk som balanserer gravitasjonen, og vi får en hvit dverg. Er kjernemassen over Chandrasekharmassen, blir elektronene så relativistiske at hydrostatisk likevekt blir umulig, og massekollapsen fortsetter til det blir stanset av kjernekraftene. På dette tidspunktet har elektronene blitt innfanget gjennom prosessen

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e , \quad (1.1)$$

såkalt inverst β -henfall, og hele stjernen ender opp med samme tetthet som en atomkjerne [Ph99]. Dette er en nøytronstjerne.

Under normale omstendigheter er den mest stabile form for kjernematerie den som ligger nær ^{56}Fe . Mindre massive kjerner har en større andel nukleoner ved overflata, og mer massive får stor repulsjon mellom protonene. Dette endres når temperaturen blir så høy at vi får relativistiske elektroner. Når

elektronene får en energi større enn 1,3 MeV (masse-energidifferansen mellom et proton og et nøytron), kan vi få β -henfall i ^{56}Fe , og vi får dannet mer nøytronrike kjerner,



Denne prosessen kan fortsette med produksjon av ^{56}Cr , og så videre, etterhvert som tettheten øker.

Elektroninnfangning ved hjelp av inverst β -henfall skjer svært hurtig når tettheten i kjernen overstiger $10^{14} \text{ kg m}^{-3}$. Nøytrinoene vekselvirker kun i liten grad med materien i stjernen, og forsvinner mens de tar med seg energien som opprinnelig ble lagret av de degenererte elektronene. Når presset fra elektronene blir borte, kollapser stjernen raskt og energien fraktes bort fra stjernen i en voldsom erupsjon av elektron-nøytrinoer. Kollapsen er hurtig, og foregår nesten uten motstand til vi når en tetthet sammenlignbar med tettheten til kjernematerie.

Analogt til Chandrasekhargrensen for hvite dverger, kan nøytronstjerner heller ikke ha en masse større enn en bestemt kritisk grense. Siden vi har så sterke gravitasjonsfelt må generell relativitetsteori brukes i beregningene, og den maksimale massen er vanskelig å beregne da man er usikker på kompressibiliteten til nøytronstjernematerie ved høye tettheter. Grensen blir antatt å være rundt $3 M_\odot$, og nesten helt sikkert under $5 M_\odot$. Over denne grensen antas det at man kan få dannet sorte hull [Ph99].

1.2 Nøytronproduksjon

Som nevnt dannes nøytronstjerner i en prosess hvor høyt trykk gjør at elektroner og protoner i stjernematerien går sammen og danner nøytroner. Vi skal nå se litt nøytere på denne prosessen.

Dersom elektronene i en plasma har tilstrekkelig energi, kan de gå sammen med protonene og danne nøytroner. Dersom m_n og m_p er massene til henholdsvis nøytronet og protonet, må elektronet som nevnt over ha den totalte energien $E_{tot} = E^* > c^2(m_n - m_p)$. Ved lave tettheter vil nøytronet desintegrere tilbake til et proton-elektronpar innen 11 minutter, hvor elektronet vil ha den totale energien E^* og en kinetisk energi $E_{kin}^* = E^* - m_e c^2$, hvor m_e er elektronets masse [KW90]. Dersom gassen er fullstendig degenerert, og faserommet er fullt opp til Fermienergien E_F , kan vi derimot få en annen situasjon. Dersom Fermienergien E_F overskridet E_{kin}^* vil ikke elektronene som emitteres i desintegrasjonen ha nok energi til å finne en ledig plass i faserommet, og nøytronene kan dermed ikke desintegrere. Fermisjøen

har altså stabilisert nøytronene. For å finne ut mer om under hvilke forhold dette skjer, ser vi på ligningen for total energi,

$$E_{tot} = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_e c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_e^2 c^2}} . \quad (1.3)$$

Denne skriver vi så om til

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 + m_e^2 c^4} . \quad (1.4)$$

Dersom vi setter $E = E_{kin} + m_e c^2 = E_F + m_e c^2 = c^2 (m_n - m_p) = 1,294 \cdot 10^6$ eV kan vi finne det korresponderende Fermimomentet p_F fra Ligning (1.4) over, og dermed videre finne

$$x = \frac{p_F}{m_e c} \approx 2,2 . \quad (1.5)$$

Når vi har en fullstendig degenerert elektrongass, vil tilstanden hvor alle elektronene har lavest mulig energi uten å bryte med Pauli-prinsippet, være den hvor alle plassene i faserommet er opptatt opp til den bestemte bevegelsesmengden p_F . Alle plassene over p_F er da ledige. Vi får

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{8\pi p^2}{h^3} && \text{for } p \leq p_F , \\ f(p) &= 0 && \text{for } p \geq p_F , \end{aligned} \quad (1.6)$$

og det totale antall elektroner i volumet dV er gitt ved [KW90]

$$n_e dV = dV \int_0^{p_F} \frac{8\pi p^2 dp}{h^3} = \frac{8\pi}{h^3} p_F^3 dV . \quad (1.7)$$

Vi bruker så $\rho = \mu_e m_u n_e$, hvor m_u er en masseenhet u , og med $\mu_e = 2$ får vi $\rho \approx 2,4 \cdot 10^7$ g cm⁻³. Dersom en gass av protoner og elektroner på denne måten blir komprimert til en tetthet som er større enn denne verdien, vil gassen gjennomgå en overgang til en nøytrongass, såkalt nøytronisasjon.

For stjernematerie er situasjonen likevel noe mer komplisert. Ved tilstrekkelig høye tettheter inneholder materien tyngre kjerner, og ikke bare protoner. Kjernene fanger inn elektroner gjennom inverst β -henfall, og blir nøytronrike isotoper. Siden nøytronene i kjernen er degenererte og de nye nøytronene må løftes opp til et energinivå over Fermienergien, krever dette elektronenergier som er mye høyere enn de som ble estimert over. Tilsvarende trenger vi da høyere tettheter i plasmaet for å utstyre elektronene med den tilstrekkelige energien. Når kjernene så blir for nøytronrike begynner de å brytes opp,

og de slipper da ut frie nøytroner. Dette såkalte ”neutron drip” starter slik ved tettheten $\rho_{\text{drip}} \approx 4 \cdot 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$.

Nå skal vi kort reflektere over virkningen av dette på tilstandsligningen. Opp til ρ_{drip} kommer det totale trykket fra relativistiske elektroner, $P \approx P_e$. Når ρ så fortsetter å øke, øker antallstettheten n_e med mindre enn proporsjonalt med ρ på grunn av innfangningen av elektroner. Trykket øker derfor med mindre enn $\rho^{4/3}$. Ved stadig høyere ρ vil nøytronene bli stadig mer degenererte, samtidig som interaksjonen mellom nøytronene vil bli viktig. Detaljene omkring tilstandsligningen er veldig usikre, og avhenger for eksempel av egenskaper ved partiklene som ikke er så godt kjent. Tilstandsligningen skal vi komme tilbake til i Kapittel 2.

1.3 Nøytronstjernefysikkens historie

Etter oppdagelsen av nøytronet i 1932, foreslo Baade og Zwicky allerede i 1934 [**BZ34**] at det kunne finnes nøytronstjerner, stjerner med svært høy tetthet og liten radius, som var svært sterkt bundet av gravitasjonskraftene. Disse stjernene skulle bestå av svært tett pakkede nøytroner. De foreslo også at supernovaer kunne være overgangen fra vanlige stjerner til disse nøytronstjernene.

De første beregningene av nøytronstjernemodeller ble utført av Oppenheimer m.fl. [**OV39**] i 1939. De antok da at nøytronstjernematerien bestod av en ideell gass av høyenergetiske, frie nøytroner. De brukte tilstandsligningen for en degenerert relativistisk fermi-gass og Einsteins feltligninger fra generell relativitetsteori for å utlede en ligning for hydrostatisk likevekt. Arbeidet på denne tiden var inspirert av tanken om at nøytronkjerner i massive vanlige stjerner kunne være en kilde til stjernenes energi. Denne motivasjonen forsvant derimot fort når man fikk innsikt i detaljene rundt den kjernefysiske fusjonen. Arbeid med nøytronstjerner ble også nedprioritert siden den termiske strålingen fra dem, på grunn av deres begrensede størrelse, ville være for liten til å observeres med optiske teleskop over astronomiske avstander.

Oppdagelsen som ble gjort av Giacconi m.fl. [**GGP62**] i 1962, genererte derimot ny interesse for nøytronstjerner. Oppdagelsen av kosmiske røntgenkilder som ikke kunne være vanlige stjerner, gjorde at det ble vekket ny interesse for emnet. Det ble foreslått at røntgenkildene var unge, varme nøytronstjerner. Identifiseringen av kvasarer i 1963 skapte ytterligere interesse, siden den store rødforskyvningen av spektrallinjer som ble observert kunne skyldes gravitasjonen ved overflaten til et kompakt objekt. Det viste seg likevel at de største rødforskyvningene som ble observert for kvasarer overskred den maksimale rødforskyvningen fra en stabil nøytronstjerne.

Det teoretiske arbeidet konsentrerte seg om tilstandsligninger og nøytronstjernemodeller, likevektsegenskaper ved kompakte stjerner og stjernekollaps. Til tross for all denne forskningen på nøytronstjerner, tok likevel ikke de fleste fysikere og astronomer muligheten for nøytronstjerner (for ikke å snakke om sorte hull) særlig alvorlig. Årsaken var antagelig den store avstanden nøytronstjernefysikken representerte fra den kjente fysikken. Dette endret seg derimot da en gruppe astronomer ved Cambridge oppdaget pulsaren i 1967.

I 1967 observerte Hewish m.fl. [HBP68] et astronomisk objekt som sendte ut radiobølger i periodiske pulser. Dette hadde stor betydning for forskningen rundt kompakte stjerner. Eksistensen av stjerner som var mer kompakte enn hvite dverger var allerede forutsett, og det ble foreslått at slike objekter kunne skapes i en supernovaeksplosjon. Det var også foreslått at de til å begynne med ville være hurtigroterende stjerner med svært sterke magnetfelt, og en roterende nøytronstjerne kunne være energikilden til, for eksempel, Krabben. En magnetisk dipol-modell kunne konvertere rotasjonsenergien til nøytronstjernen til elektromagnetisk stråling og partikkelbevegelser i den omkringliggende tåken.

Identifikasjonen av pulsarer som nøytronstjerner ble likevel ikke gjort før Gould i 1968 [G68] foreslo at pulsarer er roterende nøytronstjerner med magnetfelt av størrelsesordenen 10^{12} Gauss. Eksistensen av slike objekter kunne gjøre rede for den oppsiktsvekkende stabiliteten som ble observert for pulsperioden, og Gould forutså en liten økning av perioden etter hvert som pulsaren sakte mistet rotasjonsenergi. Dette ble bekreftet når man observerte en slik økning hos pulsaren i Krabben, og denne bekreftelsen førte til en generell aksept for nøytronstjernemodellen. Oppdagelsen som ble gjort i 1968 av Krabbe- og Velapulsarene, pulsarer som var lokalisert i restene etter supernovaer, indikerte at antagelsen om at nøytronstjerner ble skapt gjennom supernovaeksplosjoner var riktig. Krabben er for eksempel restene etter en supernovaeksplosjon som ble observert av kinesiske astronomer i 1054.

Teoretisk arbeide på nøytronstjerner ble videre stimulert etter at UHURU-satellitten i 1971 oppdaget pulserende, kompakte røntgenkilder. Man tror at disse røntgenkildene er nøytronstjerner i binære systemer som får masseoverføring, såkalt "accretion", fra en normal følgestjerne. Den første binære pulsaren ble oppdaget av Hulse og Taylor [HT75] i 1975, og slike systemer gjør det mulig å måle massen til en nøytronstjerne, og å se på eksistensen av stråling grunnet den store gravitasjonen.

1.4 Pulsarer

1.4.1 Den observasjonelle basisen for nøytronstjerner

Man mener altså at pulsarer er kraftig magnetiserte nøytronstjerner, og de utgjør slik mye av den observasjonelle basisen for teorien bak nøytronstjerner. En elektromagnetisk stråle sendes ut langs den magnetiske aksen, med en vinkelspredning på typisk rundt ti grader. Dersom stjernen har en vinkelforklaring mellom rotasjonsaksen og den magnetiske aksen, vil det roterende objektet ligne et fyrtårn og sende ut stråling i kjegler. Dersom vi på jorden ligger nær aksen til stjernen, innenfor den romvinkelen hvor denne kjeglen sendes ut, kan vi, dersom den ikke er for fjern, observere den som en pulserende strålingskilde. Frekvenspekteret i det emitterte signalet fra enkelte pulsarer, som for eksempel Krabbepulsaren, er enormt, og kan strekke seg fra radiobølger, via optisk lys, til Røntgen og γ -stråling. De fleste pulsarer, inkludert alle kjente millisekundpulsarer, har derimot blitt observert bare på radiofrekvenser.

Siden Hewish m.fl. oppdaget den første i 1967, er i dag over 1100 pulsarer oppdaget. Noen, slik som Krabbe- og Velapulsaren, ble oppdaget like etterpå. Mange hundre pulsarer ble oppdaget i store søk på 70-tallet, mens enda et par hundre er oppdaget i løpet av de siste årene [G100].

Periodene til de pulsarene som er oppdaget hittil, varierer fra millisekunder til sekunder, med en gjennomsnittsperiode på ca 0,7 sekunder. Den hurtigste som er målt, PSR 1937+21, har en periode på 1,56 ms [G100].

Siden den magnetiske aksen bare tilfeldig vil falle sammen med rotasjonsaksen, forårsaker selve rotasjonen av stjernen et tap av rotasjonsenergi på grunn av dreiemomentet fra den magnetiske dipolen. Rotasjonshastigheten minker slik over tid, og selv om dette skjer svært sakte må man ikke bare oppgi perioden, men også tidspunktet for målingen, for å gi en korrekt gjengivelse av målingen av en periode. Det langsomme tapet av bevegelsesmengdemoment, betyr ikke at energitapet er lite. Pulsaren i Krabben mister energi etter raten $2,5 \times 10^{44}$ MeV/s, men den har en rotasjonsenergi på 4×10^{55} MeV.

Det virker som det finnes to typer pulsarer, to forskjellige populasjoner. Den ene typen har en periode som varierer rundt ca 0,7 s, og inkluderer flertallet av kjente pulsarer. Disse pulsarene er vanligvis isolerte stjerner, med sterke magnetfelt på $\sim 10^{12} - 10^{13}$ Gauss. Disse blir ofte referert til som kanoniske pulsarer (eng. *canonical pulsars*). Den andre populasjonen, millisekundpulsarer, har som navnet sier en kortere periode, som ligger i området $10^{-3} - 10^{-2}$ s. Mer enn havparten av disse er funnet i binære systemer, og alle har svake magnetfelt på $\sim 10^8 - 10^9$ Gauss. Selv om det altså hittil er

observert færre millisekundpulsarer, mener man nå at galaksen inneholder en populasjon av disse som er av samme størrelsesorden som populasjonen av kanoniske pulsarer.

Man mener at nøytronstjerner fødes med relativt korte perioder. Rotsjonen blir spunnet opp på grunn av bevarelsen av bevegelsesmengdemoment under kollapsset til kjernen i den opprinnelige stjernen. Den unge Krabbepulsaren med en periode på $1/30$ s er kanskje et typisk eksempel på en slik nyfødt nøytronstjerne. Slike pulsarer utvikler seg så i noen få millioner år, og får økt sine perioder gjennom det tapet av rotasjonsenergi som er beskrevet over. I løpet av denne perioden er nøytronstjernene pulsarer, men ikke nødvendigvis synlige for oss her på jorda. Dette er selvsagt avhengig av avstanden, strålingsgens styrke, og hvorvidt jorden faktisk ligger innenfor den kjeglen av stråling som pulsaren sender ut.

Strålingsmekanismen er dårlig kjent, men kjeglen slutter å stråle ved et kritisk punkt som beskrives ved et produkt av magnetisk feltstyrke og periode. Når perioden øker, vil strålingen opphøre på dette punktet. Jo større feltstyrke stjernen har, jo lengere periode tolereres før punktet nås.

Stjernen begynner altså over tid å rotere saktere, grunnet tap av bevegelsesmengdemoment til strålingen. Når pulsaren sakker på farten, vil den også begynne å stråle mindre intenst. Derfor beveger pulsarer seg sakte mot det kritiske punktet hvor strålingen opphører.

1.4.2 Identifikasjon av sammenhenger mellom nøytronstjerner og supernovaer

Vi mener at nøytronstjerner blir skapt i supernovaeksplosjoner av stjerner med masse på ca 8 solmasser eller mer. Likevel finnes det få tilfeller hvor vi med sikkerhet kan identifisere pulsarer med bestemte supernovaer. Mellom 7 og 23 slike sammenhenger virker sikre, avhengig av hvor stringent man skal være på de betingelsene man bruker for å gjøre denne identifikasjonen [G100]. Det mest åpenbare problemet med slik identifisering er jo at rester etter en supernovaeksplosjon og en pulsar kan ligge på samme synslinje fra jorda, men på vidt forskjellige avstander. Overbevisende identifiseringer har særlig blitt funnet blant unge pulsarer. Dette er lett å forstå når en vet at pulsarer beveger seg ved høye hastigheter, og at eldre pulsarer slik vil ha fjernet seg et godt stykke fra sitt opprinnelsessted. Man kjenner ikke årsaken til denne store hastigheten, i gjennomsnitt ca 450 km/s, men den kompakte nøytronstjernen blir ikke bremset ned av det interstellare mediet slik som restene av supernovaeksplosjonen. Pulsaren vil slik bevege seg utenfor og bort fra de andre restene av den opprinnelige stjernen. En annen faktor som

gjør observasjoner vanskelige, er forholdet i styrke mellom supernovarester og pulsarer. Så lenge supernovarestene er synlige er de større og sterkere strålingskilder enn pulsarene, og kan slik sees på lengre avstander. Hele denne problemstillingen er nokså komplisert, og de som jobber innen dette feltet har først i senere tid begynt å få full forståelse for den.

1.4.3 Hvorfor pulsarer er nøytronstjerner

Vanlige stjerner har magnetfelt på rundt 100 gauss, og de roterer. Når stjernene så kollapser, blir både rotasjonen og den magnetiske feltstyrken skalert opp etter bevaringslovene til den magnetiske fluksen og bevegelsesmomentet. Etter den enorme eksplosjonen som innleder dannelsen av en pulsar, er det ingen grunn til at aksen til magnetfeltet og rotasjonsaksen skulle være sammenfallende. Magnetfeltet får en typisk verdi på rundt 10^{12} gauss, og utøver et sterkt dreiemoment på den roterende stjernen. Sammen med en ”vind” av relativistiske partikler, tenkes denne å være årsaken til at perioden gradvis øker. Endringen i periode ligger typisk på en størrelsesorden på tre sekunder på 10^5 år.

En roterende stjerne med masse $1 M_{\odot}$, og diameter på ~ 10 km, kan inneholde en rotasjonsenergi på $\sim 10^{55}$ MeV. Slike energimengder er nødvendige for å forklare den enorme utstrålingen som er nevn i Kapittel 1.4.1.

Kapittel 2

Tilstandsligning og observable

2.1 Den generelle relativitetsteorien og TOV-ligningen

TOV-ligningen ble utledet av Tolman, Oppenheimer og Volkoff, og har en sentral posisjon i beregningen av masse og radius for nøytronstjerner. TOV-ligningen er en generell-relativistisk ligning for hydrostatisk likevekt. I beregningene antas at nøytronstjernene er i hydrostatisk likevekt, det vil si at gravitasjonskraftene er i likevekt med strålingstrykket.

Vi skal her først finne den såkalte Schwarzschild-metrikken ved hjelp av generell relativitetsteori med gravitasjonskrefter. Vi utleder så TOV-ligningen ved hjelp av denne og Einsteins feltligninger. Først begynner vi med en introduksjon til generell relativitetsteori. For en bedre innføring kan det henvises til for eksempel [BG99] eller [Be89].

2.1.1 Generell relativitetsteori

Fra spesiell relativitetsteori har vi at fysikkens lover skal se like ut i alle inertialsystemer. Likevel har vi ofte tilfeller hvor vi ønsker å se på systemer som ikke er inertialsystemer. En nøytronstjerne kan for eksempel rotere med en hastighet som er høy nok til at materie ved ekvator beveger seg med en hastighet nær lyshastigheten. Samtidig har man i nøytronstjerneomgivelser sterke gravitasjonskrefter, og det er ikke umiddelbart klart hvordan man skal behandle et slikt system ut fra spesiell relativitetsteori. Det var Einstein som klarte å formulere en teori, den generelle relativitetsteorien, som kan beskrive også akselererte systemer og systemer med gravitasjon. Vi skal nå se litt nøyere på denne.

Dersom vi betrakter to hendelser i et system med koordinatene (x_1, y_1, z_1, t_1) og (x_2, y_2, z_2, t_2) , er det definert et invariant intervall mellom disse:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 , \quad (2.1)$$

som infinitesimalt blir:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 . \quad (2.2)$$

Ligningen over kan skrives på formen

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (2.3)$$

hvor

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z , \quad (2.4)$$

og

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (2.5)$$

hvor $\eta_{\mu\nu}$ blir kalt Minkowski-metrikken. Det er ingen universell definisjon av denne, så ofte kan man komme over versjoner hvor alle komponentene i (2.5) har byttet fortegn. Ingen fysiske resultater vil naturlig nok avhenge av en slik konvensjon, men noen mellomsvar vil kunne se annerledes ut.

De greske summasjonsindeksene μ og ν i metrikken har verdier fra 0 til 3, slik at for eksempel $\eta_{00} = 1$ og $\eta_{11} = -1$. En summasjonsindeks står en gang med indeks oppe og en gang med indeks nede i et uttrykk, og betyr da summasjon fra 0 til 3. Firervektorene x^μ (høy indeks) og x_μ (lav indeks) kalles henholdsvis kontravariante og kovariante, og de defineres som følger:

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu . \quad (2.6)$$

Det vil si

$$\begin{aligned} x_0 &= x^0 , \\ x_1 &= -x^1 , \\ x_2 &= -x^2 , \\ x_3 &= -x^3 . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Vi kan da skrive intervallet på den enkle formen

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu . \quad (2.8)$$

Vi har nå betraktet metrikken for et flatt rom uten gravitasjonsfelt. Med gravitasjonsfelt finner vi følgende uttrykk for linjeelementet:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx^\nu . \quad (2.9)$$

Vi regner med symmetri:

$$g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu} , \quad (2.10)$$

og vi regner med at $g_{\mu\nu}$ nærmer seg $\eta_{\mu\nu}$ når gravitasjonsfellet G går mot 0,

$$\lim_{G \rightarrow 0} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} . \quad (2.11)$$

Vi antar så et statisk (tidsuavhengig) felt, der alle $g_{\mu\nu}$ er tidsuavhengige og alle $g_{0i} = 0$. Linjeelementet fra (2.9) kan da reduseres til:

$$ds^2 = g_{00}c^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j , \quad (\text{der } i, j \in \{1, 2, 3\}) . \quad (2.12)$$

Omkring en statisk kulesymmetrisk masse må vi naturlig nok ha et kulesymmetrisk gravitasjonsfelt, og det er derfor praktisk å innføre kulekoordinater: $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$. Sammenhengen mellom kartesiske og kulekoordinater er:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi , \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi , \\ z &= r \cos \theta . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Vi ønsker også å ha et system som er symmetrisk med hensyn på rotasjon. I så fall må linjeelementet være uavhengig av ombyttingen $d\theta \leftrightarrow -d\theta$, eller $d\varphi \leftrightarrow -d\varphi$. Da kan vi ikke ha ledd av typen $d\theta d\varphi$, $d\varphi d\theta$ osv. Vi kan da skrive linjeelementet på følgende form [Rø01, Mø83]:

$$ds^2 = A(r) c^2 dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 . \quad (2.14)$$

$A(r)$ og $B(r)$ er her villkårlige funksjoner. Disse kan skrives som eksponentialefunksjoner [ABS75], og vi får da uttrykket

$$ds^2 = e^{\nu(r)} c^2 dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 , \quad (2.15)$$

hvor parameterene $\nu(r)$ og $\lambda(r)$ er vilkårlige funksjoner som fastsettes senere. Den metriske tensoren $g_{\mu\nu}$, blir etter dette:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

For å finne funksjonene $\nu(r)$ og $\lambda(r)$, bruker vi Einsteins feltligninger. Relativitetsteorien er matematisk ganske omfattende, og til hjelp skal vi benytte oss av Christoffelsymbolene, som er definert ved [Mø83, Dy91]:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right), \quad (2.17)$$

og har egenskapen $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{\beta\alpha}^\mu$. Når vi så setter inn for den metriske tensoren fra (2.16), får vi uttrykkene:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} = \frac{1}{2} e^{-\nu(r)} e^{\nu(r)} \frac{\partial \nu}{\partial (ct)} \\ &= \frac{1}{2c} \frac{\partial \nu}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} = \frac{1}{2} e^{-\lambda(r)} e^{\nu(r)} \frac{\partial \nu}{\partial r}, \quad (2.19)$$

og tilsvarende

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial r}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda(r)}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-\lambda(r)}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Riemann-tensoren [**Rø01**, **BG99**] gir oss en nyttig sammenheng med Christoffelsymbolene:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \stackrel{def}{=} \frac{\partial\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\sigma} . \quad (2.21)$$

Riemann-tensoren synes å være komplisert, men takket være et stort antall symmetrier reduseres antallet uavhengige komponenter fra det som i utgangspunktet ser ut til å være $4^4 = 256$ til 20. Disse symmetriene kan vi enklest oppsummere for tensoren $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\rho}R_{\beta\gamma\delta}^{\rho}$, som dannes ved å senke den første indeksen. Vi har symmetri i ombytte av det første og andre indeksparet:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} . \quad (2.22)$$

Vi har antisymmetri i ombyttene:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} , \quad (2.23)$$

og sykliske egenskaper:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0 . \quad (2.24)$$

Gjennom kontraksjon av den første og den tredje indeksen i Riemann-tensoren, finner vi Ricci-tensoren

$$R_{\beta\mu} = R_{\beta\alpha\mu}^{\alpha} . \quad (2.25)$$

Ricci-tensoren har 16 komponenter, hvorav 10 er uavhengige. Ricci-tensoren er symmetrisk på ombytte av indeksene, og ved å kontrahere de to indeksene oppnår vi en skalar størrelse, den såkalte Ricci-skalaren, eller rommets skalare krumning,

$$R = g^{\beta\mu}R_{\beta\mu} = g^{\beta\alpha}g^{\mu\sigma}R_{\beta\mu\alpha\sigma} . \quad (2.26)$$

Fra Ricci-tensoren og Ricci-skalaren, kan vi forme nok en symmetrisk tensor som har avtagende kovariant divergens. Dette er Einstein-tensoren [**GB99**],

$$G_{\beta\mu} = R_{\beta\mu} - \frac{1}{2}g_{\beta\mu}R . \quad (2.27)$$

Gjennom denne får vi en sammenheng mellom rommets krumning og energifordelingen i rommet [**Mø83**, **BG99**]:

$$R_{\beta\mu} - \frac{1}{2}g_{\beta\mu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\beta\mu} , \quad (2.28)$$

som er Einsteins feltligninger. Her er G den universelle gravitasjonskonstanten, c er lyshastigheten og $T_{\beta\mu}$ er den firedimensjonale energi-impuls-tensoren. $T_{\beta\mu}$ er gitt ved:

$$T_{\beta\mu} = \rho u_\beta u_\mu + P \left(\frac{u_\beta u_\mu}{c^2} - g_{\beta\mu} \right) , \quad (2.29)$$

hvor ρ er massetettheten, P er trykket, og u_β og u_μ er firerhastigheter. Nå kan vi multiplisere (2.28) med $g^{\beta\mu}$, og benytte betingelsen

$$g^{\beta\mu} g_{\beta\mu} = \partial_\mu^\beta , \quad (2.30)$$

hvor

$$\partial_\mu^\beta = \begin{cases} 1 & \text{for } \beta = \mu \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} . \quad (2.31)$$

Dette gir oss

$$\begin{aligned} g^{\beta\mu} R_{\beta\mu} - \frac{1}{2} g^{\beta\mu} g_{\beta\mu} R &= \frac{8\pi G}{c^4} g^{\beta\mu} T_{\beta\mu} \\ R - \frac{1}{2} (g^{00} g_{00} + g^{11} g_{11} + g^{22} g_{22} + g^{33} g_{33}) &= \frac{8\pi G}{c^4} T_\beta^\beta \\ R - \frac{1}{2} (4) R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_\beta^\beta \\ R &= -\frac{8\pi G}{c^4} T_\beta^\beta , \end{aligned} \quad (2.32)$$

hvor $T = T_\beta^\beta$ blir kalt sporet av energi-impuls-tensoren. Når vi så setter (2.32) inn i (2.28), får vi

$$R_{\beta\mu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\beta\mu} - R_{\beta\mu} - \frac{1}{2} g_{\beta\mu} T \right) . \quad (2.33)$$

Vi kan nå bestemme $g_{\beta\mu}$ ved å finne uttrykkene for $R_{\beta\mu}$, $T_{\beta\mu}$ og T , og sette dem inn i ligningen.

Først skal vi prøve å bestemme komponentene fra Ricci-tensoren, $R_{\beta\mu}$. Fra Ligning (2.25) har vi at $R_{\beta\mu} = R_{\beta\alpha\mu}^\alpha$. Dette gir oss:

$$\begin{aligned} R_{00} &= R_{000}^0 + R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3 , \\ R_{11} &= R_{101}^0 + R_{111}^1 + R_{121}^2 + R_{131}^3 , \\ R_{22} &= R_{202}^0 + R_{212}^1 + R_{222}^2 + R_{232}^3 , \\ R_{33} &= R_{303}^0 + R_{313}^1 + R_{323}^2 + R_{333}^3 . \end{aligned} \quad (2.34)$$

Riemann-tensoren har vi uttrykt ved Cristoffelsymbolene i Ligning (2.21). Christoffelsymbolene som gir bidrag, finner vi fra (2.18)-(2.20):

$$R_{000}^0 = \frac{d\Gamma_{00}^0}{dx^0} - \frac{d\Gamma_{00}^0}{dx^0} + \Gamma_{n0}^0 \Gamma_{00}^n - \Gamma_{n0}^0 \Gamma_{00}^n = 0 , \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} R_{010}^1 &= \frac{d\Gamma_{00}^1}{dx^1} - \frac{d\Gamma_{01}^1}{dx^0} + \Gamma_{n1}^1 \Gamma_{00}^n - \Gamma_{n0}^1 \Gamma_{01}^n \\ &= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} e^{(\nu(r)-\lambda(r))} \right) + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{01}^1 \\ &\quad + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{00}^2 - \Gamma_{20}^1 \Gamma_{01}^2 + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{00}^3 - \Gamma_{30}^1 \Gamma_{01}^3 \\ &= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} e^{(\nu(r)-\lambda(r))} \right) - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{00}^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\nu}{dr^2} e^{(\nu(r)-\lambda(r))} + \left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} \right) \frac{d\nu}{dr} e^{(\nu(r)-\lambda(r))} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} e^{(\nu(r)-\lambda(r))} + \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} e^{(\nu(r)-\lambda(r))} \cdot \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} \\ &= e^{(\nu(r)-\lambda(r))} \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{d^2\nu}{dr^2} - \frac{1}{4} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{4} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 \right) , \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} R_{020}^2 &= \frac{d\Gamma_{00}^2}{dx^0} - \frac{d\Gamma_{02}^2}{dx^0} + \Gamma_{n2}^2 \Gamma_{00}^n - \Gamma_{n0}^2 \Gamma_{02}^n \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} e^{(\nu(r)-\lambda(r))} , \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} R_{030}^3 &= \frac{d\Gamma_{00}^3}{dx^3} - \frac{d\Gamma_{03}^3}{dx^0} + \Gamma_{n3}^3 \Gamma_{00}^n - \Gamma_{n0}^3 \Gamma_{03}^n \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} e^{(\nu(r)-\lambda(r))} . \end{aligned} \quad (2.38)$$

Dersom vi så setter disse resultatene inn i ligningene (2.34), finner vi R_{00} , R_{11} , R_{22} og R_{33} :

$$R_{00} = e^{(\nu(r)-\lambda(r))} \left(\frac{1}{2} \frac{d^2\nu}{dr^2} - \frac{1}{4} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{4} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right) , \quad (2.39)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2} \frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{4} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{4} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} , \quad (2.40)$$

$$R_{22} = e^{-\lambda(r)} \left(-1 - \frac{1}{2} r \frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{2} \left(r \frac{d\lambda}{dr} \right) + 1 \right) , \quad (2.41)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta . \quad (2.42)$$

Nå skal vi forsøke å finne komponentene av energi-impuls-tensoren, $T_{\beta\mu}$.

For å finne $T_{\beta\mu}$ må vi løse Ligning (2.29):

$$T_{\beta\mu} = \rho u_\beta u_\mu + P \left(\frac{u_\beta u_\mu}{c^2} - g_{\beta\mu} \right) . \quad (2.43)$$

Firerhastigheten er definert ved

$$u^\nu u_\mu = g_{\mu\alpha} u^\nu u^\alpha = c^2 , \quad (2.44)$$

og for en væske i ro, får vi hastighetskomponenten

$$u_\beta = (u_0, 0, 0, 0) , \quad (2.45)$$

det vil si at (2.44) gir oss

$$g_{00} \cdot (u^0)^2 = c^2 , \quad (2.46)$$

$$u_0 = g_{0\mu} u^\mu = g_{00} u^0 = \sqrt{g_{00}} \cdot c . \quad (2.47)$$

Da kan vi skrive energi-impuls-tensoren som

$$\begin{aligned} T_{\beta\mu} &= \rho (u_0)^2 + P \left(\frac{(u_0)^2}{c^2} - g_{00} - g_{11} - g_{22} - g_{33} \right) \\ &= \rho c^2 g_{00} + P (g_{00} - g_{00} - g_{11} - g_{22} - g_{33}) \\ &= \rho c^2 g_{00} - P (g_{11} + g_{22} + g_{33}) . \end{aligned} \quad (2.48)$$

Dette gir oss komponentene

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho c^2 e^{\nu(r)} , \\ T_{11} &= P e^{\lambda(r)} , \\ T_{22} &= P r^2 , \\ T_{33} &= P r^2 \sin^2 \theta . \end{aligned} \quad (2.49)$$

Til slutt finner vi nå sporet av energi-impuls-tensoren, T . For å finne denne multipliserer vi Ligning (2.29) med $g^{\beta\mu}$:

$$\begin{aligned} g^{\beta\mu} T_{\beta\mu} &= T = \rho g^{\beta\mu} u_\beta u_\mu + P \left(\frac{g^{\beta\mu} u_\beta u_\mu}{c^2} - 4 \right) \\ &= \rho c^2 - 3P . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Når vi så har disse opplysningene, kan vi løse Ligning (2.33) med hensyn på $g^{\beta\mu}$, og dermed med hensyn på $\nu(r)$ og $\lambda(r)$,

$$R_{\beta\mu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\beta\mu} - \frac{1}{2} g_{\beta\mu} T \right) . \quad (2.51)$$

Nå setter vi inn komponentene for $R_{\beta\mu}$ fra ligningene (2.34), $T_{\beta\mu}$ fra (2.49) og T fra (2.50). Dette gir oss fire ligninger [Rø01]:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{2} \frac{d^2\nu}{dr^2} - \frac{1}{4} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{4} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \left(\frac{\rho c^2}{2} + \frac{3P}{2} \right) , \quad (2.52)$$

$$e^{-\lambda} \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{4} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{4} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \left(\frac{\rho c^2}{2} - \frac{3P}{2} \right) , \quad (2.53)$$

$$e^{-\lambda} \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{2r} \left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} \right) \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(\frac{\rho c^2}{2} - \frac{P}{2} \right) , \quad (2.54)$$

$$e^{-\lambda} \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{2r} \left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} \right) \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(\frac{\rho c^2}{2} - \frac{P}{2} \right) . \quad (2.55)$$

Her ser vi at de to siste ligningene er identiske. Ved å addere de to første ligningene, får vi

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} \right) \right) = \frac{8\pi G}{c^4} (\rho c^2 + P) . \quad (2.56)$$

Fra dette ser vi at $\left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} \right)$ alltid vil være positiv eller lik null. Lik null er den kun for $(\rho c^2 + P) = 0$, det vil si når $\rho = P = 0$. I dette tilfellet vil da også energi-impuls-tensoren $T_{\beta\mu}$ fra Ligning (2.29), være lik null. Når vi så adderer (2.55) og (2.56), finner vi en løsning for ρ :

$$\frac{8\pi G}{c^2} \rho = e^{-\lambda} \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} . \quad (2.57)$$

Dersom vi derimot subtraherer (2.55) fra (2.56), finner vi en løsning for P :

$$\frac{8\pi G}{c^2} P = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right) . \quad (2.58)$$

Deretter subtraherer vi (2.53) fra (2.55), og får en ligning uten verken ρ eller P :

$$\frac{1}{r^2} e^{-\lambda} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} \right) + \frac{1}{2r} \left(\frac{d\nu}{dr} + \frac{d\lambda}{dr} \right) - \frac{1}{2} \frac{d^2\nu}{dr^2} . \quad (2.59)$$

Vi sitter nå igjen med tre differensialligninger (2.57), (2.58) og (2.59) for de fire funksjonene $\nu(r)$, $\lambda(r)$, $P(r)$ og $\rho(r)$. Dersom vi multipliserer Ligning (2.57) med r^2 får vi:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} \left(r \frac{d\lambda}{dr} - 1 \right) + 1 &= \frac{8\pi G}{c^2} \rho r^2 , \\ r \frac{d\lambda}{dr} e^{-\lambda} - e^{-\lambda} &= \frac{8\pi G}{c^2} \rho r^2 , \\ \frac{d}{dr} (r e^{-\lambda}) &= \frac{8\pi G}{c^2} \rho r^2 , \\ e^{-\lambda} &= 1 - \frac{8\pi G}{rc^2} \int_0^r \rho r^2 dr . \end{aligned} \quad (2.60)$$

Vi bruker så uttrykket for total masse, $M(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr$, og får ut

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{rc^2} . \quad (2.61)$$

Vi skal nå anta et kulesymmetrisk gravitasjonsfelt i vakuum. I dette spesialtilfellet gir energi-impuls-tensoren $T_{\beta\mu}$ oss 0. Vi får da fra (2.57) og (2.58)

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 , \quad (2.62)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 . \quad (2.63)$$

Når vi så tar differansen mellom disse ligningene, får vi

$$\frac{d\lambda}{dr} + \frac{d\nu}{dr} = 0 . \quad (2.64)$$

Når vi så integrerer denne ligningen, får vi

$$\nu(r) = -\lambda(r) + C , \quad (2.65)$$

hvor C er en villkårlig konstant. Videre kan vi sette betingelsen at når $r \rightarrow \infty$, må den metriske tensoren $g_{\mu\nu}$ reduseres til $\eta_{\mu\nu}$, det vil si at e^λ og $e^\nu \rightarrow 1$. Fra dette kan vi slutte at $C = 0$, og dermed at

$$\nu(r) = -\lambda(r) . \quad (2.66)$$

Sammen med uttrykket for $e^{-\lambda(r)}$ fra (2.61), kan vi sette dette inn i uttrykket for den metriske tensoren $g_{\mu\nu}$ fra (2.16). Dette gir oss Schwarzschild-metrikken, metrikken omkring en kulesymmetrisk masse i et gravitasjonsfelt.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM}{rc^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} . \quad (2.67)$$

Intervallet ds^2 kan skrives som

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (2.68)$$

2.1.2 TOV-ligningen

Vi skal nå bruke resultatene foran til å utlede TOV-ligningen. Dersom vi tar i bruk uttrykket for $e^{-\lambda(r)}$ fra (2.61), kan vi løse Ligning (2.58) med hensyn på $\frac{d\nu}{dr}$, det vil si

$$\frac{8\pi G}{c^4} P = e^{-\lambda(r)} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} , \quad (2.69)$$

som gir oss

$$\begin{aligned} \frac{d\nu}{dr} &= re^{\lambda(r)} \left(\frac{8\pi G}{c^4} P - \frac{1}{r^2} e^{-\lambda(r)} + \frac{1}{r^2} \right) \\ &= \left(\frac{8\pi GPr}{c^4} - \frac{1}{r} \left[1 - \frac{2GM}{c^2r} \right] + \frac{1}{r} \right) / \left[1 - \frac{2GM}{c^2r} \right] \\ &= \frac{2G(M + 4\pi r^3 P/c^2)}{c^2 r^2 (1 - 2GM/c^2r)} . \end{aligned} \quad (2.70)$$

Nå skal vi forsøke å finne sammenhengen mellom $\frac{d\nu}{dr}$ og $\frac{dP}{dr}$. Da deriverer vi (2.58):

$$\begin{aligned} -\frac{8\pi G}{c^4} \frac{dP}{dr} &= \\ -\frac{2}{r^3} + \frac{d\lambda}{dr} e^{-\lambda(r)} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right) - e^{-\lambda(r)} \left(-\frac{2}{r^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\nu}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\nu}{dr} \right) \\ = -\frac{2}{r^3} + \frac{1}{r} e^{-\lambda(r)} \left(\frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\nu}{dr} + \frac{2}{r^2} - \frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right) . \end{aligned} \quad (2.71)$$

Vi løser så (2.59) med hensyn på $\frac{d^2\nu}{dr^2}$, og setter dette uttrykket inn i (2.71). Vi får da uttrykket

$$\begin{aligned} -\frac{8\pi G}{c^4} \frac{dP}{dr} &= -\frac{2}{r^3} + \frac{1}{r} e^{-\lambda(r)} \left(\frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\nu}{dr} + \frac{2}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2e^{\lambda(r)}}{r^2} - \frac{2}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right) \\ &= -\frac{2}{r^3} + \frac{1}{r} e^{-\lambda(r)} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} \right) + \frac{2}{r^3} \\ &= e^{-\lambda(r)} \frac{1}{r} \left(\frac{d\nu}{dr} + \frac{d\lambda}{dr} \right) \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} \\ &= \frac{8\pi G}{c^4} (\rho c^2 + P) \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

som til slutt gir oss

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho c^2 + P) \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr}. \quad (2.73)$$

Når vi så tar og setter inn uttrykket for $\frac{d\nu}{dr}$ i denne ligningen, får vi

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{2} (\rho c^2 + P) \frac{2G(M + 4\pi r^3 P/c^2)}{c^2 r^2 (1 - 2GM/c^2 r)}. \quad (2.74)$$

Dette gir oss

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G(\rho c^2 + P)(M + 4\pi r^3 P/c^2)}{c^2 r^2 (1 - 2GM/c^2 r)}, \quad (2.75)$$

som er TOV-ligningen vi var på utkikk etter. Sammen med ligningen for masse-energi-bevaring

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \cdot \rho(r) \quad (2.76)$$

og tilstandsligningen

$$P = P(\rho), \quad (2.77)$$

har vi da tre ligninger med de tre ukjente $P(r)$, $\rho(r)$ og $M(r)$. Her er $P(r)$ trykket, $\rho(r)$ er masse-energi-tettheten, $M(r)$ er massen innenfor r , G er den universelle gravitasjonskonstanten og c er lyshastigheten. Vi kan da bestemme den totale massen M til en nøytronstjerne, og radien til stjernen vil da være definert ved

$$P(R) = 0. \quad (2.78)$$

2.2 Tilstandsligningen og nøytronstjerneobservable

Et av de viktigste aspektene i et studium av nøytronstjerner er tilstandsligningen, det vil si funksjonsavhengigheten mellom trykket p og tetheten ρ , som beskriver den indre strukturen til stjernen.

Fysikken til kompakte objekter som nøytronstjerner, gir oss en unik mulighet til å se på samspillet mellom kjernefysiske prosesser og astrofysiske observable, og gjennom å se på nøytronstjerner kan vi få innsikt i et miljø fjernt fra det vi kan observere på jorden; se for eksempel [ST83, Gl00]. Det å bestemme en tilstandsligning for kompakt materie er sentralt for å beregne egenskaper ved nøytronstjernen, og den bestemmer både grensene for massen, og forholdet mellom masse og radius for disse stjernene. Tilstandsligningen er også viktig for å bestemme sammensetningen av den kompakte materialet og tykkelsen på skorpen til en nøytronstjerne. Det siste har betydning for nøytrinogenererende (og dermed også nøytrinomitterende) prosesser og kjølingsmekanismene i en nøytronstjerne [Pe92].

I tillegg til dette er spørsmålet om nøytronstjerners maksimale masse viktig for å bestemme muligheten for sorte hull i galaksen. Eksempler på dette kan være Cyg X-1 og LMC X-3, som er kandidater til galaktiske sorte hull [ST83, Øs89]. Dersom den maksimale massen til en nøytronstjerne blir mindre, vil sannsynligheten for å få dannet sorte hull etter en supernovaeksplosjon bli større.

Minimumsmassen til en stabil nøytronstjerne blir bestemt ved å sette middelverdien til den adiabatiske indeksen Γ , lik den kritiske verdien for radiell stabilitet mot kollaps. Den resulterende minimumsmassen er $M \sim 0,1 M_{\odot}$ med en korresponderende sentral tethet på $\rho \sim 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ og en radius $R \sim 200 \text{ km}$. Dersom vi derimot har muligheten for kvarkstjerner, vil den mulige minimale massen kunne ta svært lave verdier, mye lavere enn de vi har for vanlige nøytronstjernemodeller. Likevektskonfigurasjonen til den maksimale massen er noe usikker, men alle mikroskopiske beregninger gir $M < 2,5M_{\odot}$, og antageligvis $M < 2,0M_{\odot}$. Astronomiske observasjoner som gir oss nøytronstjerneparametre som total masse, radius eller treghetsmoment er viktige, siden disse egenskapene er sensitive overfor de modellene vi velger for de mikroskopiske strukturene i stjernen [ØØ91].

Vi kan dele tetthetsområdet som en tilstandsligning må virke på, inn i fire forskjellige regioner. Den første regionen har vi for $\rho \lesssim 10^4 \text{ g cm}^{-3}$. Dette er lavtetthetsregionen, hvor materien består av vanlige kjerner, dominert av ^{56}Fe .

Den andre regionen har vi for området $10^4 \lesssim \rho \lesssim 4.3 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$. Ved

rundt $\rho \sim 10^4 \text{ g cm}^{-3}$ er tettheten stor nok til at elektronene får den energien som er nødvendig for å løsøre seg fra sine respektive kjerner, og danne en elektrongass. Ved $\rho \sim 10^7 \text{ g cm}^{-3}$ blir elektronene relativistiske. Etter hvert som tettheten øker begynner vi å få inverst beta-henfall, og kjernene blir mer og mer nøytronrike. Nøytronene fortsetter å øke i antall i forhold inntil protonene helt til disse nøytronrike kjernene begynner å ”drypp” ut nøytroner. Dette er det såkalte ”neutron drip”-punktet vi snakket om i kapittel 1. De frie elektronene er kilden til en stadig økende del av det totale trykket mens tettheten øker, og ved neutron drip skyldes trykket nesten bare elektroner.

Den tredje regionen ligger i område $4,3 \times 10^{11} \lesssim \rho \lesssim 5 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$. Neutron drip-punktet,

$$\rho_d \approx 4,3 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}, \quad (2.79)$$

er tettheten hvor kjernene begynner å løse seg opp og flyte sammen. Etter dette består materien av frie elektroner, nøytroner og kjerner, helt til kjernene blir så nøytronrike og etter hvert små, og materien blir så tett, at kjernene opphører å eksistere som separate objekter. Dette skjer ved en tetthet nær kjernetettheten,

$$\rho_n \approx 5 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}. \quad (2.80)$$

I dette området mellom ρ_d og ρ_n , vil materien bestå av nøytroner, protoner og elektroner. Kjernene forsvinner når vi beveger oss opp i den øvre delen av denne tetthetsskalaen, siden bindingsenergien deres minker med økende tetthet. Like over ρ_d synker den adiabatiske indeksen skarpt. Dette er fordi nøytrongassen med sin lave tetthet bidrar betydelig til tettheten, men lite til trykket. Den adiabatiske indeksen øker ikke til over $4/3$ igjen før $\rho > 7 \times 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$. Dette betyr at ingen stabile stjerner kan ha sentraltettheter i denne regionen [**Øs89**].

Kjernene blir nå stadig mer nøytronrike etter hvert som tettheten øker, og stabiliteten deres blir mindre helt til nøytronfraksjonen når en kritisk verdi. Ved denne verdien oppløses kjernene, hovedsaklig ved å slå seg sammen. Siden kjernene på dette punktet er svært nøytronrike, er materien i kjernene svært lik den til den frie nøytrongassen utenfor. Nøytrongassen mellom kjernene reduserer kjernenes overflateenergi betydelig, og den forsvinner når materien inne i kjernene blir lik den utenfor.

Den fjerde regionen finner vi i området $\rho > 5 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$. Egenskapene til kald kompakt materie, og de tilhørende tilstandsligningene, er rimelig godt forstått opp til tettheter rundt ρ_n . For tettheter over $5 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ er situasjonen ennå ikke fullt ut forstått. Vi kan her ha en tilstand med en komplisert blanding av hyperoner opp til tettheter rundt $10^{15} \text{ g cm}^{-3}$, se for eksempel Ref. [**Ca74**].

2.3 Tilstandsligningen

I den ikke-relativistiske grensen kan vi anta at kjernekreftene er konservative og uavhengige av hastigheten til kjernen. Kraften kan derfor beregnes fra et statisk potensial. Nukleon-nukleon-potensialet må da velges og inkorporeres i en mangelegemeberegnning for å få en tilstandsligning. I beregningen av en tilstandsligning er det en eksperimentell betingelse at den valgte vekselvirkningen må gi oss de observerte egenskapene til kjernematerie ved metning. Det er fire parametere som må reproduceres: tettheten hvor metningen intreffer, energien og kompressibiliteten til symmetrisk kjernematerie og volumsymmetrikoeffisienten som mäter krumningen til uttrykket for energien. Det ser ut til å være vanskelig å reproducere disse parameterene samtidig med tolegemepotensialer laget kun fra spredningsexperimenter i laboratoriet. Godt samsvar mellom teori og eksperiment kan man derimot håpe på ved i tillegg å introdusere trelegemevekselvirkninger.

Relativt ”myke”¹ tilstandsligninger har vært foreslått siden den gjennomsnittlige systemenergien er tiltrekkende ved kjernetetheter. Dersom man derimot bruker ”stive” tilstandsligninger, kan man få potensialer hvor den gjennomsnittlige vekselvirkningsenergien blir dominert av de tiltrekkende delene av potensialet ved kjernetetheter, men av den frastøtende delen ved høyere tettheter. Stivere tilstandsligninger gir viktige endringer i strukturen og massene til tunge nøytronstjerner. Når vekselsvirkningsenergien blir repulsiv over kjernetetheter, blir trykkreftene bedre i stand til å motstå gravitasjonskollaps. Resultatet blir at vi for stive tilstandsligninger vil få ut en større maksimal masse. Nøytronstjernemodeller basert på stivere tilstandsligninger vil også ha en lavere sentraltetthet, en større radius og en tykkere overflate. Slike forskjeller er viktige når man skal bestemme en øvre grense for massen til en nøytronstjerne, overflatepotensial, treghetsmoment, pressjonsfrekvenser og så videre.

For lave tettheter $\rho < \rho_n$, hvor man forventer at kjernekreftene er attraktive, blir trykket noe myket opp når man inkluderer vekselvirkningen. For svært høye tettheter blir tilstandsligningen derimot noe stivere på grunn av dominansen av den repulsive kjernen i kjernekretens potensial. Dette gir oss

$$P \rightarrow \rho c^2, \text{ for } \rho = \varepsilon/c^2 \rightarrow \infty , \quad (2.81)$$

¹”Myk” og ”stiv” tilstandsligning svarer til det engelske ”soft” og ”stiff” equation of state. I litteraturen henvises det ofte til ”myk” og ”stiv” tilstandsligninger. En ”stiv” tilstandsligning har et høyere trykk enn en ”myk” tilstandsligning ved en gitt temperatur og tetthet.

og lydhastigheten nærmer seg

$$c_s = (dP/d\rho)^{1/2} \rightarrow c . \quad (2.82)$$

Ved svært høye tettheter, over 10^{15} g cm $^{-3}$, antar man at sammensetningen inkluderer et betydelig antall hyperoner, og nukleonvekselvirkningene må da behandles relativistisk. Relativistiske mangelegememetoder for sterkt vekselvirkende materie er dessverre ikke fullt utviklet. De tilstandsligningene som er utviklet, har også mange usikkerheter ved seg. Slike usikkerheter dreier seg for eksempel om muligheten for superflytende nøytroner og protoner, for pionkondensasjon, nøytronsolidifikasjon, mulige faseoverganger til kvarkmaterie og konsekvensene av Δ -nukleonresonans.

Ved tettheter betydelig større enn ρ_n er det ikke lenger mulig å beskrive kjernematerie ved hjelp av en ikke-relativistisk mangelegeme-Schrödinger-ligning eller ved hjelp av et potensial. Meson-skyene som omgir nukleonen begynner å overlappe hverandre, og bildet av bestemte, lokaliserbare, individuelle partikler som vekselvirker gjennom tolegemekrefter, bryter sammen. Selv på et tidspunkt før dette sammenbruddet vil forskjellige potensial som reproduuserer pålitelige lav-energetiske faseskiftdata, gi oss andre tilstandsligninger. Potensialene er her sensitive overfor den frastøtende kjerneregionen som er upåvirket av faseskiftdataene. Dersom kvarkene er den fundamentale byggesteinen i alle sterkt vekselvirkende partikler, burde en beskrivelse av kjernematerie ved svært høye tettheter involvere disse. Når kjerner kommer helt tett innpå hverandre, skulle man tro at materie like over denne tettheten ville gå igjennom en faseovergang hvor kvarker vil begynne å ”drypp” ut av nukleonen. Resultatet av dette ville da bli kvarkmaterie, en degenerert Fermivæske [Øs89].

Kapittel 3

Sammensetningen av tilstandslinger

3.1 Ideell Fermigass av nøytroner

En første approksimasjon til strukturen til en nøytronstjerne får vi ved å anta en degenerert gass av ikke-vekselvirkende partikler, en ideell Fermigass. Vi skal først se på ligningene for en slik gass av nøytroner. Vi antar en degenerert gass som består av frie nøytroner. Dette er en svært enkel modell for en nøytronstjerne, men det er likevel interessant å se hvordan den ter seg, og hva som skiller den fra andre ved senere beregninger.

Partiklene i en ideell gass okkuperer energitilstander som ikke lar seg påvirke av vekselvirkningene mellom partiklene. Partiklene kan betraktes som bølger, og bølgeegenskaper kan brukes til å bestemme mulige kvantetilstander som okkuperes. Dersom vi antar at partiklene er innestengt i en boks med volum V , vil antall kvantetilstander $g(p)$ være gitt ved [Ph99]

$$g(p) = g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 , \quad (3.1)$$

hvor h er Plancks konstant, $p = \hbar k$ er impulsen til en fri partikkelf og g_s er antall uavhengige polarisasjoner. Vi skal nå jobbe med nøytroner, som i likhet med elektroner og protoner er spinn $\frac{1}{2}$ -partikler, med $g_s = 2$.

Den indre kinetiske energien til gassen avhenger av tettheten av tilstandene, energien til hver kvantetilstand og antall partikler i hver tilstand. Tettheten av tilstandene, $g(p) dp$, er gitt fra Ligning (3.1). Fra spesiell relativitetsteori har vi at energien E av et nøytron med masse m_n i en kvantetilstand med bevegelsesmengde p , er gitt ved

$$E^2 = p^2 c^2 + m_n^2 c^4 . \quad (3.2)$$

Energitettheten i gassen, ϵ , kan vi skrive som

$$\epsilon = \rho c^2 = \frac{1}{V} \int_0^\infty E f(E) g(p) dp , \quad (3.3)$$

hvor $f(E)$ representerer det gjennomsnittlige antall partikler i en tilstand med energi E . Partikkeltettheten til nøytronene er gitt ved

$$n_n = \frac{1}{V} \int_0^\infty f(E) g(p) dp . \quad (3.4)$$

Makroskopisk kan de termodynamiske egenskapene til gassen beskrives ved hjelp av temperaturen T , trykket P og det kjemiske potensialet μ . Disse parametrene bestemmer hvordan den indre energien endrer seg ved overføringer av varme eller entropi S , ved kompresjon eller ekspansjon, eller ved en overføring av partikler. Vi uttrykker de termodynamiske relasjonene ved

$$d\epsilon = V(TdS - PdV + \mu dN) . \quad (3.5)$$

I en ideell gass antar vi konstant entropi og partikkeltetthet. Dette forenkler ligningen, og sammen med (3.3) får vi for trykket til en ideell gass:

$$\begin{aligned} P &= -\frac{1}{V} \frac{\partial \epsilon}{\partial V} \\ &= -\frac{1}{V} \int_0^\infty \frac{dE}{dV} f(E) g(p) dp \\ &= -\frac{1}{V} \int_0^\infty p v f(E) g(p) dp , \end{aligned} \quad (3.6)$$

når vi har $dE/dV = -pv/3V$, hvor v er hastigheten.

For en ideell gass av fermioner gjelder Paulis eksklusjonsprinsipp. Ikke mer enn en partikkkel kan være i en gitt kvantetilstand, og det gjennomsnittlige antallet $f(E)$ er

$$f(E) = \frac{1}{\exp[(E - \mu)/k_B T] + 1} , \quad (3.7)$$

hvor k_B er Boltzmanns konstant.

For fullstendig degenererte fermioner, hvor $T \rightarrow 0$ og dermed $\mu/kT \rightarrow \infty$, er μ Fermienergien E_F , og

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{for } E \leq E_F \\ 0 & \text{for } E > E_F \end{cases}. \quad (3.8)$$

Nå kan vi så definere Fermi-impulsen ved

$$E_F^2 = p_F^2 c^2 + m_n^2 c^4 . \quad (3.9)$$

Dersom vi nå bruker uttrykket for $f(E)$ over, og uttrykket for $g(p)$ fra Ligning (3.1), kan vi bruke disse til å finne partikkeltettheten n_n , trykket P og energitettheten ϵ .

Partikkeltettheten fra Ligning (3.4) blir da

$$n_n = \int_0^{p_F} \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 = \frac{1}{3\pi^2 \lambda_n^3} x^3 , \quad (3.10)$$

hvor $\lambda = \hbar/m_n c$ er Compton-bølgelengden for nøytronet. Vi har også introdusert en dimensjonsløs Fermi-impuls x , som er gitt ved

$$x = \frac{p_F}{m_n c^2} . \quad (3.11)$$

Trykket i Ligning (3.6) kan skrives som

$$P = \frac{m_n c^2}{\lambda_n^3} \phi(x) , \quad (3.12)$$

hvor

$$\phi(x) = \frac{1}{8\pi^2} (x(1+x^2)^{1/2} \left(\frac{2x^2}{3} - 1 \right) + \ln[x + (1+x^2)^{1/2}]) . \quad (3.13)$$

Tilsvarende kan energitettheten fra (3.3) uttrykkes ved

$$\epsilon = \rho c^2 = \frac{m_n c^2}{\lambda_n^3} \chi(x) , \quad (3.14)$$

hvor

$$\chi(x) = \frac{1}{8\pi^2} (x(1+x^2)^{1/2} (1+2x^2) - \ln[x + (1+x^2)^{1/2}]) . \quad (3.15)$$

Vi kan også uttrykke Fermi-impulsen ved partikkeltettheten ved hjelp av Ligning (3.10),

$$p_F = \left(\frac{3n_n}{8\pi} \right)^{1/3} h . \quad (3.16)$$

Man kan enkelt vise at når gasspartiklene er ikke-relativistiske eller ultra-relativistiske, er trykket direkte proporsjonalt med den kinetiske energitetheten til gassen. Samtidig kan man vise at funksjonen $\phi(x)$ i Ligning (3.12) lar seg redusere, slik at vi får et enkelt uttrykk for trykket som en funksjon av partikkeltettheten.

For ikke-relativistiske nøytroner, $p_F \ll m_nc$, er $\epsilon = m_nc^2 + p^2/2m$ og $v = p/m$, og vi får for trykket:

$$P = \frac{2N}{3V} \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{2}{3} \text{ av den kinetiske energitettheten.} \quad (3.17)$$

Samtidig får vi forenklet fra (3.12),

$$P = \frac{h}{5m_n} \left[\frac{3}{8\pi} \right]^{2/3} \cdot n_n^{5/3} . \quad (3.18)$$

For ultrarelativistiske nøytroner, $p_F \gg m_nc$, er $\epsilon = pc$ og $v = c$, og vi får for trykket:

$$P = \frac{N}{3V} \langle pc \rangle = \frac{1}{3} \text{ av den kinetiske energitettheten.} \quad (3.19)$$

Samtidig får vi forenklet fra (3.12)

$$P = \frac{hc}{4} \left[\frac{3}{8\pi} \right]^{1/3} \cdot n_n^{4/3} . \quad (3.20)$$

3.2 Kvarkmaterie

Når kjernematerie blir sammenpresset til så høye tettheter at nukleonkjernene overlapper hverandre betydelig, forventer man at nukleonene slår seg sammen og gjennomgår en faseovergang til kvarkmaterie. Vi forventer alt-så en overgang fra hadroniske frihetsgrader til kvark-frihetsgrader ved høye tettheter. Materien skulle da undergå en faseovergang hvor kvarkene ville begynne å drypp ut. Resultatet ville bli en degenerert Fermi-væske

av kvarkmaterie, men for å beregne effektene av denne overgangen i nøytronstjerner, må vi kjenne tilstandsligningene, både for kvarkmaterie og hadronisk materie.

Siden ingen frie kvarker har blitt observert, tror man at de holdes inne i hadronene av en kraft som øker dersom vi prøver å separere kvarkene. I følge kvantekromodynamikk vil likevel denne kraften bli tilsvarende svakere når kvarkene blir presset sammen. Derfor har man foreslått at kvarkmaterie som en approksimasjon ved tilstrekkelig høye tettheter, kan behandles til første orden som en ideell relativistisk Fermi-gass. Dette vil gi en relativt myk tilstandsligning. I en ideell Fermigassmodell av kvarkmaterie, antar vi et system av ikke-vekselvirkende kvarker som beveger seg fritt. Ved tettheter tilsvarende de for normal kjernematerie, $\rho = 2,3 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$, er kvarker kjent for å vekselvirke svært kraftig med hverandre, så der vil en slik modell passe dårlig. Når kvarkene derimot ligger svært nær hverandre, kan vi anta at de beveger seg fritt, som om de ikke var bundet i det hele tatt. En slik ideell Fermigassmodell for kvarker kan på denne måten være fornuftig ved svært høye tettheter.

For endelige tettheter, bør man ta med kvarkvekselvirkninger i beregningen. Ved moderat høye tettheter kan man bruke en perturbasjonsekspansjon i kobilingskonstanten til den sterke vekselvirkningen, og anta at kvarkene er asymptotisk frie. Ved lavere tettheter kan kvarkene derimot oppstrenges, og man har da utviklet tilsvarende fenomenologiske modeller. En slik er "MIT bag"-modellen, hvor kvarkene i nukleonet har sin bevegelsesfrihet begrenset innenfor et bestemt romlig område, en "bag". Volumet til denne holdes endelig ved et trykk $B > 0$, som kalles bag-konstanten. B er her den energitettheten som trengs til å "blåse opp" bagen. Den totale energitettheten til kvarkmaterien vil da være det ikke-vekselvirkende Fermigass-bidraget pluss B [HH00].

Ved å sammenligne tilstandsligninger og beregnede energikurver, kan vi da estimere en mulig faseovergang fra nøytronmaterie til kvarkmaterie. Vi må da se hvorvidt denne faseovergangen kan oppstå ved tettheter under den maksimale tettheten til en stabil nøytronstjerne.

3.3 Superflytende baryonmaterie

Tilstedeværelsen av superflytende nøytroner i skorpen og i de indre delene av nøytronstjerner, ses på som veletablerte fakta i fysikken til kompakte stjerner. Man antar to forskjellige lag med superflytende materie. I de ytre delene av kjernen, hvor vi har relativt lavere tetthet, har vi et område med superflytende nøytroner. Når tettheten øker innover i stjernen, oppløses kjernene

fra skorpen, og man antar et område som består av en kvantevæske av nøytroner og protoner i betalikevekt. Når kjernen til stjernen så nås, antar vi at de superflytende fasene forsvinner [HH00].

3.4 Kaonkondensasjon

Ideen om at grunntilstanden til baryonmaterie kan inneholde et Bose-Einstein-kondensat av kaoner kommer fra Kaplan og Nelson [KN86], og har senere blitt diskutert i mange publikasjoner. På grunn av tiltrekningen mellom K^- -og nukleonene, vil energien til kaonet minke med økende tetthet, helt til den kommer under det kjemiske potensialet til elektronet i nøytronstjernematerie i β -likevekt. Når dette skjer, får vi et Bose-Einstein-kondensat av K^- -kaoner. Avhengig av de parameterene som brukes, særlig særtallet til protonet, finner man at K^- -kondenserer ved tettheter over $\sim 3-4\rho_0$, hvor $\rho_0 = 0,16 \text{ fm}^{-3}$ er likevektstettheten til kjernematerie. Dette gjør tilstandsligningen mykere, og senker den maksimale massen til nøytronstjernen [PBP97, HH00]. Det kan man så sammenligne med sentraltettheten til en nøytronstjerne med masse $1,4 M_\odot$, som ligger på $\sim 4\rho_0$.

I nøytronmaterie ved lave tettheter er avstanden mellom partiklene mye større enn rekkevidden til vekselvirkningen, og kaonene vil da vekselvirke mange ganger med det samme nukleonet før det møter, og vekselvirker med, et annet nukleon. Vi kan da bruke spredningslengden som den effektive kaon-nøytron-vekselvirkningen, $a_{K-N} \simeq -0,41 \text{ fm}$, hvor vi her ignorerer den lille protonfraksjonen vi finner i kjernematerie. Kaonenergien avviker fra hvilemassen med Lenz-potensialet, det optiske potensialet man oppnår i bevegelsesmengdeapproksimasjonen [HH00],

$$\omega_{Lenz} = m_K + \frac{2\pi}{m_R} a_{K-N} n_{NM} . \quad (3.21)$$

Dersom hadronmassene minker enda mer, vil kondensasjonen oppstå ved lavere tettheter.

I nøytronmaterie ved høye tettheter er avstanden mellom partiklene mye mindre enn rekkevidden til vekselvirkningen, og kaonet vil vekselvirke med mange nukleoner innenfor denne avstanden. Kaonet vil da bli utsatt for feltet fra mange nukleoner, og kaonenergien vil avvike fra hvilemassen med Hartree-potensialet [HH00]:

$$\omega_{Hartree} = m_K + n_{NM} \int V_{K-N}(r) d^3r . \quad (3.22)$$

Hartree-potensialet er betraktelig mindre attraktivt enn Lenz-potensialet, og allerede ved tettheter hvor partikkellavstanden er sammenlignbar med rekkevidden til kaon-nukleon(KN)-vekselvirkningen, begynner kaon-nukleon- og nukleon-nukleon-korrelasjoner å redusere tiltrekningen i K^-N -vekselvirkningen betydelig. Disse korrelasjonene begynner altså å virke i betydelig grad fra det punktet hvor rekkevidden deres er sammenlignbar med avstanden mellom nukleonene. Overgangen fra Lenz-potensialet ved lave tettheter til Hartree-potensialet ved høye tettheter, opptrer allerede godt under kjernekrettheten. For målte K^-N -spredningslengder og rimelige rekkevidder for vekselvirkninger, blir tiltrekningen redusert med en faktor på rundt 2-3 i kjernen i nøytronstjerner. Relativistiske effekter reduserer ytterligere tiltrekningen ved høye tettheter. Resultatet av dette blir da at et kaonkondensat er mindre sannsynlig i nøytronstjerner på grunn av kjernefysiske korrelasjoner, men dersom kaonmassene minker med tettheten, vil kondensasjonen starte ved lavere tettheter [HH00].

3.5 Pionkondensasjon

Akkurat som kaonkondensasjon, er pionkondensasjon mulig i nøytronstjernematerie med store tettheter. Dersom vi neglisjerer effekten av sterke korrelasjoner mellom pioner og materien når vi modifiserer egenenergien til pionet, finner vi at det blir energetisk gunstig for et nøytron på toppen av fermisjøen å gå over til et proton og π^- når

$$\mu_n - \mu_p = \mu_e > m_\pi , \quad (3.23)$$

hvor $m_\pi = 139,6$ MeV er hvilemassen til π^- -pionet. Ved metningstettheten til kjernematerie er det kjemiske potensialet til elektronet ~ 100 MeV, og man kan dermed forvente en kondensasjon av π^- ved en litt høyere tetthet. Man kan likevel ikke neglisjere vekselvirkninger mellom pionet og bakgrunnsmateriaen. Slike vekselvirkninger kan øke egenenergien til pionet, og dermed også øke terskeltettheten. Avhengig av de valgte parameterene, kan den kritiske tettheten for pionkondensasjon variere fra n_0 til $4n_0$. Dette er spørsmål som ennå ikke er løst på en tilfredsstillende måte. Modeller med sterke korrelasjoner mellom nukleonene undertrykker kondensasjonen, både via πNN og $\pi \Lambda N$, slik at pionkondensasjon i nøytronstjernematerie kanskje ikke oppstår. På den annen side kan vi i tillegg til pionkondensat med ladning kanskje også få et π^0 -kondensat, gjennom reaksjonen

$$n \rightarrow n + \pi^0 , \quad (3.24)$$

dersom den effektive massen til π^0 i mediet er null [HH00]. Det er likevel en del usikkerheter omkring π^0 -kondensasjonen.

Eksistensen av pionkondensater vil kunne akselerere kjølingen av nøytronstjerner dramatisk. Dersom den eksisterer vil vi kunne få kvasipartikkkel- β -henfall via

$$N \rightarrow N' + e^- + \bar{\nu}_e \quad (3.25)$$

og den tilsvarende inverse reaksjonen. Her er kvasipartiklene N og N' lineære kombinasjoner av nøytron- og protontilstander i pionsjøen. Pionkondensatene tillater både energi og bevegelsesmengde å bli bevart i reaksjonen, som er analog til den direkte Urca-prosessen. Man har også foreslått en forenklet versjon av denne reaksjonen, hvor man ser på kjøling via henfall av frie pioner [ST83].

3.6 Faseoverganger

Vi kan tenke oss mange forskjellige typer faseoverganger i en nøytronstjerne. Vi kan for eksempel ha overgang fra en nukleær væske til gass i den indre skorpen, og i det indre kan vi ha tilstedeværelse av kvarkmaterie og/eller kondensater av kaoner, pioner, hyperoner og så videre.

Normalt oppstår overgangen mellom to faser ved et bestemt trykk, en bestemt temperatur og et bestemt kjemisk potensial. Som en konsekvens av dette forventer man at tettheten hopper diskontinuerlig på grensen mellom de to fasene. Dette stemmer ikke bare for en-komponentssystemer, som for eksempel vann som fryser eller fordamper, men også for enkelte to-komponentssystemer, som for eksempel nøytral kjernematerie i β -likevekt. Elektrisk nøytralitet krever at antallstettheten av elektroner og protoner er like,

$$n_p = n_e . \quad (3.26)$$

β -likevekt krever at forskjellen i det kjemiske potensialet til nøytroner og protoner, tilsvarer det kjemiske potensialet til elektronet i kjernematerie (NM = nuclear matter = kjernematerie),

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e^{\text{NM}} . \quad (3.27)$$

Disse to betingelsene fastsetter to av tre komponenter, og etterlater kun en uavhengig variabel, baryonettheten.

I kvarkmaterie har vi tilsvarende fra krav om ladningsnøytralitet

$$\frac{2}{3}n_u - \frac{1}{3}n_d - \frac{1}{3}n_s = n_e . \quad (3.28)$$

Tilsvarende krever β -likevekten (QM = quark matter = kvarkmaterie),

$$\mu_d = \mu_s = \mu_u + \mu_e^{QM} . \quad (3.29)$$

I løpet av de siste par tiår har mange forskere sett på egenskapene til nøytronstjerner med en kjerne av kvarkmaterie. I slike hybridstjerner antar man at hver av de to fasene er elektrisk nøytrale hver for seg, som i Ligning (3.26) og (3.28), og i β -likevekt hver for seg, som i (3.27) og (3.29). Gibbs betingelser, $P_{NM} = P_{QM}$ og $\mu_n^{NM} = \mu_n^{QM}$, gir oss så en bestemt tetthet, hvor de to nøytrale fasene kan eksistere samtidig.

Når vi slik regner med distinkte faser av materien, som for eksempel ren baryon- eller kvarkmaterie, vil sammensetningen av materien altså på denne måten bestemmes av betingelser satt av de kjemiske og elektriske likevektsbetingelsene.

Kapittel 4

Hyperonmaterie

4.1 Beskrivelse av kompakt materie med hyperoner

Vi vil nå søke å gi en kort introduksjon til de konsekvenser hyperonene får for tilstandsligningen, og hvilke vekselvirkninger vi må ta med for å gi en fullgod beskrivelse av tettheter og tilstandsligning i en nøytronstjerne med hyperoner.

Store deler av tetthetene inne i nøytronstjerner kan uttrykkes tilfredsstilende ved hjelp av frihetsgradene til nukleonene. Dette gjelder områdene fra det indre av skorpen til de ytre delene av kjernen - områder som spenner fra 0,5 til 2-3 ganger metningstettheten for kjernematerie. Det finnes mengder av eksperimentelle og teoretiske data som støtter opp under antagelsen om at nukleoner ikke mister individualiteten sin i slik kompakt materie, se for eksempel [MST90]. Det vil altså si at egenskapene til nukleonene ved disse tetthetene ligner på de til frie nukleoner. Tetthetsspekteret over gir oss avstander mellom nukleonene av størrelsesordenen ~ 1 fm. Ved slike avstander er det lite overlapp mellom de forskjellige nukleonene. Vi antar derfor at de fortsatt har en oppførsel som individuelle nukleoner, og at effekter fra den overlappingen vi har, kan inkorporeres i beskrivelsen av en to-nukleon-vekselvirkning.

For å kort skissere nukleon-nukleon-vekselvirkninger i et kjernemedium, kan man da bruke et så enkelt mangelegemesystem som mulig, nemlig Brueckner-Hartree-Fock(BHF)-metoden, som vi benevner som laveste ordens Brueckner-teori (LOB) [HH00].

Ved å følge den konvensjonelle mangelegemetilnærmingen, deler vi Hamiltonoperatoren opp slik, $H = T + V$, hvor T er den kinetiske energien,

og V er den frie nukleon-nukleon(NN)-vekselvirkningen, inn i en uperturbert del $H_0 = T + U$, og en vekselvirkende del $H_1 = V - U$, slik at

$$H = T + V = H_0 + H_1 . \quad (4.1)$$

Her har vi introdusert et enpartikkel-hjelpepotensial U . Dersom vi velger U slik at H_1 blir liten, kan vi anta at perturbativ mangelegemeteorologi kan anvendes. Et hinder for slik perturbativ behandling er det faktum at den frie NN-vekselvirkningen gir matriseelementer som er svært store, eller divergerer ved korte avstander mellom kjernene, noe som gjør en perturbativ tilnærming nærmest umulig. For å løse dette problemet, introduserer vi reaksjonsmatrisen G , som er gitt ved løsningen av Bethe-Goldstoneligningen i operatorform

$$G(\omega) = V + VQ [1/(\omega - QH_0Q)] QG . \quad (4.2)$$

I en delbølgerepresentasjon blir denne

$$G_{ll'}^{\alpha T_z}(kk'K\omega) = V_{ll'}^{\alpha T_z}(kk') + \sum_{l''} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_{ll''}^{\alpha T_z}(kq) \frac{Q^{T_z}(q, K)}{\omega - H_0} G_{l''l'}^{\alpha T_z}(qk'K\omega), \quad (4.3)$$

hvor den variable K er bevegelsesmengden tilhørende bevegelsen av masseleren. Denne ligningen gjør det mulig for oss å beregne energien per partikkel, og slik også den korresponderende protonfraksjonen ved å sette på likevektsbetingelser og inkludere myoner. Slik kan vi skaffe oss kunnskap om sammensetningen av, og hvilke faser som er tilstede i, den kompakte materien **[HHOO]**.

\mathcal{E} , den ikke-relativistiske energien per nukleon, er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{A} \sum_{h \leq k_F} \frac{k_h^2}{2m} + \\ &\quad \frac{1}{2A} \sum_{h \leq k_F, h' \leq k_F} \langle hh' | G(E = \varepsilon_h + \varepsilon_{h'}) | hh' \rangle_{AS} . \end{aligned} \quad (4.4)$$

I denne ligningen har vi undertrykt isospinn-indeksene for Fermibevegelsernes mengdene. Ligningen over blir beregnet for forskjellige protonfraksjoner x_p , og blir dermed en funksjon både av tettheten n og x_p . Forskjellige vekselvirkninger som den ladningsavhengige Bonn-vekselvirkningen (CD-Bonn) **[MSS96]**, de tre Nijmegen-potensialene, Nijm-I, Nijm-II og Reid93

[SKT94], og Argonne V₁₈ [WSS95] gir oss forskjellige funksjoner for den totale potensielle energien per nukleon. Disse nye nukleon-nukleon-vekselvirkningene gir oss likevel relativt like energier per partikkel i nøytronstjernematerie.

Vi vil nå også kort skissere hvordan mer sofistikerte mangelegemeberegninger på tolegemenivået gir lignende resultat for nøytronmaterie. Dette fordi bidrag fra trelegemevekselvirkninger muligens kan endre dette bildet noe.

BHF-metoden i sin enkleste form gir altså ikke en fullgod beskrivelse av kompakt materie. Når man kommer opp til tettheter over metningstettheten n_0 regner man med at mer kompliserte mangelegemeledd får betydning. Slike bidrag kan ha opprinnelse i ting som kjernekjernepolarisasjonseffekter, effektive trelegeme- og mangelegemediagram, og til slutt antas inklusjonen av trelegemekrefter å være viktig ved tettheter over n_0 . Mulige forbedringer på LOB-teorien kan være summasjon til uendelig orden av rekken av partikkel-partikkel hull-hull-diagram(PPHH), tre-hullinjerresultatene til Baldo m.fl. [SBG98], eller beregninger med trelegeme-krefter av Akmal m.fl. [APR98].

Summeringen av PPHH-diagram betyr at Pauli-operatoren blir utvidet for å unngå spredning til hull-hull(HH)-mellomtilstander. I tillegg til å summere partikkel-partikkel(PP)-mellomtilstander opp til uendelig orden, må vi derfor nå også summere en større klasse diagrammer som inneholder HH-mellomtilstander. En av tankene bak PPHH-diagrammetoden for kjernematerie, er slik å inkludere diagram med HH-korrelasjoner til uendelig orden.

Baldo med flere [SBG97, SBG98] beregner summen av såkalte tre-hullinje-diagram. Hele settet av slike tre-hullinje-diagram kan deles inn i tre hovedgrupper, og hver av disse tre-hullinje-bidragene er ganske store. Det er likevel en stor grad av kansellering mellom forskjellige ledd, og det totale tre-hullinje-bidraget blir derfor betydelig mindre enn to-legeme-bidraget. Det interessante med beregningene til Baldo m.fl. [SBG98], er at de fører til resultater for tre-hullinjer, som er nære de totale resultatene for to-hullinjer, da ikke inkludert PPHH-diagram. Til tross for slike metodologiske framskritt, finnes det fremdeles flere klasser med diagram som må summeres. Det kan bevises at det finnes et minste sett av diagrammer som må summeres for å få fysikken til slike mangelegemesystemer til å stemme [HH90]. Dette er den såkalte Parquet-klassen.

Siden denne klassen er vanskelig å summere, har man foretatt beregninger av mangelegemeklaser¹, og det er gjennom dette vi har resultatene fra Akmal, Pandharipande og Ravenhall [APR98]. Dette skal vi ikke gå i detalj i, den interesserte leser kan finne disse beregningene, samt diskusjoner i [APR98,

¹Engelsk "many body clusters" oversettes her med mangelegemeklaser.

HH90].

Som en oppsummering er inklusjonen av fenomenologiske trelegemekrefter i ikke-relativistiske beregninger nødvendige for å bedre metningsegen-skapene i en mikroskopisk beregnet tilstandsligning. Inklusjonen av andre mangelegemeeffekter gir ved lave tettheter resultater som ligner de fra LOB-teori. Selv med trelegemekrefter får man likevel ikke et helt riktig uttrykk for bindingsenergien. Vi må derfor se på ytterligere korreksjoner fra relativistiske effekter.

Egenskapene til nøytronstjerner avhenger av tettheter som er av en størrelsесorden høyere enn den man observerer for vanlige kjerner. Ved slike tettheter vil man støte på relativistiske effekter. Relativistiske tilnærminger, som Dirac-Hartree- og Dirac-Hartree-Fock-tilnærmingen, har blant annet klart å kvantitativt reproduksere spinnobservable som har vært dårlig beskrevet i ikke-relativistisk teori. Introduksjon av en sterkt attraktiv skalarkomponent og en repulsiv vektorkomponent i selvenergien til nukleonet har vært svært viktig for disse metodene. Videre er det utviklet en relativistisk forlengelse av Brueckner-teorien. Denne såkalte Dirac-Brueckner-teorien gir oss selvkonsistente uttrykk for de relativistiske enpartikkelenergiene og bølgefunksjonene. Dirac-Brueckner-teorien tar utgangspunkt i nukleon-nukleon-vekselvirkningene, er basert på mesonutveksling og er en ikke-renormalisabel teori [HH00]. Her benytter man seg av mediemodifiserte størrelser for å finne en relativistisk G -matrise, og det tilhørende enpartikkelpotensialet

$$u_i = \sum_{h \leq k_F} \frac{\tilde{m}_i \tilde{m}_h}{\tilde{E}_i \tilde{E}_h} \langle ih | \tilde{G}(\tilde{E} = \tilde{E}_i + \tilde{E}_h) | ih \rangle_{AS} , \quad (4.5)$$

hvor $\tilde{m} = m + U_S$ og $\tilde{E}_i = \tilde{E}(p_i) = \sqrt{\tilde{m}_i^2 + \mathbf{p}_i^2}$ er mediemodifiserte størrelser for masse og energi, og \tilde{G} er den relativistiske G -matrisen. Ved iterative metoder kan man så finne fram til en relativistisk ligning for energien per nukleon, \mathcal{E}/A .

$$\begin{aligned} \mathcal{E}/A &= \frac{1}{A} \sum_{h \leq k_F} \frac{\tilde{m}_h m + k_h^2}{\tilde{E}_h} + \\ &\quad \frac{1}{2A} \sum_{h \leq k_F, h' \leq k_F} \frac{\tilde{m}_h \tilde{m}_{h'}}{\tilde{E}_h \tilde{E}_{h'}} \langle hh' | \tilde{G}(\tilde{E} = \tilde{E}_h + \tilde{E}_{h'}) | hh' \rangle_{AS} - m . \end{aligned} \quad (4.6)$$

En alternativ framgangsmåte er å inkludere relativistiske boost-korreksjoner til ikke-relativistiske NN-vekselvirkninger. NN-sprednings-dataene reduseres til massesentersystemet, og tilpasses ved hjelp av faseskift beregnet fra NN-vekselvirkningen i den gjeldende referanserammen. Veksel-virkningen man får gjennom denne metoden beskriver NN-vekselvirkningen

i massesentersystemet, hvor den totale bevegelsesmengden, $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j$, er null.

Beregninger på slike effekter gir oss muligheten til å utvikle mer nøyaktige uttrykk for enpartikkelenergien og protonfraksjonene, og gir oss en bedre innsikt i sammensetningen av kompakt materie i nøytronstjerner. I neste avsnitt skal vi se på tilstandslikningen til Akmal m.fl. [APR98] med boost-korreksjoner, og trelegemekrefter.

4.2 Parametrisering av tilstandslikningen for kjernematerie

Siden vi antar at trelegeme-krefter er viktige, vil vi ta i bruk tilstandslikningen til Akmal m.fl. [APR98] i vår diskusjon av den sammensatte fasen og strukturen til en nøytronstjerne. Vi foretrekker her en ikke-relativistisk tilstandslikning med boost-korreksjoner. Opp til noen få ganger metningstettheten, $n_0 = 0,16 \text{ fm}^{-3}$, kjenner vi tilstandslikningen for kjernematerie relativt godt. Detaljert kjennskap til tilstandslikningen er avgjørende for å kunne si noe om eksistensen av f. eks. pionkondensater eller strukturene inne i nøytronstjerner [HH00]. For de mer globale egenskapene til nøytronstjerner, vil vi likevel ta i bruk en enkel form for bindingsenergien per nukleon i kjernematerie. Denne består av et kompresjonsledd og et symmetriledd

$$\mathcal{E} = E_{comp}(n) + S(n)(1 - 2x_p)^2 = \mathcal{E}_0 u \frac{u - 2 - \delta}{1 + \delta u} + S_0 u^\gamma (1 - 2x_p)^2 . \quad (4.7)$$

Her er $u = n/n_0$ forholdet mellom baryontettheten og metningstettheten, og vi har definert protonfraksjonen $x_p = n_p/n$. Kompresjonsleddet er i Ligging (4.7) parametrisert på en enkel form som reproduuserer metningstettheten, bindingsenergien og kompressibiliteten. Bindingsenergien uten Coulombenergier er ved metningstettheten $\mathcal{E}_0 = -15,8 \text{ MeV}$. Parameteren $\delta = 0,2$ bestemmes ved å tilpasse energien per nukleon ved høye tettheter til tilstandslikningen til Akmal m.fl. [APR98] med trelegemekrefter og boost-korreksjoner, hvor man bruker de korrigerte verdiene fra Tabell 6 i [APR98]. Den korresponderende kompressibiliteten er $K_0 = 18 \mathcal{E}_0/(1 + \delta) \simeq 200 \text{ MeV}$, som er i overenstemmelse med den eksperimentelle verdien. For symmetrileddet får vi $S_0 = 32 \text{ MeV}$ og $\gamma = 0,6$ for den beste tilpassingen. I Figur 4.1 sammenligner vi parametriseringen med resultatene fra Akmal m.fl. [APR98]. Som vi ser samsvarer resultatene ganske bra bortsett fra ved svært høye tettheter. Ved disse tetthetene blir tilstandslikningen til Akmal m.fl. [APR98] uansett superluminal, og må da være feil. Akmal m.fl. [APR98] gir en mye mer sofistikert tilpassing, men det er likevel forbløffende at resultater fra en

så enkel kvadratisk formel kan stemme så bra overens med data fra beregninger på mikroskopisk nivå. Når vi ser på usikkerhetene ved tilstandsligninger ved høye tettheter, må man kunne si at denne parametriseringen er innenfor nåværende feilmarginer [HHOO]. Samsvaret mellom de mikroskopiske beregningene til Akmal m.fl. [APR98] og den enkle parametriseringen i Ligning (4.7) kan implisere at den sentrale mangelegemefysikken nær metningstetheten kommer kun fra to- og trelegemeledd i \mathcal{E} . Årsaken til dette er² at trelegemeledd er proporsjonale med n^3 , mens tolegemeledd er proporsjonale med n^2 . Med trelegemeledd mener vi både effektive vekselvirknings, og bidrag fra reelle trelegemekrefter. Beregningen av disse reelle kretene er fremdeles et uløst problem [HHOO].

Dersom vi nå begrenser oppmerksomheten til materie med kun elektroner, kan vi enkelt få et analytisk uttrykk for protonfraksjonen ved hjelp av asymmetriparameteren x . Vi har da likevektstilstandene for materie i β -likevekt i Ligning (4.8)-(4.9),

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e , \quad (4.8)$$

og

$$n_p = n_e , \quad (4.9)$$

hvor μ_i og n_i er det kjemiske potensialet og antallstettheten i fm^{-3} av partikkelsort i . Når man så bruker definisjonen av det kjemiske potensialet

$$\mu_i = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_i} \right) , \quad (4.10)$$

finner man at

$$\mu_e = \frac{1}{n} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_p} . \quad (4.11)$$

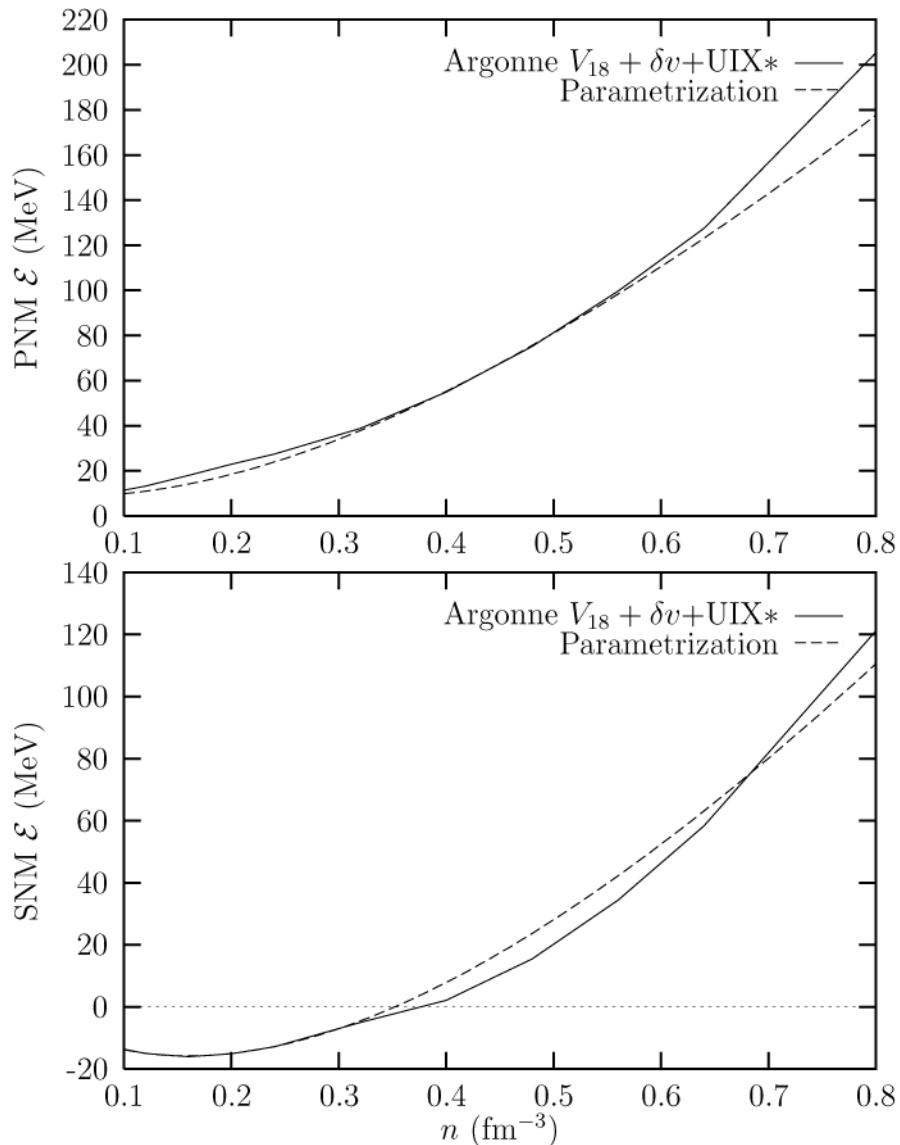
Når man så antar ultrarelativistiske elektroner, finner man lett at protonfraksjonen er gitt ved

$$nx_p = \frac{(4S_0 u^\gamma (1 - 2x_p))^3}{3\pi^2} . \quad (4.12)$$

Når vi definerer

$$a = \frac{2(4S_0 u^\gamma)^3}{\pi^2 n} . \quad (4.13)$$

²Dette argumentet er for energitettheten, $\varepsilon = \mathcal{E}n$.



Figur 4.1: Øverste panel: Sammenligning av den parametriserte tilstandslikningen fra Ligning (4.7) og resultatene til Akmal m.fl. [APR98] med boost-korreksjoner og trelegemekrefter for ren nøytronmaterie. Nederste panel: De korresponderende resultatene for standard kjernematerie.

reduseres Ligning (4.12) til

$$3x^3 + ax - a = 0 \quad , \quad (4.14)$$

hvor $x = 1 - 2x_p$. Siden vi alltid ser på løsninger for tettheter over null, vil tredjegradslikningen for x ha en analytisk løsning som er reell og gitt ved

$$x = -\frac{2\sqrt{a}}{\tan(2\psi)} \quad , \quad (4.15)$$

med $\tan\psi = (\tan\frac{\phi}{2})^{\frac{1}{3}}$ og $\tan\phi = -2\sqrt{a}/3$. Legg merke til at x kun avhenger av den totale baryontettheten n . Dette betyr at vår parametrisering av tilstandsligningen nå kan skrives om for materie i β -likevekt som

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 u \frac{u - 2 - \delta}{1 + \delta u} + S_0 u^\gamma \left(\frac{2\sqrt{a}}{\tan(2\psi)} \right)^2 \quad , \quad (4.16)$$

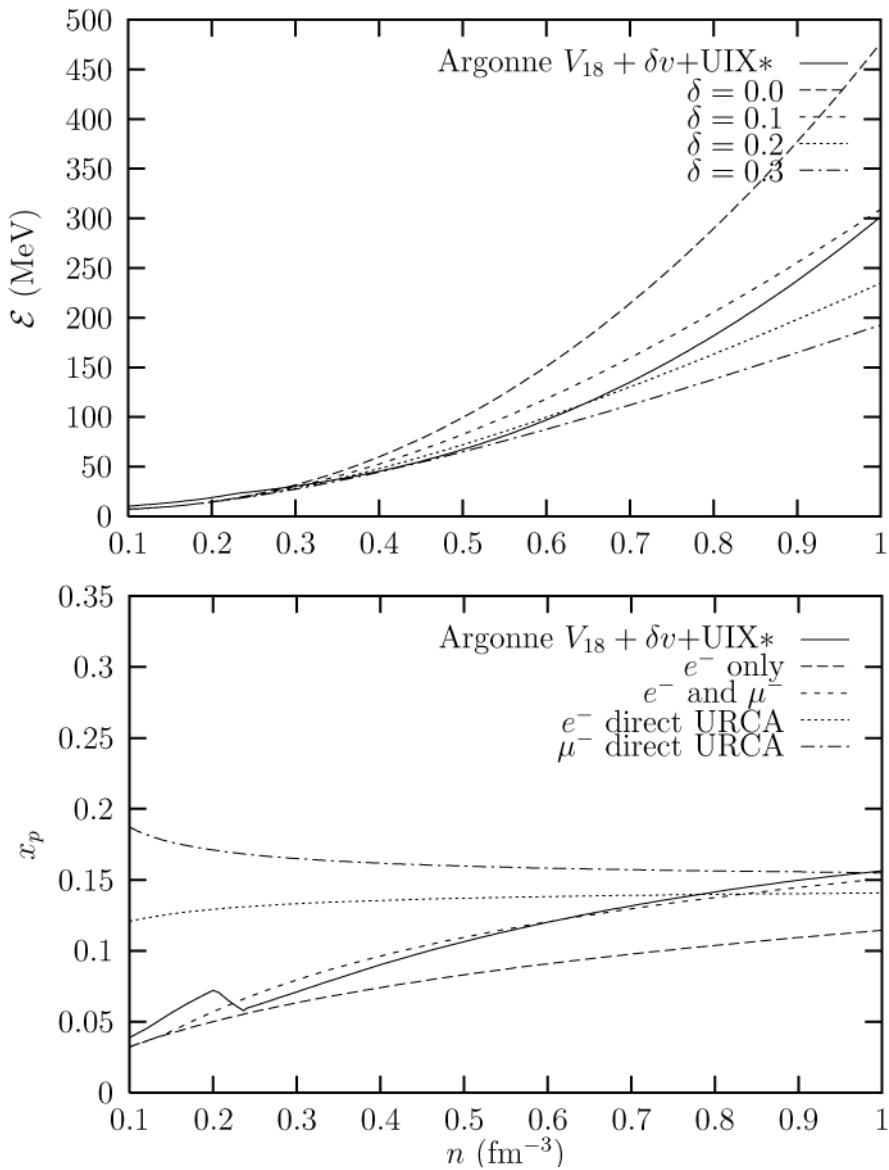
hvor \mathcal{E} er en analytisk funksjon kun av tettheten.

I Figur 4.2 ser vi de kvalitative resultatene for andre observable enn energien per partikkel for protonfraksjoner hentet fra de enkle uttrykkene i Ligning (4.15) for denne approksimasjonen til tilstandsligningen til Akmal m.fl. [APR98].

I den samme figuren viser vi også den resulterende energien per nukleon i materie i β -likevekt, og sammenligner den med resultatene fra Akmal m.fl. [APR98] for forskjellige verdier av δ . Legg merke til at protonfraksjonen ikke avhenger av verdien på δ , se Ligning (4.12). Som vi slik kan se, er tilstandsligningen med $\delta = 0$ den stiveste, og gir slik en superluminal oppførsel ved tettheter større enn $n \approx 1.0 \text{ fm}^{-3}$. Formen på (4.7), med δ , gir oss en glatt ekstrapolasjon for små og store tettheter med en korrekt oppførsel i begge grensene. Bindingsenergien per nukleon $E/A = \mathcal{E}$ er lineær med hensyn på antallstettheten. I den fortynnede grensen er dette det optiske Lenz-potensialet. Ved høye tettheter kreves linearitet ved betingelsen at lydhastigheten $v_s^2 = \partial P / \partial \varepsilon$ ikke skal overgå lyshastigheten. Dette rettferdiggjør introduksjonen av parameteren δ i parametriseringen og forklarer avviket fra resultatene til Akmal m.fl. [APR98] ved tettheter større enn $0.6 \sim 0.7 \text{ fm}^{-3}$, se Figurene 4.1 og 4.2.

4.3 Hyperonmaterie

Ved kjernetettheten er elektronets kjemiske potensial $\sim 110 \text{ MeV}$. Med en gang man har overskredet hvilemassen til myonet, blir det energetisk gunstig



Figur 4.2: Øverste panel: Energi per nukleon uten leptonbidrag i β -stabil materie for den parametriserte tilstandslikningen i Ligning (4.7) for $\delta = 0, 0.13, 0.2, 0.3$ og resultatene fra Akmal m.fl. [APR98] med boost-korreksjoner og trelegeme-krefter. Nederste panel: Den korresponderende protonfraksjonen x_p .

for et elektron øverst i Fermioverflaten å desintegrere til et μ^- . På denne måten får vi en sjø av degenererte negative myoner.

På samme måte kan energetiske nøytroner desintegrere til Λ -hyperoner, når det kjemiske potensialet til nøytronene blir tilstrekkelig stort. Dette skjer gjennom svake vekselvirkninger som ikke bevarer sertallet, noe som fører til en Λ -Fermisjø, med $\mu_\Lambda = \mu_n$. Dersom vi neglisjerer vekselvirkningene, eller antar at effekten deres er liten, vil vi anta at Σ^- dukker opp ved lavere tettheter enn Λ , via

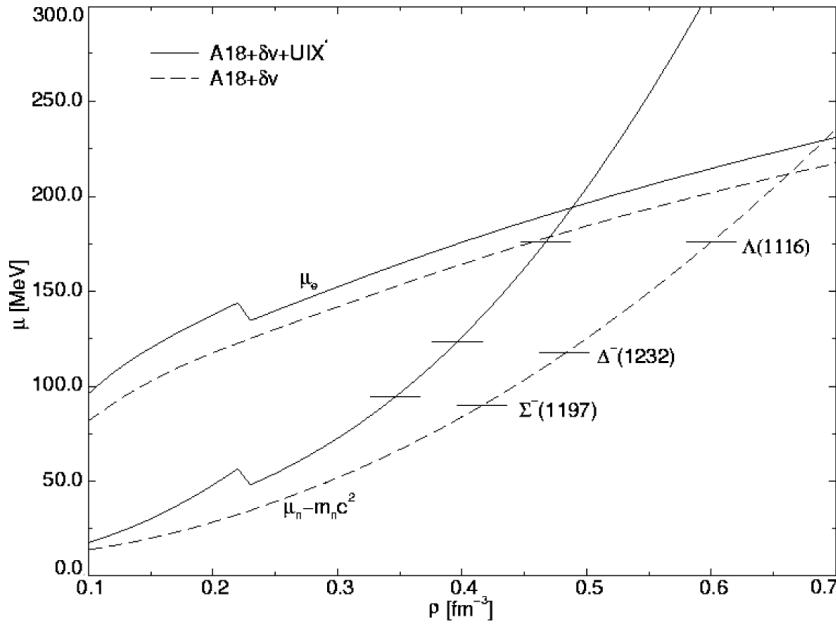
$$e^- + n \rightarrow \Sigma^- + \nu_e , \quad (4.17)$$

selv om Σ^- er mer massiv. Årsaken til dette er at den overstående prosessen fjerner både et energetisk nøytron, og et energetisk elektron, mens desintegrasjonen til en Λ , som er nøytral, kun fjerner nøytronet. De negativt ladede hyperonene opptrer i grunntilstanden til materien når massene deres tilsvarer $\mu_e + \mu_n$, mens det nøytrale hyperonet Λ først opptrer når μ_n tilsvarer dets masse. I og med at det kjemiske potensialet til elektronet er større enn massedifferensen $m_{\Sigma^-} - m_\Lambda = 81,76$ MeV, vil Σ^- opptre ved lavere tettheter enn Λ . Vi viser dette i Figur 4.3 hvor vi plotter de kjemiske potensialene for elektroner og nøytroner i materie i β -likevekt. Terskeltetthetene for Σ^- , Λ og isobaren Δ^- indikeres av de horisontale linjene.

Siden vi her setter fokus på mangelegemetlnæringer, vil vi starte med parametriseringen av de frie baryon-baryon-potensialene for den komplette baryonoktetten som er definert av Stoks og Rijken i [SL99] og videre brukt i [HH00]. Denne potensialmodellen søker å beskrive alle vekselvirkningskanaler med sertall fra $S = 0$ til $S = -4$, og den er basert på SU(3)-utviklingene fra Nijmegen-potensialmodellene [RSY98] for $S = 0$ og $S = -1$ -kanalene. Disse tilpasses de tilgjengelige eksperimentelle data, og setter føringer på de frie parameterene i modellen. I vår diskusjon bruker vi vekselvirkningsversjonen NSC97e fra Referanse [SR99], siden dette ikke endrer resultatene for materie i β -likevekt i betydelig grad.

Det neste skrittet introduserer effektene fra det kjernefysiske mediet. Vi konstruerer G -matrisen, som tar korrelasjoner med kort rekkevidde med i beregningen for alle sertall, og løser ligningen for en-partikkelenergiene til de forskjellige baryonene. G -matrisen er gitt ved

$$\begin{aligned} \langle B_1 B_2 | G(\omega) | B_3 B_4 \rangle &= \langle B_1 B_2 | V | B_3 B_4 \rangle + \\ &\sum_{B_5 B_6} \langle B_1 B_2 | V | B_5 B_6 \rangle \frac{1}{\omega - \varepsilon_{B_5} - \varepsilon_{B_6} + i\eta} \\ &\times \langle B_5 B_6 | G(\omega) | B_3 B_4 \rangle . \end{aligned} \quad (4.18)$$



Figur 4.3: Det kjemiske potensialet for nøytroner og elektroner i materie i β -likevekt etter modellene $V_{18} + \delta v + \text{UIX}^*$ (heltrekt linje) og $V_{18} + \delta v$ (stiplet linje). Terskeltetthetene for når ikke-vekselvirkende hyperoner dukker opp blir markert av horisontale linjesegmenter. Fra Referanse [APR98].

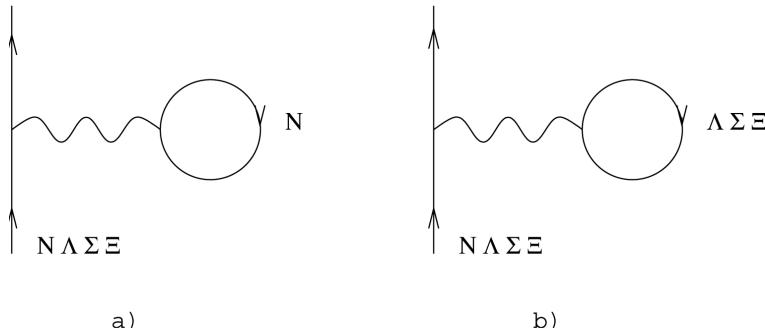
Her representerer B_i alle mulige baryoner n , p , Λ , Σ^- , Σ^0 , Σ^+ , Ξ^- og Ξ^0 og kvantetallene som spinn, isospinn, særtall, bevegelsesmengde og drivmoment. Mellomtilstandene B_5B_6 er de som tillates etter Pauliprinsippet, og energivariabelen ω er startenergien som er definert av enpartikkelennergiene til de innkommende eksterne partiklene B_3B_4 . G -matrisen løses ved å bruke relative- og massesenter-koordinater, se for eksempel [SL99] for detaljer. En-partikkelennergiene er gitt ved

$$\varepsilon_{B_i} = t_{B_i} + u_{B_i} + m_{B_i} , \quad (4.19)$$

hvor t_{B_i} er den kinetiske energien, og m_{B_i} er massen til baryon B_i . En-partikkelpotensialet u_{B_i} er definert ved

$$u_{B_i} = \text{Re} \sum_{B_j \leq F_j} \langle B_i B_j | G(\omega = \varepsilon_{B_j} + \varepsilon_{B_i}) | B_i B_j \rangle . \quad (4.20)$$

Bevegelsesmengden til mellomtilstanden B_j begrenses av størrelsen på Fermioverflaten F_j for partikkelslag B_j . Den siste ligningen er i form av Goldstone-diagram i Figur 4.4. Diagram (a) representerer bidrag fra kun nukleoner



Figur 4.4: Goldstonediagram for en-partikkelpotensialet u . a) representerer bidraget fra kun nukleoner som hulltilstander mens b) kun inkluderer hyperoner som hulltilstander. Den bølgende linjen representerer G -matrisen.

som hulltilstander, mens diagram (b) har kun hyperoner som hulltilstander i tilfelle vi har en endelig hyperonfraksjon i nøytronstjernematerie i β -likevekt.

For å tilfredsstille ligningene for materie i β -likevekt,

$$\begin{aligned}\mu_{\Sigma^-} &= \mu_{\Delta^-} = \mu_n + \mu_e , \\ \mu_\Lambda &= \mu_{\Sigma^0} = \mu_{\Delta^0} = \mu_n , \\ \mu_{\Sigma^+} &= \mu_{\Delta^+} = \mu_p = \mu_n - \mu_e , \\ \mu_{\Delta^{++}} &= \mu_n - 2\mu_e ,\end{aligned}\tag{4.21}$$

må vi løse Ligningene (4.18) og (4.19) for å finne en-partikkelenergiene til partiklene som er involvert ved de korresponderende Fermimomentene. For enhver total baryontetthet $n = n_N + n_Y$, tettheten av nukleoner pluss hyperoner, blir Ligningene (4.18) og (4.19) løst for fem nukleonfraksjoner og fem hyperonfraksjoner. For hver nukleon- og hyperonfraksjon er det beregnet tre protonfraksjoner og tre fraksjoner for relevante hyperoner. Ligningssettet i Ligning (4.21) løses så ved interpolasjon mellom forskjellige nukleon- og hyperonfraksjoner [HH00].

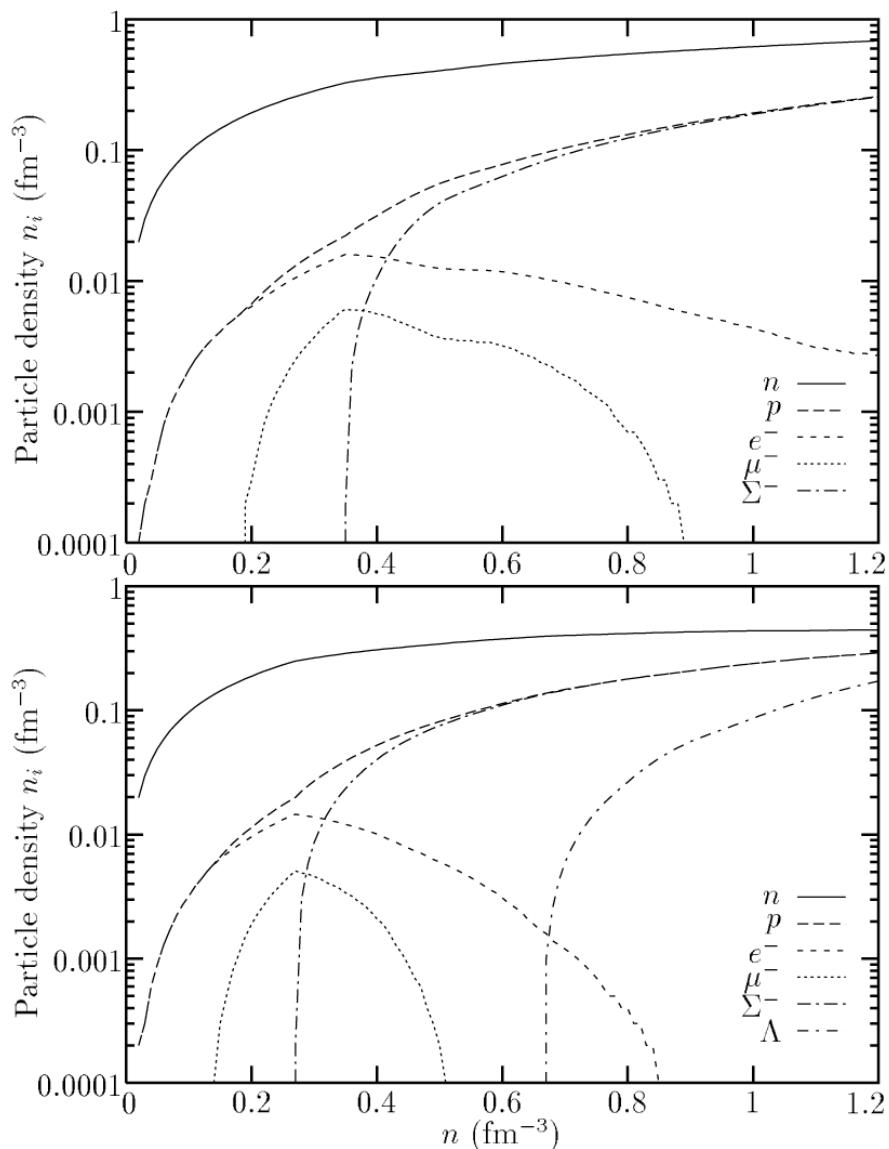
Mangelegemefremgangsmåten som er skissert over er Brueckner-Hartree-Fock(BHF)-metoden til laveste orden, utvidet til hyperonsektoren. Dette betyr at vi bare ser på tolegemevekselvirkninger. Det er velkjent fra studier av kjernematerie og nøytronstjernematerie med kun nukleonfrihetsgrader at trelegemevekselvirkninger er viktige for å reproduksere metningsegenskapene til kjernematerie, se [APR98, HH00]. For å inkorporere slike effekter erstatter vi det bidraget til protoner og nøytroners selvenergi som kommer kun fra mellomtilstandene (se Diagram (a) i Figur 4.4) med det fra [APR98].

Her blir Argonne V_{18} nukleon-nukleon-vekselvirkningen brukt med relativistiske boost-korreksjoner og en tilpasset trelegemevekselvirkningsmodell. Vi bruker parametrisingen fra Ligning (4.7) med $\delta = 0, 2$. I diskusjonen under vil vi presentere to sett med resultater for materie i β -likevekt, en hvor nukleonbidragene til selvenergien er hentet fra baryon-baryon-potensialmodellen til Stoks og Rijken [SR99], og en hvor nukleonbidragene blir erstattet med resultatene fra [APR98] ved parametrisingen diskutert i Ligning (4.7). I diskusjonen i denne seksjonen vil vi merke disse resultatene med APR98. Alle hyperonbidragene blir likevel beregnet med baryon-baryon-vekselvirkningen til Stoks og Rijken [SR99].

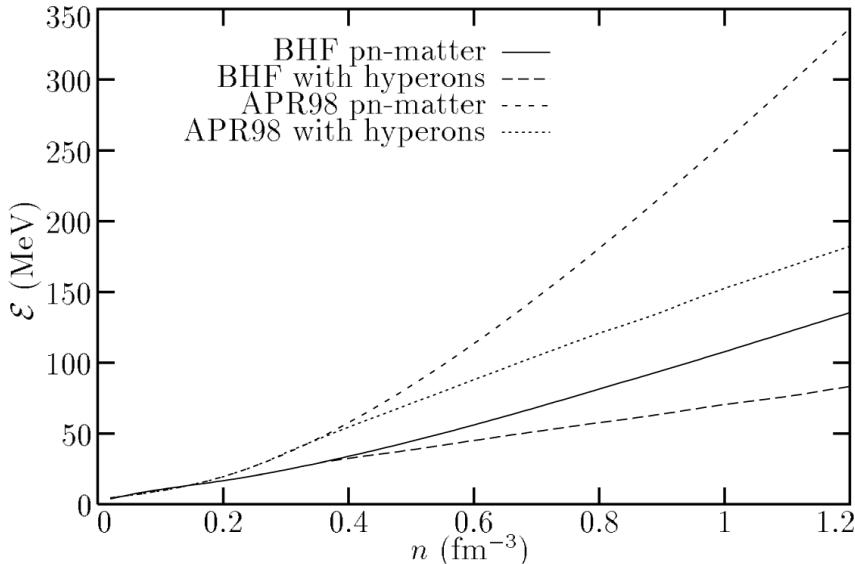
Disse modellene for den rene nukleondelen kombinert med hyperonbidraget gir sammensetningen av materie i β -likevekt, opp til den totale antallstettheten for baryonene $n = 1, 2 \text{ fm}^{-3}$, vist i Figur 4.5. De korresponderende energiene per baryon er vist i Figur 4.6 for både ren nukleonmaterie (BHF og APR98 med ren nukleonmaterie) og hyperonmaterie (BHF og APR98 med hyperoner) i β -likevekt for de samme baryontettheter som i Figur 4.5.

For begge beregningsmetodene dukker Σ^- opp ved tettheter på $\sim 2 - 3 n_0$. Siden tilstandsligningen i APR98 gir en stivere tilstandsligning for nukleonmaterie enn den korresponderende BHF-beregningen, dukker Σ^- opp ved $n = 0, 27 \text{ fm}^{-3}$ for APR98-tilstandsligningen og ved $n = 0, 35 \text{ fm}^{-3}$ for BHF-tilstandsligningen. Disse resultatene stemmer rimelig bra overens med beregninger fra midlere feltteori, se blant annet [HH00, Gl00, PBP97].

Introduksjonen av hyperoner gir en betydelig mykere tilstandsligning. I tillegg forsvinner ofte leptonene når hyperoner dukker opp. I APR98 forsvinner de fullstendig, mens det i BHF-beregningene bare er myonene som forsvinner. Dette kommer av at Λ ikke dukker opp i BHF-tilstandsligningen ved de tetthetene som er tatt med her. For APR98-tilstandsligningen, dukker Λ opp ved en tetthet på $n = 0, 67 \text{ fm}^{-3}$. Når vi så husker at vi har $\mu_\Lambda = \mu_n = \mu_p + \mu_e$, og at APR98-tilstandsligningen er stivere på grunn av inklusjonene av trelegemekrefter, øker dette mulighetene til å skape et Λ -hyperon med APR98-tilstandsligningen. I tillegg til den mykere tilstandsligningen, kan det faktum at Λ ikke dukker opp i BHF-beregningene også skyldes den delikate balansen mellom bidragene til selvenergien til baryonene fra nukleon- og hyperon-hulltilstandene. Se Diagram (a) og (b) i Figur 4.4. Disse bidragene bidrar slik også til å forme egenskapene til baryon-baryon-vekselvirkningen. Bidragene til det kjemiske potensialet til Λ fra hulltilstandene til Σ^- , protonet og nøytronet er dermed ikke attraktive nok til å senke det kjemiske potensialet til Λ ned på nivået til nøytronet. Videre øker ikke det kjemiske potensialet til nøytronet tilstrekkelig, siden bidragene til selvenergien fra hulltilstandene til Σ^- er attraktive. Vi illustrerer forskjellen mellom de to valgene for tilstandsligning i Figur 4.7, gjennom det kjemiske



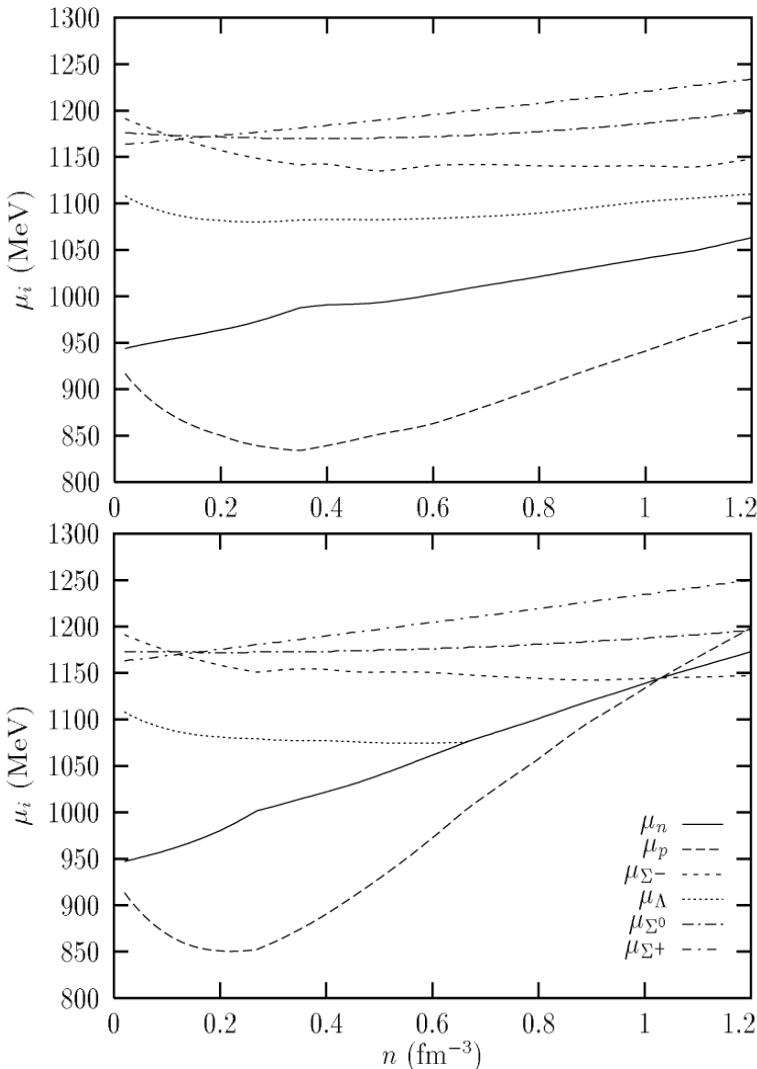
Figur 4.5: Partikkeltettheter i nøytronstjernematerie i β -likevekt som funksjoner av den totale baryontettheten n . Det øverste panelet representerer resultater fra Brueckner-Hartree-Fock-nivået med potensialet fra Stoks og Rijken [SR99]. I det nederste panelet har nukleondelen av selvenergien blitt erstattet med tilstandslingen fra Ligning (4.7) med $\delta = 0, 2$.



Figur 4.6: Energi per baryon i nøytronstjernematerie i β -likevekt for forskjellige tilnæringer som funksjon av den totale baryontettheten n . Se teksten for ytterlige detaljer.

potensialet for forskjellige baryoner for materie i β -likevekt. Vi legger også merke til at når vi bruker kriteriene fra Ligning (4.21), dukker verken Σ^0 eller Σ^+ opp for verken BHF- eller APR98-tilstandslingene. Dette kommer av at ingen av Σ^0 -baryon- og Σ^+ -baryon-vekselvirkningene er attraktive nok. Et lignende argument brukes på Ξ^0 og Ξ^- . I det siste tilfellet er massen til partikkelen ~ 1315 MeV og man trenger en tiltrekning på nesten 200 MeV for å tilfredsstille betingen $\mu_\Lambda = \mu_{\Xi^0} = \mu_n$. Fra det nederste panelet i Figur 4.7 ser vi likevel at Σ^0 kan dukke opp ved tettheter nær $1,2$ fm $^{-3}$.

Ved å bruke den parametriserte tilstandslingingen til Akmal m.fl. [APR98] fra Ligning (4.7) for nukleonsektoren og å inkluderer hyperoner gjennom modellen for baryon-baryon-vekselvirkningen til Nijmegen-gruppen [SR99], finner vi altså gjennom mangelegemeberegninger for materie i β -likevekt at Σ^- dukker opp ved en tetthet på $n = 0,27$ fm $^{-3}$, mens Λ dukker opp ved $n = 0,67$ fm $^{-3}$. Gjennom dannelsen av hyperoner de-leptoniseres materien ved en tetthet på $n = 0,85$ fm $^{-3}$. Innenfor vår mangelegemetilnærming opptrer ingen hyperoner ved tettheter under $n = 1,2$ fm $^{-3}$. Selv om tilstandslingingene til Akmal m.fl. [APR98] kan sees som den i dag mest realistiske tilnærmingen til en nukleontilstandsling, må vi ta med i beregningen den usikkerheten vi har i hyperon-hyperon- og nukleon-hyperon-vekselvirkningene. Dersom for eksempel hyperon-hyperon-vekselvirkningen



Figur 4.7: Kjemiske potensial i nøytronstjernematerie i β -likevekt som funksjon av den totale baryontettheten n . Det øverste panelet representerer resultatene som er oppnådd på Brueckner-Hartree-Fock-nivået med potensialet fra Stoks og Rijken [SR99]. Det nederste panelet inkluderer resultat fra tilstandslikningen i Ligning (4.7) med $\delta = 0, 2$.

viser seg å være mer attraktiv enn antatt, kan dette føre til formasjonen av hyperoner som Λ , Σ^0 , Σ^+ , Ξ^- og Ξ^0 ved lavere tettheter. Hyperon-hyperon-vekselvirkningen og stivheten i nukleonbidraget spiller en avgjørende rolle i formasjonen av forskjellige hyperoner. Disse resultatene skiller seg fra nåværende middlere feltberegninger, se for eksempel [**G100**, **PBP97**], hvor alle typer hyperoner kan opptre ved de tetthetene som er vurdert her.

Kapittel 5

Kjølingsprosesser

5.1 Kjølingsprosesser i nøytronstjerner

Bestemmelse av overflatetemperaturen til nøytronstjerner ved observasjon av termisk svart stråling, kan prinsipielt gi oss betydelig informasjon om den indre hadronmaterien og nøytronstjernens struktur. Nøytronstjerner blir antagelig formet under svært høye indre temperaturer, $T > 10^{10}$ K, i sentrum av en supernovaeksplosjon [KW90]. Den dominante kjølingsmekanismen like etter formasjonen er nøytrinoemisjoner med en initiell kjølings-tidsskala på sekunder. Etter omkring en dag synker den interne temperaturen til omkring 10^9 K. Nøytrinoprosessene dominerer i minst 1000 år og antagelig mye lenger (i ca 100.000 år). Fotonemisjon tar over for nøytrinoavkjøling først når den indre temperaturen i stjernen faller til omkring 10^8 K. Dette tilsvarer en overflatetemperatur på omkring 10^6 K.

Beregninger på den termiske utviklingen til stjernen blir slik svært sensitive overfor den valgte tilstandsligning, nøytronstjernens masse og radius, den magnetiske feltstyrken, mulig eksistens av superfluiditet, pionkondensasjon, kvarkmaterie osv. Resultater antyder at vi får detekterbare fotonemisjoner først i røntgenområdet (soft X-ray band), og unge nøytronstjerner kan bli detektert som diskrete røntgenkilder (forskjellige fra pulsarer i binære systemer som sender ut røntgenstråling etter masseoverføring fra kompanjongen).

Den første kjølingsperioden etter at den indre temperaturen har falt under 10^{10} K er som sagt dominert av nøytrinomitterende kjølingsprosesser. Dette siden ethvert emitterte nøytrino fritt kan unnslippe fra nøytronstjernen, uten å vekselvirke ytterligere med materien i den. Ved svært høye temperaturer $T > 10^9$ K er den dominerende prosessen antagelig de direkte Urca-prosessene

som går som

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e , \quad (5.1)$$

eller

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e . \quad (5.2)$$

Vi har tilsvarende struktur for andre Urca-prosesser, som

$$\Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e , \quad (5.3)$$

$$\Sigma^- \rightarrow n + e + \bar{\nu}_e , \quad (5.4)$$

$$\Sigma^- \rightarrow \Lambda + e + \bar{\nu}_e , \quad (5.5)$$

$$\Sigma^- \rightarrow \Sigma^0 + e + \bar{\nu}_e , \quad (5.6)$$

$$\Xi^- \rightarrow \Lambda + e + \bar{\nu}_e , \quad (5.7)$$

$$\Xi^- \rightarrow \Sigma^0 + e + \bar{\nu}_e , \quad (5.8)$$

$$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ + e + \bar{\nu}_e , \quad (5.9)$$

$$\Xi^- \rightarrow \Xi^0 + e + \bar{\nu}_e , \quad (5.10)$$

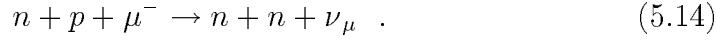
og vi har også tilsvarende prosesser hvor myoner erstatter elektronene.

Ved siden av disse prosessene har vi modifiserte Urca-prosesser, av typen

$$n + n \rightarrow n + p + e^- + \bar{\nu}_e , \quad (5.11)$$

$$n + p + e^- \rightarrow n + n + \nu_e , \quad (5.12)$$

$$n + n \rightarrow n + p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu , \quad (5.13)$$



Disse skiller seg som vi ser fra de direkte Urca-prosessene ved tilstedevarelsen av en følgepartikkelen som gir tilstrekkelig energi til at reaksjonen kan gjennomføres.

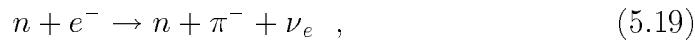
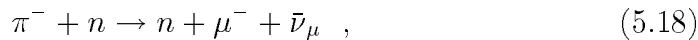
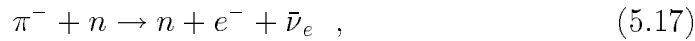
Andre mulige reaksjoner er nukleonpar-bremsestråling



nøytrinopar-bremsestråling



pionreaksjoner



og β -henfall med kvarker



Fotonluminositeten får vi ved å anta svartlegeme-fotonemisjon fra overflaten ved en ”effektiv” overflatetemperatur. Hvis nøytrinoluminositeten er kjent, kan vi deretter beregne tidsskalaen for kjøling og få ut temperaturen til en nøytronstjerne som en funksjon av tiden.

Eksistensen av pionkondensater eller kvarkmaterie burde akselerere kjølingen dramatisk. Eksistensen av superfluide lag burde minske varmekapasiteten og kjølingstida, men også undertrykke nøytrinoproducerende prosesser hvilket vil øke kjølingstida. Magnetfeltet burde redusere fotonets opasitet og øke overflatetemperaturen og fotonluminositeten. Forskjellige beregnede kjølingskurver fra forskjellige modeller kan sammenlignes med observasjoner fra reststjernene etter supernovaeksplosjoner [Øs89].

I denne oppgaven skal vi nå se nærmere på direkte Urca, beregne nøytrinoemisjoner for de forskjellige prosessene og lage profiler av disse for forskjellige tettheter.

5.2 Direkte Urca

5.2.1 Direkte Urca-prosesser

Den direkte Urca-prosessen antas å være sentral i kjølingen av nøytronstjerner. De direkte Urca-prosessene er de enkleste nøytrinomitterende prosessene, og har en generell form

$$B_1 \rightarrow B_2 + l + \bar{\nu}_l , \quad (5.25)$$

$$B_2 + l \rightarrow B_1 + \nu_l , \quad (5.26)$$

hvor B_1 og B_2 er baryoner, og l er et lepton. Baryonene kan være nukleoner, men også hyperoner som Λ , Σ og Ξ , eller isobarer som Δ^0 og Δ^- . Leptonet er enten et elektron eller et myon. Betalikevekt krever at de kjemiske potensialene tilfredsstiller

$$\mu_{B_1} = \mu_{B_2} + \mu_l . \quad (5.27)$$

Vi må også ha tilfredsstilt bevaring av bevegelsesmengde, som vi uttrykker gjennom trekantulikheten

$$p_{F_i} + p_{F_j} \geq p_{F_k} , \quad (5.28)$$

hvor i , j og k tilsvarer B_2 , l og B_1 . De sykliske permutasjonene av denne må også tilfredsstilles, og vi får slik tre ligninger. Når disse ligningene ikke er tilfredsstilt, er det de *modifiserte* Urca-prosessene som er de dominerende mekanismene for nøytrinoemisjonen [Pr94].

5.2.2 Direkte Urca med nukleoner

Den direkte Urca-prosessen med nukleoner er den enkleste og kraftigste nøytrinoprosessen. Den består av to etterfølgende reaksjoner, β -henfall og β -innfangning,

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e, \quad n + e \rightarrow p + \nu_e . \quad (5.29)$$

Dette er den viktigste prosessen i kjernen til en nøytronstjerne. Prosessen fører nukleonene i β -likevekt, hvor de kjemiske potensialene altså tilfredsstiller

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e . \quad (5.30)$$

Dersom likevekten ikke er nådd, vil den ene reaksjonen etter Le Chatelieres prinsipp bli mer intens, og endre proton- og nøytronfraksjonen mot likevektsverdien. Likevekt har vi når begge reaksjonene har samme reaksjonsrate.

Den direkte Urca-prosessen endrer altså ikke materiens sammensetning i β -likevekt. Den viktigste egenskapen ved prosessen er terskelen, beskrevet ved step-funksjonen

$$\theta(p_F^e + p_F^p + p_F^n) , \quad (5.31)$$

som uttrykker oppfyllelsen av trekantulikheten (se Ligning (5.28)). Step-funksjonen starter på denne måten den direkte Urca-prosessen når tettheten i materien blir tilstrekkelig høy, dvs. når bevegelsesmengdene tilfredsstiller denne trekantulikheten. I nøytronstjernematerie er p_F^n større enn p_F^p og p_F^e , og vi får slik Ligning (5.31). Når tettheten n er tilnærmet lik standard kjernekjetethet n_0 , har vi typisk at p_F^n er ca 340 MeV/c mens p_F^e og p_F^p er ca (60-100) MeV/c. Da er trekantulikheten ikke oppfylt, og den direkte Urca-prosessen med nukleoner er forbudt. Siden p_F^p og p_F^e vokser hurtigere med økt tetthet enn p_F^n , kan prosessen starte ved litt høyere tettheter (noen ganger n_0). Formelt er den direkte Urca-prosessen altså tillatt dersom protonfraksjonen blant baryonene overstiger en bestemt kritisk verdi, og vi skal nå gi et eksempel på beregning av kritisk protonfraksjon med npe-materie:

Kjemisk likevekt gir oss altså:

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e . \quad (5.32)$$

Videre må vi kreve at stjernematerien skal være elektrisk nøytral

$$n_e = n_p , \quad (5.33)$$

som gir

$$\frac{p_{F_e}^3}{3\pi^2\hbar^3} = \frac{p_{F_p}^3}{3\pi^2\hbar^3} , \quad (5.34)$$

som da igjen selvfølgelig gir $p_{F_e} = p_{F_p}$. Protonfraksjonen er definert som

$$x_p = \frac{n_p}{n_n + n_p} . \quad (5.35)$$

Denne må da tilfredsstille

$$x_p = \frac{n_p}{n_n + n_p} \geq \frac{p_{F_p}^3}{p_{F_p}^3 + (p_{F_p} + p_{F_p})^3} . \quad (5.36)$$

Den kritiske protonfraksjonen x_p^c , blir da gitt ved

$$x_p \geq \frac{1}{1 + (\frac{p_{F_e}}{p_{F_p}})^3} \geq \frac{1}{9} , \quad (5.37)$$

siden

$$p_{F_e} + p_{F_p} \geq p_{F_n} . \quad (5.38)$$

I de enkleste modellene hvor kompakt materie behandles, som en ideell gass av fermi-partikler (se f.eks [ST83]), er ikke protonfraksjonen tilstrekkelig høy ved noen tettheter. Dette trenger likevel ikke være slik for mer realistiske tilstandsligninger (se f.eks. [LPP91]). For enkelte mer realistiske modeller for nøytronstjernematerie overskridt protonfraksjonen den kritiske verdien ved tettheter tilsvarende noen ganger standard kjernetetthet (n_0). De tilstandsligningene som gir høyest protonfraksjon, og dermed høyest sannsynlighet for tilstedeværelse av den direkte Urca-prosessen, er tilstandsligninger med høy symmetrienergi. Disse vil tillate direkte Urca-prosesser med nukleoner i kjerner av nøytronstjerner mer massive enn $1,4\text{-}1,6 M_\odot$.

Step-funksjonen (5.31) slår altså på den direkte Urca-prosessen i et trinn, hvor emissiviteten hopper opp fra null til dens endelige verdi straks tetheten når den kritiske terskelen. Dette er naturligvis en approksimasjon. (Denne kommer fra faseromsoppsplittingen vi gjør i beregningene.) I virkeligheten eksisterer den direkte Urca-prosessen også under denne kritiske tettheten, men den blir svært sterkt undertrykt. Da materien er svært degenerert blir den redusert eksponensielt. Emissiviteten blir undertrykt tilnærmet etter funksjonen $\exp(-\chi)$, hvor $\chi = -v_{F_p}(p_{F_n} - p_{F_p} - p_{F_e})/T$ [YKG01]. Denne effekten blir ofte referert til som termisk "broadening" av den direkte URCA-terskelen. For kvalitativt å gjøre rede for denne effekten er det tilstrekkelig å erstatte step-funksjonen θ med en approksimativ funksjon av formen $(e^\chi + 1)^{-1}$. Denne termiske "broadening"-mekanismen virker likevel å være svak og uviktig for mange applikasjoner.

5.2.3 Direkte Urca med myoner

Vi vil nå se på direkte Urca-prosesser som involverer andre partikler enn n , p og e . Dersom myoner er tilstede kan vi ha den samme prosessen som beskrevet over med nukleoner, bare at myoner nå erstatter elektronene:

$$n \rightarrow p + \mu + \bar{\nu}_\mu, \quad \mu + p \rightarrow n + \nu_\mu . \quad (5.39)$$

Denne prosessen kommer da i tillegg til prosessen med elektroner. Emissiviteten blir gitt ved samme ligning som for den grunnleggende nukleonprosessen over, siden betingelsen om betalikevekt krever at de kjemiske potensialene for elektroner og myoner er like, $\mu_\mu = \mu_e$. Forskjellen mellom prosessene kommer i terskelen. Step-funksjonen $\theta(p_F^e + p_F^p + p_F^n)$ må i reaksjonen med myoner erstattes med step-funksjonen $\theta(p_F^\mu + p_F^p + p_F^n)$. Myonprosessen vil slik starte ved en noe høyere tetthet enn den tilsvarende reaksjonen med elektroner. Emissiviteten når prosessen begynner å gå er helt lik. Straks myonprosessen begynner å gå, vil den totale emissiviteten slik fordobles.

5.2.4 Direkte Urca med hyperoner

Dersom tilstandslikningen til nøytronstjernens kjerne tillater tilstedeværelse av hyperoner, kan vi også få direkte Urca-prosesser med hyperoner. Dette vil si prosesser som

$$\Lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e ,$$

eller tilsvarende med Σ eller andre hyperoner, og eventuelt også disse prosessene med myoner. Nøytrinoemissiviteten blir beregnet på akkurat samme måte som for den direkte Urca-prosessen med nukleoner. Endringen ligger i at vi får noe andre konstanter C , f_1 og g_1 . Dette kommer vi tilbake til i utregningen for emissiviteten nedenfor.

Kapittel 6

Nøytrinoemissivitet

Materien i en nøytronstjerne kan, som vi har sett på tidligere, inneholde mange typer partikler. Foruten nukleoner, som nøytroner, protoner og α -partikler, og elektroner og positroner, kan vi også ha tilstedeværelse av hyperoner som for eksempel Λ - og Σ -partikler med tilsvarende enda flere mulige reaksjoner. Dette gjør problemet med å finne materiesammensetningen svært komplisert, noe som igjen reflekteres i problemet med å finne mest mulig korrekte estimat for nøytrinoemisjonsraten, og dermed også avkjølingsraten til nøytronstjerner. Når problemet med materiesammensetningen blir løst, kan nøytrinoemisjonsraten fra betaprosessene finnes ved å summere bidraget fra alle de forskjellige reaksjonene.

6.1 Nøytrinoemissivitet fra den direkte Urca-prosessen

Vi skal nå utlede det analytiske uttrykket for nøytrinoemissiviteten fra den direkte Urca-prosessen. Vi setter $\hbar = c = 1$, og alle bevegelsesmengder er firerbevegelsesmengder der annet ikke er oppgitt. Vi vil her anta at nøytrinoene unnslipper momentant, uten å interferere med stjernematerien. Dette gjør at vi kan forenkle vinkelintegrasjonen ved å neglisjere nøytrinoene i δ -funksjonen som bevarer firer-bevegelsesmengden. Vi antar også at $k_B T$ er mye mindre enn de kjemiske potensialene til baryonene og leptonene. Dette gir oss Ligning (5.32) over. Vi skal nå først se på en direkte Urca-prosess av typen $B_1 \rightarrow B_2 + l + \bar{\nu}_l$, hvor B_1 og B_2 er baryoner, f. eks. et nøytron og et proton, l er et lepton og $\bar{\nu}_l$ det korresponderende antinøytrinoet.

Uttrykket for emissiviteten fra den direkte Urca-prosessen er gitt ved

$$\varepsilon_\nu = \prod_{i=1}^4 \int \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} E_\nu W n_{B_1} (1 - n_l) (1 - n_{B_2}) , \quad (6.1)$$

hvor vi har

$$W = \frac{(2\pi)^4}{\prod_{i=1}^4 2E_i} \delta^{(4)}(p_{B_1} - p_l - p_{B_2} - p_{\nu_l}) M^2 . \quad (6.2)$$

Her er M Feynmannmatrisen, B_1 , B_2 og l er baryonene og leptonet som inngår i Urca-prosessen, og n_i er Fermi-Dirac-distribusjonsfunksjonene. Faktorene $(1 - n_{B_2})$ og $(1 - n_l)$ er blokkeringsfaktorer for slutttilstandene. Når vi setter inn uttrykket for W , får vi for emissiviteten

$$\begin{aligned} \varepsilon_\nu &= \frac{1}{2^{12}\pi^8} \int \frac{d^3 p_{B_1}}{2E_{B_1}} \int \frac{d^3 p_{B_2}}{2E_{B_2}} \int \frac{d^3 p_l}{2E_l} \int \frac{d^3 p_\nu}{2} n_{B_1} (1 - n_l) (1 - n_{B_2}) \\ &\times \delta^{(4)}(p_{B_1} - p_l - p_{B_2} - p_\nu) M^2 . \end{aligned} \quad (6.3)$$

Uttrykket for Feynmannmatrisen er [GS84]

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} C u_{B_2} [\gamma_\mu f_1 + \gamma_\mu \gamma_5 g_1] u_{B_1} \bar{u}_l \gamma^\mu (1 + \gamma_5) u_v , \quad (6.4)$$

hvor C er et uttrykk med Cabibboinkelen som vil være enten $\cos \theta_C$ eller $\sin \theta_C$ avhengig av hvilken reaksjon vi har. Dette avhenger av hvilke kvarkoverganger vi har i den aktuelle reaksjonen, spesifikt om vi har en endring i særtall S . $\Delta S = 0$ gir $\cos \theta_C$, mens $\Delta S = 1$ gir $\sin \theta_C$. Dette gir oss for matriseelementet

$$|M|^2 = M \times M^* = \left[\frac{G_F}{\sqrt{2}} C [u_{B_2} \Gamma_1 u_{B_1}] [\bar{u}_l \gamma^\mu \Gamma_3 u_\nu] \right] \quad (6.5)$$

$$\times \left[\frac{G_F}{\sqrt{2}} C [u_{B_2} \bar{\Gamma}_2 u_{B_1}] [\bar{u}_l \bar{\Gamma}_4 u_\nu] \right] . \quad (6.6)$$

Ved å multiplisere ut, beregne trasene til hvert enkelt ledd og forenkle, får vi til slutt uttrykket

$$\begin{aligned} M^2 &= 64 \frac{G_F^2}{2} C^2 [(p_{B_1} p_\nu)(p_{B_2} p_l) (f_1 + g_1)^2 + (p_{B_1} p_l)(p_{B_2} p_\nu) (f_1 - g_1)^2 \\ &- m_{B_1} m_{B_2} c^2 (p_\nu p_l) (f_1^2 - g_1^2)] . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Vi skal nå først kort skissere fremgangsmåten for utregning av det approksimative uttrykket til Prakash m.fl.[PPL92, LPP91], før vi i neste seksjon

gjør en grundigere gjennomgang av en mer nøyaktig beregning av nøytrinoemissiviteten. I approksimasjonen vi nå gjør antar vi at bevegelsesmengden til baryoner og leptoner er avgrenset til rundt fermioverflaten og dermed kan vi approksimere et integral fra 0 til k_F med verdier rundt k_F .

Dersom vi videre setter $f_1 \approx g_1$ i uttrykket for det kvadrerte matriselementet, forsvinner de to siste leddene, og vi kan skrive om faktoren $(f_1 + g_1)^2$ i det første ledet til $(f_1^2 + 3g_1^2)$, slik at vi sitter igjen med uttrykket

$$M^2 = 64 \frac{G_F^2}{2} C^2 (p_{B_1} p_\nu) (p_{B_2} p_l) (f_1^2 + 3g_1^2) . \quad (6.8)$$

Dette tilsvarer Ligning (3.5) i [Iw82]. Denne setter vi så inn i Ligning (6.3) for å beregne emisjonsraten. Vi integrerer først over vinklene. Vi antar i denne approksimasjonen vinkelavhengighet og får for vinkelintegralet

$$\frac{(4\pi)^3}{2 |\mathbf{p}_{B_2}| |\mathbf{p}_{B_1}| |\mathbf{p}_l|} . \quad (6.9)$$

Se forøvrig neste seksjon for en mer detaljert beregning av dette. Når vi så senere bruker sammenhengene $E_\nu = p_\nu$ for nøytrinoene, og $E_j dE_j = p_j dp_j$ for de andre partiklene, kansellerer dette nevneren.

Det kvadratiske matriselementet summert over spinnene til sluttpartiklene og midlet over vinklene gir altså etter våre tilnærminger en faktor $32G_F^2 C^2 (f_1^2 + 3g_1^2) (p_{B_1} p_\nu) (p_{B_2} p_l)$. Videre kan vi nå skrive om

$$\begin{aligned} p_{B_1} p_\nu &= E_{B_1} E_\nu - p_{B_1} p_\nu , \\ p_{B_2} p_l &= E_{B_2} E_l - p_{B_2} p_l , \end{aligned} \quad (6.10)$$

hvor vi ikke-relativistisk kan approksimere ved å stryke de siste leddene. Vi sitter da igjen med $E_{B_1} E_\nu E_{B_2} E_l$. E_{B_1} gir oss da approksimativt m_{B_1} og E_{B_2} gir oss m_{B_2} .

For integralet over $E_l E_\nu^3 n_{B_1} (1 - n_l) (1 - n_{B_2})$ skal vi nå følge fremgangsmåten i Appendix F fra [ST83] ganske slavisk. Vi setter inn for Fermi-Diracfunksjonene, og integralet over disse kan beregnes ved å foreta en substitusjon av variable som følger:

$$\begin{aligned} x_{B_1} &= \beta(E_{B_1} - \mu_{B_1}) , \\ x_{B_2} &= -\beta(E_{B_2} - \mu_{B_2}) , \\ x_l &= -\beta(E_l - \mu_l) . \end{aligned} \quad (6.11)$$

Med $\beta \equiv 1/(k_B T)$, og hvor μ_{B_1} , μ_{B_2} og μ_l er de kjemiske potensialene til de forskjellige partiklene. Samtidig definerer vi så

$$y = \frac{E_\nu}{k_B T} . \quad (6.12)$$

Vi får da ut $1/\beta^6$, som gir oss en faktor $(k_B T)^6$. E_l gir oss en faktor $(x_l + \mu_l)$, hvor μ_l vil være dominerende, og vi setter da denne approksimativt lik μ_l . Vi ser at vi nå har fått et uttrykk

$$\frac{1}{2^{12}\pi^8} 64 \frac{G_F^2}{2} C^2 (f_1^2 + 3g_1^2) \frac{(4\pi)^3}{2} m_{B_1} m_{B_2} \mu_l (k_B T)^6 \quad (6.13)$$

som vi kan sette utenfor integrasjonsgrensene, og det gjenstår da kun å integrere over $E_\nu^3 n_{B_1} (1 - n_l) (1 - n_{B_2})$, som etter substitusjonen gir oss uttrykket

$$y^3 (1 - e^{x_{B_1}})^{-1} (1 - e^{x_{B_2}})^{-1} (1 - e^{x_l})^{-1} \times \delta(x_{B_1} - x_l - x_{B_2} - y) , \quad (6.14)$$

For å løse dette benytter vi oss da av residue-regning. Vi deler opp integralet som følger:

$$I \equiv \int_0^\infty dy y^3 J , \quad (6.15)$$

hvor

$$J \equiv \int \prod_{j=B_1, B_2, l} dx_j (1 - e^j)^{-1} \delta \left[\sum_{j=B_1, B_2, l} x_j - y \right] . \quad (6.16)$$

Beregningen blir nøyaktig som i Appendix F i [ST83]. Forskjellen blir at man i denne beregningen må regne ut

$$\text{Residue ved } z = 0 \text{ av } \left[e^{-izy} \left(\frac{\pi}{\sinh \pi z} \right)^3 \right] , \quad (6.17)$$

mens Shapiro og Teukolsky i [ST83] foretar beregninger for den modifiserte Urca-prosessen med ytterligere to partikler involvert, og får slik i stedet en faktor $(\pi / \sinh \pi z)^5$. Ved å beregne (6.17) får man ut uttrykket

$$\frac{\pi^2}{2} + \frac{y^2}{2} , \quad (6.18)$$

som gir oss følgende ligning for å finne I :

$$I = \int_0^\infty dy \left(\frac{\pi^2}{2} y^3 + \frac{1}{2} y^5 \right) (e^y + 1)^{-1} . \quad (6.19)$$

Denne løser vi med Maple, og får

$$I = \frac{457}{4040} \pi^6 . \quad (6.20)$$

Den motsatte prosessen, elektroninnfanging, gir samme luminositet, men i nøytrinoer i stedet for antinøytrinoer. Den totale emissiviteten blir da det dobbelte av denne, og gir en faktor 2, se diskusjon i Kapittel 5.2.2. Summen av disse trekene gir

$$\varepsilon_\nu = \frac{457\pi}{10080} G_F^2 C^2 (f_1^2 + 3g_1^2) m_{B_1} m_{B_2} \mu_l (k_B T)^6 . \quad (6.21)$$

Nøytrinoemissiviteten er gitt i enheter av energi per volum per tid, MeV fm⁻³ s⁻¹. Når vi så tar en dimensjonsanalyse, ser vi at faktoren G_F^2 bidrar med MeV² (m³)², mens $m_{B_1} m_{B_2}$ bidrar hver med MeV c⁻², dvs. MeV s² m⁻². Det kjemiske potensialet μ_l bidrar med MeV, og faktoren $(k_B T)^6$ gir oss MeV⁶. Vi får da totalt MeV¹¹ m² s⁴. Når vi da har \hbar i enheter MeV s, og c i m s⁻¹, ser vi at vi må sette inn $\hbar^{-10} c^{-5}$ i uttrykket for å få riktig enhet, og vi ender opp med ligningen

$$\varepsilon_\nu = \frac{457\pi}{10080} G_F^2 C^2 (f_1^2 + 3g_1^2) \frac{m_{B_1} m_{B_2} \mu_l}{\hbar^{10} c^5} (k_B T)^6 \theta(p_F^e + p_F^p - p_F^n) , \quad (6.22)$$

hvor step-funksjonen $\theta(p_F^e + p_F^p - p_F^n)$ tester trekantulikheten, hvorvidt Fermivåene til partiklene i prosessen er slik at den gjeldende prosessen kan gå. I Tabell 6.1 finner vi verdien av de forskjellige konstantene som inngår i Ligning (6.22) for de forskjellige reaksjonene.

Tabell 6.1

Verdien til konstantene C , f_1 og g_1 i de forskjellige svake prosessene for nukleoner og hyperoner.

Overgang	C	f_1	g_1
$n \rightarrow pl\bar{\nu}_l$	$\cos \theta_C$	1	$F + D$
$\Lambda \rightarrow pl\bar{\nu}_l$	$\sin \theta_C$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2(F + D/3)$
$\Sigma^- \rightarrow nl\bar{\nu}_l$	$\sin \theta_C$	-1	$-(F - D)$
$\Sigma^- \rightarrow \Lambda l\bar{\nu}_l$	$\cos \theta_C$	0	$\sqrt{3}/2D$
$\Sigma^- \rightarrow \Sigma^0 l\bar{\nu}_l$	$\cos \theta_C$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}F$
$\Xi^- \rightarrow \Lambda l\bar{\nu}_l$	$\sin \theta_C$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2(F - D/3)$
$\Xi^- \rightarrow \Sigma^0 l\bar{\nu}_l$	$\sin \theta_C$	$\sqrt{1}/2$	$(F + D)\sqrt{2}$
$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ l\bar{\nu}_l$	$\sin \theta_C$	1	$F + D$
$\Xi^- \rightarrow \Xi^0 l\bar{\nu}_l$	$\cos \theta_C$	1	$F - D$

Her bruker vi verdiene $\sin \theta_C = 0,231 \pm 0,003$, $F = 0,477 \pm 0,012$,
 $D = 0,756 \pm 0,011$.

Dersom vi så skriver om Ligning (6.22) spesifikt for den direkte Urca-prosessen med nukleoner, får vi $C^2 = \cos^2 \theta_c$ og $f_1^2 = 1$, som gir oss uttrykket

$$\varepsilon_\nu = \frac{457\pi}{10080} G_F^2 \cos^2 \theta_c (1 + 3g_1^2) \frac{m_n m_p \mu_e}{\hbar^{10} c^5} (k_B T)^6 \theta(p_F^e + p_F^p - p_F^n) . \quad (6.23)$$

Ligning (6.23) tilsvarer nå uttrykket vi har for direkte Urca med nukleoner fra Prakash m.fl. [PPL92, LPP91]. Denne approksimasjonen antar at partiklene som inngår er frie, og kan forbedres ved å f.eks. erstatte de bare massene i Ligning (6.22) med effektive masser.

6.2 En mer eksakt beregning av nøytrinoemissiviteten

Vi skal nå ta en mer grundig gjennomgang av beregningen av nøytrinoemissiviteten hvor vi beholder de siste leddene, og utfører integrasjonene også over disse. Under vinkelintegrasjonene som følger, følger vi fremgangsmåten i Appendix F i [ST83]. Vi ser først på integralet over vinklene Ω . Dette er her gitt ved

$$\int d\Omega_{B_1} \int d\Omega_\nu \int d\Omega_l \int d\Omega_{B_2} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{B_1} - \mathbf{p}_l - \mathbf{p}_{B_2} - \mathbf{p}_\nu) . \quad (6.24)$$

Vi skriver om δ -funksjonen som

$$\frac{\delta(|\mathbf{p}_{B_2}| - |\mathbf{p}_{B_1} - \mathbf{p}_l - \mathbf{p}_\nu|)}{|\mathbf{p}_p|^2} \delta(\Omega_{B_2} - \Omega_{B_1 - l - \nu}) . \quad (6.25)$$

Integralet over Ω_{B_2} gir da 1, og vi får

$$\int d\Omega_{B_1} \int d\Omega_\nu \int d\Omega_l \frac{\delta(|\mathbf{p}_{B_2}| - |\mathbf{p}_{B_1} - \mathbf{p}_l - \mathbf{p}_\nu|)}{|\mathbf{p}_p|^2} . \quad (6.26)$$

Vi definerer så variabelen

$$x = \mathbf{p}_{B_1} - \mathbf{p}_\nu . \quad (6.27)$$

Vi har her valgt z-aksen for \mathbf{p}_l langs x . Ved å bruke identiteten $\delta[f(x)] = \delta(x - a)/|f'(a)|$, hvor $f(a) = 0$, og sette $|\mathbf{p}_i| = p_i$, får vi for den siste δ -funksjonen

$$\delta(|\mathbf{p}_{B_2}| - |\mathbf{p}_{B_1} - \mathbf{p}_l - \mathbf{p}_\nu|) = \frac{\delta(\cos \theta_{xl} - (p_{B_2}^2 - x^2 - p_l^2)/(2xp_l))}{xp_l/p_{B_2}} . \quad (6.28)$$

Dette gir oss for vinkelintegralet

$$\frac{2\pi}{|\mathbf{p}_{B_2}| |\mathbf{p}_l|} \int d\Omega_{B_1} \int d\Omega_\nu \frac{1}{|\mathbf{p}_{B_1} - \mathbf{p}_\nu|} . \quad (6.29)$$

Vi vil nå anta at $|\mathbf{p}_{B_1}| >> |\mathbf{p}_\nu|$. Denne approksimasjonen vil stort sett holde, men for eksempel i supernovamiljø, hvor nøytrinoer kan bli svært energirike, vil den ikke lenger være gyldig. Integralet ovenfor vil etter denne antakelsen kunne skrives om til

$$\frac{2\pi}{|\mathbf{p}_{B_2}| |\mathbf{p}_{B_1}| |\mathbf{p}_l|} \int d\Omega_{B_1} \int d\Omega_\nu . \quad (6.30)$$

Vinkelintegrasjonen vil etter dette avhenge av vinkelavhengigheten i den kvadrerte Feynmanamplituden. Dersom det ikke er noen vinkelavhengighet, som antatt av Shapiro og Teukolsky [ST83] og de fleste andre, vil integralet være trivielt, og bare gi oss

$$\frac{(4\pi)^3}{2 |\mathbf{p}_{B_2}| |\mathbf{p}_{B_1}| |\mathbf{p}_l|} . \quad (6.31)$$

Dersom vi derimot skal anta vinkelavhengighet i uttrykket for Feynmannatrissen i (6.7), må vi utføre integrasjonen eksplisitt. Vi ser på det første leddet i ligningen, og utelater for øyeblikket konstantene foran. Vi skriver først om leddet ved å bruke betingelsen for bevaring av bevegelsesmengde ($p_{B_1} - p_l - p_{B_2} - p_\nu = 0$), og vi får

$$p_{B_1}^2 + p_\nu^2 - 2p_{B_1}p_\nu = p_l^2 + p_{B_2}^2 + 2p_l p_{B_2} . \quad (6.32)$$

Ved å bruke de bare massene får vi videre

$$p_l p_{B_2} = -p_{B_1} p_\nu + \frac{m_{B_1}^2 - m_{B_2}^2 - m_l^2}{2} . \quad (6.33)$$

Når vi så setter dette inn for $(p_{B_1}p_\nu)(p_{B_2}p_l)$ i uttrykket for den kvadrerte Feynmannatrissen i (6.7) får vi

$$(p_{B_1}p_\nu)(p_{B_2}p_l) = (p_{B_1}p_\nu)\left(-p_{B_1}p_\nu + \frac{m_{B_1}^2 - m_{B_2}^2 - m_l^2}{2}\right) . \quad (6.34)$$

Vi bruker deretter sammenhengen

$$p_{B_1} p_\nu = E_{B_1} E_\nu - \mathbf{p}_{B_1} \mathbf{p}_\nu = E_{B_1} E_\nu - p_{B_1} p_\nu \cos \theta_{B_1 \nu} , \quad (6.35)$$

og ser at uttrykket for $(p_{B_1} p_\nu)(p_{B_2} p_l)$ i ligning (6.34) er proporsjonalt med

$$c_0 + c_1 \cos \theta_{n\nu} + c_2 (\cos \theta_{n\nu})^2 . \quad (6.36)$$

Når vi så gjør integrasjonen over Ω_ν i ligning (6.30) ser vi at ledet med c_1 blir null, og vi står igjen med

$$\frac{2\pi}{|\mathbf{p}_{B_2}| |\mathbf{p}_{B_1}| |\mathbf{p}_l|} \int d\Omega_{B_1} \int d\Omega_\nu (p_{B_1} p_\nu)(p_{B_2} p_l) = \frac{(4\pi)^3}{2 |\mathbf{p}_{B_2}| |\mathbf{p}_{B_1}| |\mathbf{p}_l|} (c_0 + \frac{1}{3} c_2), \quad (6.37)$$

hvor vi har

$$c_0 = \frac{m_{B_1}^2 - m_{B_2}^2 - m_l^2}{2} E_{B_1} E_\nu - (E_{B_1} E_\nu)^2 , \quad (6.38)$$

og

$$c_2 = -(p_{B_1} p_\nu)^2 = -(E_n^2 - m_n^2) E_\nu^2 . \quad (6.39)$$

Her er nøytrinomassen satt lik null, og

$$E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} . \quad (6.40)$$

Vinkelintegralet gir oss da til slutt

$$\begin{aligned} & \frac{(4\pi)^3}{2 |\mathbf{p}_{B_2}| |\mathbf{p}_{B_1}| |\mathbf{p}_l|} \\ & \times \left(\frac{m_{B_1}^2 - m_{B_2}^2 - m_l^2}{2} E_{B_1} E_\nu - (E_{B_1} E_\nu)^2 - \frac{1}{3} (E_n^2 - m_n^2) E_\nu^2 \right) . \end{aligned} \quad (6.41)$$

Ved å inkludere konstantene foran den kvadrerte Feynmanmatrisen, får vi for det første ledet:

$$\begin{aligned} & (f_1 + g_1)^2 64 C^2 \frac{G_F^2}{2} \frac{(4\pi)^3}{2 |\mathbf{p}_{B_2}| |\mathbf{p}_{B_1}| |\mathbf{p}_l|} \\ & \times \left(\frac{m_{B_1}^2 - m_{B_2}^2 - m_l^2}{2} E_{B_1} E_\nu - (E_{B_1} E_\nu)^2 - \frac{1}{3} (E_n^2 - m_n^2) E_\nu^2 \right) . \end{aligned} \quad (6.42)$$

Tilsvarende for det andre leddet:

$$(f_1 - g_1)^2 64C^2 \frac{G_F^2}{2} \frac{(4\pi)^3}{2 |\mathbf{p}_{B_2}| |\mathbf{p}_{B_1}| |\mathbf{p}_l|} \\ \times \left(\frac{m_{B_1}^2 - m_{B_2}^2 - m_l^2}{2} E_{B_1} E_\nu - (E_{B_1} E_\nu)^2 - \frac{1}{3} (E_n^2 - m_n^2) E_\nu^2 \right). \quad (6.43)$$

I det siste leddet gir integrasjonen over vinklene null, og vi får et enklere uttrykk:

$$(f_1^2 - g_1^2) 64C^2 \frac{G_F^2}{2} \frac{(4\pi)^3}{2 |\mathbf{p}_{B_2}| |\mathbf{p}_{B_1}| |\mathbf{p}_l|} m_p m_n E_l E_\nu. \quad (6.44)$$

Går nå over på integrasjon over bevegelsesmengdene. Ser først på det første leddet. Integralet som må utføres blir

$$\varepsilon_{\nu_1} = \frac{1}{2^{12} \pi^8} \int \frac{d^3 p_{B_1}}{2 E_{B_1}} \int \frac{d^3 p_{B_2}}{2 E_{B_2}} \int \frac{d^3 p_l}{2 E_l} \int \frac{d^3 p_\nu}{2} n_{B_1} (1 - n_l) (1 - n_{B_2}) \\ \times \delta^{(4)}(E_{B_1} - E_l - E_{B_2} - E_\nu) \times (f_1 + g_1)^2 64C^2 \frac{G_F^2}{2} \frac{(4\pi)^3}{2 |\mathbf{p}_{B_2}| |\mathbf{p}_{B_1}| |\mathbf{p}_l|} \\ \times \left(\frac{m_{B_1}^2 - m_{B_2}^2 - m_l^2}{2} E_{B_1} E_\nu - (E_{B_1} E_\nu)^2 - \frac{1}{3} (E_{B_1}^2 - m_{B_1}^2) E_\nu^2 \right). \quad (6.45)$$

Ved å bruke $E_\nu = p_\nu$, og for de andre partiklene $E_j dE_j = p_j dp_j$, kansellerer vi telleren $|\mathbf{p}_{B_2}| |\mathbf{p}_{B_1}| |\mathbf{p}_l|$, og får

$$\varepsilon_{\nu_1} = \frac{1}{2^{11} \pi^5} \int dE_{B_1} \int dE_{B_2} \int dE_l \int E_\nu^2 dE_\nu n_{B_1} (1 - n_l) (1 - n_{B_2}) \\ \times \delta^{(4)}(E_{B_1} - E_l - E_{B_2} - E_\nu) \times (f_1 + g_1)^2 64C^2 \frac{G_F^2}{2} \\ \times \left(\frac{m_{B_1}^2 - m_{B_2}^2 - m_l^2}{2} E_{B_1} E_\nu - (E_{B_1} E_\nu)^2 - \frac{1}{3} (E_{B_1}^2 - m_{B_1}^2) E_\nu^2 \right). \quad (6.46)$$

Når vi så setter inn for Fermi-Dirac-funksjonene, får vi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\nu_1} = & (f_1 + g_1)^2 64C^2 \frac{G_F^2}{2} \frac{1}{2^{11}\pi^5} \int dE_{B_1} \int dE_{B_2} \int dE_l \int E_\nu^2 dE_\nu \\ & \times \delta(E_{B_1} - E_l - E_{B_2} - E_\nu) \\ & \times \left(\frac{m_{B_1}^2 - m_{B_2}^2 - m_l^2}{2} E_{B_1} E_\nu - (E_{B_1} E_\nu)^2 - \frac{1}{3}(E_{B_1}^2 - m_{B_1}^2) E_\nu^2 \right) \\ & \times \frac{1}{1 + \exp \beta(E_{B_1} - \mu_{B_1})} \times \frac{1}{1 + \exp -\beta(E_l - \mu_l)} \\ & \times \frac{1}{1 + \exp -\beta(E_{B_2} - \mu_{B_2})} . \end{aligned} \quad (6.47)$$

Introduserer nå de nye variablene $\frac{x_i}{\beta} = E_i - \mu_i$ og $x_\nu = E_\nu \beta$ og definerer

$$A_1(x_{B_1}, x_\nu) = \left(\frac{m_{B_1}^2 - m_{B_2}^2 - m_l^2}{2} E_{B_1} E_\nu - (E_{B_1} E_\nu)^2 - \frac{1}{3}(E_{B_1}^2 - m_{B_1}^2) E_\nu^2 \right). \quad (6.48)$$

Dette gir oss

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\nu_1} = & (f_1 + g_1)^2 C^2 \frac{G_F^2}{2^6 \pi^5} \int dx_{B_1} \int dx_{B_2} \int dx_l \int x_\nu^2 dx_\nu \left(\frac{1}{\beta} \right)^6 \\ & \times \delta(x_{B_1} - x_l - x_{B_2} - x_\nu) A_1(x_{B_1}, x_\nu) \\ & \times \frac{1}{1 + e^{x_{B_1}}} \frac{1}{1 + e^{-x_{B_2}}} \frac{1}{1 + e^{-x_l}} . \end{aligned} \quad (6.49)$$

Nå bruker vi δ -funksjonen til å sette $x_l = x_{B_1} - x_{B_2} - x_\nu$. Når vi så integrerer over x_l får vi

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\nu_1} = & (f_1 + g_1)^2 C^2 \frac{G_F^2 (k_B T)^6}{2^6 \pi^5} \int dx_{B_1} \int dx_{B_2} \int x_\nu^2 dx_\nu \\ & \times A_1(x_{B_1}, x_\nu) \\ & \times \frac{1}{1 + e^{x_{B_1}}} \frac{1}{1 + e^{-x_{B_2}}} \frac{1}{1 + e^{x_{B_2} + x_\nu - x_{B_1}}} , \end{aligned} \quad (6.50)$$

hvor $\left(\frac{1}{\beta} \right)^6$ gir oss $(k_B T)^6$. Dette uttrykket blir likt for det andre leddet fra Ligning (6.43), bortsett fra at vi i Ligning (6.43) integrerer over x_n , og at vi nå får en funksjon A_2 som avhenger av x_{B_2} og x_ν . Dette gir oss

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\nu_2} = & (f_1 - g_1)^2 C^2 \frac{G_F^2 (k_B T)^6}{2^6 \pi^5} \int dx_{B_1} \int dx_{B_2} \int x_\nu^2 dx_\nu \\ & \times A_2(x_{B_2}, x_\nu) \\ & \times \frac{1}{1 + e^{x_{B_1}}} \frac{1}{1 + e^{-x_{B_2}}} \frac{1}{1 + e^{x_{B_2} + x_\nu - x_{B_1}}} , \end{aligned} \quad (6.51)$$

hvor

$$A_2(x_{B_2}, x_\nu) = \left(\frac{m_{B_1}^2 - m_{B_2}^2 + m_l^2}{2} E_{B_2} E_v - (E_{B_2} E_v)^2 - \frac{1}{3} (E_{B_2}^2 - m_{B_1}^2) E_v^2 \right). \quad (6.52)$$

Den tredje og siste delen er enklere, da vår funksjon A_3 her kun avhenger av x_l . For det tredje ledet er integralet som skal løses

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\nu_3} &= -(f_1^2 - g_1^2) 64 C^2 \frac{G_F^2}{2} \frac{1}{2^{11} \pi^5} \int dE_{B_1} \int dE_{B_2} \int dE_l \int E_\nu^2 dE_\nu \\ &\quad \times \delta(E_{B_1} - E_l - E_{B_2} - E_\nu) \times (m_{B_1} m_{B_2} E_l E_v) \\ &\quad \times \frac{1}{1 + \exp \beta(E_{B_1} - \mu_{B_1})} \times \frac{1}{1 + \exp -\beta(E_l - \mu_l)} \\ &\quad \times \frac{1}{1 + \exp -\beta(E_{B_2} - \mu_{B_2})} , \end{aligned} \quad (6.53)$$

som på tilsvarende måte gir

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\nu_3} &= -(f_1^2 - g_1^2) C^2 \frac{G_F^2 (k_B T)^7 m_{B_1} m_{B_2}}{2^6 \pi^5} \int dx_{B_1} \int dx_l \int x_\nu^3 dx_\nu \\ &\quad \times A_3(x_l) \times \frac{1}{1 + e^{x_{B_1}}} \frac{1}{1 + e^{x_l + x_\nu - x_{B_1}}} \frac{1}{1 + e^{-x_l}} , \end{aligned} \quad (6.54)$$

hvor vi har integrert over x_{B_2} i stedet for x_l som i de to foregående integrasjonene og hvor $A_3(x_l) = [(E_l - \mu) \beta]$.

For så å foreta den neste integrasjonen søker vi å integrere over x_{B_2} , og med $u = x_\nu - x_{B_1}$ får vi for ε_{ν_1} et integral av typen

$$\int \frac{1}{1 + e^{-x_{B_2}}} \frac{1}{1 + e^{x_{B_2} + u}} , \quad (6.55)$$

som vi løser ved hjelp av Maple, og finner

$$\int \frac{1}{1 + e^{-x_{B_2}}} \frac{1}{1 + e^{x_{B_2} + u}} = \frac{\ln(1 + e^{x_{B_2}} e^u) - \ln(e^{x_{B_2}} + 1)}{e^u - 1} . \quad (6.56)$$

Når vi så setter inn for integrasjonsgrensene, fra 0 til ferminivået $E_F^{B_2}$, får vi uttrykket:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\nu_1} &= (f_1 + g_1)^2 C^2 \frac{G_F^2 (k_B T)^6}{2^6 \pi^5} \int dx_{B_1} \int x_\nu^2 dx_\nu \\ &\quad \times A_1(x_{B_1}, x_\nu) \times \frac{1}{1 + e^{x_{B_1}}} \\ &\quad \times \frac{\ln \left[2 \left(1 + e^{E_F^{B_2}} e^u \right) \right] - \ln \left[\left(e^{E_F^{B_2}} + 1 \right) (1 + e^u) \right]}{e^u - 1} . \end{aligned} \quad (6.57)$$

Tilsvarende får vi for ε_{ν_2} et uttrykk av typen

$$\int \frac{1}{1+e^{x_{B_1}}} \frac{1}{1+e^{-x_{B_1}+v}} , \quad (6.58)$$

hvor $v = x_{B_2} + x_\nu$. For dette uttrykket får vi

$$\int \frac{1}{1+e^{x_{B_1}}} \frac{1}{1+e^{-x_{B_1}+v}} = \frac{\ln(e^{x_{B_1}} + 1) - \ln(e^{x_{B_1}} + e^v)}{e^v - 1} . \quad (6.59)$$

Når vi så integrerer over x_{B_1} og setter inn for integrasjonsgrensene, får vi for ε_{ν_2} :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\nu_2} &= (f_1 - g_1)^2 C^2 \frac{G_F^2 (k_B T)^6}{2^6 \pi^5} \int dx_{B_2} \int x_\nu^2 dx_\nu \\ &\quad \times A_2(x_{B_2}, x_\nu) \times \frac{1}{1+e^{-x_{B_2}}} \\ &\quad \times \frac{\ln(1+e^{E_F^{B_1}}) + \ln(1+e^v) - \ln[2(e^{E_F^{B_1}} + e^v)]}{e^v - 1} . \end{aligned} \quad (6.60)$$

For ε_{ν_3} får vi det samme integralet som for ε_{ν_2} når vi integrerer over x_{B_1} og setter $w = x_l + x_\nu$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\nu_3} &= -(f_1^2 - g_1^2) C^2 \frac{G_F^2 (k_B T)^7 m_{B_1} m_{B_2}}{2^6 \pi^5} \int dx_l \int x_\nu^3 dx_\nu \times A_3(x_l) \\ &\quad \times \frac{1}{1+e^{-x_l}} \times \frac{\ln(1+e^{E_F^{B_1}}) + \ln(1+e^w) - \ln[2(e^{E_F^{B_1}} + e^w)]}{e^w - 1} . \end{aligned} \quad (6.61)$$

Som nevnt innledningsvis i kapittelet, er dette emissiviteten fra en direkte Urca-prosess av typen $B_1 \rightarrow B_2 + l + \bar{\nu}_l$. I tillegg til denne har vi selvsagt også de tilsvarende prosessene av typen $B_2 + l \rightarrow B_1 + \nu_l$. Dette vil naturligvis gi oss andre likevektsbetingelser, noe som genererer en annen δ -funksjon av typen $\delta(E_{B_2} + E_l - E_{B_1} - E_\nu)$. Dette vil gi oss tre ligninger $\varepsilon_{\nu_1}^*$, $\varepsilon_{\nu_2}^*$ og $\varepsilon_{\nu_3}^*$, som er identiske med de over, med det unntak at faktorene u , v og w må erstattes med u^* , v^* og w^* , gitt ved

$$u^* = -x_{B_1} - x_\nu , \quad (6.62)$$

$$v^* = x_{B_2} - x_\nu , \quad (6.63)$$

og

$$w^* = x_l - x_\nu . \quad (6.64)$$

Den totale emissiviteten fra den direkte Urca-prosessen blir da gitt fra summen av leddene,

$$\varepsilon_\nu = \varepsilon_{\nu_1} + \varepsilon_{\nu_2} + \varepsilon_{\nu_3} + \varepsilon_{\nu_1}^* + \varepsilon_{\nu_2}^* + \varepsilon_{\nu_3}^* . \quad (6.65)$$

Disse beregningene gir et visst overblikk over ligningene som må ligge til grunn for en mer nøyaktig beregning av nøytrinoemissiviteten fra direkte Urca-prosesser. Disse ligningene kan brukes som utgangspunkt for numeriske integrasjoner for å finne nøyaktige uttrykk for emisjonsraten i de forskjellige prosessene.

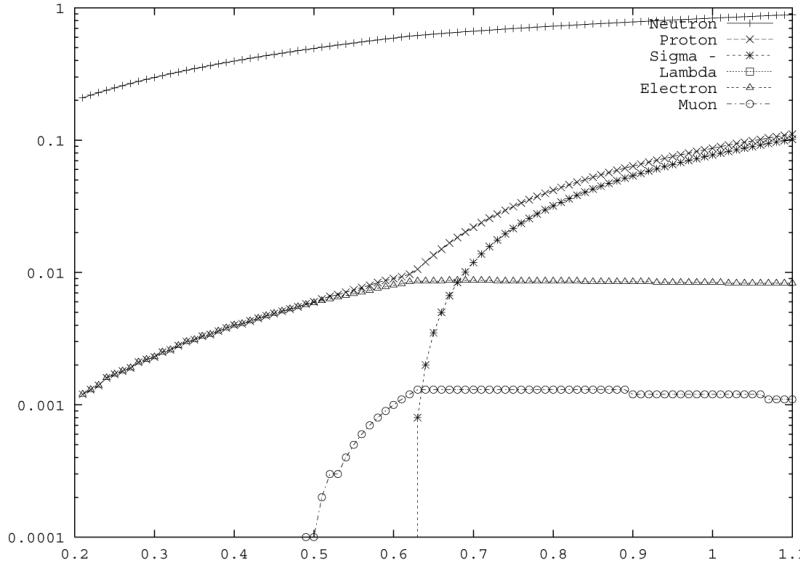
Kapittel 7

Resultater

Vi skal nå se på, sammenligne og tolke resultatene vi får for partikkelfraksjoner for ideell gass-tilnærmingen, og den mer nøyaktige tilstandsligningen hvor vi har tatt med uttrykk for to- og trelegemevekselvirkninger som nevnt tidligere. Vi skal ta utgangspunkt i materiesammensetningen for tilstandsligningen fra **[VPR00]**, en modell som inkluderer tolegeme- og trelegemevekselvirkninger mellom nukleoner. Vi skal så se på emissivitetene for de to tilfellene, ideell gass og med vekselvirkninger, begge beregnet ved hjelp av Ligning (6.22), og se på sammenhengen mellom materiesammensetningene og mellom materiesammensetningene og partikkelfraksjonene. For å få bedre innsikt i hvilke konsekvenser de forskjellige vekselvirkningene i tilstandsligningen får for partikkelsammensetningen og nøytrinoemissiviteten, tar vi også med en tredje approksimasjon hvor vi kun tar med tolegemevekselvirkninger, og neglisjerer trelegemevekselvirkningene. Vi skal også se på det kjemiske potensialet og knytte dette opp til nøytrinoemissiviteten.

La oss først se på sammensetningen av materien i vår ideell gassapproksimasjon. Vi ser i Figur 7.1 hvordan Σ^- dukker opp ved en tetthet på $0,65 \text{ fm}^{-3}$, mens Λ ikke dukker opp før ved en tetthet over $1,1 \text{ fm}^{-3}$, og altså ikke kommer med i det tetthetsspekteret vi undersøker her. Σ^- er her energetisk fordelaktig på grunn av det høye kjemiske potensialet vi får for elektronet (se Figur 7.4). Vi legger her merke til at Fermigassmodellen underestimerer fraksjonen av elektroner kraftig i starten av tetthetsspekteret, mens det motsatte er tilfellet når vi kommer over tettheter på $0,5 \text{ fm}^{-3}$. Myonet opptrer her i denne Fermigassmodellen ikke før tettheten nærmer seg $0,5 \text{ fm}^{-3}$. I modeller som inkluderer vekselvirkning mellom nukleoner, opptrer myonet allerede rundt normal nukleontetthet $0,16 \text{ fm}^{-3}$ og er slik med fra starten av tetthetsspekteret vi ser i Figur 7.3.

Vi ser så på materiesammensetningen i Figur 7.3, hvor vi har brukt den mikroskopiske mangelegemeberegningen fra **[VPR00]** over parametrisering-

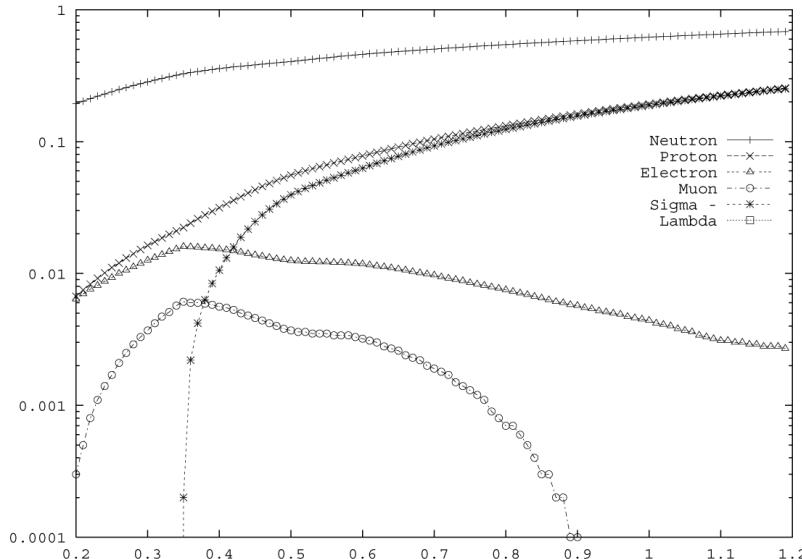


Figur 7.1: Her ser vi materiesammensetningen for ideell gass-approksimasjonen vår. Partikkelfraksjonen av nøytroner, protoner, elektroner, myoner, Σ^- og Λ er plottet langs en logaritmisk akse som funksjon av totaltettheten som er oppgitt i fm^{-3} .

gen av baryon-baryonpotensialene fra [SR99], og dermed inkludert mange av de forbedringene som ble antydet i Kapittel 4. Vi kan sammenligne Figur 7.3 med Figur 4.5 i Kapittel 4, og se at vi har et bra samsvar med det nederste panelet i denne.

Vi ser at tettheten av myoner følger mønsteret til elektronettettheten, men ligger lavere og går raskere mot 0. Myonene forsvinner allerede når tettheten når $0,49 \text{ fm}^{-3}$, mens elektronene, som begynner å stupe samtidig ved $0,27 \text{ fm}^{-3}$, ikke forsvinner helt før ved $0,85 \text{ fm}^{-3}$. Vi ser samtidig at to hyperoner dukker opp: Σ^- ved $0,27 \text{ fm}^{-3}$, og Λ ved $0,61 \text{ fm}^{-3}$. Vi får her altså bekreftet våre antagelser fra Kapittel 4. Selv om Σ^- -hyperonet har en større masse enn Λ , dukker det opp ved lavere tettheter. Årsaken til dette er at prosessen som produserer Σ^- fjerner både et energetisk elektron og et nøytron, mens desintegrasjonen av det nøytrale hyperonet, kun fjerner nøytronet. Dette fører oss igjen til det kjemiske potensialet μ , som vi kan se på i Figur 7.5. Det negativt ladede Σ^- -hyperonet opptrer når $\mu_e + \mu_n$ tilsvarer dets masse, mens Λ først opptrer når μ_n tilsvarer dets masse. Se forøvrig Kapittel 4. Dette vil igjen få betydning for hvilke Urca-prosesser som kan starte i det tetthetsspekteret vi undersøker.

Så kikker vi på materiesammensetningen i Figur 7.2, hvor vi kun har tatt



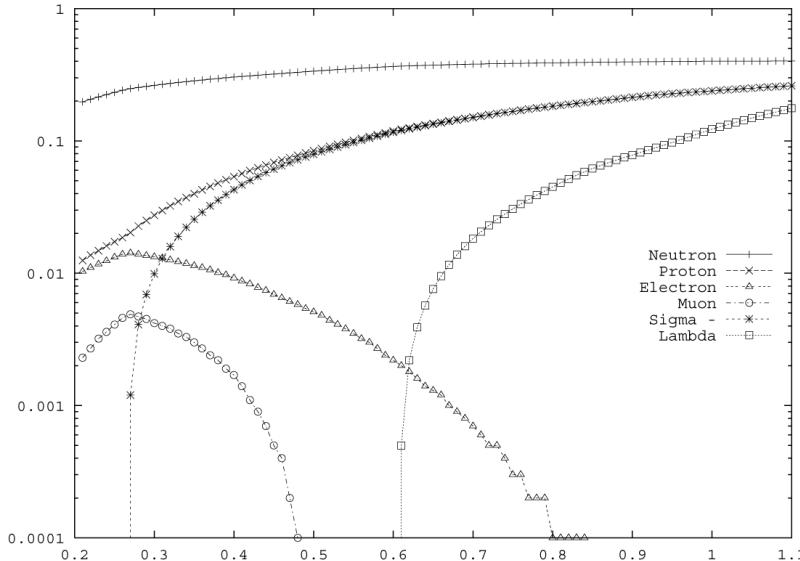
Figur 7.2: Her ser vi materiesammensetningen for tilstandsligningen som inkluderer tolegeme- men ikke trelegemevekselvirkninger mellom nukleoner. Partikkelfraksjonen av nøytroner, protoner, elektroner, myoner, Σ^- og Λ er plottet langs en logaritmisk akse som funksjon av totaltettheten som er oppgitt i fm^{-3} .

med tolegeme-vekselvirkningene. Vi ser at punktet hvor elektron- og myonfraksjonene begynner å synke her ligger på $0,35 \text{ fm}^{-3}$, noe som er senere enn i tilfellet hvor vi også tar med trelegeme-vekselvirkninger. Myonene forsvinner også senere, ved $0,90 \text{ fm}^{-3}$. Σ^- begynner å dukke opp ved $0,35 \text{ fm}^{-3}$, noe som også ligger mellom verdiene for ideell gass og verdiene for tilstandsligningen som også inkluderer trelegemevekselvirkninger. Heller ikke her dukker Λ opp innenfor vårt tetthetsspekter.

Vi ser hvordan de forskjellige tetthetsspekterene styres av betingelsene om elektrisk nøytralitet (3.26) og kjemisk likevekt (3.27). Når vi i tillegg har myoner og Σ^- tilstede, vil ligningen for ladningslikevekt se slik ut:

$$q_p = q_e + q_\mu + q_{\Sigma^-} . \quad (7.1)$$

Vi ser slik at kravet om elektrisk nøytralitet for eksempel gjør at protontettheten tett følger summen av tettheten av elektroner, myoner og Σ^- -hyperoner i Figurene 7.1, 7.2 og 7.3. Når vi ser på de kjemiske potensialene i Figur 7.4 og Figur 7.5, kan også disse gi oss hint om antallstettheten av de forskjellige partikkelslagene. Hvis vi rekapitulerer Ligning (3.27), gir den oss følgende forhold mellom de kjemiske potensialene for elektroner, nøytroner og protoner



Figur 7.3: Her ser vi materiesammensetningen for tilstandsligningen fra [VPR00], en modell som inkluderer tolegeme- og trelegemevekselvirkninger mellom nukleoner. Partikkelfraksjonen av nøytroner, protoner, elektroner, myoner, Σ^- og Λ er plottet langs en logaritmisk akse som funksjon av totaltettheten i fm^{-3} .

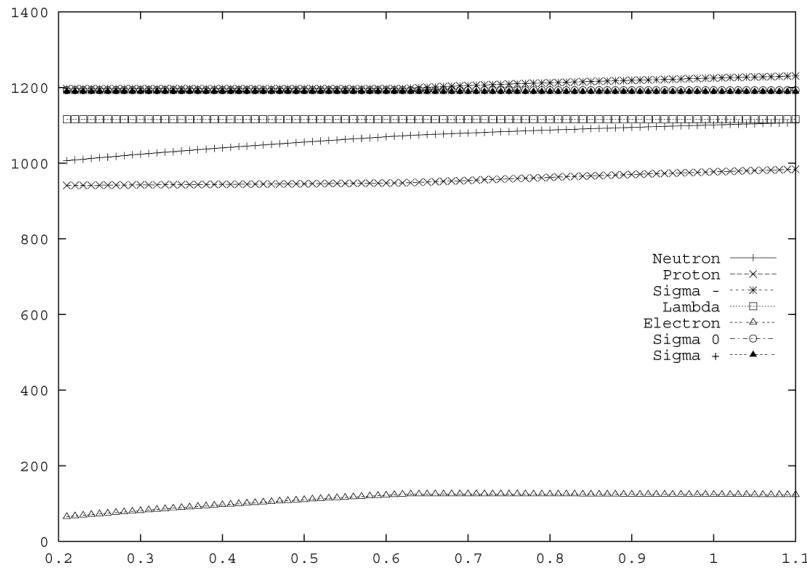
i β -likevekt:

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e^{\text{NM}} . \quad (7.2)$$

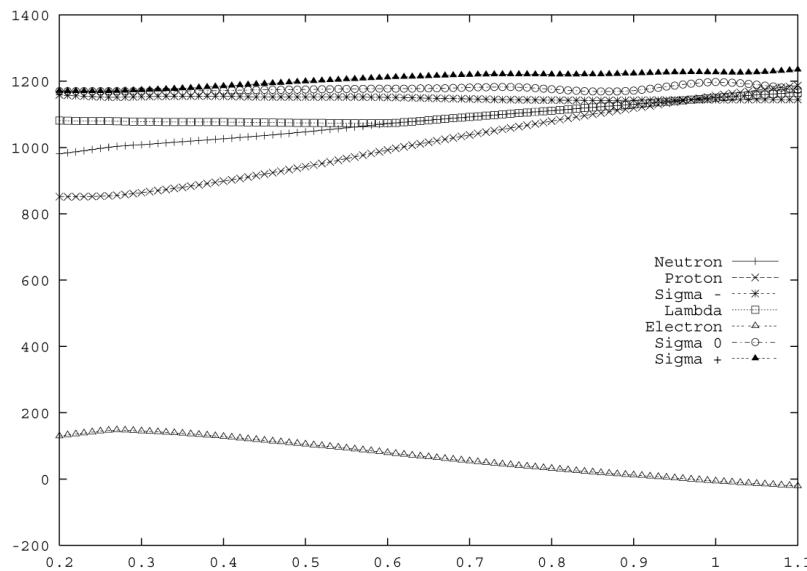
Elektronets og myonets kjemiske potensial er likt, og beregnes altså ut fra differansen mellom nøytronets og protonets verdi etter dette β -likevektskravet. Dette får konsekvenser når vi tar med vekselvirkningene i Figur 7.5. Når det kjemiske potensialet til nøytronet og protonet etterhvert faller sammen ved høye tettheter ser vi at det kjemiske potensialet til elektronet stuper. Sammenhengen mellom kjemisk potensial og antallstetthet får vi fra definisjonen av det kjemiske potensialet fra Ligning (4.10),

$$\mu_i = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_i} \right) , \quad (7.3)$$

og vi ser at endringen i tettheten er fastslått av det kjemiske potensialet og endringen i energien for den bestemte partikkelen. I vår ideell gass-approksimasjon vil energien kun bestå av masse og kinetisk energi, og vi får da et rimelig enkelt forhold mellom tetthet og energi gjennom det kjemiske potensialet i Figur 7.4. Endringen i tettheten vil da gå som $\partial \varepsilon / \mu$, noe vi kan sjekke mot det tilsvarende tethetsspekteret i Figur 7.1.



Figur 7.4: Figuren viser utviklingen til de kjemiske potensialene til de forskjellige partikkelslagene over tetthetsspekteret vi vurderer i ideell gass-tilnærmingen.



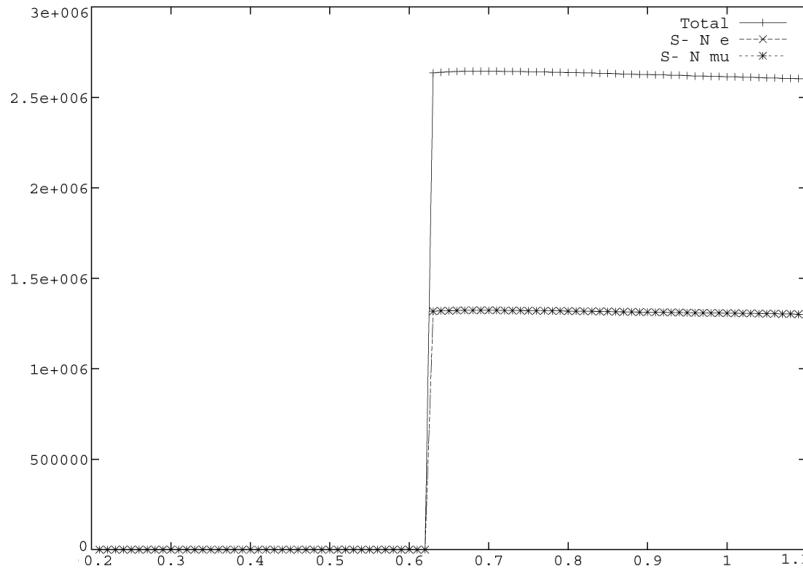
Figur 7.5: Figuren viser utviklingen til de kjemiske potensialene til de forskjellige partikkelslagene over tetthetsspekteret vi vurderer for tilstandsligningen med to- og trelegemevekselvirkninger.

Den eneste partikkelen som opptrer noenlunde likt i det tetthetsspekteret vi her undersøker er nøytronet, selv om den er mye mer dominerende ved høye tettheter før vi tar vekselvirkninger med i beregningen. En ideell fermigass må slik sies å være en dårlig tilnærming til materiesammensetningen for kompakt materie, men den kan gi oss noen generelle pekepinner om hvordan antallstettheten til enkelte av partikkelslagene utvikler seg med økende tetthet og i forhold til hverandre. Når vi tar med tolegemevekselvirkninger i beregningen bedres resultatet betraktelig, men det er fremdeles betydelig avvik fra når vi også tar med trelegemevekselvirkninger, så det er klart at også trelegemevekselvirkningene spiller en betydelig rolle for å utvikle et mest mulig realistisk tetthetsspektrum. Videre ser vi i uttrykket for emissiviteten i Ligning (6.22) at det kjemiske potensialet for elektronet spiller en stor rolle for dette. Vi ser fra Figur 7.4 og 7.5 at dette kjemiske potensialet viser stor endring når vi tar to- og trelegemevekselvirkninger med i beregningene, og dette vil få konsekvenser for nøytrinoemissiviteten. Vi legger her merke til at Fermigassmodellen underestimerer det kjemiske potensialet for elektroner i starten av tetthetsspekteret, mens det motsatte er tilfellet når vi kommer over tettheter på $0,5 \text{ fm}^{-3}$ (se Figur 7.4-7.5). Disse figurene kan også sammenlignes opp mot Figur 4.7 i Kapittel 4, hvor man har unnlatt å plotte det kjemiske potensialet til elektronet, og på denne måten får en noe bedre fremstilling for de andre partiklene i tilnærmingene.

Generelt kan vi altså si for materiesammensetningen at endringer i denne synes å komme ved lavere tettheter når vi inkluderer vekselvirkninger i tilstandsaligningen. Hyperoner som Λ og Σ^- dukker opp tidligere, og elektroner og myoner forsvinner tilsvarende.

Nå skal vi kikke litt på emissiviteten fra den direkte Urca-prosessen for de tetthetsprofilene vi har sett på over. Vi regner ut emissiviteten etter uttrykket fra Ligning (6.23). For sammenligning av emissiviteten på figurene under er den felles faktoren $(k_B T)^6 G_F^2$ trukket utenfor, og emissiviteten er gitt i enheter av denne, hvor den svake koblingskonstanten $G_F = 8,74 \times 10^{-5} \text{ MeV fm}^3$. Først tar vi en kikk på nøytrinoemissivitetene til de forskjellige prosessene i vår ideell gass- tilnærming. Vi ser her at i vårt tetthetsspekter er det kun to prosesser som går; $\Sigma^- \rightarrow n + e + \bar{\nu}_e$ og $\Sigma^- \rightarrow n + \mu + \bar{\nu}_\mu$. Begge prosessene starter samtidig, straks etter at Σ^- dukker opp på tetthetsskalaen ved $0,63 \text{ fm}^{-3}$. Disse prosessene vil så lenge de begge går, være like kraftige, da de kjemiske potensialene til elektroner og myoner er like store. Her går begge ut til slutten av tetthetsspekteret vi undersøker. Tilsvarende ser vi av Figur 7.1 at tettheten av myoner og elektroner holder seg utover tetthetsspekteret.

Når vi ser på emissiviteten fra approksimasjonen vår med kun tolegemevekselvirkninger i Figur 7.7, ser vi at den ligner på den for ideell gass, bortsett fra at Σ^- -prosessene starter før, ved en tetthet på $0,36 \text{ fm}^{-3}$, mens de når vi

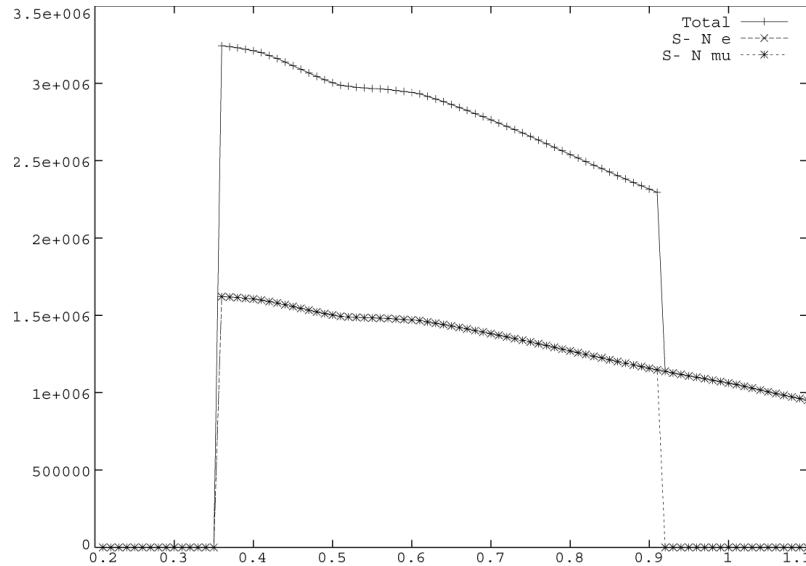


Figur 7.6: Her viser vi nøytrinoemissiviteten fra de to prosessene som kjører i ideell gass-approksimasjonen som funksjon av totaltettheten. $\Sigma^- \rightarrow n + e + \bar{\nu}_e$ er markert som "S- N e", og $\Sigma^- \rightarrow n + \mu + \bar{\nu}_\mu$ er markert som "S- N mu".

tar med trelegemevekselvirkningene starter allerede ved $0,28 \text{ fm}^{-3}$. Dersom vi ser på materiesammensetningen for dette tilfellet, ser vi at tettheten av myoner stuper til 0 ved $0,9 \text{ fm}^{-3}$, noe som gjør at prosessen med myoner da naturlig nok stopper opp.

Når vi så ser på emissiviteten for tetthetsspekteret i Figur 7.8 hvor vi også har inkludert trelegemevekselvirkninger, ser vi at prosessene $\Sigma^- \rightarrow n + e + \bar{\nu}_e$ og $\Sigma^- \rightarrow n + \mu + \bar{\nu}_\mu$ dukker opp samtidig ved $0,28 \text{ fm}^{-3}$. Disse starter altså umiddelbart når Σ^- -hyperonet dukker opp i kjernematerien (se Figur 7.3), noe som samsvarer med når fraksjonen av elektroner og myoner begynner å falle. Disse prosessene vil også her være like kraftige, da det kjemiske potensialet til elektronet og myonet er like store. Vi ser hvordan disse prosessene går sammen helt til myonfraksjonen blir for liten, og prosessen med myoner stopper opp ved $0,50 \text{ fm}^{-3}$.

Vi ser altså at selv om det kan virke som den rollen trelegemevekselvirkningen spiller ikke er like stor som betydningen av tolegemevekselvirkningen for partikkelsammensetningen, har den avgjørende betydning for nøytrinoemisjonene i tetthetsspekteret vi undersøker. Siden Λ -hyperonet ikke dukker opp i dette tetthetsspekteret uten at vi tar med trelegemevekselvirkningen, får vi selvsagt heller ikke Urca-prosessen med Λ -hyperonet til å gå uten denne. Tilsvarende ser vi også hvordan elektronet og myonet her for-

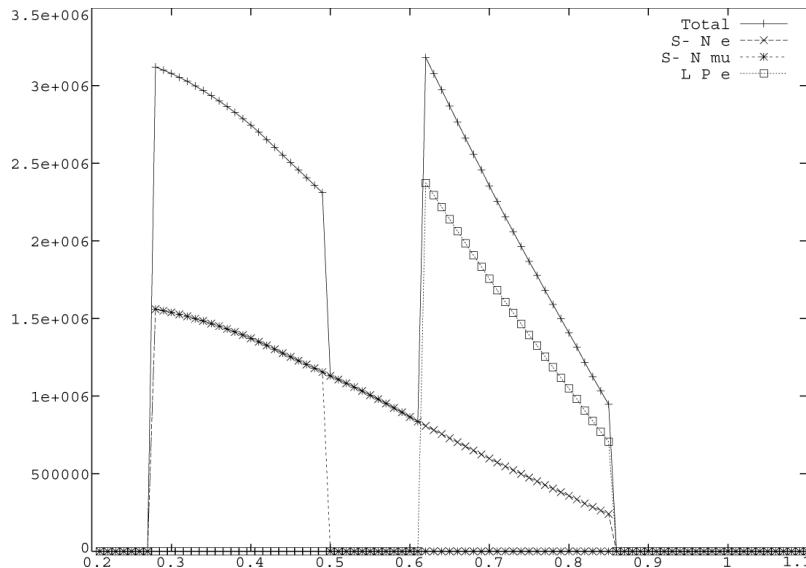


Figur 7.7: Her ser vi nøytrinomissiviteten til de direkte Urca-prosessene som dukker opp under tilstandsligningen med kun tolegemevekselvirkninger plottet som funksjon av totaltettheten: $\Sigma^- \rightarrow n + e + \bar{\nu}_e$, markert som "S- N e", $\Sigma^- \rightarrow n + \mu + \bar{\nu}_\mu$, markert som "S- N mu" og $\Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$, markert som "L P e".

svinner mye tidligere.

En annen stor forskjell fra vår ideell gass-approksimasjon er utviklingen av emissiviteten, hvordan den i vår approksimasjon med vekselvirkninger i Figur 7.8, straks den dukker opp, begynner å falle, i motsetning til hva vi får med en ideell gass-tilnærming. Dersom vi ser på uttrykket for emissiviteten i Ligning (6.22), og samtidig ser på endringen i det kjemiske potensialet mellom Figur 7.4 og 7.5, vil vi straks se at det kjemiske potensialet for elektronet må ta mye av skylden for dette. På det tidspunktet den direkte Urca-prosessen starter i ideell gass-approksimasjonen, er elektronets kjemiske potensial allerede en del lavere når vi inkluderer trelegemevekselvirkninger, og det avtar ytterligere. Slik ser vi hvordan det kjemiske potensialet er avgjørende for emissiviteten og hvordan det endrer seg betraktelig når vi tar med to- og trelegemevekselvirkninger.

Til slutt kan vi nå kort diskutere hvilke endringer vi forventer oss dersom det blir gjort beregninger etter den mer detaljerte modellen for nøytrinoemissjoner som vi kom fram til i andre del av Kapittel 6. Dersom vi ser på Ligning (6.57)-(6.61), ser vi at Ferminivået her vil spille en sentral rolle for de endringene vi får frem. En slik beregning krever da at vi kjenner det kjemis-



Figur 7.8: Her ser vi nøytrinomissiviteten til de direkte Urca-prosessene som dukker opp under tilstandsligningen fra [VPR00] med både tolegeme- og trelegemevekselvirkninger: $\Sigma^- \rightarrow n + e + \bar{\nu}_e$, markert som "S- N e", $\Sigma^- \rightarrow n + \mu + \bar{\nu}_\mu$, markert som "S- N mu" og $\Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$, markert som "L P e".

ke potensialene for de forskjellige partikkelslagene som inngår i reaksjonen. Disse har vi en tilnærming til fra en mangelgjennberegning, men det er såpass mange usikkerheter rundt denne, at en slik mer eksakt beregning ikke nødvendigvis vil gi dramatiske forbedringer. Man vil likevel kunne forvente seg noe mer nøyaktige resultat, men innen samme størrelsесorden som de vi har estimert tidligere i dette kapittelet.

Nøytrinoemisjoner er altså den viktigste kilden til avkjøling av en nøytronstjerne i de tidligste stadiene av dens liv, og man antar at den direkte Urca-prosessen er den kraftigste kilden til energitap i dette tidsrommet. Likevel vil den modifiserte Urca-prosessen som ble diskutert i Kapittel 5 være dominerende i de ytre delene av kjernen og i kjernene til nøytronstjerner med relativt mindre masse. De modifiserte Urca-prosessene kan gå ved mindre tettheter ettersom de får hjelp av en følgepartikkel til å bevare bevegelsesmengde og kjemisk potensial i prosessen. Vi skal nå sammenligne raten til den direkte Urca-prosessen med den modifiserte Urca-prosessen i Ligning (5.11)-(5.14). Den modifiserte Urca-prosessen kan ses på som en korreksjon til den direkte på grunn av demping av de medvirkende partiklene fra kollisjoner. Fra Frimann og Maxwell [FM79] har vi, for nøytrinoemissiviteten fra den

modifiserte Urca-prosessen for fri partikler, uttrykket

$$\varepsilon^{MOD} = \frac{11513}{60480} \frac{G^2 g_1^2 m_n^3 m_p}{2\pi\hbar} \left(\frac{f}{m_\pi} \right)^4 p_F(e) \alpha_{URCA} (kT)^8 , \quad (7.4)$$

hvor α_{URCA} er en funksjon som avhenger av massene og Fermiinivåene til de medvirkende partiklene. For en grov sammenligning med den direkte Urca-prosessen setter vi denne tilnærmedesvis lik verdien ved metningstettheten, $\alpha_{URCA} \approx 1, 13$. f er p-bølge πN -koblingskonstanten, som vi i likhet med Frimann og Maxwell setter ≈ 1 i denne sammenligningen. Tilsvarende skriver vi faktoren $p_F(e) \approx 85 (\rho/\rho_0)^{\frac{2}{3}} \frac{\text{Mev}}{c}$, og vi setter metningstettheten $\rho_0 = 0, 16 \text{ fm}^{-3}$.

Når vi så foretar en dimensjonsanalyse, og sammenligner dette med den direkte Urca-prosessen fra Ligning(6.23), ser vi at Frimann og Maxwell [FM79] i beregningen av uttrykket for emissiviteten tidvis har satt $\hbar c = 1$, og tidvis $\hbar = c = 1$, noe som gjør at de ender opp med kun en \hbar i uttrykket i Ligning (7.4). Dette i motsetning til Prakash m.fl. [LPP91, PPL92] som tar med disse konstantene i uttrykket i Ligning (6.23). Videre har vi G gitt ved MeV fm³, mens faktoren $p_F(e)$ er gitt ved MeV/c, dvs. MeV s m⁻¹. kT gir oss samlet MeV, mens de forskjellige massene gir MeV/c² → MeV s² m⁻². Når vi setter inn for disse så vi i Kapittel 6 at vi i uttrykket fra [LPP91] fikk ut enheten MeV s⁻¹ m⁻³, mens vi i uttrykket fra [FM79] dividerer med $c^8 \hbar^9$ for å få samme enheter, slik at emissiviteten blir gitt ved energi per tid per volum. For sammenligningen bruker vi cgs-enheter, og vi lager en liten tabell hvor vi gir forholdet mellom emissivitetene for forskjellige tettheter og temperaturer. Siden vi her skal se på forholdet mellom de to prosessene, setter vi opp brøken

$$\frac{\varepsilon^{MOD}}{\varepsilon^{DIR}} = \frac{11513 \cdot 10080 \cdot 85 m_n^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} (kT)^2}{457 \cdot 60480 \cdot 2\pi^2 m_\pi^4 \mu_e c^3} , \quad (7.5)$$

hvor vi trekker sammen konstantene og får

$$\frac{\varepsilon^{mod}}{\varepsilon^{dir}} \approx 1, 37 \cdot 10^{-21} \frac{\rho^{2/3}}{\mu_e} T^2 , \quad (7.6)$$

som vi bruker til beregningen i Tabell 7.1 under, sammen med de estimerte verdiene for det kjemiske potensialet μ_e .

Tabell 7.1

Sammenligning mellom nøytrinoemissiviteten fra den direkte og den modifiserte Urca-prosessen

ρ	μ_e	T	$\varepsilon^{mod}/\varepsilon^{dir}$
$0,3 \text{ fm}^{-3}$	144,7 MeV	10^8 K	$4,24 \cdot 10^{-8}$
$0,3 \text{ fm}^{-3}$	144,7 MeV	10^9 K	$4,24 \cdot 10^{-6}$
$0,5 \text{ fm}^{-3}$	104,9 MeV	10^8 K	$8,22 \cdot 10^{-8}$
$0,5 \text{ fm}^{-3}$	104,9 MeV	10^9 K	$8,22 \cdot 10^{-6}$
$0,6 \text{ fm}^{-3}$	79,3 MeV	10^8 K	$1,23 \cdot 10^{-7}$
$0,6 \text{ fm}^{-3}$	79,3 MeV	10^9 K	$1,23 \cdot 10^{-5}$

Vi ser nå at den direkte Urca-prosessen dominerer under temperaturer på $10^8 - 10^9 \text{ K}$. Vi må helt opp i temperaturer på $T \simeq T_F \simeq 10^{12} \text{ K}$ for at den modifiserte Urca-prosessen skal bli av samme størrelsesorden. Dersom vi grovt setter $\frac{\rho^{2/3}}{\mu_e} \sim 0,01$ og setter inn T_9 for T , får vi $\varepsilon^{mod}/\varepsilon^{dir} \sim 10^{-5}T_9^2$, noe som tilsvarer resultatene fra andre sammenligninger mellom prosessene, blant annet i [PPL92]. Dette tilsvarer nært en faktor $(T/T_F)^2$, noe vi kan tolke som at hjelpepartiklene under den modifiserte Urca-prosessen i både begynnelses- og slutttilstanden gir en faktor T/T_F . Dersom vi så sammenligner med de prosessene vi får til å gå under vår tilstandsligning, ser vi at de størrelsene som er forskjellige i uttrykket for emissiviteten, partikkelmasser og konstantene i Tabell 6.1, vil gi resultater av samme størrelsesorden. Den modifiserte Urca-prosessen er altså av liten betydning, all den tid den direkte Urca-prosessen går. Likevel er den viktig da den kan gå ved lavere tettheter og slik kan være årsaken til en betydelig del av nøytrinoemmissiviteten, og dermed også den avkjølingen vi har av stjernen når den direkte Urca-prosessen ikke går.

Kapittel 8

Konklusjon

I denne oppgaven har vi fått en generell introduksjon til fysikken rundt nøytronstjerner, og spesielt til nøytrinoemisjoner fra disse. Nøytronstjerner er endepunktet i utviklingen til stjerner med masser i området mellom Chandrasekharmassen (ca $1,4 M_{\odot}$) og den kritiske massen for dannelse av sorte hull (ca $3\text{-}5 M_{\odot}$). Videre har vi sett på de fysiske teoriene som ligger bak utviklingen av forskjellige tilstandsligninger og hvilke konsekvenser valget av tilstandsligning får for egenskapene, blant annet den masse og radius vi beregner for nøytronstjerner. Vi har så betraktet inklusjonen av hyperoner, hvilke konsekvenser dette får for tilstandsligningen og hvilke vekselvirkninger vi må ta med for å gi en god beskrivelse av tettheter og tilstandsligning i en nøytronstjerne med hyperoner. Vi søker så å knytte alt dette opp mot avkjølingen av nøytronstjerner, og da spesifikt emisjonen av nøytrinoer, som er en viktig del av denne. Nøytrinoemisjoner dominerer avkjølingen av nøytronstjernen fra dannelsen og helt til den når en temperatur på $\sim 10^8$ K. Nøytrinoprosessene er slik dominerende i en periode på kanskje 100.000 år, og da typisk i et temperaturområde fra $10^9\text{-}10^8$ K for den indre temperaturen.

Kraftigst av disse nøytrinoprosessene er den direkte Urca-prosessen, beskrevet i Ligning (5.25)-(5.26). Mer nøyaktige beregninger av emissiviteten fra direkte Urca etter modell av Ligning (6.57)-(6.61), vil antagelig kunne gi noe, men ikke dramatisk bedre estimat for emissiviteten fra denne prosessen. Når den går vil den være dominerende i forhold til andre prosesser som for eksempel den modifiserte Urca-prosessen. I Kapittel 7 så vi at når begge prosessene går ved en temperatur på $\sim 10^9$ K, vil direkte Urca dominere med en faktor $\sim 10^5$.

Videre så vi på hvilke prosesser som gikk med våre forskjellige iterasjoner for tilstandsligningene. Med en ideell gass som modell for tilstandsligningen får vi kun prosessen $\Sigma^- \rightarrow n + l + \bar{\nu}_l$ til å gå, da med både elektroner og myoner. Et ganske likt resultat får vi når vi inkluderer tolegemevekselvirkninger.

Endringen her er hovedsakelig at prosessen starter tidligere og avtar hurtigere. Inkusjonen av tolegemevekselvirkninger har her altså en betydelig, om ikke direkte dramatisk effekt på emissiviteten. Når vi så inkluderer trelege- mevekselvirkninger ser vi derimot en markant forskjell. Både størrelsen på emissiviteten og særlig formen på grafene endres voldsomt pga. endringer i elektronets kjemiske potensial. Videre tillater endringer i tetthetsspektrene at prosessen $\Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ går, noe som gir oss nøytrinoemisjoner ved høyere tettheter enn for prosessen med Σ^- -hyperonet. Generelt kan vi si at man uten å inkludere to- og trelegemevekselvirkninger får en dårlig approksimasjon for nøytrinoemissiviteten fra den direkte Urca-prosessen.

Videre ser vi at vi med materiesammensetningen fra tilstandsligningen vi har valgt i Figur 7.3 ikke får den direkte Urca-prosessen med nukleoner til å gå. Dersom vi ser på de Fermiinværene vi får ut av programmet i Tillegg A, ser vi at trekantulikheten, som utgjør θ -funksjonen i Ligning (6.23), ikke blir oppfylt i det tetthetsspekteret vi nå ser på. Vi ser likevel at marginene er små, og man kan kanskje tenke seg at prosessen kan gå med bare mindre justeringer i tilstandsligningen. I såfall vil denne bli en betydelig bidragsyter til nøytrinoemissiviteten. Dersom denne prosessen likevel ikke går, vil den direkte Urca-prosessen med hyperoner være desto viktigere bidragsytere til avkjølingen av nøytronstjerner.

Konklusjonen av denne gjennomgangen må derfor bli at når man har hyperoner tilstede i materien, må man for å få et godt estimat for nøytrinoemissiviteten fra en nøytronstjerne, ta med muligheten for Urca-prosesser med hyperonmaterie og to- og trelegemevekselvirkninger i beregningen.

Tillegg A

Program for beregning av emissivitet

```
*****  
! Program Urcaemissivities.f90  
! R. Kjelsberg 2003  
! The program calculates neutrino emissivities from  
! the direct Urca process.  
!  
*****  
! This module contains the subroutines to  
! manipulate the indata to the program.  
! Allocate, read, write, convert, calculate  
!  
MODULE particle_density  
TYPE, PUBLIC :: general_array  
INTEGER :: n_data  
DOUBLE PRECISION, DIMENSION(:), POINTER :: &  
total_baryon, neutron, &  
proton, electron, muon, sigma_minus,&  
lambda, sigma0, sigma_plus, &  
epsilon_nu_npe, epsilon_nu_npm,&  
epsilon_nu_lpe,&  
epsilon_nu_lpm, epsilon_nu_smne,&  
epsilon_nu_smnm, epsilon_nu_smle,&  
epsilon_nu_smlm, epsilon_nu_sms0e,&  
epsilon_nu_sms0m, epsilon_tot1  
END TYPE general_array  
TYPE (general_array), &
```

```

PUBLIC :: density_distribution, fermilevels_array, &
energies_array, chem_array, epsilon_array
CONTAINS
!*****
!This subroutine allocates room for densities, fermilevels and energies
!
SUBROUTINE allocate_dd_array(this_array)
IMPLICIT NONE
INTEGER :: i
TYPE(general_array), INTENT(INOUT) :: this_array
INTEGER :: n
n = this_array%n_data
IF (ASSOCIATED(this_array%total_baryon))&
DEALLOCATE(this_array%total_baryon)
IF (ASSOCIATED(this_array%neutron)) &
DEALLOCATE(this_array%neutron)
IF (ASSOCIATED(this_array%proton))&
DEALLOCATE(this_array%proton)
IF (ASSOCIATED(this_array%electron))&
DEALLOCATE(this_array%electron)
IF (ASSOCIATED(this_array%muon))&
DEALLOCATE(this_array%muon)
IF (ASSOCIATED(this_array%sigma_minus))&
DEALLOCATE(this_array%sigma_minus)
IF (ASSOCIATED(this_array%lambda))&
DEALLOCATE(this_array%lambda)
IF (ASSOCIATED(this_array%sigma0))&
DEALLOCATE(this_array%sigma0)
IF (ASSOCIATED(this_array%sigma_plus))&
DEALLOCATE(this_array%sigma_plus)
! This allocates room for the particle densities
ALLOCATE(this_array%total_baryon(n))
ALLOCATE(this_array%neutron(n))
ALLOCATE(this_array%proton(n))
ALLOCATE(this_array%electron(n))
ALLOCATE(this_array%muon(n))
ALLOCATE(this_array%sigma_minus(n))
ALLOCATE(this_array%lambda(n))
ALLOCATE(this_array%sigma0(n))
ALLOCATE(this_array%sigma_plus(n))
DO i = 1,this_array%n_data

```

```

this_array%total_baryon(i) = 0
this_array%neutron(i) = 0
this_array%proton(i)=0
this_array%electron(i)=0
this_array%muon(i)=0
this_array%sigma_minus(i)=0
this_array%lambda(i)=0
this_array%sigma0(i)=0
this_array%sigma_plus(i)=0
ENDDO
END SUBROUTINE allocate_dd_array
!*****!
! This subroutine reads the data from the dens.dat file to
! a new set of variables
!
SUBROUTINE read_dd_data(this_array)
IMPLICIT NONE
INTEGER :: i
TYPE(general_array), INTENT(INOUT) :: this_array
CHARACTER (LEN = 100), POINTER :: densities
DOUBLE PRECISION :: tot1, ne1, p1, e_min1,&
mu_min1, sigma_min1, &
lambda1, sigma_null1
DO i=1, this_array%n_data
READ(1,*)tot1, ne1, p1, e_min1,&
mu_min1, sigma_min1, lambda1,&
sigma_null1, sigma_pluss1
this_array%total_baryon(i)=tot1
this_array%neutron(i)=ne1
this_array%proton(i)=p1
this_array%electron(i)=e_min1
this_array%muon(i)=mu_min1
this_array%sigma_minus(i)=sigma_min1
this_array%lambda(i)=lambda1
this_array%sigma0(i)=sigma_null1
this_array%sigma_plus(i)=sigma_pluss1
ENDDO
END SUBROUTINE read_dd_data
!*****!
!This subroutine writes the data from the dens.dat file
! to a new file densout.dat

```

```

!
SUBROUTINE write_dd_data(this_array)
IMPLICIT NONE
INTEGER :: i
TYPE(general_array), INTENT(IN) :: this_array
! CHARACTER (LEN = 100), POINTER :: densities
DOUBLE PRECISION :: tot1, ne1, p1, e_min1,&
mu_min1, sigma_min1, &
lambda1, sigma_null1, sigma_pluss1
OPEN(UNIT=2, FILE='densout.dat')
DO i= 1,this_array%n_data
WRITE(2,'(9(d12.6,2x))') this_array%total_baryon(i),&
this_array%neutron(i), &
this_array%proton(i),this_array%electron(i), &
this_array%muon(i), this_array%sigma_minus(i),&
this_array%lambda(i),this_array%sigma0(i),&
this_array%sigma_plus(i)
ENDDO
END SUBROUTINE write_dd_data
***** ! This subroutine converts the densities to find the fermilevels.
!
SUBROUTINE fermilevel_conversion
IMPLICIT NONE
INTEGER :: i
! TYPE(general_array)this_array
DOUBLE PRECISION :: pi2
pi2 = acos(-1.0d0)**2.0d0
OPEN(UNIT=5,FILE="fermilevels.dat")
DO i = 1,fermilevels_array%n_data
fermilevels_array%neutron(i) = &
(density_distribution%neutron(i)*3.*pi2)**(1./3.)
fermilevels_array%proton(i) = &
(density_distribution%proton(i)*3.*pi2)**(1./3.)
fermilevels_array%electron(i) = &
(density_distribution%electron(i)*3.*pi2)**(1./3.)
fermilevels_array%muon(i) = &
(density_distribution%muon(i)*3.*pi2)**(1./3.)
fermilevels_array%sigma_minus(i) = (&
density_distribution%sigma_minus(i)*3.*pi2)**(1./3.)
fermilevels_array%lambda(i) = &

```

```

(density_distribution%lambda(i)*3.*pi2)**(1./3.)
fermilevels_array%sigma0(i) = &
(density_distribution%sigma0(i)*3.*pi2)**(1./3.)
fermilevels_array%sigma_plus(i) = &
(density_distribution%sigma_plus(i)*3.*pi2)**(1./3.)
WRITE (5,'(8(d12.6,2x))') fermilevels_array%neutron(i),&
fermilevels_array%proton(i),fermilevels_array%electron(i),&
fermilevels_array%muon(i),fermilevels_array%sigma_minus(i),&
fermilevels_array%lambda(i),&
fermilevels_array%sigma0(i),fermilevels_array%sigma_plus(i)
ENDDO
END SUBROUTINE fermilevel_conversion
!*****
! Now we must read from the chem.dat file to
! get the value for the electron/muon we need in the calculations
! to find the emissivity.
!
SUBROUTINE read_chem_data(this_array)
IMPLICIT NONE
INTEGER :: i
TYPE(general_array), INTENT(INOUT) :: this_array
DOUBLE PRECISION :: chmedens, ne1chem, &
p1chem, e_min1chem, sigma_min1chem, &
lambda1chem, sigma_null1chem, sigma_pluss1chem
OPEN(UNIT=3, FILE='chem.dat')
DO i=1, this_array%n_data
READ(3*) chmedens, ne1chem, p1chem, &
e_min1chem, sigma_min1chem, &
lambda1chem, sigma_null1chem, sigma_pluss1chem
this_array%neutron(i)=ne1chem
this_array%proton(i)=p1chem
this_array%electron(i)=e_min1chem
this_array%sigma_minus(i)=sigma_min1chem
this_array%lambda(i)=lambda1chem
this_array%sigma0(i)=sigma_null1chem
this_array%sigma_plus(i)=sigma_pluss1chem
ENDDO
END SUBROUTINE read_chem_data
!*****
!This subroutine allocates room for the emissivities.
!

```

```

SUBROUTINE allocate_eps_array(this_array)
IMPLICIT NONE
TYPE(general_array), INTENT(INOUT) :: this_array
INTEGER :: n, i
n = this_array%n_data
IF (ASSOCIATED(this_array%epsilon_nu_npe)) &
DEALLOCATE(this_array%epsilon_nu_npe)
IF (ASSOCIATED(this_array%epsilon_nu_npm)) &
DEALLOCATE(this_array%epsilon_nu_npm)
IF (ASSOCIATED(this_array%epsilon_nu_lpe)) &
DEALLOCATE(this_array%epsilon_nu_lpe)
IF (ASSOCIATED(this_array%epsilon_nu_lpm)) &
DEALLOCATE(this_array%epsilon_nu_lpm)
IF (ASSOCIATED(this_array%epsilon_nu_smne)) &
DEALLOCATE(this_array%epsilon_nu_smne)
IF (ASSOCIATED(this_array%epsilon_nu_smnm)) &
DEALLOCATE(this_array%epsilon_nu_smnm)
IF (ASSOCIATED(this_array%epsilon_nu_smle)) &
DEALLOCATE(this_array%epsilon_nu_smle)
IF (ASSOCIATED(this_array%epsilon_nu_smlm)) &
DEALLOCATE(this_array%epsilon_nu_smlm)
IF (ASSOCIATED(this_array%epsilon_nu_sms0e)) &
DEALLOCATE(this_array%epsilon_nu_sms0e)
IF (ASSOCIATED(this_array%epsilon_nu_sms0m)) &
DEALLOCATE(this_array%epsilon_nu_sms0m)
IF (ASSOCIATED(this_array%epsilon_tot1)) &
DEALLOCATE(this_array%epsilon_tot1)
! This allocates room for the particle densities
ALLOCATE(this_array%epsilon_nu_npe(n))
ALLOCATE(this_array%epsilon_nu_npm(n))
ALLOCATE(this_array%epsilon_nu_lpe(n))
ALLOCATE(this_array%epsilon_nu_lpm(n))
ALLOCATE(this_array%epsilon_nu_smne(n))
ALLOCATE(this_array%epsilon_nu_smnm(n))
ALLOCATE(this_array%epsilon_nu_smle(n))
ALLOCATE(this_array%epsilon_nu_smlm(n))
ALLOCATE(this_array%epsilon_nu_sms0e(n))
ALLOCATE(this_array%epsilon_nu_sms0m(n))
ALLOCATE(this_array%epsilon_tot1(n))
DO i = 1, this_array%n_data
this_array%epsilon_nu_npe(i) = 0

```

```

this_array%epsilon_nu_npm(i) = 0
this_array%epsilon_nu_lpe(i)=0
this_array%epsilon_nu_lpm(i)=0
this_array%epsilon_nu_smne(i)=0
this_array%epsilon_nu_smnm(i)=0
this_array%epsilon_nu_smle(i)=0
this_array%epsilon_nu_smlm(i)=0
this_array%epsilon_nu_sms0e(i)=0
this_array%epsilon_nu_sms0m(i)=0
this_array%epsilon_tot1(i)=0
ENDDO
END SUBROUTINE allocate_eps_array
***** ! This subroutine tests the triangle inequality
! to see which processes can go, and
! calculate the neutrino emissivity epsilon_nu
! by the formula from Prakash et.al.
! ( Phys.Rev.Lett 66 (1991) 2703)
!
! All results are given in units of
! [[G_F**2]*[<(k_B*T)**6>,
! as we omit these constants form our calculations.
! Masses are in MeV/c**2
!
SUBROUTINE test_fermilevel
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION::root23, step
INTEGER :: i
root23 = (2.0d0/3.0d0)**(1.0d0/2.0d0)
DO i = 1, epsilon_array%on_data
! First we test the process n > p e v
IF (fermilevels_array%electron(i)>0&
.AND. fermilevels_array%proton(i)>0&
.AND. fermilevels_array%neutron(i) > 0&
.AND. fermilevels_array%electron(i)&
+ fermilevels_array%proton(i) - &
fermilevels_array%neutron(i) > 0) THEN
epsilon_array%epsilon_nu_npe(i) = (0.142431334)*&
((0.97390499)**2.0d0 * &
(1.0d0+&
3.0d0*1.233**2.0d0)*&

```

```

939.56563*&
938.27231 *&
(chem_array%electron(i)))
ENDIF
! Then the process n > p mu v
IF (fermilevels_array%muon(i)>0&
.AND. fermilevels_array%proton(i)>0&
.AND. fermilevels_array%neutron(i) > 0&
.AND. fermilevels_array%muon(i) &
+ fermilevels_array%proton(i) - &
fermilevels_array%neutron(i) > 0) THEN
epsilon_array%epsilon_nu_npm(i) = (0.142431334)*&
((0.97390499)**2.0d0 * &
(1.0d0+&
3.0d0*1.233**2.0d0)&
*939.56563&
*938.27231 *&
(chem_array%electron(i)))
ENDIF
! Then the process lambda > p e v
IF (fermilevels_array%electron(i)>0&
.AND. fermilevels_array%proton(i)>0&
.AND. fermilevels_array%lambda(i) > 0&
.AND. fermilevels_array%electron(i) &
+ fermilevels_array%proton(i) - &
fermilevels_array%lambda(i) > 0) THEN
epsilon_array%epsilon_nu_lpe(i) = (0.142431334)*&
((0.231)**2.0d0 * &
(1.50d0+&
3*1.5*(0.477+0.756/3)**2.0d0)&
*1115.684&
*938.27231 &
*(chem_array%electron(i)))
ENDIF
! Then the process lambda > p mu v
IF (fermilevels_array%muon(i)>0&
.AND. fermilevels_array%proton(i)>0&
.AND. fermilevels_array%lambda(i) > 0&
.AND. fermilevels_array%muon(i)&
+ fermilevels_array%proton(i) - &
fermilevels_array%lambda(i) > 0) THEN

```

```

epsilon_array%epsilon_nu_lpm(i) = (0.142431334)*&
((0.231)**2.0d0 * &
(1.50d0+&
4.5*(0.477+0.756/3)**2.0d0)&
*1115.684&
*938.27231 &
*(chem_array%electron(i)))
ENDIF

! Then the process sigma_minus > n e v
IF (fermilevels_array%electron(i)>0&
.AND. fermilevels_array%neutron(i)>0&
.AND. fermilevels_array%sigma_minus(i) > 0&
.AND. fermilevels_array%electron(i)&
+ fermilevels_array%neutron(i) - &
fermilevels_array%sigma_minus(i) > 0) THEN
epsilon_array%epsilon_nu_smne(i) = (0.142431334)*&
((0.231)**2.0d0 * &
(1.0d0+&
3.0d0*(0.756-0.477)**2.0d0)&
*1197.436&
*939.56563 &
*(chem_array%electron(i)))
ENDIF

! Then the process sigma_minus > n mu v
IF (fermilevels_array%muon(i)>0&
.AND. fermilevels_array%neutron(i)>0&
.AND. fermilevels_array%sigma_minus(i) > 0&
.AND. fermilevels_array%muon(i)&
+ fermilevels_array%neutron(i) - &
fermilevels_array%sigma_minus(i) > 0) THEN
epsilon_array%epsilon_nu_smmn(i) = (0.142431334)*&
((0.231)**2.0d0 * &
(1.0d0+&
3.0d0*(0.756-0.477)**2.0d0)&
*1197.436 &
*939.56563 &
*(chem_array%electron(i)))
ENDIF

! Then the process sigma_minus > lambda e v
IF (fermilevels_array%electron(i)>0&
.AND. fermilevels_array%lambda(i)>0&

```

```

.AND. fermilevels_array%sigma_minus(i) > 0&
.AND. fermilevels_array%electron(i)&
+ fermilevels_array%lambda(i) - &
fermilevels_array%sigma_minus(i) > 0) THEN
epsilon_array%epsilon_nu_smle(i) = (0.142431334)*&
((0.97390499)**2.0d0 * &
(1.0d0+2.0d0*(0.756)**2.0d0)&
*1197.436&
*1115.684 &
*(chem_array%electron(i)))
ENDIF

! Then the process sigma_minus > lambda mu nu
IF (fermilevels_array%muon(i)>0&
.AND. fermilevels_array%lambda(i)>0&
.AND. fermilevels_array%sigma_minus(i) > 0&
.AND. fermilevels_array%muon(i)&
+ fermilevels_array%lambda(i) - &
fermilevels_array%sigma_minus(i) > 0) THEN
epsilon_array%epsilon_nu_smlm(i) = (0.142431334)*&
((0.97390499)**2.0d0 * &
(1.0d0+2.0d0*(0.756)**2.0d0)&
*1197.436&
*1115.684 &
*(chem_array%electron(i)))
ENDIF

! Then the process sigma_minus > sigma0 e nu
IF (fermilevels_array%electron(i) > 0&
.AND. fermilevels_array%sigma0(i) > 0&
.AND. fermilevels_array%sigma_minus(i) > 0&
.AND. fermilevels_array%electron(i) &
+ fermilevels_array%sigma0(i) - &
fermilevels_array%sigma_minus(i) > 0) THEN
epsilon_array%epsilon_nu_sms0e(i) = (0.142431334)*&
((0.97390499)**2.0d0 * &
(1.0d0+&
6.0d0*(0.477)**2.0d0)&
*1197.436&
*1192.55 &
*(chem_array%electron(i)))
ENDIF

! Then the process sigma_minus > sigma0 mu nu

```

```

IF (fermilevels_array%muon(i) > 0&
.AND. fermilevels_array%sigma0(i) > 0&
.AND. fermilevels_array%sigma_minus(i) > 0&
.AND. fermilevels_array%muon(i)&
+ fermilevels_array%sigma0(i) - &
fermilevels_array%sigma_minus(i) > 0) THEN
epsilon_array%epsilon_nu_sms0m(i) = (0.142431334)*&
((0.97390499)**2.0d0 * &
(2.0d0+&
6.0d0*(0.477)**2.0d0)&
*1197.436&
*1192.55 &
*(chem_array%electron(i)))
ENDIF

! Now to calculate the total emissivity from this estimate.
epsilon_array%epsilon_tot1(i) = epsilon_array%epsilon_nu_npe(i) +&
epsilon_array%epsilon_nu_npm(i) + &
epsilon_array%epsilon_nu_lpe(i) + &
epsilon_array%epsilon_nu_lpm(i) + &
epsilon_array%epsilon_nu_smne(i) + &
epsilon_array%epsilon_nu_smnm(i) +&
epsilon_array%epsilon_nu_smle(i) +&
epsilon_array%epsilon_nu_smlm(i) +&
epsilon_array%epsilon_nu_sms0e(i) +&
epsilon_array%epsilon_nu_sms0m(i)
WRITE(4,'(11(d12.6,2x))') epsilon_array%epsilon_nu_npe(i) , &
epsilon_array%epsilon_nu_npm(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_lpe(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_lpm(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_smne(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_smnm(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_smle(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_smlm(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_sms0e(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_sms0m(i), &
epsilon_array%epsilon_tot1(i)

! The parameter "step" simulates the steps of increasing density
step=.2+0.01*i
WRITE(*,'(12(d12.6,2x))')step, &
epsilon_array%epsilon_nu_npe(i) , &
epsilon_array%epsilon_nu_npm(i) , &

```

```

epsilon_array%epsilon_nu_lpe(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_lpm(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_smne(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_smnm(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_smle(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_smlm(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_sms0e(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_sms0m(i), &
epsilon_array%epsilon_tot1(i)
WRITE(7,'(12(d12.6,2x))')step, &
epsilon_array%epsilon_nu_npe(i) , &
epsilon_array%epsilon_nu_npm(i) , &
epsilon_array%epsilon_nu_lpe(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_lpm(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_smne(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_smnm(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_smle(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_smlm(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_sms0e(i), &
epsilon_array%epsilon_nu_sms0m(i), &
epsilon_array%epsilon_tot1(i)
ENDDO
END SUBROUTINE test_fermilevel
END MODULE particle_density
*****!
! We now start the main program.
!
PROGRAM prog
USE particle_density
IMPLICIT NONE
INTEGER :: n
OPEN(UNIT=1,FILE="dens.dat")
OPEN(UNIT=4,FILE="epsilon1.dat")
OPEN(UNIT=7,FILE="plot11.dat")
READ(1,*) n
density_distribution%n_data = n
fermilevels_array%n_data = n
energies_array%n_data = n
epsilon_array%n_data = n
chem_array%n_data = n
CALL allocate_dd_array(density_distribution)

```

```
CALL allocate_dd_array(fermilevels_array)
CALL allocate_dd_array(energies_array)
CALL allocate_dd_array(chem_array)
CALL allocate_eps_array(epsilon_array)
CALL read_dd_data(density_distribution)
CALL read_chem_data(chem_array)
CALL write_dd_data(density_distribution)
CALL fermilevel_conversion
CALL test_fermilevel
END PROGRAM prog
```

Tillegg B

Beregninger i Maple

$$> \text{int}(1/(1+\exp(-x))*1/(1+\exp(x+v)),x)$$
$$\frac{\ln(1+e^x e^v)}{e^v - 1} - \frac{\ln(e^x + 1)}{e^v - 1} \quad (\text{B.1})$$

$$> \text{int}(1/(1+\exp(x))*1/(1+\exp(-x+v)),x)$$
$$-\frac{\ln(e^x + e^v)}{e^v - 1} + \frac{\ln(e^x + 1)}{e^v - 1} \quad (\text{B.2})$$

$$> \text{int}((\text{Pi}^2 * y^3 / (2 * (\exp(y) + 1))), y=0..infinity)$$
$$+ ((y^5 / (2 * (\exp(y) + 1))), y=0..infinity);$$

$$\frac{457}{5042} \pi^6 \quad (\text{B.3})$$

Tillegg C

Tabuleringer

Under får vi tallverdiene for nøytrinoemissiviteten som er plottet i Figur 7.8. Kolonner fra venstre til høyre er som følger: total tetthet, emissivitet fra prosessene $\Lambda \rightarrow p e \bar{\nu}_e$, $\Sigma^- \rightarrow n e \bar{\nu}_e$, $\Sigma^- \rightarrow n \mu \bar{\nu}_\mu$, og den totale emissiviteten. Tettheten er gitt i fm^{-3} . Nøytrinoemissiviteten gis i $\text{MeV s}^{-1} \text{ fm}^{-3}$, men vi har trukket ut de felles faktorene $(k_B T)^6 G_F^2$, så for å få en endelig tallverdi må disse verdiene inkluderes.

0.2100D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00
0.2200D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00
0.2300D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00
0.2400D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00
0.2500D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00
0.2600D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00
0.2700D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00	0.000000D+00
0.2800D+00	0.000000D+00	0.156000D+07	0.156000D+07	0.312000D+07	
0.2900D+00	0.000000D+00	0.154945D+07	0.154945D+07	0.309890D+07	
0.3000D+00	0.000000D+00	0.153890D+07	0.153890D+07	0.307781D+07	
0.3100D+00	0.000000D+00	0.152625D+07	0.152625D+07	0.305249D+07	
0.3200D+00	0.000000D+00	0.151359D+07	0.151359D+07	0.302718D+07	
0.3300D+00	0.000000D+00	0.149882D+07	0.149882D+07	0.299765D+07	
0.3400D+00	0.000000D+00	0.148406D+07	0.148406D+07	0.296811D+07	
0.3500D+00	0.000000D+00	0.146718D+07	0.146718D+07	0.293436D+07	
0.3600D+00	0.000000D+00	0.145030D+07	0.145030D+07	0.290061D+07	
0.3700D+00	0.000000D+00	0.143237D+07	0.143237D+07	0.286474D+07	
0.3800D+00	0.000000D+00	0.141339D+07	0.141339D+07	0.282677D+07	
0.3900D+00	0.000000D+00	0.139335D+07	0.139335D+07	0.278669D+07	
0.4000D+00	0.000000D+00	0.137225D+07	0.137225D+07	0.274450D+07	
0.4100D+00	0.000000D+00	0.135010D+07	0.135010D+07	0.270020D+07	

0.4200D+00 0.000000D+00 0.132584D+07 0.132584D+07 0.265168D+07
0.4300D+00 0.000000D+00 0.130158D+07 0.130158D+07 0.260316D+07
0.4400D+00 0.000000D+00 0.127627D+07 0.127627D+07 0.255253D+07
0.4500D+00 0.000000D+00 0.125201D+07 0.125201D+07 0.250401D+07
0.4600D+00 0.000000D+00 0.122775D+07 0.122775D+07 0.245550D+07
0.4700D+00 0.000000D+00 0.120349D+07 0.120349D+07 0.240698D+07
0.4800D+00 0.000000D+00 0.117923D+07 0.117923D+07 0.235846D+07
0.4900D+00 0.000000D+00 0.115497D+07 0.115497D+07 0.230994D+07
0.5000D+00 0.000000D+00 0.113071D+07 0.000000D+00 0.113071D+07
0.5100D+00 0.000000D+00 0.110645D+07 0.000000D+00 0.110645D+07
0.5200D+00 0.000000D+00 0.108219D+07 0.000000D+00 0.108219D+07
0.5300D+00 0.000000D+00 0.105793D+07 0.000000D+00 0.105793D+07
0.5400D+00 0.000000D+00 0.103262D+07 0.000000D+00 0.103262D+07
0.5500D+00 0.000000D+00 0.100625D+07 0.000000D+00 0.100625D+07
0.5600D+00 0.000000D+00 0.979878D+06 0.000000D+00 0.979878D+06
0.5700D+00 0.000000D+00 0.952454D+06 0.000000D+00 0.952454D+06
0.5800D+00 0.000000D+00 0.923975D+06 0.000000D+00 0.923975D+06
0.5900D+00 0.000000D+00 0.895497D+06 0.000000D+00 0.895497D+06
0.6000D+00 0.000000D+00 0.865963D+06 0.000000D+00 0.865963D+06
0.6100D+00 0.000000D+00 0.836430D+06 0.000000D+00 0.836430D+06
0.6200D+00 0.237161D+07 0.807951D+06 0.000000D+00 0.317956D+07
0.6300D+00 0.229421D+07 0.781582D+06 0.000000D+00 0.307579D+07
0.6400D+00 0.221681D+07 0.755213D+06 0.000000D+00 0.297202D+07
0.6500D+00 0.213940D+07 0.728843D+06 0.000000D+00 0.286825D+07
0.6600D+00 0.206200D+07 0.702474D+06 0.000000D+00 0.276448D+07
0.6700D+00 0.198460D+07 0.676105D+06 0.000000D+00 0.266070D+07
0.6800D+00 0.190720D+07 0.649736D+06 0.000000D+00 0.255693D+07
0.6900D+00 0.183289D+07 0.624422D+06 0.000000D+00 0.245731D+07
0.7000D+00 0.175549D+07 0.598052D+06 0.000000D+00 0.235354D+07
0.7100D+00 0.168118D+07 0.572738D+06 0.000000D+00 0.225392D+07
0.7200D+00 0.160688D+07 0.547424D+06 0.000000D+00 0.215430D+07
0.7300D+00 0.153567D+07 0.523164D+06 0.000000D+00 0.205883D+07
0.7400D+00 0.146446D+07 0.498904D+06 0.000000D+00 0.196336D+07
0.7500D+00 0.139324D+07 0.474645D+06 0.000000D+00 0.186789D+07
0.7600D+00 0.132513D+07 0.451440D+06 0.000000D+00 0.177657D+07
0.7700D+00 0.125392D+07 0.427180D+06 0.000000D+00 0.168110D+07
0.7800D+00 0.118581D+07 0.403975D+06 0.000000D+00 0.158978D+07
0.7900D+00 0.111769D+07 0.380771D+06 0.000000D+00 0.149846D+07
0.8000D+00 0.104958D+07 0.357566D+06 0.000000D+00 0.140714D+07
0.8100D+00 0.981464D+06 0.334361D+06 0.000000D+00 0.131582D+07
0.8200D+00 0.907157D+06 0.309046D+06 0.000000D+00 0.121620D+07

0.8300D+00 0.839043D+06 0.285842D+06 0.000000D+00 0.112488D+07
0.8400D+00 0.770929D+06 0.262637D+06 0.000000D+00 0.103357D+07
0.8500D+00 0.705911D+06 0.240487D+06 0.000000D+00 0.946397D+06
0.8600D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.8700D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.8800D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.8900D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.9000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.9100D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.9200D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.9300D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.9400D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.9500D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.9600D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.9700D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.9800D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.9900D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.1000D+01 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.1010D+01 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.1020D+01 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.1030D+01 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.1040D+01 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.1050D+01 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.1060D+01 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.1070D+01 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.1080D+01 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.1090D+01 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00
0.1100D+01 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00 0.000000D+00

Bibliografi

- [1] [Ph99] A.C. Philips; The Physics of Stars, John Wiley & Sons (1999).
- [2] [KW90] R.Kippenhahn A. Weigert; Stellar structure and Evolution, Springer-Verlag, (1990)380.
- [3] [Øs89] E. Østgaard; Neutron Stars Rewiew, Fysisk Institutt, AVH, UNIT, 1989
- [4] [Pr94] M. Prakash; Physics Reports 242 (1994) p 305.
- [5] [GS84] Gaillard & Savage; Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. (1984) 34: 359-364.
- [6] [Iw82] N. Iwamoto; Ann.Phys. 144(1982).
- [7] [Gl00] N.K. Glendenning; Compact Stars, Springer (2000).
- [8] [ST83] S.L.Shapiro & S.A. Teukolsky; Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars, John Wiley & Sons (1983).
- [9] [LPP91] J. M. Lattimer, C. J. Pethick, M. Prakash, P. Haensel; Phys. Rev. Lett. 66(1991)2703.
- [10] [PPL92] M. Prakash, M. Prakash, J. M. Lattimer, C. J. Pethick; Astrophys. J. 390(1992)L77.
- [11] [BZ34] W. Baade & F. Zwicky; Phys. Rev. 45(1934)138, Proc. Nat. Acad. Sci. 20(1934)259.
- [12] [OV39] J.R. Oppenheimer & G.M. Volkoff; Phys. Rev. 55(1939)374.
- [13] [GGP62] R. Giacconi, H. Gursky, F.R. Paolini & B.B. Rossi; Phys. Rev. Lett. 9(1962)439.
- [14] [HBP68] A. Hewish, S.J. Bell, J.D.H. Pilkington, P.F Scott & R.A. Collins; Nature 217(1968)709.

- [15] [G68] T. Gould; Nature 218(1968)731.
- [16] [HT75] R.A. Hulse & J.H. Taylor; Astrophys. Journ. 195 (1975)l51.
- [17] [Pe92] C.J. Pethick; Rev. Mod. Phys. 64(1992)1133.
- [18] [ØØ91] T. Øvergård & E. Østgård; Astron. Astrophys. 243(1991)412.
- [19] [Ca74] V. Canuto; Ann. Rev. Astron. Astrophys. 12(1974)167.
- [20] [Rø01] T. Røste; Nøytronstjerners maksimale masse og radius, Hovedoppgave, Institutt for fysikk, NTNU (2001).
- [21] [Mø83] T. Mølnvik; Nøytronstjerners maksimale masse og trehetsmoment, Hovedoppgave, NLTH (1983).
- [22] [ABS75] R. Adler, M. Bazin & M. Schiffer; Introduction to General Relativity, McGraw-Hill Book Company, 2nd edition (1975).
- [23] [Dy91] B. Dybvik; Tilstandsligninger, masse og radius for nøytronstjerner, Hovedoppgave, UNIT/NTH (1991).
- [24] [BG99] L. Bergström & A. Goobar; Cosmology and Particle Astrophysics, John Wiley & Sons (1999).
- [25] [Be89] M. V. Berry; Principles of cosmology and gravitation, Institute of Physics Publishing Bristol, Philadelphia (1989).
- [26] [HH00] H. Heiselberg, M. Hjorth-Jensen; Phys. Rep. 328(2000)237.
- [27] [KN86] D.B. Kaplan, A.E. Nelson; Phys. Lett. B 175(1986)57; B 179(1986)409(E).
- [28] [PBP97] M. Prakash, I. Bombaci, M. Prakash, P. J. Ellis, J.M. Lattimer, R. Knorren; Phys Rep. 280(1997)1-77.
- [29] [MBB85] C. Mahaux, P.F. Bortignon, R.A. BrogliaC.H. Dasso, Phys. Rep. 120 (1985) 1.
- [30] [MST90] A.B. Migdal, E.E. Saperstein, M.A. Troitsky, D.N. Voskresensky, Phys. Rep. 192 (1990) 179.
- [31] [MSS96] R. Machleidt, F. Sammarruca, Y. Song, Phys. Rev. C 53 (1996) R1483.
- [32] [WSS95] R.B. Wiringa, V.G.J. Stoks, R. Schiavilla, Phys. Rev. C 51 (1995) 38.

- [33] **[SKT94]** V.G.J. Stoks, R.A.M. Klomp, C.P.F. Terheggen, J.J. de Swart, Phys. Rev. C 49 (1994) 2950.
- [34] **[NHK97]** A. Nogga, D. Hüber, H. Kamada, W. Glöcke, Phys Lett. B 409 (1997) 19.
- [35] **[SBG98]** H.Q. Song, M. Baldo, G. Giansiracusa, U. Lombardo, Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 1584.
- [36] **[SBG97]** H.Q. Song, M. Baldo, G. Giansiracusa, U. Lombardo, Phys. Rev. Lett. B 411 (1997) 237.
- [37] **[APR98]** A. Akmal, V.R. Pandharipande, D.G. Ravenhall, Phys. Rev. C 58 (1998) 1804.
- [38] **[Da81]** B.D. Day, Phys. Rev. C 24 (1981) 1203.
- [39] **[Fr75]** J.L. Friar, Phys. Rev. C 12 (1975) 695.
- [40] **[AP97]** A. Akmal, V.R. Pandharipande, Phys. Rev C 56 (1997) 2261.
- [41] **[BK96]** V. Kalogera, G. Baym, Astrophys. J 470 (1996) L61.
- [42] **[RSY98]** Th.A. Rijken, V.G.J. Stoks, Y. Yamamoto, Phys. Rev. C 59 (1998) 21.
- [43] **[SR99]** V.G.J. Stoks, T.A. Rijken, Phys. Rev. C 59 (1999) 3009.
- [44] **[SL99]** V.G.J. Stoks, T.S.H. Lee, Phys. Rev. C 60 (1999) 024006.
- [45] **[VPR00]** I. Vidaña, A. Polls, A. Ramos, L. Engvik, M. Hjorth-Jensen, Phys. Rev. C 62 (2000) 035801.
- [46] **[FM79]** B.L. Friman, O.V. Maxwell, Astrophys. J. 232 (1979) 451.
- [47] **[EEO96]** Ø. Elgarøy, L. Engvik, E. Osnes, F.V. De Blasio, M. Hjorth-Jensen, G. Lazzari, Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 12.
- [48] **[YKG01]** D.G. Yakovlev, A.D. Kaminker, O.Y. Gnedin, P. Haensel, Phys. Rep. 354 (2001) 1-155.