ID 22031212122

NAME xiaoning Shu

THEORY OF MATRIX

Homework

1, 2, 6, 7

Problems

1. Problem 1

   判别下列变换中哪些是线性变换：

   (a) 在 R^3 中，设 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), Tx = ({\xi_1}^2, \xi_1 + \xi_2, \xi_3)$;

   (b) 在矩阵空间中 $R^{n\times n}$ 中，$Tx = BXC$, 这里 B, C 是固定矩阵；

   (c) 在线性空间中 P_n 中，$Tf(t) = f(t+1)$.

   #### Answer

   (a) 不是线性变换。

   因为 $T(2x) = (4\xi_1^2, 2\xi_1 + 2\xi_2, 2\xi_3)$, 但是 $2T(x) = (2\xi_1^2, 2\xi_1 + 2\xi_2, 2\xi_3)$。

   (b) 是线性变换。

   (c) 是线性变换。

2. Problem 2

   在 R^2 中，设 $x = (\xi_1, \xi_2)$. 证明 $T_1x = (\xi_2. -\xi_1)$ 与 $T_2x = (\xi_1, -\xi_2)$ 是 R^2 的两个线性变换，并求 $T_1 + T_2, T_1T_2$ 及 T_2T_1

   #### Answer

   设 $k, l \in R, y = (\alpha_1, \alpha_2) \in R^2$,$kx + ly = (k\xi_1 + l\alpha_1, k\xi_2 + l\alpha_2)$

   $T_1(kx + ly) = (k\xi_2 + l\alpha_2, -k\xi_1 - l\alpha_1) = kT_1(x) + lT_1(y)$

   所以 T_1 是线性变换, 同理 T_2 也是线性变换.

   所以 $(T_1 + T_2)x = T_1(x) + T_2(x) = (\xi_2 + \xi_1, -\xi_1 - \xi_2)$

   $(T_1T_2)x = T_1T_2(x) = (xi_2, -\xi_1)$

   $(T_2T_1)x = T_2T_1(x) = (\xi_2, \xi_1)$.

3. Problem 6

六个函数

$x_1 = e^{at}\cos bt, \quad x_2 = e_{at}\sin bt, \quad x_3 = te^{at}\cos bt$

$x_4 = te^{at}\sin bt, \quad x_5 = \frac{1}{2}t^2e^{at}\cos bt, \quad x_6 = \frac{1}{2}t^2e^{at}\sin bt$

的所有实系数线性组合构成实数域 R 上的一个六维线性空间 $V^6 = L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, 求微分变换 D 在基 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 下的矩阵

Answer

$D_{x_1} = ae^{at}\cos bt - e^{at}b\sin bt = ax_1 - bx_2$

$D_{x_2} = ae^{at}\sin bt + e^{at}b\cos bt = bx_1 + ax_2$

$D_{x_3} = e^{at}\cos bt + tae^{at}b\cos bt - te^{at}b\sin bt = x_1 + ax_3 - bx_4$

$D_{x_4} = e^{at}\sin bt - tae^{at}b\cos bt + te^{at}b\cos bt = x_2 + bx_3 + ax_4$

$D_{x_5} = te^{at}\cos bt + \frac{1}{2}t^2ae^{at}b\sin bt - \frac{1}{2}t^2e^{at}b\sin bt = x_3 + ax_5 - bx_6$

$D_{x_6} = te^{at}\sin bt + \frac{1}{2}t^2ae^{at}\sin bt + +\frac{1}{2}t^2e^{at}b\cos bt = x_4 + bx_5 + ax_6$

所以

$$D = \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix}$$

4. Problem 7

已知 R^3 的线性变换 T 在基 $x_1 = (-1, 1, 1), x_2 = (1, 0, -1), x_3 = (0, 1, 1)$ 下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

求 T 在基 $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵。

Answer

由题意得：$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

所以在新基下的矩阵为 $C^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$