第六章 定积分及其应用

第六章 定积分及其应用

- 本章学习定积分及其应用，包括定积分的概念、性质、计算及其应用。其中以牛顿-莱布尼茨两位大数学家冠名的牛顿-莱布尼茨公式是整个微积分最关键、最核心的定理。
- 同导数一样，我们仍然从几何和物理两个方面介绍定积分的背景问题，从中引出定积分的概念，然后介绍定积分的几何意义。

6.1　定积分的概念

一、定积分的背景和定义

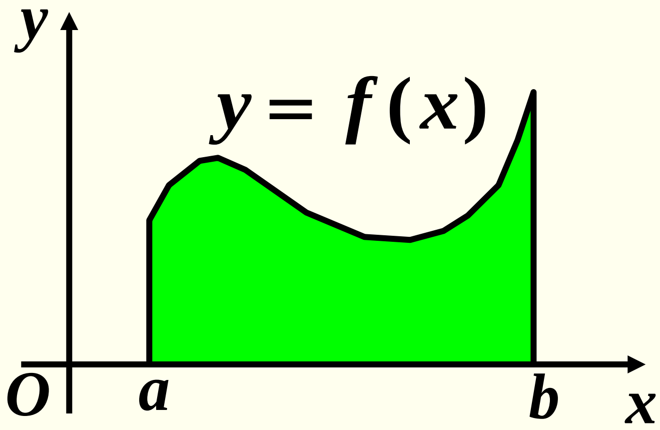
引例一　求曲边梯形的面积

曲边梯形是指由连续曲线

$$y = f(x)(f(x) \geq 0),$$

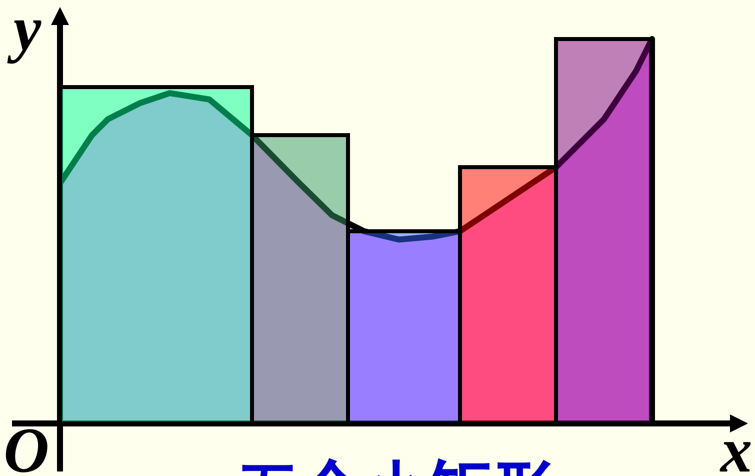
x 轴与两条直线 $x = a,$

$x = b$ 所围成的平面图形.

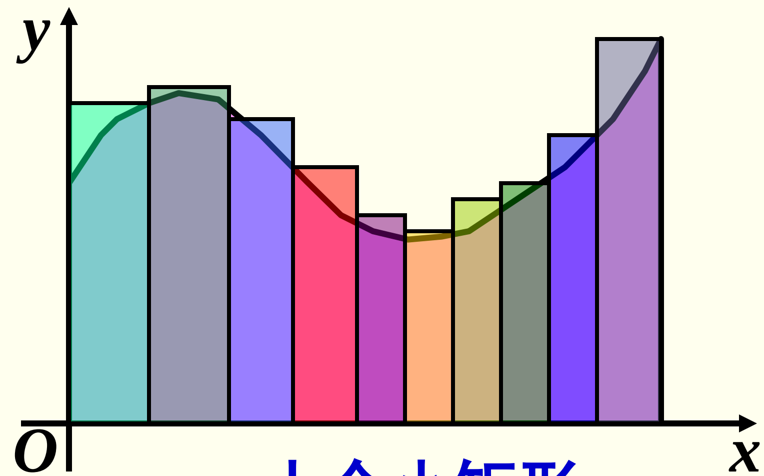


思想: **以直代曲**

用矩形面积之和近似取代曲边梯形面积



五个小矩形



十个小矩形

显然，小矩形越多，矩形面积之和越接近曲边梯形面积.

应用极限的思想, 分四步求面积A.

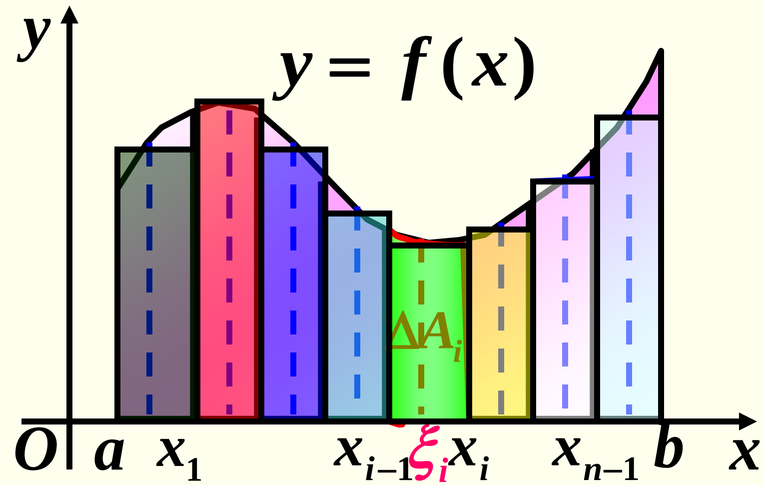
(1) 分割 任意用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

ΔA_i表示$[x_{i-1}, x_i]$上对应的窄曲边梯形的面积

把区间$[a,b]$分成n个小区间$[x_{i-1}, x_i]$,长度为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$



(2) 取近似

在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点ξ_i, 以$[x_{i-1}, x_i]$为底, $f(\xi_i)$为高的小矩形,

面积近似代替 ΔA_i, 有$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i, i = 1,2,\Lambda\ n$

(3) 求和　这些小矩形面积之和可作为曲边梯形面积A的近似值: $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

(4) 求极限　为了得到A的精确值, 分割无限加细, 即小区间的最大长度 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \Lambda\ \Delta x_n\}$ 趋近于零.　取极限, 极限值就是曲边梯形面积

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

定义6.1 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上有界, 在$[a,b]$中任意插入若干个分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \Lambda < x_{n-1} < x_n = b$

把区间$[a,b]$分成n个小区间, 各小区间长度依次为

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, (i = 1,2,\Lambda, n)$, 在各个小区间上任取

一点 $\xi_i (\xi_i \in \Delta x_i)$, 作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i \ (i = 1,2,\Lambda, n)$

并作和 $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \Lambda, \Delta x_n\}$,

如果不论对$[a,b]$怎样的分法, 也不论在区间$[x_{i-1}, x_i]$上点 ξ_i 怎样的取法, 只要当$\lambda \to 0$时, 和S总趋于确定的极限 I, 称这个极限 I 为函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分. 记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分和

积分上限

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分下限

被积函数

积分变量

被积表达式

$[a,b]$称为积分区间

关于定积分概念的三条说明:

1.如果 $f(x)$在$[a, b]$上的定积分存在, 则称 $f(x)$ 在$[a, b]$上可积, 否则, 称 $f(x)$在$[a, b]$上不可积.

2. 定积分是数值, 仅与被积函数及积分区间有关, 而与积分变量的字母无关.

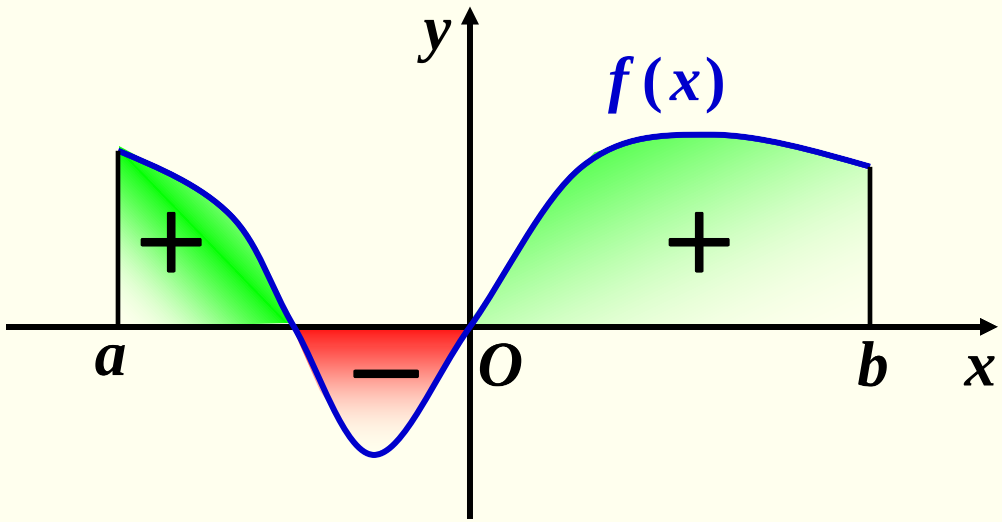
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

3. 连续函数一定可积. 只有有限个间断点的有界函数也可积. 但是反之不然.

二、定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义

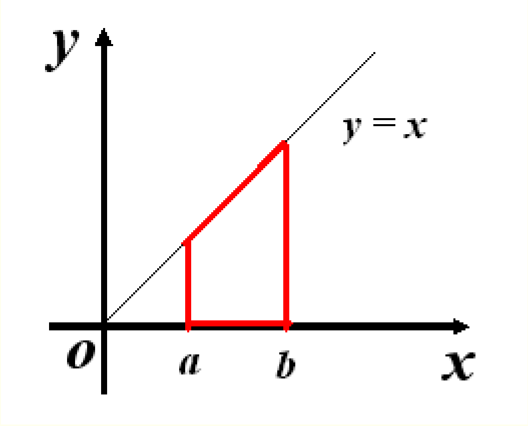
$f(x) > 0,\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$ 曲边梯形的面积

$f(x) < 0,\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$ 曲边梯形的面积的负值



例6.1 计算 $\int_a^b x\,\mathrm{d}x$， $b>a>0$

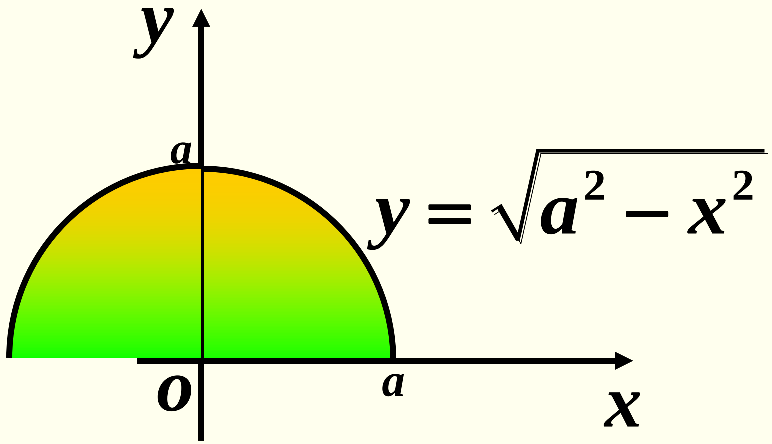
解



$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(a+b)(a-b)=\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)$$

例6.2 求 $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x,\quad a>0$

解



$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}a^2$$

定积分的对称性

设 $f(x)$ 连续，由定积分的几何意义立即得到下面的几何性质：

1. 如果 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

重要

2. 如果 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

3. 如果 $f(x)$ 是周期函数，则 $\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x$

例6.3 计算 $\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{x^4}\,\mathrm{d}x$

解 区间 [-1, 1] 关于原点对称，函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{x^4}$ 是连续的奇函数，所以

$$\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{x^4}\,\mathrm{d}x = 0$$

6.2　定积分的性质

设函数 $f(x)$ 在区间[a, b]上可积，我们做出如下规定:

(1) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

(2) 当 $a > b$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$

性质1（定积分关于积分函数的线性性）

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \quad (k\text{为常数}).$$

性质 2 (定积分关于积分区间的可加性)

设 $a < c < b$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

无论 a, b, c 的相对位置如何, 上式总成立.

例如当 a < b < c 时

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

性质3 (保号性) 如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$,

则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0.\quad (a < b)$

推论6.1 (定积分的保序性)

如果在区间$[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$,

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\quad (a < b)$

推论6.2 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.\quad (a < b)$

性质 6 (定积分的估值定理)

设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值与最小值，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

证 因 $m \le f(x) \le M$，由推论6.1

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b M\,\mathrm{d}x$$

即 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$

例6.5 估计定积分 $\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}\mathrm{d}x$的值的范围.

解 设 $f(x)=\frac{1}{3+\sin^3 x}, x\in[0,\pi].$

因 $0\le\sin^3 x\le 1,\quad \therefore \frac{1}{4}\le\frac{1}{3+\sin^3 x}\le\frac{1}{3}$

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\le\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}\mathrm{d}x\le\int_0^{\pi}\frac{1}{3}\mathrm{d}x$$

故 $\frac{\pi}{4}\le\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}\mathrm{d}x\le\frac{\pi}{3}$

性质7 (定积分中值定理)

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ,

使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

积分中值公式

证

$$m \le f(x) \le M$$

$$\Theta \quad m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a),$$

所以

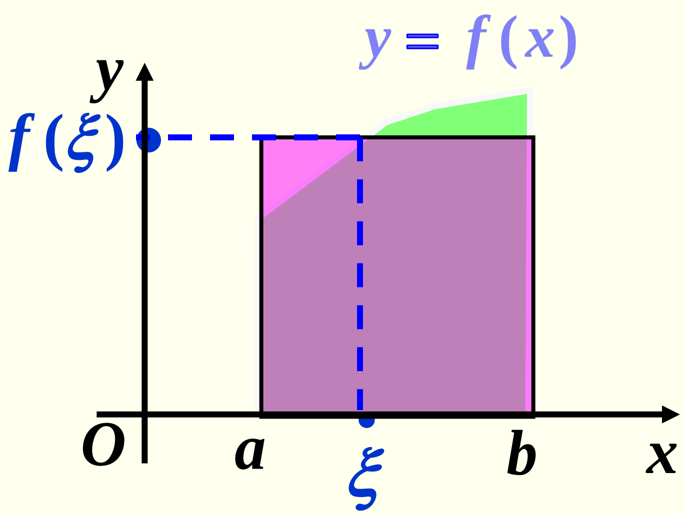
$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M$$

由闭区间上连续函数的介值定理知, 在区间[a, b]

上至少存在一个点 ξ, 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

积分中值公式的几何解释：



在区间$[a,b]$上至少存在一点ξ，使得以区间$[a,b]$为底边，以曲线$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积.

$\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 称为函数$f(x)$在$[a,b]$上的平均值.

6.3　微积分基本公式

本节我们介绍微积分学的基本公式，也称为牛顿—莱布尼兹公式。它揭示了定积分和原函数之间的联系.提供了一个简便有效的计算定积分的方法，促成了微积分方法的大发展。

引例　现在从另一个角度考察物体运动的路程:

已知变速直线运动的速度函数为 $v(t)$，要求物体从时刻 $t = a$ 到 $t = b$ 经过的路程.

如果我们已经知道物体的运动方程 —— 路程关于时间的函数 $S=S(t)$， 那么所求距离就是 $S(b)-S(a)$ ．根据 $S'(t)=v(t)$ 可知，$S(t)$是 $v(t)$ 的一个原函数，于是我们的问题可以通过不定积分来解决.

$$\int_a^b v(t)\,dt = S(b)-S(a)$$

微积分基本定理

定理5.1 如果 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区$[a,b]$上的一个原函数，即 $F'(x)=f(x)$
则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Newton-Leibniz 公式

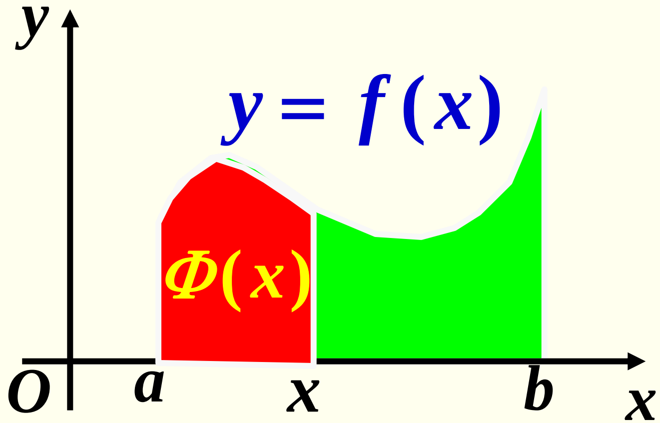
若将积分限当做自变量可以得到

积分上限函数的概念

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，并设 x 为 $[a, b]$ 上的一点，则定积分

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

是一个关于 x 的函数，



记为 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，称为积分上限函数.

定理6.2 （积分上限函数的基本性质）

如果 $f(x)$在$[a, b]$上连续, 则积分上限函数

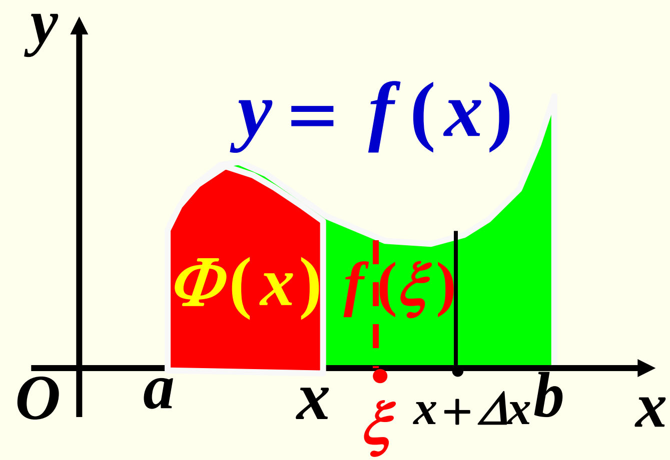
$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$在$[a, b]$上可导, 且其导数为

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x), (a \le x \le b)$$

即 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

证 $\forall x, x+\Delta x \in [a,b]$,

$$\Delta\Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t$$



由积分中值定理 $\Delta\Phi(x) = f(\xi)\Delta x$,

ξ在x与$x+\Delta x$之间 当$\Delta x \to 0$时，$\xi \to x$.

由$f(x)$在$[a,b]$上连续 有

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$$

即 $\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x), (a \le x \le b)$.

注记

- 定理6.2中“ $f(x)$在$[a, b]$上连续”的条件是必须的.
- 在 $f(x)$的间断点处 $\Phi(x)$ 不可导.
- 从定理6.2 可以得到一个推论, 连续函数在其连续区间有原函数.
- 如果区间I 包含 $f(x)$ 的间断点, 那么 $f(x)$ 在区间 I 上就没有原函数.

例6.6 设 $y=\int_0^{x^3}\sin t\,\mathrm{d}t$，求 y'.

解 令 $u=x^3$，则

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sin u\cdot 3x^2=3x^2\sin x^3$$

例6.7 计算定积分$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解 $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|\Big|_{-2}^{-1}=\ln 1-\ln 2=-\ln 2.$

例6.8 计算定积分$\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

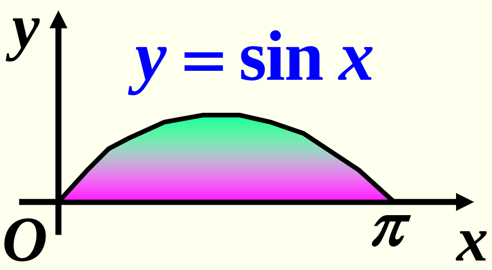
解 $\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_{0}^{1}=\frac{\pi}{4}$

例6.9 计算曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形的面积.

解 面积 $A=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$

$=-\cos x\Big|_0^{\pi}$

$=2$

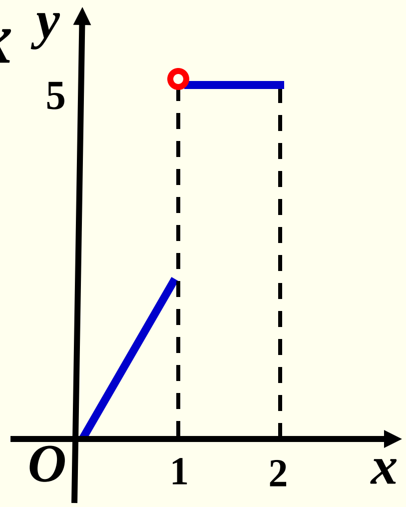


例6.12 设 $f(x)=\begin{cases} 2x & 0\le x\le 1 \\ 5 & 1< x\le 2 \end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 2x\mathrm{d}x+\int_1^2 5\mathrm{d}x$$

$$=6$$



例6.13 计算定积分$\int_0^3 x|x-2|\mathrm{d}x$.

解 原式$=\int_0^2 x(2-x)\mathrm{d}x+\int_2^3 x(x-2)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^2 (2x-x^2)\mathrm{d}x+\int_2^3 (x^2-2x)\mathrm{d}x$$

$$=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_2^3$$

$$=\frac{8}{3}$$

例6.10 设$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,求$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解 因定积分是数值,令$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$.

则 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+A\sqrt{1-x^2}$,

等式两边在 [0, 1] 上积分, 得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+A\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\arctan x\Big|_0^1+\frac{\pi}{4}A=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}A$$

于是 $A=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}A$, $\therefore A=\dfrac{\pi}{4-\pi}$, 即$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4-\pi}$.

例6.11 设 $f(x)$ 在[0, 1]上连续, 且 $f(x)<1$. 证明方程

$$2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=1$$ 在[0, 1]上只有一个实根.

证 令 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-1$, $F'(x)=2-f(x)$,

$\Theta\ f(x)<1$, $\quad \therefore F'(x)=2-f(x)>0$

$F(x)$ 在[0, 1]上为单调增加函数. $F(0)=-1<0$,

$F(1)=1-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=1-f(\xi)$, $(0\le\xi\le1)$ $\quad \therefore F(1)>0$

所以 $F(x)=0$, 即原方程在[0, 1]上只有一个实根.

§6.4　定积分的计算

尽管从理论上说把不定积分与牛顿－莱布尼兹公式结合起来就已经解决了定积分计算的主要问题，但我们仍然可以针对定积分本身的结构特点使计算过程得以简化.

一、定积分的换元法

定理6.4（定积分的换元公式）

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $x=\varphi(t)$ 单调且有连续导数,

且 $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$, 若对任意的 $t\in[\alpha,\beta]$ 都有

$a\le\varphi(t)\le b$. 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

证　设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数 则$F(\varphi(t))$是$f(\varphi(t))\varphi'(t)$的一个原函数

由牛顿-莱布尼兹公式，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a)$$

故 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$

例6.16 计算$\int_0^3 \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.

解 令$\sqrt{x+1}=t$，则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,

当 $x=0$ 时 $t=1$，当 $x=3$ 时 $t=2$

$$\int_0^3 \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t=2-2\ln 3+2\ln 2$$

例6.16 计算 $\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$

解 令 $x=\frac{1}{\cos t}$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{\cos t}\tan t\,\mathrm{d}t$,

当$x=-2$时, $t=\frac{2\pi}{3}$; 当$x=-\sqrt{2}$时, $t=\frac{3\pi}{4}$.

$$\text{原式}=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos t}\tan t}{\frac{1}{\cos t}(-\tan t)}\mathrm{d}t=-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{12}$$

例6.17 若 $f(x)$ 在[0, 1]上连续, 证明

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

证　设 $x=\pi-t$, $\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$,

$$x=0 \Rightarrow t=\pi,\quad x=\pi \Rightarrow t=0$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi} tf(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad \int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

二、定积分的分部积分法

定理6.5 设函数 $u(x), v(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有连续导数，则有

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x)$$

或

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v\mathrm{d}x.$$

例6.18 计算$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$

解：令$\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$，

当 $x=0$ 时 $t=0$， 当 $x=1$ 时 $t=1$

于是 $$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1 te^t dt$$

$$=2\int_0^1 tde^t$$

$$=2([te^t]_0^1-\int_0^1 e^t dt)$$

$$=2$$

例6.19 计算由曲线 $y = x\sin x\,(0 \le x \le \pi)$ 和 x 轴所围成的区域的面积 S.

解 由定积分的几何意义，所求面积

$$S = \int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}\cos x$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi$$

§6.5 广义积分

本章的前几节我们讨论了有界函数在有限闭区间上的定积分，可以称之为常义积分。这一节我们将把定积分的定义从有限区间推广到无限区间，从有界函数推广到无界函数，这就是所谓的广义积分（也有人称之为反常积分）。

一、 无穷区间的广义积分

定义6.2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，称

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上的广义积分.

如果极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**；否则, 称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

设函数 $f(x)$在区间$(-\infty,b]$上连续，则称

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

为函数 $f(x)$在区间$(-\infty,b]$上的广义积分.

如果极限$\lim\limits_{B\to-\infty}\int_{B}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则称广义积分$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则, 称广义积分$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

设函数 $f(x)$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上连续, 称

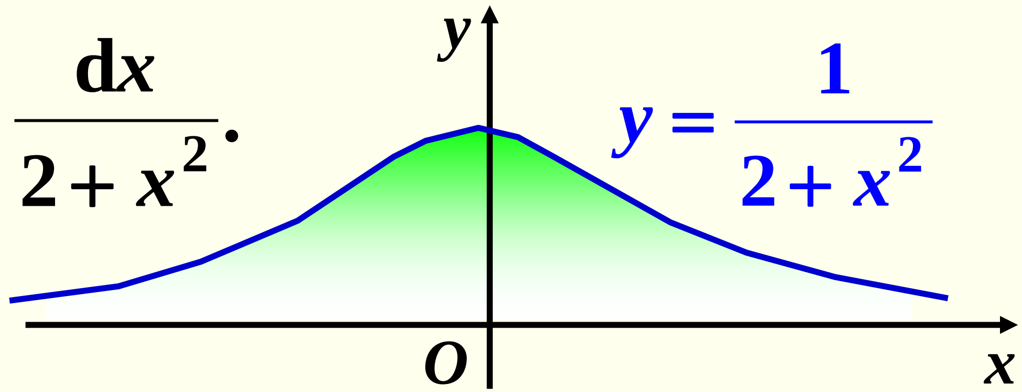
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

为函数 $f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上的广义积分,

如果 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$与$\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛, 称广义积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛; 否则, 称广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例6.20 计算$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2+x^2}$.



解 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{2+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2+x^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{\mathrm{d}x}{2+x^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{2+x^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{x}{\sqrt2}\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{x}{\sqrt2}\Big|_0^b$$

$$=\frac{\sqrt2}{2}\pi$$

例6.21 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 (1) 当 $p\neq1$时 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-p}-1}{1-p}=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \dfrac{1}{p-1}, & p>1\end{cases}$$

(2) 当 $p=1$时 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln b=+\infty,$

因此,当$p>1$ 时广义积分收敛, 其值为 $\dfrac{1}{p-1}$;

当 $p\leq1$时广义积分发散.

二、 无界函数的广义积分(瑕积分)

定义6.3 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续,
在点 a 的任意右邻域无界. 则称

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

为函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 的广义积分,

如果 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
收敛；否则, 称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

设函数 $f(x)$在区间$[a, b)$上连续, 而在点 b 的任意左邻域无界. 则称

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x.$$

为函数 $f(x)$在区间$[a, b)$的广义积分,

如果 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$存在,则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

收敛; 否则, 称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

设函数 $f(x)$在 $[a,c)\cup(c,b]$上连续 ,而在点c 的任意邻域内无界. 则称

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0^+}\int_{c+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在区间$[a, b]$的广义积分.

如果 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\int_{c+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x$ 都存在,

则称在$[a, b]$上无界函数$f(x)$的广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛;

否则, 称广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例6.22 讨论广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

$x=0$ 是瑕点.

解 (1) 当 $p\neq 1$时

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1-\varepsilon^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} +\infty, & p>1 \\ \dfrac{1}{1-p}, & p<1 \end{cases}$$

(2) 当 $p=1$时 $\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln x\Big|_{\varepsilon}^{1} = \infty.$

因此,当 $p<1$ 时广义积分收敛, 其值为$\frac{1}{1-p}$;

当 $p\geq 1$ 时广义积分发散.

例6.23 计算广义积分$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$.

解 $x=1$是瑕点.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3\lim_{\varepsilon\to0^+}(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big|_0^{1-\varepsilon} = 3$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\delta\to0^+}\int_{1+\delta}^{3} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\delta\to0^+}3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big|_{1+\delta}^{3} = 3\cdot\sqrt[3]{2}$$

$$\therefore \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3+3\cdot\sqrt[3]{2}$$

例6.24 计算广义积分$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$.

解 $x=0, x=1$是瑕点. 取 $c\in(0,1)$,

$$\int_0^c \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0+\varepsilon}^c \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\arcsin\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{c} = 2\arcsin c$$

$$\int_c^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{\delta\to 0^+}\int_c^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\delta\to 0^+} 2\arcsin\sqrt{x}\Big|_{c}^{1-\delta} = \pi - 2\arcsin c$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\arcsin c + (\pi - 2\arcsin c) = \pi$$

§6.6　定积分的应用

定积分在科学技术的各个领域都有广泛的应用。通常用定积分解决的问题是求非均匀分布的整体量，例如面积、体积、成本、利润等.“微元法”是定积分应用的基本方法，其核心思想是在每个微小的局部把函数看作常数。

一、平面图形的面积

1. 直角坐标系下平面图形的面积

设平面图形是由两条连续曲线 $y = f(x)$,

$y = g(x)$（其中$f(x) \geq g(x)$ ）以及直线 $x = a$,

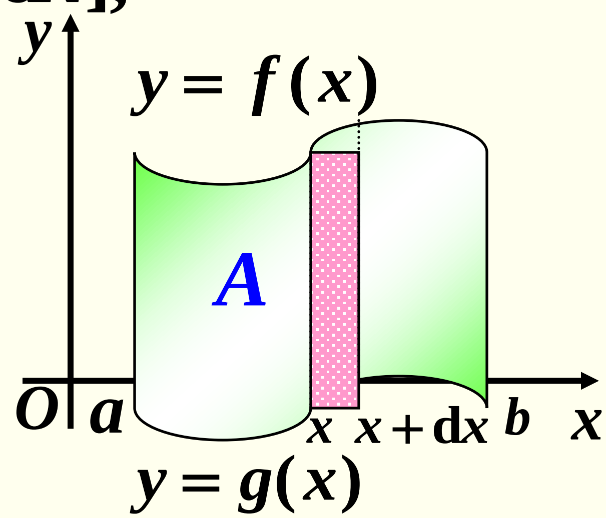
$x = b$ 所围成，求此平面图形的面积.

在$[a, b]$上任取一区间 $[x, x + \mathrm{d}x]$,

它对应的面积元素$\mathrm{d}A$为

$$\mathrm{d}A = [f(x) - g(x)] \cdot \mathrm{d}x$$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$$



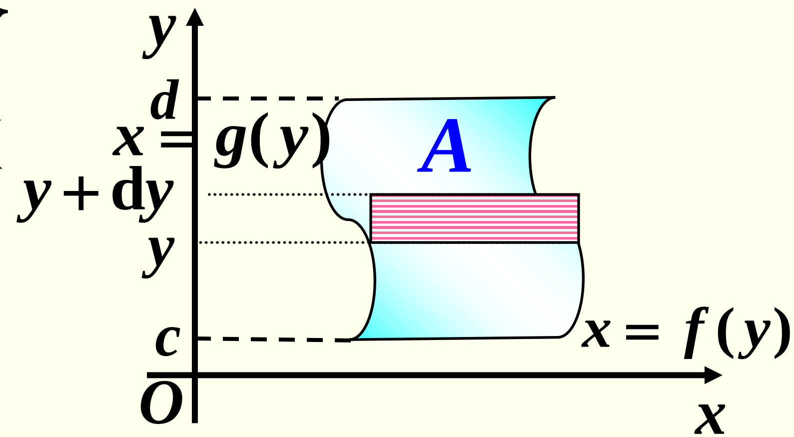
求由曲线$x = f(y), x = g(y)$ $(f(y) \geq g(y))$

和直线 $y = c, y = d$ 所围成的区域的面积 A.

在区间 [c, d] 上任取一个

小区间$[y, y + \mathrm{d}y]$, 它对应

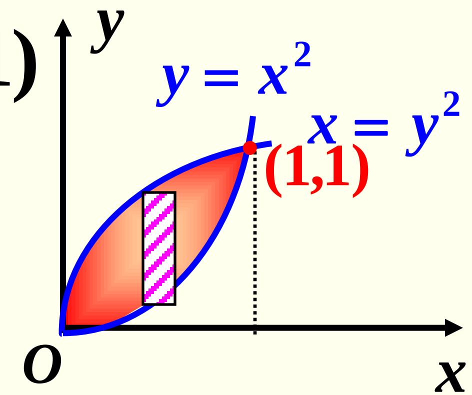
的面积元素$\mathrm{d}A$为



$$\mathrm{d}A = [f(y) - g(y)]\mathrm{d}y$$

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\mathrm{d}y$$

例6.25 计算由两条抛物线 $y^2 = x$ 和 $y = x^2$ 所围成的图形的面积.



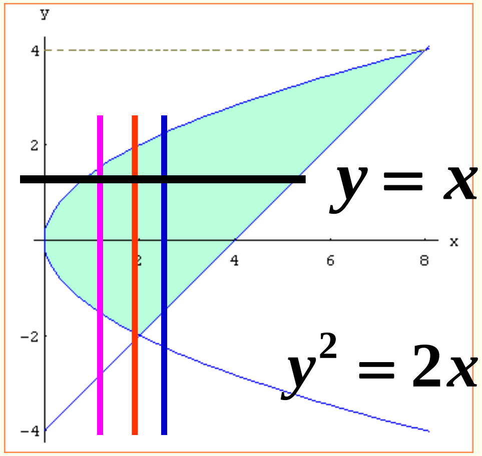
解 两曲线的交点 $(0,0),(1,1)$

选 x 为积分变量 $x \in [0,1]$

面积元素 $dA = (\sqrt{x} - x^2) \cdot dx,$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

例6.26 计算由曲线 $y^2=2x$ 和直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积.



解 两曲线的交点 $(2,-2),(8,4)$.

选 y 为积分变量 $y\in[-2,4]$

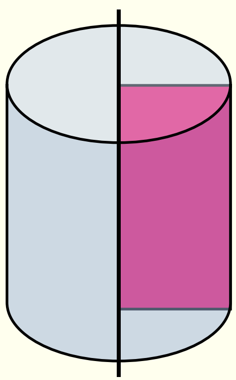
所求面积

$$A=\int_{-2}^{4}\left[(y+4)-\frac{y^2}{2}\right]\mathrm{d}y=18$$

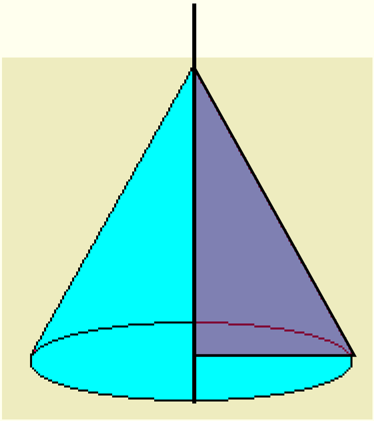
二、体积问题

1. 旋转体的体积

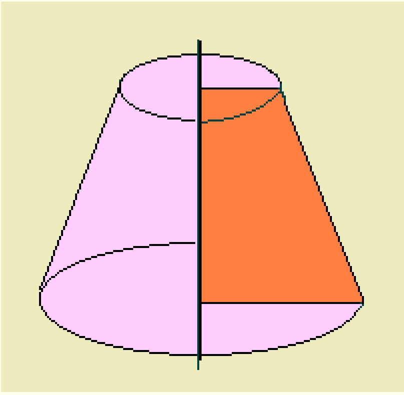
旋转体就是由一个平面图形饶这平面内一条直线旋转一周而成的立体. 这直线称为旋转轴.



圆柱

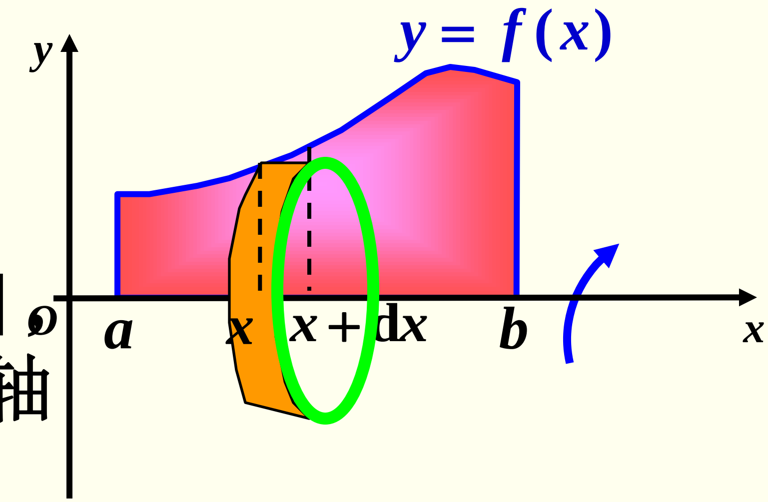


圆锥



圆台

如果旋转体是由连续曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋 x 转一周而成的立体, 求体积.



取积分变量为x, $x \in [a, b]$,
在$[a, b]$上任取小区间$[x, x + \mathrm{d}x]$,
取以$\mathrm{d}x$为底的小曲边梯形绕 x 轴旋转而成的薄片的

体积元素 $\mathrm{d}V = \pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$

旋转体的体积为 $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$

例6.27 求由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

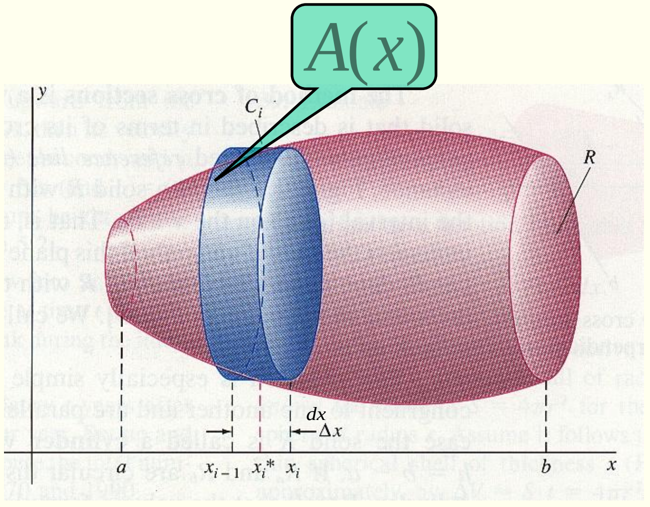
解 这个旋转椭球体可以看成是由上半椭圆 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 与 x 围成的图形绕 x 轴旋旋转而成.

所求体积为
$$V=\int_{-a}^{a}\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

当 $a=b$ 时,可得半径为 a 的球的体积是 $\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

2. 已知平行截面面积的立体的体积

如果一个立体介于过 $x=a, x=b$ 而垂直于 x 轴的两平面之间，$A(x)$表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积，

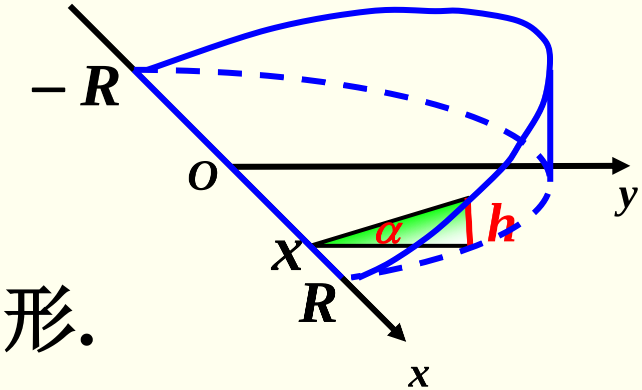


$A(x)$ 为 x 的已知连续函数.

体积元素 $\mathrm{d}V = A(x)\mathrm{d}x$

立体体积 $V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$

例6.28 一平面经过半径为R的圆柱体的底圆中心，并与底面交成角α，计算这平面截圆柱体所得立体的体积.



解 取坐标系如图，

底圆方程为 $x^2+y^2=R^2$

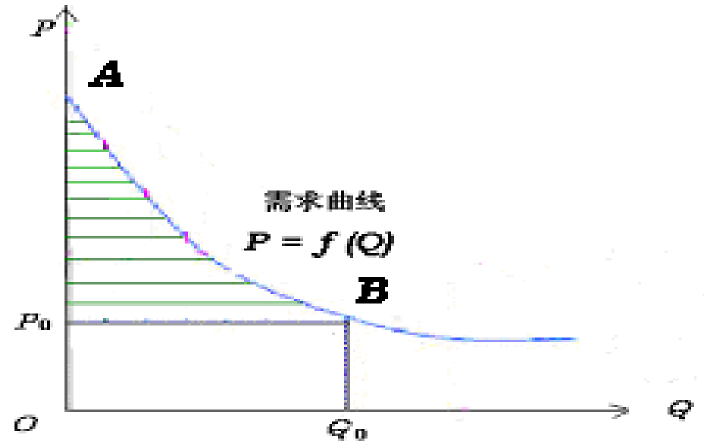
垂直于x轴的截面为直角三角形.

底$y=\sqrt{R^2-x^2}$，高$h=\sqrt{R^2-x^2}\tan\alpha$，

截面面积 $A(x)=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha$，

立体体积 $V=\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\tan\alpha\,dx=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$.

三、消费者剩余与生产者剩余



市场上的消费者剩余

设需求函数为 $P = P(Q)$，它表示消费者购买数量为 Q 的商品时所愿意支付的价格为 P，其中当 $Q = Q_0$时，价格 $P = P_0$，如图所示.

如果消费者按照他们愿意支付的价格即需求曲线持续购买商品，当购买商品的总数量为 Q_0 时，他们支付的总价为 $\int_0^{Q_0} P(Q)\,dQ$ ，即图中曲边梯形的面积 $OABQ_0$，这是他们购买数量Q_0的商品愿意支付的价格。如果消费者按照固定价格 P_0 购买数量 Q_0 的商品，则其总花费是 Q_0P_0， 由 OQ_0BP_0 矩形的面积给出。二者之差是图中阴影部分 ABP_0 的面积，经济学中称其为消费者剩余，记作 C_S ，即

$$C_S = \int_0^{Q_0} P(Q)\,dQ - Q_0 P_0$$

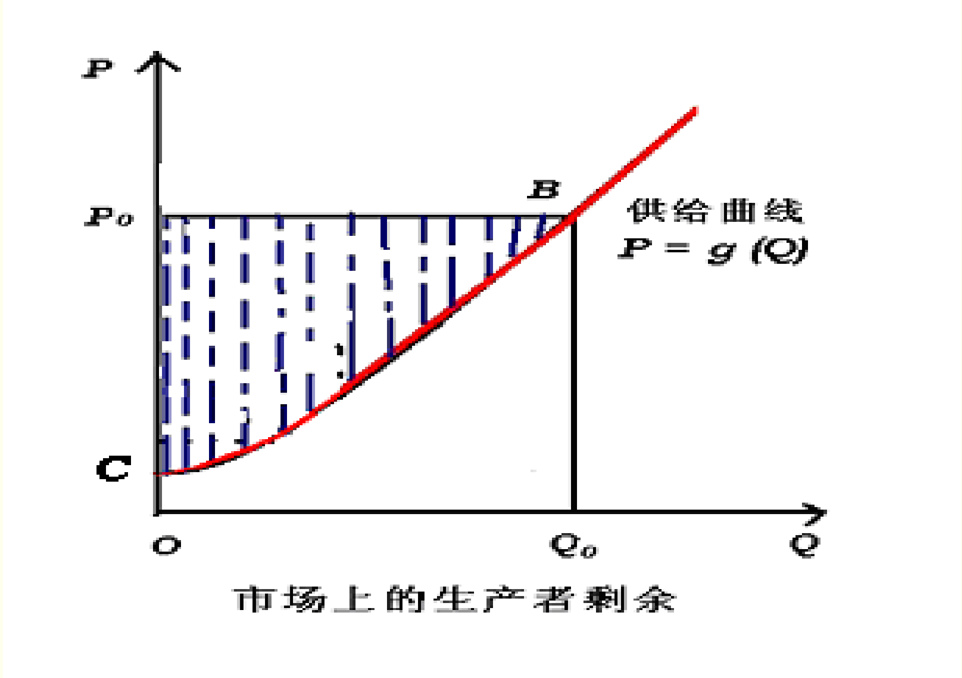
需要指出的是，消费者剩余并不是实际收入的增加，只是一种社会福利方面的心理感觉，在经济学中把消费者剩余作为衡量消费者福利的重要指标。

食盐、饮用水、煤气、电等一些生活必需品有极高的效用，因此当这些物品供给量减少时，消费者愿意付出更高的价格进行购买，市场以较低的价格提供此类物品，就可以获得较高的消费者剩余，从得到较高的社会福利感。

例6.29 设某居民用电的需求函数为 $P = 65 - \frac{1}{25}Q^2$（单位：元/度），求 $P = 1$ 时的消费者剩余。

解 当 $P = 1$ 时，$65 - \frac{1}{25}Q^2 = 1$，解出 $Q = 40$.

$$C_S = \int_0^{40} 65 - \frac{1}{25}Q^2 dQ - 40 = 2489\frac{1}{3}$$



设供给函数为 $P = P(Q)$，即供给数量 Q 的商品时生产者所愿意接受的价格是 P，假设当 $Q = Q_0$ 时，价格 $P = P_0$，并且所有的商品都被售出，则获得的收入为 Q_0P_0，由 OP_0BQ_0 矩形的面积给出（如图所示）。

如果生产者总是以其愿意接受的价格持续提供商品，获得的总收入由曲边梯形 COQ_0B 的面积 $\int_0^{Q_0} P(Q)\,dQ$ 表示 。

二者之差是阴影部分 P_0BC 的面积，记作P_S，即

$$P_S = Q_0P_0 - \int_0^{Q_0} P(Q)\,dQ$$

称为**生产者剩余**。

例6.30 给定需求函数 $P = 50 - 2Q_d$ 和供给函数 $P = 10 + 2Q_s$,在完全竞争的假设下，计算消费者剩余和生产者剩余。

解：在完全竞争的假设下，商品市场满足供需平衡，即 $Q_d = Q_s$，因此

$$\frac{P-10}{2} = \frac{50-P}{2}$$

解得均衡价格 $P_0 = 30$，均衡数量 $Q_0 = 10$

从而消费者剩余

$$C_S = \int_0^{Q_0} P(Q)\, dQ - Q_0 P_0$$

$$= \int_0^{10} (50 - 2Q)\, dQ - 10 \times 30$$

$$= 100$$

生产者剩余

$$P_S = Q_0 P_0 - \int_0^{Q_0} P(Q)\, dQ$$

$$= 10 \times 30 - \int_0^{10} (10 + 2Q)\, dQ$$

$$= 100$$

定积分习题课

例1 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx.$

解　原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,dx$$

$$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-(\sin x+\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\sqrt{2}-2$$

例2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\Lambda+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right).$

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\Lambda+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\Lambda+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

例3 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x.$

解 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x,\quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x.$

则 $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}=0$$

于是 $2I=\frac{\pi}{2},\qquad$ 故 $I=\frac{\pi}{4}.$

利用定积分换元法, 有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{200} x}{\sin^{200} x+\cos^{200} x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$

例4 求 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin x}{x^8+1}+\sqrt{\ln^2(1-x)}\right)\mathrm{d}x.$

解

$$\text{原式}=0+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left|\ln(1-x)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln(1-x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\ln(1-x)\mathrm{d}x$$

$$=x\ln(1-x)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x\mathrm{d}\ln(1-x)$$

$$-\left(x\ln(1-x)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}-\int_{0}^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}\ln(1-x)\right)$$

$$=\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}-\ln 2$$

例5 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内连续且满足

$$f(x)=1+\int_1^x \frac{f(t)}{x}\mathrm{d}t,\text{求 } f(x).$$

解 因 $$f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t,$$

即 $$xf(x)=x+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t,$$

上式两端对x求导, 有

$$f(x)+xf'(x)=1+f(x)$$

所以 $$f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$f(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln x+C.$$

由 $f(1)=1,\Rightarrow C=1.$ 故, $f(x)=\ln x+1.$

例5 设 $f(x)$ 连续,且 $\int_0^{x^3-1}f(t)\mathrm{d}t=x-1$,求 $f(7)$.

解 上式两端对 x 求导, 有

$$f(x^3-1)\cdot 3x^2=1$$

将 $x=2$ 代入,得 $f(7)=\dfrac{1}{12}.$

例6 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\ge 0 \\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0 \end{cases}$，求 $\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x$.

解　　令 $x-2=t$, 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

$$\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^0 \frac{1}{1+\cos t}\mathrm{d}t+\int_0^2 te^{-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^0 \frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-t^2}\mathrm{d}(-t^2)=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}$$

例7 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$. 证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\geq(b-a)^2$$

证　作辅助函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_a^x\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}-(x-a)^2$$

$$\Theta\ F'(x)=f(x)\int_a^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t+\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\cdot\frac{1}{f(x)}-2(x-a)$$

$$=\int_a^x\frac{f(x)}{f(t)}\mathrm{d}t+\int_a^x\frac{f(t)}{f(x)}\mathrm{d}t-\int_a^x 2\mathrm{d}t$$

$$\Theta\ f(x)>0,\qquad \therefore \frac{f(x)}{f(t)}+\frac{f(t)}{f(x)}\geq 2$$

故 $$F'(x)=\int_a^x\left(\frac{f(x)}{f(t)}+\frac{f(t)}{f(x)}-2\right)\mathrm{d}t\geq 0$$

所以，$F(x)$单调递增

又 $\Theta\ F(a)=0,\qquad \therefore F(b)\geq F(a)=0$

即 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\geq (b-a)^2.$$

例8 证明 $\int_0^1 x^m(1-x)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(1-x)^m \mathrm{d}x.$

证 对积分 $\int_0^1 x^m(1-x)^n \mathrm{d}x$ 作变换 $1-x=t$, 即 $x=1-t$.

则 $$\int_0^1 x^m(1-x)^n \mathrm{d}x = \int_1^0 (1-t)^m t^n \cdot (-\mathrm{d}t)$$

$$= \int_0^1 (1-t)^m t^n \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-x)^m x^n \mathrm{d}x$$

应用 $\int_0^1 x(1-x)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)x^n \mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$

例9 设 $f(x)$是以T为周期的周期函数 证明

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

证 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x.$

对积分$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$作变换$x - T = t$， 即$x = t + T.$

则 $$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(t+T)\mathrm{d}t = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

故 $$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

应用 $\int_0^{100\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = 100\int_0^{\pi} \sin x\mathrm{d}x = 200.$

例10 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(x)>0$, 证明:

存在$\xi\in(a,b)$,使得$\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\xi}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

证 设 $F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x-\int_x^b f(x)\mathrm{d}x$,

则$F(x)$在$[a,b]$上连续,且

$$F(a)=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<0,\quad F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$$

利用零点定理, 即得所证命题.

例12 设 $f(x)=x^2-\int_0^2 xf(t)\mathrm{d}t+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,求 $f(x)$.

解 因 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,

设 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=A, \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=B$.

则 $f(x)=x^2-Ax+2B$.

上式两端分别在[0,1]与[0,2]上积分, 有

$$B=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}A+2B,\quad A=\frac{8}{3}-2A+4B$$

解得 $A=-2, B=\frac{7}{6}$. 故 $f(x)=x^2-2x+\frac{7}{3}$.

例13 设 $f(x)=\begin{cases}\int_0^{\frac{x}{2}}\cos^3 t\,\mathrm{d}t, & x\geq 0\\ ax+b, & x<0\end{cases}$

试确定常数 a,b, 使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微

解 由可导必连续知, 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(ax+b)=b$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\int_0^{\frac{x}{2}}\cos^3 t\,\mathrm{d}t=0$$

由 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$, 可得 $b=0$.

又 $$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax-0}{x}=a$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\frac{x}{2}}\cos^3 t\,dt}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\cos^3\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\quad \Theta\ f'_-(0)=f'_+(0),\therefore a=\frac{1}{2}$$

例14 设函数$f(x)$可导, 证明$\exists\xi\in(0,1)$, 使得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(0)+\frac{f'(\xi)}{2}$$

证 令 $F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$, 则

$$F(0)=0, F(1)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x, F'(x)=f(x), F''(x)=f'(x)$$

由**泰勒公式**

$$F(1)=F(0)+F'(0)\cdot(1-0)+\frac{F''(\xi)}{2!}(1-0)^2,\quad \xi\in(0,1)$$

即 $\int_0^1 f(x)dx = f(0)+\frac{f'(\xi)}{2},\quad \xi\in(0,1)$

例15 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x.$

解 原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x$

$$=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{(2\cos^2\frac{x}{2})^2}\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sec^2\frac{x}{2}-1)\mathrm{d}\frac{x}{2}=4\left(\tan\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4-\pi$$

例16 设 $f(x)$在$[-a,a]$上连续,证明:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.$$并计算$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x.$$

证 $$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x \overset{x=-t}{=\!=\!=} -\int_a^0 f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(-x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = 2\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2.$$

例17 设 $F(x)=\int_0^{x^2} xf(x-t)\mathrm{d}t$,求 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$.

解 令 $x-t=u$, 即$t=x-u$, 则$dt=-du$.

当$t=0$时,$u=x$;当$t=x^2$时,$u=x-x^2$.

则 $F(x)=-\int_x^{x-x^2} xf(u)\mathrm{d}u = x\int_{x-x^2}^{x} f(u)\mathrm{d}u$,

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=\int_{x-x^2}^{x} f(u)\mathrm{d}u+x[f(x)-f(x-x^2)(1-2x)].$$

例18 计算 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}e^{-x}$

$= -(xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x)$

$= -(\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} + e^{-x}\Big|_0^{+\infty}) = -(\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} - 1)$

$= 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 1$

例19 计算 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}$.

解 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}=\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$

$$=\int_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_{1}^{+\infty}$$

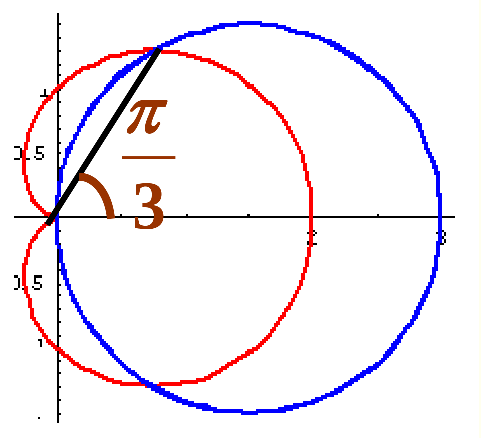
$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$$

定积分应用习题课

例1 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 与圆 $r=3a\cos\theta$ $(a>0)$所围成的图形的公共部分面积.

解 该图形关于x轴对称性,

两曲线在x轴上方的交点为$\left(\dfrac{3a}{2},\dfrac{\pi}{3}\right)$,



$$A=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}[a(1+\cos\theta)]^2\mathrm{d}\theta+2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(3a\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

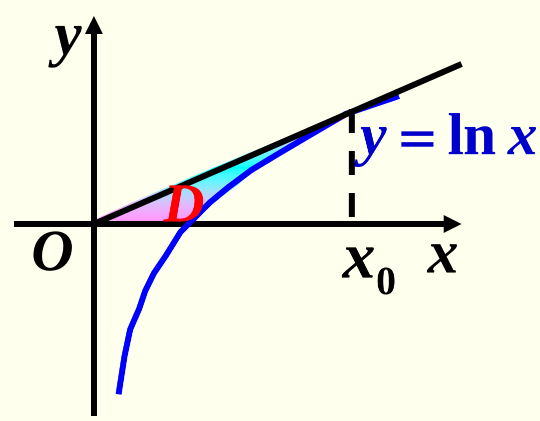
$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{9}{2}a^2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{5}{4}\pi a^2$$

例2 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A;

(2) 求 D 的绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.



解 (1) 设切点的横坐标为 x_0,

则曲线 $y=\ln x$ 在点 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程是

$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0)$$

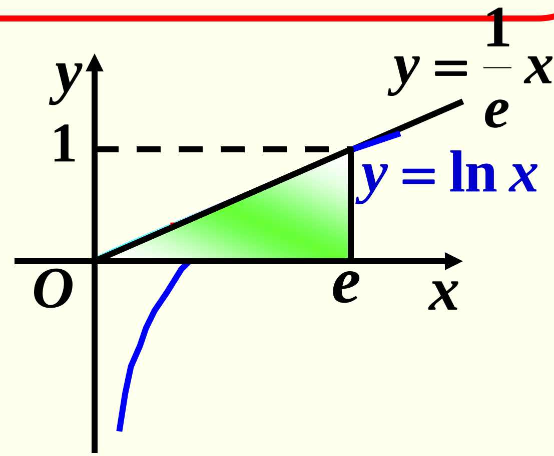
由该切线过原点知 $\ln x_0-1=0$, 从而 $x_0=e$,

所以该切线的方程为 $y=\frac{1}{e}x$.

过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A;

(2) 求 D 的绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.



平面图形 D 的面积

$$A=\int_0^1 (e^y-ey)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}e-1$$

(2)切线 $y=\frac{1}{e}x$ 与 x 轴及直线 $x=e$

所围成的三角形绕直线 $x=e$ 旋转所得的圆锥体的

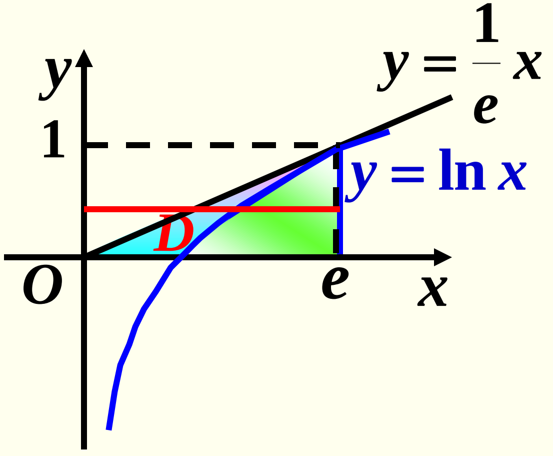
体积为 $$V_1=\frac{1}{3}\pi e^2.$$

过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A;

(2) 求 D 的绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 所围成的图形绕直线 $x=e$ 旋转所得的旋转体体积为



$$V_2=\int_0^1 \pi(e-e^y)^2\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}(4e-e^2-1)$$

因此所求旋转体的体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3)$$