其他要求

- 不迟到 不早退

作业要求

- 每周一随堂交作业
- 用数学作业纸，不要用作业本
- 写明学号姓名

第五章 不定积分

- 从几何上讲，曲线的切线问题的研究促进了导数概念的产生和一元微分学的建立，而平面图形求积问题则曾经是导致定积分概念产生的一个重要背景。牛顿和莱布尼茨发现了定积分计算和原函数的关系，从而在微分学和积分学之间搭建起一座桥梁。从这一角度看，本章介绍的不定积分是为下一章介绍的定积分所作的必要准备。

定理5.1 (原函数存在定理)

如果函数 $f(x)$ 区间 I 上连续, 那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使得 $\forall x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x)$$

即 连续函数必有原函数.

§5.1 不定积分的概念和性质

一、原函数

定义5.1 如果函数$F(x)$在区间I上可导,

且 $$F'(x) = f(x),\ x \in I$$

则称$F(x)$为$f(x)$在I上的一个原函数.

为什么引入不定积分

为了下一章

例 因为 $(\sin x)' = \cos x$

所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数.

因为 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$

所以 $\ln x$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的原函数.

关于原函数的两条说明：

(1) 若 $F'(x)=f(x)$, 则对于任意常数C,

$F(x)+C$ 都是 $f(x)$ 的原函数.

(2) 若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数,

则 $F(x)-G(x)=C$, （C为常数）

二、不定积分

定义5.2 函数 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数的全体称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

积分号　被积函数　被积表达式　积分变量　积分常数

关于不定积分请注意以下三个方面：

首先，不定积分是一个集合，也称函数族.

其次，不定积分与区间 I 有关 .

最后，不定积分与求导数是“互逆”的运算.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x),\quad \int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,$$

例5.1 求 $\int x^4 \mathrm{d}x$.

解 因为 $\left(\dfrac{x^5}{5}\right)' = x^4,$

所以 $\displaystyle\int x^4 \mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} + C$

例5.2 求 $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 因为 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$,

所以 $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$

例5.3 设曲线通过点 (1,3), 且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍, 求此曲线方程.

解 设曲线方程为 $y = f(x)$, 由题意

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$

即 $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数.

$$\therefore y = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$$

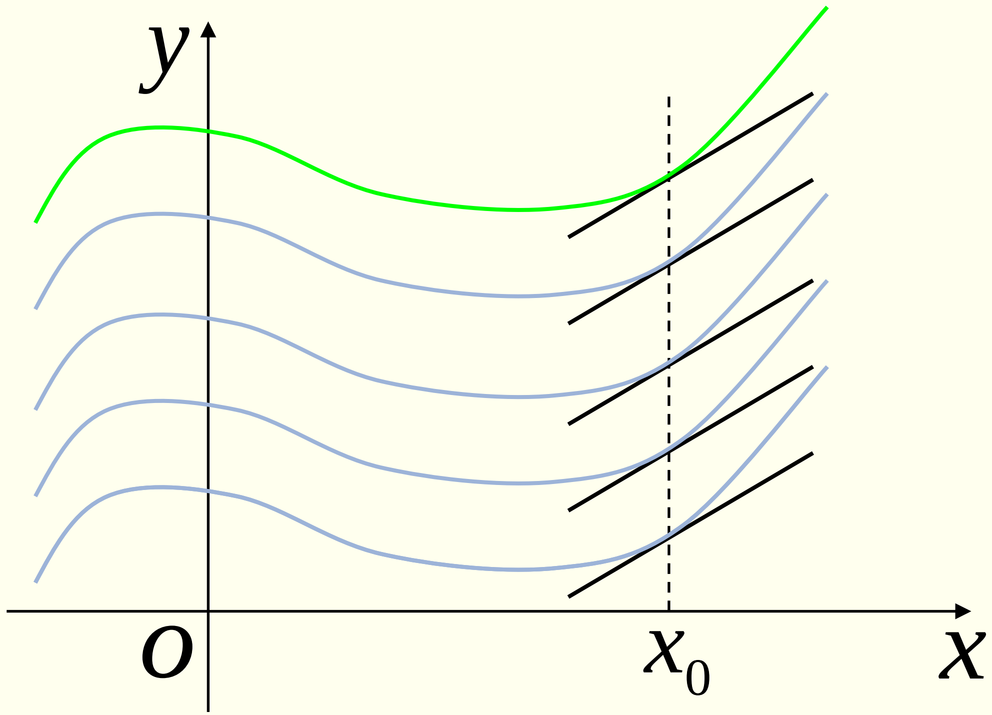
由曲线通过点 (1,3) $\Rightarrow C = 2,$

所求曲线方程为 $y = x^2 + 2.$

不定积分的几何意义：

函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的**积分曲线**.

于是，不定积分 $\int f(x)dx$ 在几何上表示函数 $f(x)$ 的所有积分曲线组成的平行曲线族.



积分曲线族

三、不定积分基本公式

(1) $\int \mathrm{d}x = x + C$

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$

(2) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $(\alpha \neq -1)$

(4) $\int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$

(5) $\int e^{x}\mathrm{d}x = e^{x} + C$

$$(6)\ \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C \qquad (7)\ \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$(8)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C \qquad (9)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$(10)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad (11)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$$

不定积分的线性法则：

性质5.1 $\int [f(x) \pm g(x)] \mathrm{d}x = \int f(x) \mathrm{d}x \pm \int g(x) \mathrm{d}x$

这个法则是说：两个函数的代数和的积分，等于这两个函数的积分的代数和.

性质5.2 $\int kf(x) \mathrm{d}x = k \int f(x) \mathrm{d}x$; ($k$是常数$k \neq 0$)

这个法则是说：不为零的常数因子可以提到积分符号的前面.

例5.4 求积分 $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x.$

解

$$\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=3\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=3\arctan x-2\arcsin x+C$$

例5.5 求积分 $\int 3^x \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$

解

$$\int 3^x \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

$$= \int (3\mathrm{e})^x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{(3\mathrm{e})^x}{\ln(3\mathrm{e})} + C$$

$$= \frac{3^x \mathrm{e}^x}{1 + \ln 3} + C$$

例5.6 求不定积分 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x.$

解 原式 $= \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= -\frac{1}{x} + \arctan x + C$$

例5.7 求不定积分 $\int \frac{1}{1+\cos 2x} \mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{1}{1+\cos 2x} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+2\cos^2 x - 1} \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan x + C$$

§5.2 换元积分法

我们利用不定积分的基本积分公式和性质求出了一些函数的不定积分．但是这种方法有很大的局限性，所能计算的不定积分非常有限，有必要进一步研究不定积分计算的一般方法.

由于微分和积分互为逆运算, 因此对应微分的各种方法, 就有相应的积分方法，其中， 对应复合函数微分法则的是换元积分法.

定理5.2（第一换元积分法）

设 $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C$, 其中 $u=\varphi(x)$ 是可微函数

则 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = F[\varphi(x)]+C$

第一换元法也称 “凑微分法”.

证 由复合函数的求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{F[\varphi(x)]\} = F'[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$= f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

由不定积分的定义

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = F[\varphi(x)] + C$$

例5.8 求不定积分$\int \cot^2 2x\mathrm{d}x$.

解 $$\int \cot^2 2x\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{\sin^2 2x}-1\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(2x)}{\sin^2 2x}-\int 1\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\cot 2x - x + C$$

例5.9 求不定积分 $\int \tan x \mathrm{d}x$.

解 $\int \tan x \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x$

$$= -\int \frac{1}{\cos x} \mathrm{d}\cos x$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

类似地可得 $\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C.$

例5.10 求不定积分 $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x\,(a>0)$.

解 原式 $= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

例5.11 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x \ (a \neq 0)$.

解 原式 $= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+a}\mathrm{d}x\right)$

$$= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}(x-a) - \int \frac{1}{x+a}\mathrm{d}(x+a)\right)$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C$$

例5.12 求 $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

解 $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x}$

$$= -2\cos\sqrt{x} + C.$$

例5.13 求不定积分$\displaystyle\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\mathrm{d}x.$

解 $$\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+2\ln x}\mathrm{d}(\ln x)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2\ln x}\mathrm{d}(1+2\ln x)$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x| + C$$

例5.14 求不定积分 $\int \cos^3 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \cos^3 x\mathrm{d}x = \int \cos^2 x\mathrm{d}\sin x$

$$= \int (1 - \sin^2 x)\mathrm{d}\sin x$$

$$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

例5.15 求不定积分$\int \sin^2 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \cos 2x\mathrm{d}2x$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

例5.16 求 $\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$= \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + C$$

定理5.3（第二换元积分法）

设函数$f(x)$连续，$x=\varphi(t)$具有连续导数

且有 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(t)+C,$

则 $\int f(x)\mathrm{d}x = F[\varphi^{-1}(x)]+C.$

第二换元积分法的基本思路:

若积分$\int f(x)\mathrm{d}x$ 不易计算, 可作适当变换

$x=\varphi(t)$,化为不定积分$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t,$

证 设 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{G[\varphi(t)]\}=G'[\varphi(t)]\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

由 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C$， 得

$$F'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

所以, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{G[\varphi(t)]\}=F'(t)$. 因此, $G[\varphi(t)]$与$F(t)$

最多相差一个常数，作代换 $t=\varphi^{-1}(x)$,

得 $G(x)$与$F(\varphi^{-1}(x))$ 最多相差一个常数.

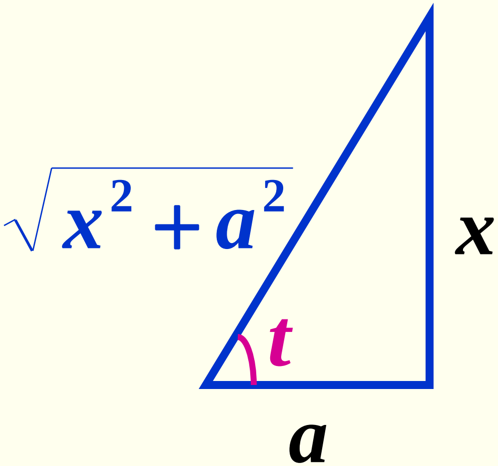
所以 $\int f(x)\mathrm{d}x=F[\varphi^{-1}(x)]+C$.

例5.17 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x \quad (a>0).$

解 令 $x = a\tan t, t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right).$ $\quad \mathrm{d}x = \dfrac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t,$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t} + \tan t\right| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1$$



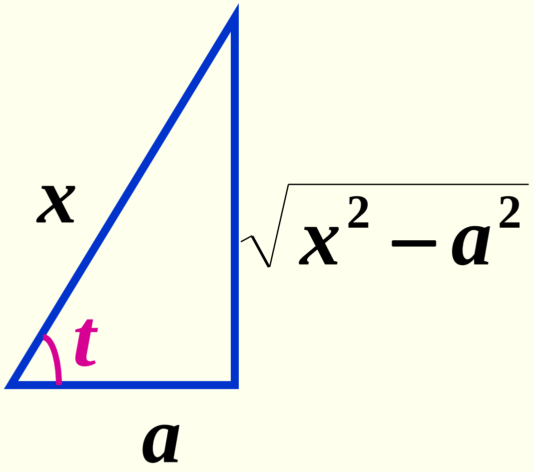
$$= \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$$

例5.18 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x \quad (a>0).$

解 令 $x=\frac{a}{\cos t}, t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$ 则 $\mathrm{d}x=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t,$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}=\ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$



$$=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$$

例5.19 求 $\int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

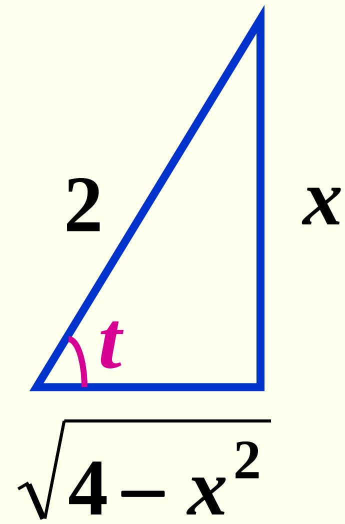
解 令 $x=2\sin t,\ t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right).\ \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t,$

$$\int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=4\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=4\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=2t+\sin 2t+C$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+C$$



说明　以上几例所使用的均为三角代换,

三角代换的目的是去掉根式.

一般规律如下：当被积函数中含有

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$, 可令 $x=a\sin t$;

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$, 可令 $x=a\tan t$;

(3) $\sqrt{x^2-a^2}$, 可令 $x=\dfrac{a}{\cos t}$.

例2.20 求 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x.$

解 令 $t=\sqrt{1+e^x}$, 即 $x=\ln(t^2-1)$, $\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t.$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t = \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$$

例5.21 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^7+2)}\mathrm{d}x$

解 令 $x=\dfrac{1}{t}\ (t\neq 0)$, $\quad \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t.$

$$\int \frac{1}{x(x^7+2)}\mathrm{d}x = -\int \frac{t^6}{1+2t^7}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{14}\ln|1+2t^7|+C$$

$$= -\frac{1}{14}\ln|2+x^7|+\frac{1}{2}\ln|x|+C$$

积分表做如下补充 (其中常数 $a>0$)

$$(12)\ \int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$(13)\ \int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

$$(14)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + C$$

$$(15)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + C$$

$$(16)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

$$(17)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

$$(18)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$(19)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

§5.3　分部积分法

分部积分法与函数乘积的求导法则相对应,也是求不定积分的常用方法之一，主要用于求两个函数乘积的不定积分.

分部积分法

- 注意是**分部积分法**
- 不是分步积分

设函数 $u(x), v(x)$ 具有连续导数, 利用两个函数乘积的求导法则

$$(uv)' = u'v + uv', \quad uv' = (uv)' - u'v$$

等式两边取不定积分

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x, \quad \int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

分部积分公式

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$$

例5.22 计算不定积分$\int xe^x \mathrm{d}x$.

解 $$\int xe^x \mathrm{d}x = \int x \mathrm{d}e^x$$

$$= xe^x - \int e^x \mathrm{d}x$$

$$= xe^x - e^x + C$$

例5.23 计算不定积分$\int x\sin x\mathrm{d}x$.

解

$$\int x\sin x\mathrm{d}x=-\int x\mathrm{d}\cos x$$

$$=-x\cos x+\int\cos x\mathrm{d}x$$

$$=-x\cos x+\sin x+C$$

例5.24 求积分$\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

解 $$\int x\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \arctan x\mathrm{d}x^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\arctan x-\int x^2\mathrm{d}\arctan x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\arctan x-\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\arctan x-\int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\arctan x-x+\arctan x\right)+C$$

例5.25 求积分$\int x^3 \ln x \mathrm{d}x$.

解 $$\int x^3 \ln x \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \ln x \mathrm{d}x^4$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^4 \ln x - \int x^4 \mathrm{d}\ln x\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^4 \ln x - \int x^3 \mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$$

例5.25 求积分$\int x^3 \ln x dx$.

解 $$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}\int \ln x dx^4$$
$$= \frac{1}{4}\left(x^4 \ln x - \int x^4 d\ln x\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(x^4 \ln x - \int x^3 dx\right)$$
$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$$

规律

- 反三角函数
- 对数函数
- 幂函数
- 指数函数
- 三角函数

$$\int x\arctan x\,\mathrm{d}x.$$

$$\int xe^{x}\,\mathrm{d}x.$$

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

$$\int x^{3}\ln x\,\mathrm{d}x.$$

§5.4 有理函数的不定积分

- 不定积分的计算不像导数计算那样有固的公式和法则，
- 因而更具创造性.
- 本节我们介绍简单有理函数的积分.

一、有理函数的不定积分

两个多项式之商表示的函数称为**有理函数**. 即

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}$$

其中 m、n 都是非负整数; $a_0,a_1,\cdots,a_m$及

$b_0,b_1,\cdots,b_n$ 都是实数, 并且 $a_0\neq 0, b_0\neq 0$.

有理函数的类别:

假定分子与分母之间没有公因式.

(1) 当$m<n$, 称为有理真分式;

(2) 当$m\ge n$, 称为有理假分式.

利用多项式除法, 假分式可以化成一个多项式与一个真分式之和.

例如, $$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}.$$

有理函数化为部分分式之和的一般规律:

分母一定能够分解成如下形式.

$$b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$$

$$=b_0(x-c_1)^{k_1}\cdots(x-c_p)^{k_p}(x^2+d_1x+e_1)^{l_1}\cdots(x^2+d_qx+e_q)^{l_q}$$

$$d_i^2-4e_i<0.$$

(1) 分母中若有因式 $(x-a)^k, k \geq 1$, 则可以分解为

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a}$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是待定系数.

特殊地：$k=1$,分解后为 $\dfrac{A}{x-a}$;

(2) 分母中若有因式 $(x^2+px+q)^k$，其中 $p^2-4q<0$,

则可以分解为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中 $M_i, N_i (i=1,2,\cdots,k)$ 都是待定系数.

特殊地：$k=1$，分解后为 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$；

真分式化为部分分式之和的方法为**待定系数法.**

例5.27 求积分$I=\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x.$

解 $$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},$$

$$\because\quad x+3=A(x-3)+B(x-2)$$

$$\therefore\quad x+3=(A+B)x-(3A+2B)$$

比较等式两端 x 项系数得

$$\begin{cases}A+B=1\\-(3A+2B)=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-5\\B=6\end{cases}$$

$$\therefore I=\int\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}\right)\mathrm{d}x=-5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C$$

例5.28 求积分 $I=\int \frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x.$

解 $$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1},$$

$$1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1) \qquad (1)$$

代入特殊值来确定系数 A,B,C

$$\therefore \frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}$$

故 $$I=\int\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{x-1}-\ln|x-1|+C$$

例5.29 求积分$I=\int\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x.$

解 $$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2},$$

$$1=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x)$$

整理得 $1=(A+2B)x^2+(B+2C)x+C+A,$

$$\begin{cases}A+2B=0\\B+2C=0\\A+C=1\end{cases}\Rightarrow A=\frac{4}{5},B=-\frac{2}{5},C=\frac{1}{5}$$

所以 $$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}$$

于是 $$I=\int\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}\mathrm{d}x+\int\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{5}\ln|1+2x|-\frac{1}{5}\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{5}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{5}\ln|1+2x|-\frac{1}{5}\ln(1+x^2)+\frac{1}{5}\arctan x+C$$

二、无理函数的积分

某些无理函数的积分，通过适当的变量代换，可以化为有理函数的积分。解决这类问题的指导思想，是通过代换去掉根号，从而把简单无理函数的积分化为有理函数的积分。

常见类型 $R(x, \sqrt[n]{ax+b}),$

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)(ae-bc\neq 0)$$

解决方法 作代换去掉根号. 分别令

$$\sqrt[n]{ax+b}=t,$$

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}=t.$$

例5.30求积分$\int \frac{x}{\sqrt{4x-3}}\mathrm{d}x$.

解　令 $\sqrt{4x-3}=t$，即$x=\frac{t^2+3}{4}$，$\mathrm{d}x=\frac{t}{2}\mathrm{d}t$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x-3}}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int (t^2+3)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{24}t^3+\frac{3}{8}t+C$$

$$=\frac{\sqrt{4x-3}}{12}(2x+3)+C$$

例5.31 求积分$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x$.

解 令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$, $x=\frac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=-\frac{2t\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$.

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x=-2\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

$$=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left[x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right]+C$$

例5.32 求积分 $I=\int\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x.$

解 令 $t=\sqrt[6]{x+1}$，即 $x=t^6-1$，则 $\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t.$

$$I=\int\frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\mathrm{d}t=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C$$

$$=2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1)+C$$

练习题 已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的原函数, 求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

解 $\int xf'(x)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}f(x) = xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x,$

$$\because \int f(x)\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{x} + C$$

$$\therefore f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

$$\therefore \int xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \cos x - \frac{2\sin x}{x} + C$$

第五章 不定积分习题课

常见凑微分类型

1. $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)\ (a\neq 0)$

2. $\int f(ax^{m+1}+b)x^m\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{a(m+1)}\int f(ax^{m+1}+b)\mathrm{d}(ax^{m+1}+b)$$

3. $\int \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\mathrm{d}x=-\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$4.\ \int \frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$$

$$5.\ \int f(a^x)a^x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\int f(a^x)\mathrm{d}(a^x)$$

$$6.\ \int f(e^x)e^x\mathrm{d}x = \int f(e^x)\mathrm{d}(e^x)$$

$$7.\ \int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})$$

$$8.\ \int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\mathrm{d}\sin x$$

$$9.\ \int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\mathrm{d}\cos x$$

$$10.\ \int \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\mathrm{d}\tan x$$

$$11.\ \int \frac{f(\cot x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int f(\cot x)\mathrm{d}\cot x$$

$$12.\ \int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int f(\arcsin x)\mathrm{d}\arcsin x$$

$$13.\ \int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int f(\arctan x)\mathrm{d}\arctan x$$

$$14.\ \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

例1 求 $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x\,(a>0)$.

解　原式 $=\int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x+\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=a\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$$

例2 求 $\int\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解　原式 $=-\int\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}\frac{1}{x}=-\sin\frac{1}{x}+C$

例3 求 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x.$

解1 原式 $= 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}\sqrt{x}$

$$= 2\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}\arctan\sqrt{x}$$

$$= (\arctan\sqrt{x})^2 + C$$

例3 求 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$.

解2 设 $\sqrt{x}=t$,即 $x=t^2$, 则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

$$\text{原式}=\int \frac{\arctan t}{t(1+t^2)}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int \frac{\arctan t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=2\int \arctan t\,\mathrm{d}\arctan t$$

$$=(\arctan t)^2+C=(\arctan\sqrt{x})^2+C$$

例4 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(2+x^{10})}$.

解1 原式$\displaystyle=\int\frac{x^9}{x^{10}(2+x^{10})}\mathrm{d}x=\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}(x^{10})}{x^{10}(2+x^{10})}$

$$=\frac{1}{20}[\ln x^{10}-\ln(x^{10}+2)]+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{20}\ln(x^{10}+2)+C$$

解2 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(2+x^{10})}=\frac{1}{2}\int\frac{(2+x^{10})-x^{10}}{x(2+x^{10})}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x^{9}}{2+x^{10}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{20}\ln(x^{10}+2)+C$$

解3 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(2+x^{10})}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^{11}(2x^{-10}+1)}$$

$$=-\frac{1}{20}\int\frac{\mathrm{d}(2x^{-10}+1)}{2x^{-10}+1}=-\frac{1}{20}\ln(2x^{-10}+1)+C$$

例5 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{x}(1+e^{2x})}$.

解1 原式 $=\int \frac{(1+e^{2x})-e^{2x}}{e^{x}(1+e^{2x})}\,\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{1}{e^{x}}\,\mathrm{d}x-\int \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\int e^{-x}\,\mathrm{d}(-x)-\int \frac{\mathrm{d}e^{x}}{1+e^{2x}}$$

$$=-e^{-x}-\arctan e^{x}+C$$

例5 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x(1+e^{2x})}$.

解2 原式 $=\int \frac{e^x}{e^{2x}(1+e^{2x})}\mathrm{d}x$

$$=\int\left(\frac{1}{e^{2x}}-\frac{1}{1+e^{2x}}\right)\mathrm{d}e^x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}e^x}{e^{2x}}-\int\frac{\mathrm{d}e^x}{1+e^{2x}}$$

$$=-\frac{1}{e^x}-\arctan e^x+C$$

例6 求 $\displaystyle\int \frac{1+x}{x(1+xe^{x})}\mathrm{d}x.$

解 原式 $\displaystyle=\int \frac{e^{x}(1+x)}{xe^{x}(1+xe^{x})}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{1}{xe^{x}(1+xe^{x})}\mathrm{d}(xe^{x})$$

$$=\int \left(\frac{1}{xe^{x}}-\frac{1}{1+xe^{x}}\right)\mathrm{d}(xe^{x})$$

$$=\ln\left|xe^{x}\right|-\ln\left|1+xe^{x}\right|+C$$

例7 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x \sqrt[4]{\tan x}}$.

解 原式 $= \int (\tan x)^{-\frac{1}{4}} \mathrm{d}(\tan x) = \frac{4}{3}(\tan x)^{\frac{3}{4}} + C.$

例8 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$.

解 原式 $= \int \frac{1}{\cos^2 x(\tan^2 x + 2)} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2 x + 2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$$

例9 求 $\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}} \mathrm{d}x.$

解 原式 $= \int e^{-\sin x} \mathrm{d}\sin x = -e^{-\sin x} + C.$

例10 求 $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x.$

解 原式 $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x$

$$= \int (\sin x + \cos x) \mathrm{d}x = \sin x - \cos x + C$$

例11 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\ (x>0)$.

解1 设 $x=\sin t$, 则 $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$,

$$\text{原式}=\int \frac{\cos t}{\sin^2 t\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=-\cot t+C=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$$

解2 设 $x=\dfrac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,

$$原式=\int\frac{1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\right)=-\int\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$$

$$=-\sqrt{t^2-1}+C\ =-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$$

解3 $$原式=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^{-2}-1}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^{-2}-1)}{\sqrt{x^{-2}-1}}$$

$$=-\sqrt{x^{-2}-1}+C$$

例12 求 $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} \mathrm{d}x$.

解 原式 $= -\int x^2 e^x \mathrm{d}\left(\frac{1}{x+2}\right) = -\left(\frac{x^2 e^x}{x+2} - \int \frac{1}{x+2} \mathrm{d}(x^2 e^x)\right)$

$$= -\frac{x^2 e^x}{x+2} + \int \frac{2xe^x + x^2 e^x}{x+2} \mathrm{d}x = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + \int xe^x \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{x^2 e^x}{x+2} + \int x \mathrm{d}e^x = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + xe^x - \int e^x \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{x^2 e^x}{x+2} + xe^x - e^x + C$$

例13 求 $\displaystyle\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x.$

解 $$\text{原式}=\int \frac{x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+\int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=x\tan\frac{x}{2}-\int \tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x+\int \tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \;=x\tan\frac{x}{2}+C$$

例14 求积分$\int e^{2x}(\tan x+1)^2\mathrm{d}x.$

解 原式$=\int e^{2x}(\tan^2 x+2\tan x+1)\mathrm{d}x$

$$=\int e^{2x}\sec^2 x\mathrm{d}x+2\int \tan x e^{2x}\mathrm{d}x$$

$$=\int e^{2x}\mathrm{d}\tan x+2\int \tan x e^{2x}\mathrm{d}x$$

$$=e^{2x}\tan x-2\int \tan x e^{2x}\mathrm{d}x+2\int \tan x e^{2x}\mathrm{d}x$$

$$=e^{2x}\tan x$$

例15 设 $f'(\ln x)=\dfrac{x}{2}(x>0)$，求函数 $f(x)$.

解 令 $\ln x=t$, 即 $x=e^t$.

则 $f'(t)=\dfrac{1}{2}e^t$,

$\therefore\quad f(t)=\int\dfrac{1}{2}e^t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}e^t+C$

故 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^x+C$.

例16 试求满足方程 $f'(x)+xf'(-x)=x$ 的 $f(x)$.

解 由 $$f'(x)+xf'(-x)=x \qquad (1)$$

得 $$f'(-x)-xf'(x)=-x \qquad (2)$$

$(2)\times x$ 得 $$xf'(-x)-x^2f'(x)=-x^2 \qquad (3)$$

$(1)-(3)$ 得 $$f'(x)=\frac{x^2+x}{1+x^2}=1+\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2},$$

故 $$f(x)=x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\arctan x+C.$$

单项选择题

1\. 设 e^{-x} 是 $f(x)$的一个原函数, 则$\int xf(x)\mathrm{d}x = ($ A $)$

$(A)\ (x+1)e^{-x}+C$ $(B)\ (1-x)e^{-x}+C$

$(C)\ (x-1)e^{-x}+C$ $(D)\ -(x+1)e^{-x}+C$

2\. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x = x\cos(2x)+C$, 则 $f(x)=($ B $)$

$(A)\ \cos x + 2x\sin(2x)$ $(B)\ \cos(2x) - 2x\sin(2x)$

$(C)\ \sin x + 2x\sin(2x)$ $(D)\ \sin x - 2x\sin(2x)$

3. 设 $\int f(x)e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-e^{-\frac{1}{x}}+C$，则 $f(x)=$(C)

(A) $\frac{1}{x^2}$　(B) $\frac{1}{x}$　(C) $-\frac{1}{x^2}$　(D) $-\frac{1}{x}$

4. $\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=$(D)

(A) $\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}+C$　(B) $\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}+C$

(C) $\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C$　(D) $-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C$