第九章 微分方程与差分方程

在长期的实践活动中，人们在研究自然科学、工程技术及经济学等许多问题时，常常希望能够找到变量之间的函数关系, 即未知函数. 不幸的是，在许多情况下，这种函数关系却很难直接找到，往往只能够建立未知函数及其导数的关系，这种关系式数学上称为微分方程.

§9.1　常微分方程的基本概念

微分方程是一门独立的数学学科，有其完整的理论体系. 本节将介绍常微分方程的一些基本概念.

一、微分方程的类别

1.常微分方程: 含有一元未知函数的导数(或微分)的方程称为常微分方程.

2. 微分方程的阶: 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数.

举例 $y' = xy$, $y'' + 2y' - 3y = e^x$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \qquad (t^2 + x)\mathrm{d}t + x\mathrm{d}x = 0$$

n 阶微分方程 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0.$

微分方程中，如果关于未知函数及其各阶导数都是一次的微分方程, 称为**线性微分方程**;否则称为**非线性微分方程**.

线性微分方程的一般形式：

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

例9.1 指出下列微分方程的阶数，并说明它们是线性的还是非线性的？

(1) $x(y')^2-2yy'+x=0$ (2) $x^2y''-xy'+y=0$

(3) $xy'''+2y''+x^2y=0$ (4) $(7x-6y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$

(5) $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{Q}{C}=0$ (6) $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}+\rho=\sin^2\theta$

二、微分方程的解

3. 微分方程的解: 代入微分方程能使方程成为恒等式的函数.

积分曲线: 微分方程解的图象.

4. 微分方程的解的分类:

(1) 通解: 微分方程的解中含有任意常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同.

(2) 特解: 微分方程不含任意常数的解.

例9.2 验证 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = 0$$ 的解.

解
$$\Theta \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k^2 C_1 \cos kt - k^2 C_2 \sin kt$$

将 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ 和 x 的表达式代入原方程

$$-k^2(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) + k^2(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) \equiv 0$$

故 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是原方程的通解.

例9.3 验证 $y=\sin(x+C)$ 是微分方程 $y^2+y'^2=1$ 的通解.

解 把 $y=\sin(x+C)$, $y'=\cos(x+C)$ 代入方程,

得到恒等式 $\sin^2(x+C)+\cos^2(x+C)=1$

故 $y=\sin(x+C)$是微分方程 $y^2+y'^2=1$ 的解.

又 $y=\sin(x+C)$ 含有一个任意常数，而微分方程 $y^2+y'^2=1$ 是一阶的,

所以$y=\sin(x+C)$是微分方程 $y^2+y'^2=1$的通解.

5. 初始条件: 用来确定任意常数的条件.

6. 初值问题: 求微分方程满足初始条件的特解问题.

一阶: $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ 过定点的积分曲线;

二阶: $\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$

过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线.

例9.4 细菌的增长率与总数成正比，如果培养液的细菌总数在24小时内由100个单位增长到400个单位，那么，前12个小时后细菌总数是多少？

解 设 $y(t)$ 表示 t 时刻的细菌总数，则得到如下

初值问题 $y' = ky,\ y(0) = 100,\ y(24) = 400$

容易验证方程 $y' = ky$ 的通解为 $y = Ce^{kt}$

将初始条件代入通解得 $C = 100,\ k = \dfrac{\ln 2}{12}$

所以 $y(t) = 100e^{\frac{\ln 2}{12}t}$ 从而 $y(12) = 200$

§9.2 一阶微分方程

微分方程的中心问题之一是求微分方程的解. 表示微分方程的解的方法主要有两种，即数值解和解析解。求微分方程的解析解就是求微分方程的解的解析表达式，其中使用不定积分方法求解微分方程的方法称为初等积分法。

一、可分离变量的微分方程

1定义　可分离变量的一阶微分方程的标准形式为：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x)\cdot\psi(y) \quad (8-1)$$

其中 $\varphi(x),\psi(y)$ 分别是 x, y 的连续函数.

设 $\psi(y)\neq 0$, 则方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}=\varphi(x)\mathrm{d}x$

这就是此类方程称作可分离变量方程的原因.

2.解法 分离变量 设$\psi(y)\neq 0$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}=\varphi(x)\mathrm{d}x$

两端积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}=\int\varphi(x)\mathrm{d}x,$

即得原微分方程的通解

$$G(y)=F(x)+C$$

其中$G(y),F(x)$分别是$\dfrac{1}{\psi(y)}$和$\varphi(x)$的一个原函数

注意: 如果$\psi(y)=0$有零点$y=y_0$,即$\psi(y_0)=0$,

则常函数 $y\equiv y_0$ 也是方程的一个解.

例9.5 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

解　当 $y\neq 0$ 时分离变量得 $\dfrac{dy}{y}=2x\,dx$,

两端积分 $\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int 2x\,dx$,

得　$\ln|y|=x^2+C_1$,

从而　$y=Ce^{x^2}$.

而 $y\equiv 0$也是方程的一个解.

故原方程的通解为$y=Ce^{x^2}$，C为任意常数.

例9.6 求微分方程 $\mathrm{d}x - xy\mathrm{d}y = x^3y\mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}x$ 的通解.

解 整理得 $(1+y^2)\mathrm{d}x = xy(1+x^2)\mathrm{d}y,$

分离变量 $\dfrac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y = \dfrac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x,$

两端积分 $\displaystyle\int \frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y = \int \frac{(1+x^2)-x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x,$

从而 $\dfrac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1,$

化简得 $(1+x^2)(1+y^2) = e^{2C_1}x^2$，记 $e^{2C_1} = C,$

原方程的通解为 $(1+x^2)(1+y^2) = Cx^2, (C \neq 0)$

例9.7 求解定解问题: $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-1}{2} \\ y(0)=2 \end{cases}$

解 先求通解,分离变量, 得 $\dfrac{1}{y^2-1}\mathrm{d}y = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}x, (y \neq \pm 1)$

两端积分, 得 $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{y-1}{y+1}\right| = \dfrac{1}{2}x + C_1$

整理得 $\dfrac{y-1}{y+1} = \pm e^{2C_1}e^x$, 记$\pm e^{2C_1} = C$,

原方程的通解为 $y = \dfrac{1+Ce^x}{1-Ce^x}$, (C是任意常数

将 $y(0)=2$ 代入通解，得 $C=\dfrac{1}{3}$,

于是所求定解问题的特解为 $y=\dfrac{3+e^x}{3-e^x}$.

二、 齐次方程

1. **定义** 齐次方程的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (6-2)$$

其中 $\varphi(u)$ 是 u 的连续函数.

求解齐次方程的一般思路, 是通过变量替换把齐次方程化为可分离变量的方程.

2. 解法 作变量代换 $u=\dfrac{y}{x}$, 即 $y=xu.$

则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

代入原方程, 得 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\varphi(u)-u}{x}$.

化为可分离变量的方程.

分离变量, 得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$,

两端积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$

求得积分后再将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入, 即得原方程的通解.

例9.9 求微分方程 $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y, (x > 0)$的通解.

解　原方程可化为 $y' = \sqrt{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} + \dfrac{y}{x}, (x > 0)$

是齐次方程.　令$u = \dfrac{y}{x}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u$,

代入原方程得　$x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = \sqrt{1 - u^2} + u$,

当$u \neq \pm 1$时,有　$\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$,

两端积分, 得　$\arcsin u = \ln x + C$,

即 $u=\sin(\ln x+C)$

又 $u\equiv\pm1$ 也是原方程的解, 将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入,

得原方程的通解为 $y=x\sin(\ln x+C)$

及 $y=\pm x,\ (x>0).$

例 求微分方程 $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = -y\mathrm{d}y$ 的通解.

另解 凑微分

$$\frac{x}{y} + \ln|y| = C$$

三、一阶线性微分方程

1. 定义 一阶线性微分方程的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x) \qquad (8-3)$$

其中 $p(x)$，$q(x)$ 是关于 x 的连续函数.

当 $q(x)\neq 0$ 时方程(8-3)称为一阶线性非齐次微分方程.

当 $q(x)=0$ 时方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0 \qquad (8-4)$$

通常称为方程(8-3)所对应的一阶线性齐次方程.

一阶线性方程解的结构

1. 如果 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程(8-3)的解,

则 $y_1(x)-y_2(x)$是方程(8-4)的解;

2. 如果 $y_1(x), y_2(x)$分别是方程(8-3)和方程(8-4)的解, 则 $y_1(x)+y_2(x)$是方程 (8-3)的解.

结论:方程(8-3)的通解等于方程(8-4)的通解加上方程(8-3)的一个特解.

2. 解法

(1) 先解线性齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0.$

使用分离变量法

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-p(x)\mathrm{d}x,\quad \int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int p(x)\mathrm{d}x$$

积分可得 $\ln y=-\int p(x)\mathrm{d}x+\ln C,$

齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$

(2) 再解线性非齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$.

设非齐次方程通解形式为

$$y=\boxed{C(x)}\,e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

待定函数

把齐次方程通解中的常数变易为待定函数的方法, 称为常数变易法.

$$y'=C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}+C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot[-p(x)]$$

将 y, y' 代入原方程得 $C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = q(x)$

积分可得 $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C$

一阶线性非齐次微分方程的通解为

$$y = \underbrace{Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}_{\text{对应齐次方程通解}} + \underbrace{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \cdot \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程的特解}}$$

例9.10 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

解（1）先求对应的齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2y}{x+1}=0,$$

变形方程为 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=2\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$， $(y\neq 0)$

积分，得 $\ln y=2\ln(x+1)+\ln C,$

对应的齐次方程通解为 $y=C(x+1)^2.$

设原非齐次方程通解为 $y = C(x)(x+1)^2$,

代入原方程，得 $C'(x) = \sqrt{(x+1)}$,

积分，得 $C(x) = \dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$,

故原方程通解为

$$y = C(x+1)^2 + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}$$

例9.11 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2x-y^2}$ 的通解.

解 原方程可化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{2}{y}x=-y,$

设 $p(y)=-\dfrac{2}{y},\ q(y)=-y.$ 原方程通解为

$$x=e^{-\int p(y)\mathrm{d}y}\left[\int q(y)e^{\int p(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]$$

$$=e^{\int \frac{2}{y}\mathrm{d}y}\left[\int -ye^{-\int \frac{2}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]$$

即 $x=y^2[C-\ln y].$

§9.4 二阶常系数线性微分方程

二阶常系数线性微分方程解的结构比较简单，在实际问题中应用较多。所以我们主要来研究二阶常系数线性微分方程的解法，其方法与结论可以推广到更高阶的常系数线性微分方程.

一、 二阶常系数齐次线性微分方程

1定义二阶常系数非齐次线性微分方程的一般形式为

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (8-6)$$

其中 p, q 为常数，且 $f(x)$ 不恒为零. 而方程

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (8-7)$$

称为方程(8-6)对应的二阶齐次线性微分方程.

2. 二阶常系数齐次线性方程解法——特征方程法

设 $y=e^{rx}$ 是 $y''+py'+qy=0$ 的解, 其中 r 为待定常数.

将 $y=e^{rx}, y'=re^{rx}, y''=r^2e^{rx}$ 代入方程， 得

$$(r^2+pr+q)e^{rx}=0, \quad \Theta\ e^{rx}\neq 0$$

故有 $\quad r^2+pr+q=0$

上述代数方程称为方程(8−6)和(8−7)的**特征方程**,

特征方程的根称为**特征根**.

特征根 $$r_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

(1) 若特征方程有两个不相等的实根

特征根为 $r_1=\dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$，$r_2=\dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$，

可得两个线性无关的特解

$$y_1=e^{r_1x},\qquad y_2=e^{r_2x}$$

故齐次方程的通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$.

(2) 若特征方程有两个相等的实根

特征根为 $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$, 得一特解 $y_1 = e^{r_1 x}$,

设另一特解为 $y_2 = u(x)e^{r_1 x}$.

将 y_2, y_2', y_2'' 代入原方程并化简得

$$u'' + \underline{(2r_1 + p)}u' + \underline{(r_1^2 + pr_1 + q)}u = 0$$

于是 $u'' = 0$, 取 $u(x) = x$, 得 $y_2 = xe^{r_1 x}$,

故齐次方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$.

(3) 若特征方程有一对共轭复根

特征根为 $r_1 = \alpha + i\beta, \ r_2 = \alpha - i\beta.$

得两个线性无关的特解 $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, \ y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}.$

为了得到实数形式的解,

用欧拉(Euler)公式:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

及齐次方程解的叠加原理

得

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

故齐次方程的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

常系数齐次线性方程 $y'' + py' + qy = 0$

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

特征根的情况	通解的表达式
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

由常系数齐次线性方程的特征方程的根确定其通解的方法, 称为**特征方程法**.

例9.16 求方程 $y'' - 3y' = 0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2 - 3r = 0$,

特征根为 $r_1 = 0, r_2 = 3$,

故所求通解为 $y = C_1 + C_2 e^{3x}$.

例9.17 求方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2 + 4r + 4 = 0$,

特征根为 $r_1 = r_2 = -2$,

故所求通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$.

例9.18 求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2+2r+5=0$,

特征根为 $r_{1,2}=-1\pm 2i$,

故所求通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$$

二、二阶常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数非齐次线性方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

通解结构： $y = Y + y^*$.

其中Y是方程$y'' + py' + qy = 0$的通解,

y^*是方程$y'' + py' + qy = f(x)$的一个特解

我们仅就方程（8-6）中的几种特殊形式介绍求(8-6)的特解的方法.

$1.\ f(x)=P_m(x)$ ，$P_m(x)$是 m 次多项式

由于多项式的导数才十多项式，我们猜测这类方程的特解也是多项式，并用待定系数法求解.

例9.19 求方程 $y''+y'+3y=x^2+1$ 的一个特解.

解 设 $y=ax^2+bx+c$ 是方程的特解，

则 $y'=2ax+b,\ y''=2a$

代入方程可得

$$3ax^2+(2a+3b)x+(2a+b+3c)=x^2+1$$

比较系数 $\begin{cases} 3a=1 \\ 2a+3b=0 \\ 2a+b+3c=1 \end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{1}{3},b=-\dfrac{2}{9},c=\dfrac{7}{27}$

所以原方程的一个特解为 $y=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{7}{27}$

2. $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$

(其中λ可以是复常数, $P_m(x)$是x的m次多项式)

注意到只要能消去指数$e^{\lambda x}$即可归结为上一种情形.

为此只需要做变量代换 $y=ze^{\lambda x}$

其中z是未知函数.

把 $y = ze^{\lambda x}$ 代入原方程, 整理得

$$[z''(x) + (2\lambda + p)z'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)z]e^{\lambda x} = P_m(x)e^{\lambda x}$$

约去因子 $e^{\lambda x}$,得到

$$z'' + (2\lambda + p)z'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)z = P_m(x) \quad (3)$$

注意到(3)是多项式的微分方程, 可以用比较系数的方法求出其各项系数.

根据上述计算, 可以知道方程具有形如

$$y^* = Q(x)e^{\lambda x}$$

的特解，其中 $Q(x)$是某个待定的多项式.

因此具体解题时，可以做变量替换 $y = ze^{\lambda x}$

也可以设特解为 $y^* = Q(x)e^{\lambda x}$,

例9.20 求方程 $y''+5y'+6y=xe^{2x}$的一个特解.

解法一 令 $y=ze^{2x}$, 则

$$y'=(z'+2z)e^{2x}, y''=(z''+4z'+4z)e^{2x}$$

代入方程, 整理得 $z''+9z'+20z=x$

设 $z=ax+b$, 则 $9a+20(ax+b)=x$,

比较系数, 得 $\begin{cases} 20a=1 \\ 9a+20b=0 \end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{1}{20}, b=-\dfrac{9}{400}$.

原方程的一个特解为 $y^*=\left(\dfrac{x}{20}-\dfrac{9}{400}\right)e^{2x}$.

例9.20 求方程 $y''+5y'+6y=xe^{2x}$ 的一个特解.

解法二 设特解为 $y^*=Q(x)e^{2x}$，将 $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$

代入原方程，整理得 $Q''(x)+9Q'(x)+20Q(x)=x$

比较等式两边次数,$Q(x)$应为一次多项式.

设 $Q(x)=ax+b$，则 $9a+20(ax+b)=x$,

比较等式两端 x 的同次幂系数，得 $a=\dfrac{1}{20}, b=-\dfrac{9}{400}$.

原方程的一个特解为 $y^*=\left(\dfrac{x}{20}-\dfrac{9}{400}\right)e^{2x}$.

例　求方程 $y''+3y'+2y=xe^{-x}$ 的通解.

解　特征方程为　$r^2+3r+2=0,$

特征根为　$r_1=-1, r_2=-2$

对应的齐次方程通解　$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}.$

令　$y=ze^{-x}$，则　$y'=(z'-z)e^{-x}, y''=(z''-2z'+z)e^{-x}$

代入方程, 整理得　$z''+z'=x$

设该方程特解为 $z=ax^2+bx$，则 $2a+2ax+b=x,$

解得　$a=\dfrac{1}{2}, b=-1.$

原方程的一个特解为　$y^*=x\left(\dfrac{x}{2}-1\right)e^{-x}.$

原方程通解为　$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+x\left(\dfrac{x}{2}-1\right)e^{-x}.$

例9.21 求方程$y''-2y'+y=(x-1)e^{x}$的通解，

并求满足条件$y(1)=y'(1)=1$的特解.

解 特征方程为$r^{2}-2r+1=0$，特征根为$r_1=r_2=1$，

对应的齐次方程通解 $Y=(C_1+C_2x)e^{x}$.

设特解为 $y^*=Q(x)e^{x}$，将$p=-2, q=1, \lambda=1$，

$P_m(x)=x-1$代入(3)，得 $Q''(x)=x-1$，

解得 $Q(x)=\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}$，

原方程的一个特解为$y^*=\dfrac{x^3}{6}e^{x}-\dfrac{x^2}{2}e^{x}$.

原方程通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+\dfrac{x^3}{6}e^x-\dfrac{x^2}{2}e^x.$

$$\Theta\ y(1)=1,\quad \left(C_1+C_2-\frac{1}{3}\right)e=1$$

$$y'=\left((C_1+C_2)+(C_2-1)x+\frac{x^3}{6}\right)e^x$$

$$\Theta\ y'(1)=1,\quad \therefore \left(C_1+2C_2-\frac{5}{6}\right)e=1$$

由 $\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{3}, \\ C_1 + 2C_2 = \dfrac{1}{e} + \dfrac{5}{6}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{6} \\ C_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

所以原方程满足初始条件的特解为

$$y = \left[\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}x\right]e^x + \frac{x^3}{6}e^x - \frac{x^2}{2}e^x$$

例9.22 求方程 $y''+3y'+2y=xe^{-x}$ 的一个特解.

解 设特解为 $y^*=Q(x)e^{-x}$，将 $p=3, q=2, \lambda=-1,$

$P_m(x)=x$ 代入(3), 得 $Q''(x)+Q'(x)=x$

比较等式两边次数，$Q'(x)$ 应为一次多项式，

又因为 $Q(x)$ 的常数项在方程中不出现.

设 $Q(x)=x(ax+b)$，则 $2a+2ax+b=x,$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得 $a=\dfrac{1}{2}, b=-1.$

原方程的一个特解为 $y^*=x\left(\dfrac{x}{2}-1\right)e^{-x}.$

3. $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

(其中α,β 是实常数, $P_n(x)$是x 的n次多项式)

令 $\lambda=\alpha+i\beta$, 设 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$ 是

方程 $y''+py'+qy=P_n(x)e^{\lambda x}$

的特解, 其中 $Q(x)$是某个待定的多项式.

则 y^*的实部和虚部分别是方程

$$y''+py'+qy=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$$

和 $y''+py'+qy=P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ 的特解.

例9.23 求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的通解.

解　特征方程　$r^2 + 1 = 0,$

特征根　$r_{1,2} = \pm i.$

对应齐次方程通解　$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

先解方程 $y'' + y = xe^{2ix}$, 设特解为 $y^* = Q(x)e^{2ix}$,

将 $p = 0, q = 1, \lambda = 2i$,　$P_m(x) = x$ 代入(3), 得

$$Q''(x) + 4iQ'(x) - 3Q(x) = x$$

比较等式两边次数, $Q(x)$ 应为一次多项式.

设 $Q(x)=ax+b$, 则 $4ia-3(ax+b)=x$,

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得 $a=-\frac{1}{3}, b=-\frac{4}{9}i.$

特解为 $y^*=-\left(\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}i\right)e^{2ix}$

$$=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x-i\left(\frac{1}{3}x\sin 2x+\frac{4}{9}\cos 2x\right)$$

取其实部,得 $y_1^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x,$

原方程通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$$

例9.24 求方程 $y''+y=4\sin x$的通解.

解 特征方程 $r^2+1=0,$

特征根 $r_{1,2}=\pm i.$

对应齐次方程通解 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$

先解方程 $y''+y=4e^{ix}$, 设特解为 $y*=Q(x)e^{ix}$,

将 $p=0, q=1, \lambda=i$, $P_m(x)=4$ 代入(3), 得

$$Q''(x)+2iQ'(x)=4$$

比较等式两边次数, $Q(x)$应为一次多项式,且 $Q(x)$ 的常数项在方程中不出现.

设 $Q(x)=ax$, 则 $2ia=4$, 解得 $a=-2i$.

特解为 $y*=-2ie^{ix}=2x\sin x-2ix\cos x$,

取其虚部, 得 $y_2^*=-2x\cos x$,

原方程通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x$$

§9.3 可降阶的高阶微分方程

在求解微分方程时，一个常用而且有效的方法是通过适当的变量替换，将一个较复杂的微分方程化为较简单的微分方程而求出其解．这种变换在现代数学中的应用相当普遍。对于不同类型的方程，研究中发现了很多有用的变换．如对某些高阶的微分方程，可以通过一定的变换将它化为较低阶的方程来求解．

一、$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

特点: 左端是未知函数 y 的n 阶导数右端是自变量 x 的一个已知函数, 且不含未知函数 y 及其各阶导数.

两边积分
$$y^{(n-1)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C_1$$

再积分
$$y^{(n-2)} = \int [\int f(x)\mathrm{d}x + C_1]\mathrm{d}x + C_2$$

$$\cdots\cdots$$

连续积分n 次, 得到含有n 个任意常数的通解.

例9.12 求微分方程 $y''' = x + \sin x$ 的通解.

解 $y'' = \int (x + \sin x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + C_1,$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2}x^2 - \cos x + C_1 \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^3 - \sin x + C_1 x + C_2$$

原方程通解为

$$y = \int \left(\frac{1}{6}x^3 - \sin x + C_1 x + C_2 \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{24}x^4 + \cos x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3$$

例9.13 解方程 $xy^{(5)}-y^{(4)}=0.$

解 令 $y^{(4)}=p(x)$, 则方程变为

$$xp'-p=0,$$

由分离变量法解得 $p=C_1x.$ 于是

$$y^{(4)}=C_1x,$$

再积分4次得原方程的通解

$$y=C_1x^5+C_2x^3+C_3x^2+C_4x+C_5$$

二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

特点: 方程中不显含未知函数 y.

解法: 设 $y' = p(x)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$.

代入原方程, 化为一阶微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x, p)$

若求得其解为 $p = \varphi(x, C_1)$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x, C_1)$,

再积分一次, 得原方程通解

$$y = \int \varphi(x, C_1)\mathrm{d}x + C_2$$

例9.14 求方程 $(1+x)y''+y'=\ln(1+x)$ 的通解.

解 设 $y'=p$,则 $y''=p'$, 代入原方程, 得

$$p'+\frac{1}{(1+x)}p=\frac{\ln(1+x)}{(1+x)}$$

这是以 p 为未知函数的一阶线性微分方程

$$p=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}+\frac{C_1}{x+1}$$

即 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}+\frac{C_1}{x+1},$$

再次积分, 得原方程通解

$$y=(x+2+C_1)\ln(1+x)-2x+C_2$$

三、$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

特点: 方程中不显含自变量 x .

解法: 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$.

代入原方程, 化为一阶微分方程 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$

若求得其解为 $p = \varphi(y, C_1)$, 即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(y, C_1)$,

分离变量, 得 $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)}$

所以原方程的通解为 $x + C_2 = \int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)}$.

例9.15 求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,

代入原方程得 $y \cdot p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0$, 即 $p(y \cdot \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p) = 0$

由 $p = 0$ 可得 $y = C$ 由 $y \cdot \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p = 0$,可得 $p = C_1 y$,

即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 y$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = C_1 \mathrm{d}x$

原方程通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$

§9.5 差分方程

差分方程也称递推方程，可以用来研究自变量只能等间隔取值的函数。

大白话说就是数列.

一、 差分方程的概念

设函数 $y=f(t)$，$t=0,1,2,\cdots$, 简记为 $y_t=f(t)$，称

$$\Delta y_t = f(t+1)-f(t) = y_{t+1}-y_t$$

为函数 $y=f(t)$ 的**一阶差分**，称

$$\Delta^2 y_t = \Delta\left(y_{t+1}\right)-\Delta\left(y_t\right) = y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t$$

为函数 $y=f(t)$ 的**二阶差分**，称

更**高阶差分**可类似定义，如 $\Delta^3 y_t = \Delta\left(\Delta^2 y_t\right)$

含有未知函数及其差分的方程称为**差分方程**，使得差分方程成为恒等式的函数称为**差分方程的解**.

例如，$y_t = 2^t$ 是差分方程 $\Delta y_t = 2^t$ 的一个解.

很多时候差分方程中并不出现差分符号，例如差分方程 $\Delta^2 y_t + 2\Delta y_t + 3y_t = 2^t$ 可以表示为

$$(y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t) + 2(y_{t+1} - y_t) + 3y_t = 2^t$$

即 $y_{t+2} + 2y_t = 2^t$, 因此差分方程也称**递推方程**.

在这种情况下，方程中出现的最大下标与最小下标之差称为差分方程的阶数.

如果 $y=f(t)$ 是一个 n 阶差分方程的解，且 $y=f(t)$ 中含有 n 个独立的任意常数，则称$y=f(t)$是这个 n 阶差分方程的**通解**；如果$y=f(t)$中不含任意常数，就称$y=f(t)$是这个 n 阶差分方程的一个**特解.**

例如 $y_t=2^t+C$ 是差分方程 $\Delta y_t=2^t$的通解；

而$y_t=2^t+1$是差分方程 $\Delta y_t=2^t$的一个特解.

二、一阶常系数线性差分方程

一阶常系数线性差分方程的一般形式

$$y_{t+1} - ay_t = f(t) \qquad (8-9)$$

其中 $a \neq 0$, $f(t)$ 是已知函数.

对应的一阶常系数齐次线性差分方成为

$$y_{t+1} - ay_t = 0 \qquad (8-10)$$

容易验证：方程（8-9）的通解等于方程（8-10）的通解加上方程（8-9）的一个特解。

首先考虑齐次线性差分方程的求解问题

$$y_{t+1} - ay_t = 0 \qquad (8-10)$$

设 $y_0 = C$，则由方程（8-10）得

$$y_1 = ay_0 = Ca$$

$$y_2 = ay_1 = Ca^2$$

$$y_3 = ay_2 = Ca^3$$

$$\cdots$$

$$y_t = ay_{t-1} = Ca^t$$

即方程(8-10)的通解为$y_t = Ca^t$，C为任意常数.

然后考虑非齐次差分方程的求解问题

$$y_{t+1} - ay_t = f(t) \qquad (8-9)$$

当 $f(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} P_n(t)$ 时，做变量代换 $y_t = Q_t \mathrm{e}^{\lambda t}$ ，

代入方程(8-9)得 $Q_{t+1}\mathrm{e}^{\lambda(t+1)} - aQ_t\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{\lambda t} P_n(t)$

即 $$Q_{t+1}\mathrm{e}^{\lambda} - aQ_t = P_n(t) \qquad (8-11)$$

在方程（8-11）中 $P_n(t)$ 是 n 次多项式，所以我们 Q_t 也是多项式，可以用待定系数法求特解。

如果 $\mathrm{e}^{\lambda} = a$，则 $Q_t = t(a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n)$

如果 $\mathrm{e}^{\lambda} \neq a$，则 $Q_t = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$

三、典型例题

例9.25 求差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 3$ 的通解.

解 对应齐次方程的通解为 $y_t = C \cdot 2^t$，C为任意常数.

设特解为 $y_t^* = a$，则 $a - 2a = 3$，即 $a = -3$.

因此原差分方程的通解为 $y_t = C \cdot 2^t - 3$.

例9.26 求差分方程 $y_{t+1}-5y_t=3t$ 的通解.

解 对应齐次方程的通解为 $y_t=C\cdot 5^t$，C为任意常数.

设特解为$y_t^*=at+b$,

则 $a(t+1)+b-5(at+b)=3t$,

比较系数解出$a=-\dfrac{3}{4}, b=-\dfrac{3}{16}$

因此原差分方程的通解为$y_t=C\cdot 5^t-\dfrac{3}{4}t-\dfrac{3}{16}t$

例9.27 求差分方程 $y_{t+1}-3y_t=t\cdot 3^t$ 的通解.

解 对应齐次方程的通解为 $y_t=C\cdot 3^t$，C为任意常数.

做变量代换 $y_t=Q_t 3^t$，代入原方程得 $Q_{t+1}-Q_t=\frac{t}{3}$

设特解为 $Q_t=at^2+bt$，代入方程得 $2at+a+b=\frac{t}{3}$

比较系数解出 $a=\frac{1}{6}, b=-\frac{1}{6}$

因此原差分方程的通解为 $y_t=C\cdot 3^t+\frac{1}{6}\left(t^2-t\right)3^t$

§9.6 均衡解与稳定性

动态经济学关注的焦点是，经济系统从一个状态移动到另一个状态时，经济变量会如何随时间演变. 对于经济系统的动态分析，往往可以归结为一个微分或差分方程（或者方程组），而且自变量在方程中不出现，这样的方程称为自治方程，其中微分方程是以连续方式来描述时间，而差分方程是以离散方式来描述时间.

一、自治方程及其均衡解

n 阶常系数线性自治微分方程的一般形式为:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=b \qquad t\in[0,+\infty) \qquad （8\text{-}12）$$

n 阶常系数线性自治差分方程的一般形式为:

$$y_{t+n}+a_1y_{t+(n-1)}+\cdots\ a_ny_t=b \quad t=0,1,2,\cdots \quad （8\text{-}13）$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 都是常数.

满足 $y' = 0$ 的解称为微分方程的均衡解；

当系数满足 $a_n \neq 0$时，微分方程的均衡解为

$$\bar{y} = \frac{b}{a_n}$$

满足$\Delta y_t = 0$的解称为差分方程的均衡解；

当系数满足 $\sum_{k=1}^{n} a_k \neq -1$ 时，差分方程的均衡解为

$$\bar{y} = \frac{b}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

如果自治方程描述的是动态经济系统，则方程均衡解的意义是指系统处于稳定状态。

自治方程的每一个解，都表达了经济变量随着时间 t 变化的一条时间路径。人们感兴趣的问题之一就是分析动态经济系统中的经济变量是否会沿着这个时间路径收敛于均衡解.

设 $\bar{y}$ 是方程（8-12）或（8-13）的均衡解，如果（8-12）或（8-13）的任意特解 $y(t)$ 都满足

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \bar{y}$$

则称均衡解 $\bar{y}$ 是（渐近）稳定的.

二、典型例题

例9.28 求微分方程 $y''+py'+qy=b$ 的均衡解并讨论其稳定性，其中 p,q,b 为常数.

解 当 $q=0, b\neq 0$ 时，方程无均衡解。

当 $q\neq 0$ 时，方程均衡解为 $\bar{y}=\dfrac{b}{q}$

特征方程为 $r^2+pr+q=0$

解得特征根为 $r_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$

下面分情况讨论：

（1）r_1 和 r_2 为两个不相等的实根，方程通解为

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \overline{y}$$

均衡解稳定的充要条件是 $r_1 < 0$ 且 $r_2 < 0$.

（2）$r_1 = r_2 = -\dfrac{p}{2}$ ，方程通解为

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{r_1 t} + \overline{y}$$

均衡解稳定的充要条件是 $p > 0$.

（3）$r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，方程通解为

$$y=\mathrm{e}^{\alpha t}\left(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t\right)+\bar{y}$$

均衡解稳定的充要条件是$\alpha<0$.

综上所述，微分方程$y''+py'+qy=b$的均衡解稳定的充要条件是其所有的特征根的实部均为负数.

例9.29. 设某商品的需求函数为$Q_d = a - bP$，供给函数为 $Q_s = -c + dP$ ，其中为 a, b, c, d 为正常数，价格 P 是时间 t 的函数，$P'(t) = k(Q_d - Q_s)$，$(k > 0)$ ，即价格的变化率与超额需求 $Q_d - Q_s$ 成正比，求均衡价格并分析其稳定性.

解　均衡价格即为供求相等时的交易价格.

由 $Q_d = Q_s$ ，即$a - bP = -c + dP$，解出 $P = \dfrac{a+c}{b+d}$

$$P'(t) = k(Q_d - Q_s) = k(a+c) - k(b+d)P$$

即 $P'(t) + (b+d)P = k(a+c)$

易见均衡价格 $P = \dfrac{a+c}{b+d}$ 是方程的均衡解

方程的通解为$P(t) = Ce^{-k(b+d)t} + \dfrac{a+c}{b+d}$

由 $\lim\limits_{t \to +\infty} Ce^{-k(b+d)t} = 0$ 可知均衡解是稳定的.

例9.30 设鱼群的个体数量 y_t 满足差分方程，其中

$$y_{t+1}-ay_t=1000,\ y_0=1000$$

$a\neq 1$，求鱼群的稳态数量并分析 a 的取值。

解 差分方程 $y_{t+1}-ay_t=1000$ 的均衡解 $\bar{y}=\dfrac{1000}{1-a}$

即为鱼群的稳态数量.

方程通解为 $y_t=Ca^t+\dfrac{1000}{1-a}$

代入 $y_0=1000$，解出 $C=\dfrac{1000a}{a-1}$

于是满足初始条件的特解为 $y_t=\dfrac{1000}{a-1}\cdot a^{t+1}+\dfrac{1000}{1-a}$

因此，仅当 $|a|<1$ 时均衡解稳定. 特别地，

当 $0<a<1$ 时，y_t 单调递增趋于 $\bar{y}$；

当 $-1<a<0$ 时，y_t 以振荡方式趋于 $\bar{y}$；

当 $a=0$ 时，y_t 恒等于 $\bar{y}$.

常微分方程习题课

例1 求方程 $y - xy' = \pi(y^2 + y')$ 的通解.

解　原方程可化为

$$(\pi + x)y' = y - \pi y^2$$

是可分离变量的微分方程.　分离变量, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(1-\pi y)} = \frac{\mathrm{d}x}{\pi + x}$$

即

$$\left(\frac{\pi}{1-\pi y} + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\pi + x},$$

两端积分 $\displaystyle\int\left(\frac{\pi}{1-\pi y}+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=\int\frac{\mathrm{d}x}{\pi+x}$

$$-\ln(1-\pi y)+\ln y=\ln(\pi+x)+\ln C$$

故, 原方程的通解为 $\displaystyle\frac{y}{1-\pi y}=C(\pi+x).$

例2 求方程 $y\mathrm{d}x+(x+y^4)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 原方程可化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\dfrac{1}{y}x=-y^3.$

是一阶线性微分方程.

设 $p(y)=\dfrac{1}{y},\ q(y)=-y^3,$

$$x=e^{-\int p(y)\mathrm{d}y}\left[\int q(y)e^{\int p(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]$$

$$=e^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int -y^3e^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]=-\frac{1}{5}y^4+\frac{C}{y}$$

为所求通解.

例3 求方程 $(2x^2y+3y^3)\mathrm{d}y+xy^2\mathrm{d}x=0$ 的通解.

解 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{xy^2}{2x^2y+3y^3}=-\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}+3\left(\frac{y}{x}\right)^3}$$

是齐次方程. 令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$,

代入原方程得 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{u}{2+3u^2}$,

分离变量得 $$\frac{2+3u^2}{u(1+u^2)}\mathrm{d}u=-3\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分 $$\int\frac{(2+2u^2)+u^2}{u(1+u^2)}\mathrm{d}u=-3\int\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

得 $$2\ln u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=-3\ln x+\ln C,$$

$$u^2\sqrt{1+u^2}=\frac{C}{x^3}$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入，得通解 $y^2\sqrt{x^2+y^2}=C.$

例4 设 $\varphi(x)$为可微函数, 且满足

$$\varphi(x)\cos x + 2\int_0^x \varphi(t)\sin t\mathrm{d}t = x + 1$$

求 $\varphi(x)$.

解 等式两边求导, 得

$$\varphi'(x)\cos x - \varphi(x)\sin x + 2\varphi(x)\sin x = 1$$

即 $$\varphi'(x) + \varphi(x)\tan x = \sec x$$

是一阶线性微分方程.

设 $p(x) = \tan x, q(x) = \sec x.$

$$\varphi(x)=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}[\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$$

$$=e^{-\int \tan x\mathrm{d}x}[\int \sec x e^{\int \tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$$

$$=e^{\ln\cos x}[\int \sec x e^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x+C]$$

$$=\cos x(\tan x+C)$$

又 $\varphi(0)=1,$ 所以 $C=1,$

故 $\varphi(x)=\sin x+\cos x.$

例5 已知$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}f(x)+1$,且 $f(1)=1$, 求 $f(x)$.

解 令 $tx=u$, 即$t=\frac{u}{x}$, 则$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}u}{x}$.

当$t=0$时,$u=0$; 当$t=1$时,$u=x$.

$$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

于是 $$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\frac{x}{2}f(x)+x,$$

上式两边对x 求导, 得 $$f(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{x}{2}f'(x)+1,$$

即 $$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=-\frac{2}{x}$$

是一阶线性非齐次微分方程. 其通解为:

$$f(x)=e^{-\int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int -\frac{2}{x}e^{\int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=x\left(\int -\frac{2}{x^2}\mathrm{d}x+C\right)=2+Cx$$

再由 $f(1)=1$, 得 $C=-1$.

故 $$f(x)=2-x.$$

例6 可微函数 $f(x)$对任何x, y 恒有

$$f(x+y)=e^{y} f(x)+e^{x} f(y)$$

且 $f'(0)=2$,求 $f(x)$.

解 将 $x=0, y=0$代入 $f(x+y)=e^{y} f(x)+e^{x} f(y)$,

可得 $f(0)=0$.

已知等式中将x 视为常数, 两边对y 求导, 得

$$f'(x+y)=e^{y} f(x)+e^{x} f'(y)$$

再将 y =0 代入上式, 得 $f'(x)= f(x)+2e^{x}$,

即 $$f'(x) - f(x) = 2e^x$$

是一阶线性非齐次微分方程. 其通解为:

$$f(x) = e^{-\int -\mathrm{d}x}\left(\int 2e^x e^{\int -\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$$

$$= e^x(2x + C)$$

再由 $f(0) = 0$,得 $C = 0$.

故 $$f(x) = 2xe^x.$$

例7 如图所示,平行于y 轴的动直线被曲线 $y=f(x)$ 与$y=x^3(x\geq 0)$ 截下的线段PQ之长数值上等于阴影部分的面积, 求曲线$y=f(x)$.

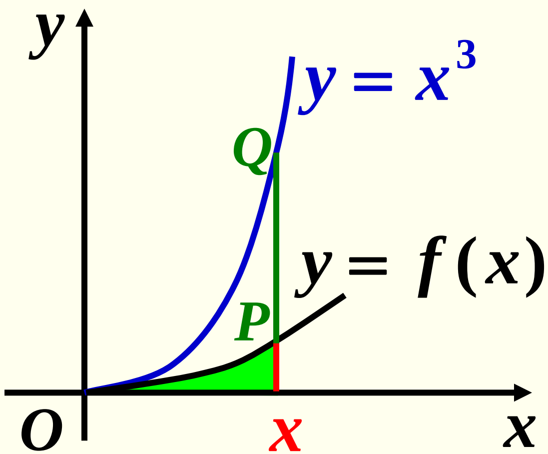
解 $x^3-y=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$

求导, 得 $3x^2-y'=y$

即 $y'+y=3x^2$

是一阶线性非齐次方程

且 $y(0)=0$



$$y = e^{-\int \mathrm{d}x}\left(\int 3x^2 e^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$$

$$= Ce^{-x} + 3x^2 - 6x + 6$$

由 $y(0) = 0,$ 得 $C = -6$

所求曲线为 $y = 3(-2e^{-x} + x^2 - 2x + 2)$

例8 求微分方程 $x\mathrm{d}y+(x-2y)\mathrm{d}x=0$ 的一个解 $y=y(x)$, 使得由曲线 $y=y(x)$与直线 $x=1, x=2$ 以及x轴所围成的平面图形绕x轴旋转一周的所围成的旋转体体积最小.

解 原方程可化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2}{x}y=-1$ 一阶线性方程

则 $$y=e^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left[-\int 1\cdot e^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=x+Cx^2.$$

$$V(C)=\int_1^2\pi(x+Cx^2)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{31}{5}C^2+\frac{15}{2}C+\frac{7}{3}\right).$$

令 $V'(C)=\pi\left(\dfrac{62}{5}C+\dfrac{15}{2}\right)=0$, $\Rightarrow C=-\dfrac{75}{124}$, $y=x-\dfrac{75}{124}x^2$.

高阶常微分方程习题课

例1 求以 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 为通解的微分方程.

解 由通解式可知特征方程的根为

$$r_1=1, r_2=2$$

故特征方程为 $(r-1)(r-2)=0,$

即 $$r^2-3r+2=0$$

因此, 所求微分方程为

$$y''-3y'+2y=0$$

例2 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$，$y_2 = xe^x + e^{-x}$，

$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个特解, 求此微分方程及该微分方程的通解.

解 因 $y_3 - y_1 = -e^{-x}$，$y_3 - y_2 = e^{2x} - 2e^{-x}$

是二阶常系数齐次线性微分方程的两个特解,

故所求二阶微分方程的两个特征根为

$$r_1 = -1, r_2 = 2$$

设所求二阶微分方程为

$$y'' - y' - 2y = f(x)$$

将 $y_1 = xe^x + e^{2x}$ 代入得

$$f(x) = (-2x+1)e^x$$

所求二阶微分方程为

$$y'' - y' - 2y = (-2x+1)e^x$$

该微分方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + xe^x$$

例4 设函数$y=y(x)$满足微分方程$y''-3y'+2y=2e^x$，其图形在点(0,1)处的切线与曲线$y=x^2-x+1$在该点处的切线重合,求函数y的解析表达式

解 (1) 求对应齐次方程的通解

特征方程 $r^2-3r+2=0,$

特征根 $r_1=1,\ r_2=2,$

对应齐次方程通解 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

(2) 求非齐次方程的特解 设特解为 $y^*=Q(x)e^x,$

将 $p=-3,q=2,\lambda=1,\ P_m(x)=2$ 代入, 得

$$Q''(x) - Q'(x) = 2$$

设 $Q(x) = ax$，解得 $a = -2$，即 $y* = -2xe^x$

所以，原方程通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - 2xe^x$

(3) 求原方程的特解

由 $y = x^2 - x + 1$，得 $y' = 2x - 1$，且 $y'(0) = -1$，

将点(0,1)的坐标代入通解得 $1 = C_1 + C_2$

$$y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x$$

由题意，得 $y'(0) = C_1 + 2C_2 - 2 = -1$

即 $C_1 + 2C_2 = 1$ 解得 $C_1 = 1, C_2 = 0.$

所函数 y 的解析表达式为 $y = (1 - 2x)e^x$

例6 对 $x>0$,过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,求 $f(x)$ 的一般表达式

解 过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x)$$

令 $X=0$, 得切线在 y 轴上的截距

$$Y=f(x)-xf'(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

即 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x[f(x)-xf'(x)]$

两边对 x 求导, 得 $xf''(x)+f'(x)=0$

令 $f'(x)=p(x)$, 则 $f''(x)=p'(x)$, 代入方程,得

$$xp'(x)+p(x)=0$$

分离变量, 并积分 $\int \frac{1}{p}\mathrm{d}p=-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

得 $\ln p=-\ln x+\ln C_1$

即 $p=\dfrac{C_1}{x}$, $\quad f'(x)=\dfrac{C_1}{x}$,

再积分, 得 $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int \frac{C_1}{x}\mathrm{d}x$,

$f(x)=C_1\ln x+C_2$ 即为所求.

例7 求微分方程 $y^2y''+1=0$ 的积分曲线, 使该积分曲线过点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 且在该点的切线斜率为2.

解 方程属 $y''=f(y,y')$ 型. 设 $y'=p(y)$, 则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$.

代入方程, 得 $y^2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=-1$, $\Rightarrow \frac{p^2}{2}=\frac{1}{y}+C_1$,

由初始条件, 得 $C_1=0$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{\frac{2}{y}}$,

$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=\pm\sqrt{2}x+C_2$, 再由初始条件, 得 $C_2=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

所求积分曲线为 $y^{\frac{3}{2}}=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$

练 习 题

一、选择题:

1.设函数$y=f(x)$是微分方程$y''-2y'+4y=0$的一个解且$f(x_0)>0$, $f'(x_0)=0$,则$f(x)$在点x_0处(A).

A 有极大值　　B 有极小值

C 某邻域内单调增加　　D 某邻域内单调减少

2.设$y=y(x)$是常系数微分方程$y''+py'+qy=e^{3x}$满足初始条件$y(0)=y'(0)=0$的特解, 则当$x\to 0$时, 函数$\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$的极限为(C)

A 不存在　　B 等于1.　　C 等于2.　　D 等于3.

二、求解微分方程 $y''-my=e^{2x}\ (m\geq 0)$.

答案 特征方程 $r^2-m=0$, 特征根 $r_{1,2}=\pm\sqrt{m}$.

(1) 若$m=0, r_{1,2}=0$, 通解为 $y=(C_1+C_2x)+\frac{1}{4}e^{2x}$;

(2) 若$m=4, r_{1,2}=\pm 2, \lambda=2$,

通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}$;

(3) 若$m\neq 0, m\neq 4, r_{1,2}=\pm\sqrt{m}$,

通解为 $y=C_1e^{\sqrt{m}x}+C_2e^{-\sqrt{m}x}+\frac{1}{4-m}e^{2x}$.