

# 力学笔记

朱荣博

# 目录

|   |           |
|---|-----------|
| <b>第一部分 流体力学基础</b>  | <b>1</b>  |
| <b>第一章 基础知识</b>   | <b>2</b>  |
| 1.1 流体模型  | 3         |
| 1.2 量纲分析:白金汉 $\Pi$ 定理 (Dimensional Analysis: The Buckingham PI Theorem) | 3         |
| 1.3 气动力和气动力矩  | 8         |
| <b>第二章 场论基础知识</b>   | <b>12</b> |
| 2.1 梯度,旋度,散度  | 12        |
| 2.2 斯托克斯公式,散度定理,梯度定理  | 13        |
| 2.3 并矢  | 14        |
| 2.4 物质导数  | 14        |
| <b>第三章 基本方程</b>   | <b>16</b> |
| 3.1 连续方程  | 16        |
| 3.2 动量方程  | 17        |
| 3.3 能量方程  | 19        |
| 3.4 描述流体运动的方法   | 19        |
| 3.5 流函数和势函数 (速度位)   | 22        |
| 3.6 旋涡运动  | 24        |
| <b>第四章 不可压无粘流</b>   | <b>25</b> |
| 4.1 理想不可压无旋流动的控制方程  | 25        |
| 4.2 拉普拉斯方程的基本解  | 26        |
| <b>第五章 高速可压流动</b>   | <b>27</b> |
| 5.1 热力学基础   | 27        |

|             |                               |           |
|-------------|-------------------------------|-----------|
| 5.2         | 一维等熵绝热流 . . . . .             | 30        |
| 5.3         | 马赫波和膨胀波 . . . . .             | 37        |
| 5.4         | 正激波 . . . . .                 | 39        |
| <b>第六章</b>  | <b>喷管中的可压流动</b>               | <b>44</b> |
| 6.1         | 准一维流动的控制方程 . . . . .          | 44        |
| 6.2         | 喷管中的流动 . . . . .              | 45        |
| <b>第二部分</b> | <b>空气动力学</b>                  | <b>51</b> |
| <b>第七章</b>  | <b>低速翼型的气动特性</b>              | <b>52</b> |
| 7.1         | 翼形的几何尺寸 . . . . .             | 52        |
| 7.2         | 用于低速流动下的翼型的理论解法:面涡 . . . . .  | 56        |
| 7.3         | 库塔条件 . . . . .                | 59        |
| 7.4         | 开尔文环量定理和启动涡 . . . . .         | 62        |
| 7.5         | 经典薄翼理论:对称翼型 . . . . .         | 64        |
| 7.6         | 关于气动中心的额外讨论 . . . . .         | 74        |
| 7.7         | 粘性流动:翼型阻力 . . . . .           | 75        |
| 7.8         | 失速的再介绍 . . . . .              | 79        |
| 7.9         | 总结 . . . . .                  | 81        |
| <b>第八章</b>  | <b>不可压无粘流绕流有限翼展的机翼</b>        | <b>83</b> |
| 8.1         | 下洗和诱导阻力 . . . . .             | 83        |
| 8.2         | 面涡, 毕奥-萨伐尔定律和亥姆霍兹定理 . . . . . | 86        |
| 8.3         | 普朗特经典升力线理论 . . . . .          | 87        |
| 8.4         | 总结 . . . . .                  | 94        |
| <b>第三部分</b> | <b>附录</b>                     | <b>96</b> |
| <b>附录 A</b> | <b>积分</b>                     | <b>97</b> |
| A.1         | 第一个积分 . . . . .               | 97        |
| A.2         | 第二个积分 . . . . .               | 97        |
| A.3         | 第三个积分 . . . . .               | 101       |



# 第一部分

## 流体力学基础

# 第一章 基础知识

流体力学认为物体的存在形态只有固态和液态两种形态, 区别在于固体可以通过产生有限的形变来承受剪切应变.

流体力学作出的基本假设是连续介质假设. 即把流体看成连续不断, 没有间隙, 始终充满整个空间的连续介质.

控制体是在流场中一个有限封闭区域, 这个区域就定义了一个控制体. 控制体可大可小, 而这个控制体的封闭表面就是控制面. 换句话说, 一个控制体对应着一个控制面. 控制体是固定在流场中的, 流体从控制面流入. 然后再流出. 当然, 控制体也可以随着流体运动, 而与周围的流体没有交换. 当控制体的体积趋于微元的控制体的时候, 称为微元体.

## 笔记

微元的体积不能无限小, 否则不满足连续介质假设了.

流体具有压缩性, 粘性, 传热性等性质.

1. 压缩性是指流体可以被压缩, 压缩时流体的体积发生变化. 此时流体的密度一般也要发生变化.
2. 粘性是指两层相邻速度不同的流体之间存在着相互牵扯的力, 称作粘性力或者内摩擦力. 这个力的大小与接触面法线的方向的速度梯度成正比.

$$\tau = \mu \frac{du}{dn}$$

3. 传热性是指流体沿某一方向存在温度梯度时, 热量就会从温度高的地方传向温度低的地方.

流体的几个状态参数是压强  $P$ , 温度  $T$ , 密度  $\rho$ , 速度  $\mathbf{V}$ , 焓值  $h$  等. 这些参数都是关于  $x, y, z, t$  的函数, 也就是关于坐标和时间的函数. 其中坐标也是时间  $t$  的函数.

定常是指流体的状态参数和时间变化无关.

## 1.1 流体模型

### 1. 理想流体

不考虑流体的粘性作用的流体模型.

### 2. 不可压流体

不考虑流体压缩性的流体模型. 不可压流体流场中流体的密度是常数, 即密度是定常的.

### 3. 绝热流体

不考虑流体传热性的流体模型, 即与外界没有热交换.

## 1.2 量纲分析: 白金汉 $\Pi$ 定理 (Dimensional Analysis: The Buckingham $\Pi$ Theorem)

考虑一个给定形状的翼型在一定的攻角下, 它受到的总空气动力是  $R$ . 在物理、直观的基础上, 我们期望  $R$  取决于:

### 1. 自由来流的速度 $V_\infty$ .

### 2. 自由来流的密度 $\rho_\infty$ .

### 3. 流体的黏度. 我们已经知道剪切力 $\tau$ 贡献了空气动力和空气动力矩, 并且 $\tau$ 正比于流体的流动的速度梯度. 例如, 如果给定速度梯度 $\frac{\partial u}{\partial y}$ , 那么 $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ . 这个常数的比例值 $\mu$ 就是粘性系数. 因此, 我们用自由来流的粘性系数 $\mu_\infty$ 来表示粘度对气动力和力矩的影响.

### 4. 翼型的尺寸, 以翼型的参考长度为代表. 方便的参考长度是弦长 $c$ .

### 5. 流体的可压性. 可压性和遍及全流场的密度变化相关. 相应的, 可压性和流动过程中的声速相关. 因此, 我们用自由来流的声速 $a_\infty$ 来表示可压性对气动力和力矩的影响.

鉴于以上, 在没有任何关于  $R$  变化的先验知识下, 我们可以用常识写出:

$$R = f(\rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty, a_\infty)$$

上式就是一般的函数关系, 对于计算  $R$  就不太实用. 原则上, 我们可以将给定的翼型放到风洞中, 倾斜到给定的攻角, 然后一次一个地系统性地测量  $R$  由于  $\rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty$  和  $a_\infty$  的变化而引起的变化. 通过交叉绘制这样获得的大量数据, 我们就能提取出对于  $R = f(\rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty, a_\infty)$  的精确函数关系. 然而, 这肯定是一项艰苦的工作, 而且就所需的大量风洞实验的时间而言, 这

肯定是昂贵的. 幸运的是, 首先采用量纲分析的方法, 我们可以简化问题, 大大减少我们的时间和精力.

这个方法先定义一组关于气动力和力矩的无量纲参数; 这组参数将大大减少出现在  $R = f(\rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty, a_\infty)$  中自变量的数量.

量纲分析基于一个很明显的事实, 即对于真实物理世界中的方程, 每一项都必须具有相同的量纲. 例如, 如果

$$\Psi + \eta + \xi = \Phi$$

是一个物理关系, 那么  $\Psi, \eta, \xi$  和  $\Phi$  必须具有相同的量纲. 否则, 我们会把苹果和橘子加起来. 上面那个方程可以通过除以其中任何一个因子而变成无量纲的, 比如  $\Phi$ :

$$\frac{\Psi}{\Phi} + \frac{\eta}{\Phi} + \frac{\xi}{\Phi} = 1$$

这些思想在白金汉  $\Pi$  定理中有正式的体现. 如下所示.

## 笔记

### 白金汉 $\Pi$ 定理

设  $K$  表示描述物理变量所需的基本量纲数量. (在力学中, 所有的物理变量都可以用质量, 长度, 时间的量纲来表示; 因此,  $K = 3$ .) 设  $P_1, P_2, \dots, P_N$  表示在下述物理关系中的  $N$  个物理变量

$$f_1(P_1, P_2, \dots, P_N) = 0$$

然后, 上面的物理关系就可以重新表示为  $(N - K)$  个无量纲积 ( $\Pi$  积) 的关系,

$$f_2(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{N-K}) = 0$$

在这些无量纲积中, 每个  $\Pi$  积是一个有一组  $K$  个物理变量乘上一个其他物理变量的无量纲积. 设  $P_1, P_2, \dots, P_K$  是被选择的  $K$  个物理变量, 那么:

$$\Pi_1 = f_3(P_1, P_2, \dots, P_K, P_{K+1})$$

$$\Pi_2 = f_4(P_1, P_2, \dots, P_K, P_{K+2})$$

$$\Pi_3 = f_5(P_1, P_2, \dots, P_K, P_{K+3})$$

... ..

$$\Pi_{N-K} = f_5(P_1, P_2, \dots, P_K, P_N)$$

重复变量的选择,  $P_1, P_2, \dots, P_K$  应该包含用于这个问题的所有量纲. 当然, 这些相互独立的变量应当只在  $\Pi$  积中出现一次.



回到, 我们考虑的对于给定攻角和给定翼型的气动力和力矩的问题中, 方程

$$R = f(\rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty, a_\infty)$$

可以写成

$$g(R, \rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty, a_\infty) = 0$$

的形式. 根据白金汉  $\Pi$  定理, 基本的量纲是

$m$  = 质量的量纲

$l$  = 长度的量纲

$t$  = 时间的量纲

因此,  $K = 3$ . 物理变量和他们的量纲是

$$[R] = ml t^{-2}$$

$$[\rho_\infty] = ml^{-3}$$

$$[V_\infty] = lt^{-1}$$

$$[c] = l$$

$$[\mu_\infty] = ml^{-1}t^{-1}$$

$$[a_\infty] = lt^{-1}$$

因此,  $N = 6$ . 在上述, 气动力  $R$  的量纲是通过牛顿第二定律获得的, 力 = 质量  $\times$  加速度; 因此  $[R] = ml t^{-2}$ .  $\mu_\infty$  的量纲是通过它的定义获得的, 并且使用了牛顿第二定理. 将  $\rho_\infty, V_\infty$  和  $c$  作为任意选取  $K$  个物理变量中的几个. 那么

$$g(R, \rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty, a_\infty) = 0$$

可以用  $N - K = 6 - 3 = 3$  个无量纲  $\Pi$  积来重新表示:

$$f_2(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0$$

这些  $\Pi$  积是:

$$\Pi_1 = f_3(\rho_\infty, V_\infty, c, R)$$

$$\Pi_2 = f_4(\rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty)$$

$$\Pi_3 = f_5(\rho_\infty, V_\infty, c, a_\infty)$$

首先, 集中注意在  $\Pi_1$  上, 从上述方程组中的第一个, 假定

$$\Pi_1 = \rho_\infty^d V_\infty^b c^e R$$

$d, b, e$  是需要找到的指数. 在量纲上, 上式就是

$$[\Pi_1] = (ml^{-3})^d (lt^{-1})^b (l)^e (mlt^{-2})$$

因为  $\Pi_1$  是无量纲的, 因此, 上方程的右边就必须是无量纲的. 这意味着量纲  $m$  的指数加起来必须是 0, 对于量纲  $l$  和  $t$  也是一样的. 因此

$$\text{对于 } m: d + 1 = 0$$

$$\text{对于 } l: -3d + b + e + 1 = 0$$

$$\text{对于 } t: -b - 2 = 0$$

解上述方程, 我们可以得到  $d = -1, b = -2$  和  $e = -2$ . 代入到方程

$$\Pi_1 = \rho_\infty^d V_\infty^b c^e R$$

中, 得到

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= R \rho_\infty^{-1} V_\infty^{-2} c^{-2} \\ &= \frac{R}{\rho_\infty V_\infty^2 c^2} \end{aligned}$$

物理量  $\frac{R}{\rho_\infty V_\infty^2 c^2}$  是一个无量纲的参数, 其中  $c^2$  是一个面积, 我们可以将  $c^2$  替换为任何我们希望的参考面积(例如机翼的平面面积  $S$ ), 并且  $\Pi_1$  将依然是无量纲的. 更重要的是, 我们可以将  $\Pi_1$  乘一个纯粹的数量, 并且它依然是无量纲的. 因此, 从上面的方程,  $\Pi_1$  可以被定义为

$$\Pi_1 = \frac{R}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S} = \frac{R}{q_\infty S}$$

因此,  $\Pi_1$  是气动力系数  $C_R$ . 在上式中,  $S$  就是和给定翼型有着密切关系的参考面积.

剩余的  $\Pi$  积可以按照相同的方法求出来. 假设

$$\Pi_2 = \rho_\infty^h V_\infty^i c^j \mu_\infty^k$$

参考上述的分析, 我们可以获得

$$[\Pi_2] = (ml^{-3})^h (lt^{-1})^i (l)^j (ml^{-1}t^{-1})^k$$

因此,

$$1 + k = 0$$

$$-3 + h + i - k = 0$$

$$-h - k = 0$$

因此,  $j = -1, h = 1$ , 和  $i = 1$ . 代入到上式中就有

$$\Pi_2 = \frac{\rho_\infty V_\infty c}{\mu_\infty}$$

这个无量纲结合体被定义为雷诺数. 雷诺数是在流动中物理测量的惯性力和粘性力的比值, 并且在流体力学中是最有力的参数之一.

再假设

$$\Pi_3 = V_\infty \rho_\infty^k c^r a_\infty^s$$

$$[\Pi_3] = (lt^{-1})(ml^{-3})^k (l)^r (lt^{-1})^s$$

同样得到方程组

$$k = 0$$

$$1 - 3k + r + s = 0$$

$$-1 - s = 0$$

因此,  $k = 0, s = -1, r = 0$ . 代入到上式有,

$$\Pi_3 = \frac{V_\infty}{a_\infty}$$

这个无量纲量被定义为马赫数  $M = \frac{V_\infty}{a_\infty}$ . 马赫数是流动速度和声速的比值; 它是研究气体动力的强有力的参数.

无量纲分析的结果可以被写成如下

$$f_2\left(\frac{R}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S}, \frac{\rho_\infty V_\infty c}{\mu_\infty}, \frac{V_\infty}{a_\infty}\right) = 0$$

$$f_2(C_R, Re, M_\infty) = 0$$

$$C_R = f_6(Re, M_\infty)$$

这是一个重要的结果! 在一开始,  $R$  被表示成有 5 个独立变量的一般函数关系. 然而, 我们的量纲分析已经表示成:

1.  $R$  可以被表示为无量纲气动力系数的项,  $C_R = \frac{R}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S}$ .

2.  $C_R$  只是  $Re$  和  $M_\infty$  的函数.

因此, 通过用白金汉  $\Pi$  定理, 可以减少不相互独立变量的数目, 即从 5 个变量减少成 2 个变量. 现在, 如果我们对一个给定的翼型在一个固定的攻角下, 做一系列风洞测试, 我们只需要变化雷诺数和马赫数去获得数据得到  $R$  的计算公式. 通过很少的分析, 我们就已经节约了很多努

力和大量的风洞时间. 更重要的是, 我们定义了两个控制流动的无量纲参数, 雷诺数和马赫数. 它们叫做**相似参数 (similarity parameters)**. 因为升力和阻力都是总空气动力的分量, 因此

$$C_L = f_7(Re, M_\infty)$$

$$C_D = f_8(Re, M_\infty)$$

更重要的是, 这个关系对于气动力矩也成立, 即

$$C_M = f_9(Re, M_\infty)$$

请记住, 上述关系是对于给定翼型在固定攻角下成立的. 如果  $\alpha$  是允许可变的, 那么  $C_L, C_D, C_M$  都是依赖于变量  $\alpha$  的. 因此

$$C_L = f_{10}(Re, M_\infty, \alpha)$$

$$C_D = f_{11}(Re, M_\infty, \alpha)$$

$$C_M = f_{12}(Re, M_\infty, \alpha)$$

上述方程的前提是假定翼型形状是给定的. 大量的理论和实验都聚焦在获取对于固定翼型形状的清晰的表达式, 即上述方程.

### 1.3 气动力和气动力矩

气动力的来源主要有两部分, 即:

1. 作用在机翼表面的压强力.
2. 作用在机翼表面的剪切力.

无论机翼形状多么复杂, 气动力和气动力矩总是来源于上述两个方面. 一般把垂直于机翼表面的力称作**压强力 (pressure stress)**. 平行于机翼表面的力称作**剪切力 (shear stress)**. 将压强力和剪切力沿机翼表面积分, 得到总空气动力  $R$  和总空气动力矩  $M$ , 并将总空气动力的作用点叫做**压心**. 如下图1.1, 将机翼远前方的气流速度记作  $V_\infty$ , 远离机翼的流体也叫做**自由来流 (freestream)**, 因此,  $V_\infty$  也叫做自由来流速度.

把总空气动力  $R$  在垂直于自由来流速度  $V_\infty$  方向上的分量叫做**升力 (lift)**, 记作  $L$ . 把总空气动力  $R$  在平行于自由来流速度  $V_\infty$  方向的分量叫做**阻力 (drag)**, 记作  $D$ .

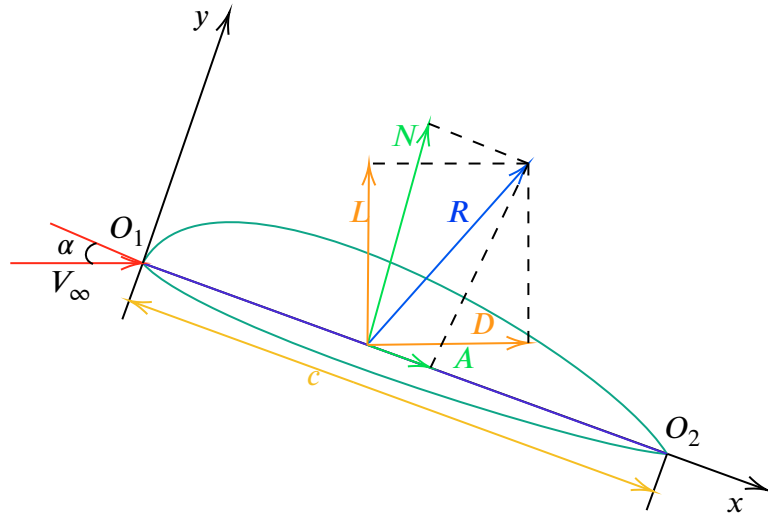


图 1.1: 机翼气动力图

总空气动力  $R$  的大小和自由来流的密度, 速度, 机翼的弦长, 自由来流的粘性, 自由来流的声速大小有关, 即

$$R = f(\rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty, a_\infty)$$

也可以写成

$$C_R = f(\text{Re}, M_\infty)$$

其中

$$C_R = \frac{R}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S}$$

**弦长 (chord)  $c$**  是从机翼的前缘点到后缘点的直线距离. 有时,  $R$  可以被分解成垂直弦长的正压力  $N$  和平行于弦长的轴向力  $A$ .

**攻角 (angle of attack)  $\alpha$**  是弦长  $c$  和自由来流速度  $V_\infty$  的夹角, 又称为飞行迎角. 同时, 攻角也是  $L$  和  $N$  的夹角或  $D$  和  $A$  的夹角. 它们之间的几何关系是

$$L = N \cos \alpha - A \sin \alpha$$

$$D = N \sin \alpha + A \cos \alpha$$

自由来流的速度和密度分别是  $V_\infty, \rho_\infty$ . 自由来流的动压  $q_\infty$  就是

$$q_\infty = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2$$

另外, 给出特征面积  $S$  和特征长度  $l$ , 具体见下图1.2, 给出气动力系数和气动力矩系数的计算公

式:

$$C_L = \frac{L}{q_\infty S}$$

$$C_D = \frac{D}{q_\infty S}$$

$$C_M = \frac{M}{q_\infty S l}$$

由于, 升力和阻力都是总空气动力的分量, 因此

$$C_L = f_1(\text{Re}, M_\infty, \alpha)$$

$$C_D = f_2(\text{Re}, M_\infty, \alpha)$$

$$C_M = f_3(\text{Re}, M_\infty, \alpha)$$

### ✍ 笔记

下标  $\infty$  表示单位翼展长度上的气动力和气动力矩, 与三维气动力和气动力矩的符号区分开.

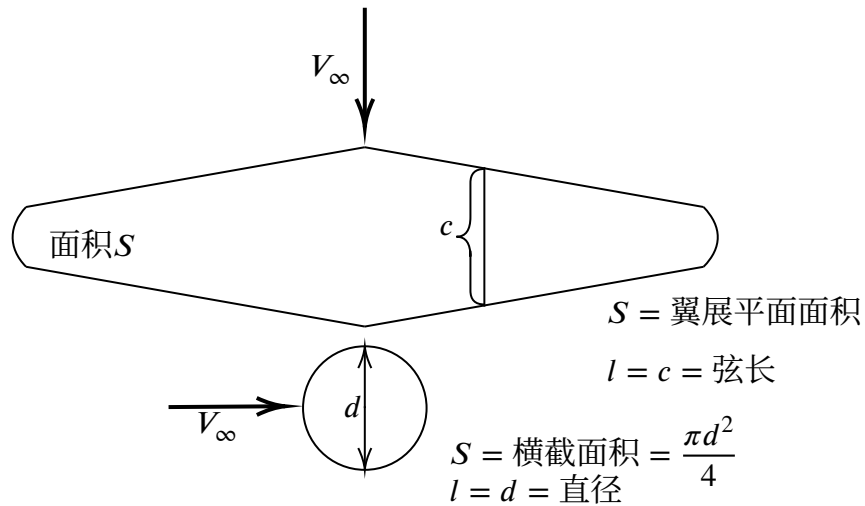


图 1.2: 机翼特征尺寸

对于二维平面的机翼, 也就是单位长度上的升力  $L$  和阻力  $D$ , 力矩  $M$ . 特征面积  $S = c(1) = c$ , 上述气动力系数和气动力矩系数写成

$$c_l = \frac{L}{q_\infty c}$$

$$c_d = \frac{D}{q_\infty c}$$

$$c_m = \frac{M}{q_\infty c^2}$$

**压强系数**是自由来流的压强  $P_\infty$  和与机翼上压强  $P$  的差值与动压的比值. 即

$$C_P = \frac{P - P_\infty}{q_\infty}$$

**表面摩擦系数**

$$C_f = \frac{\tau}{q_\infty}$$

**升阻比**是机翼的升力和阻力的比值即

$$\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D}$$

**压心 (center of pressure)** 是总空气动力的作用点, 同时对压心取矩为 0.

### ✍ 笔记

对于压心的定义可以参考如下:

It is the location where the resultant of a distributed load effectively acts on the body. If moments were taken about the center of pressure, the integrated effect of the distributed loads would be zero.

如果将气动力平移到机翼**前缘点 (leading edge)** 位置 (图1.3), 同时产生一个力矩  $M_{LE}$ , 称为**前缘力矩**, 那么压心的位置  $x_{cp}$  由下式给出

$$x_{cp} = -\frac{M_{LE}}{L}$$

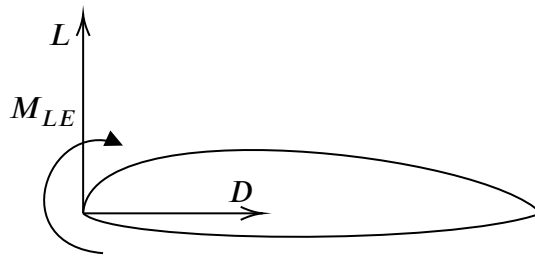


图 1.3: 前缘力矩

一般规定, 使得飞机抬头的力矩为正, 使得飞机低头的力矩为负. 或者说, 使得飞行迎角增大的力矩为正.

当气动力  $N$  和  $A$  减小时,  $x_{cp}$  增大. 当气动力趋近于 0 时, 压心就移动到无穷远处了.

## 第二章 场论基础知识

在介绍场论基础知识之前, 这里不加约定地将速度场  $\mathbf{V}$  认为是矢量场, 而密度场  $\rho$ , 压强场  $P$ , 温度场  $T$  等是标量场. 如无特殊说明, 均认为上述参数是定常的. 在引入新的场变量时, 用加粗字母表示矢量, 不加粗字母表示数量. 比如  $\mathbf{V}$  是矢量场, 但是  $V$  是标量场.

### 2.1 梯度, 旋度, 散度

#### 2.1.1 梯度计算

对于标量场  $\rho = \rho(x, y, z)$ , 它的梯度是

$$\nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \mathbf{k}$$

标量场的梯度是一个向量, 是这个标量函数下降最快的方向. 记作  $\mathbf{grad} \rho$ .

#### 2.1.2 旋度计算

对于矢量场  $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ , 它的旋度是

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

记作  $\mathbf{rot} \mathbf{V}$  或者  $\mathbf{curl} \mathbf{V}$ .

 **注意** 标量场梯度的旋度恒等于  $\mathbf{0}$ .

#### 2.1.3 散度

对于向量场  $\mathbf{V}$ , 它的散度是

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$



记作  $\operatorname{div} \mathbf{V}$ .

## 笔记

梯度计算是对于标量场, 而散度, 旋度均是对于向量场. 梯度和旋度的计算结果是向量, 而散度的计算结果是标量.

## 2.2 斯托克斯公式, 散度定理, 梯度定理

假设有一个封闭曲面  $S$ ,  $\mathbf{A}$  是一个在封闭曲面  $S$  上有定义的向量场.

根据斯托克斯公式有 (该公式中  $S$  是非封闭曲面,  $C$  是非封闭曲面  $S$  的边界曲线)

$$\oint_C \mathbf{A} d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS$$

也就是向量场  $\mathbf{A}$  沿非封闭曲面  $S$  的边界曲线  $C$  的积分等于  $\mathbf{A}$  的旋度在非封闭曲面上的积分.

根据散度定理有

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_v (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv$$

也就是向量场  $\mathbf{A}$  在封闭曲面上面的积分等于这个向量场在由这个封闭曲面包裹的闭空间中对体积的积分.

对于一个标量场  $P$ , 由梯度定理有

$$\oiint_S P \mathbf{n} dS = \iiint_v \nabla P dv$$

### 例题 2.1

**题目** 有一个向量场  $\mathbf{V} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j}$  求  $\mathbf{V}$  的旋度, 散度, 散度的梯度.

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{V} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) \right) \mathbf{k} \\ &= (2x + 2y)\mathbf{k} \\ \operatorname{div} \mathbf{V} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) \\ &= 2x - 2y \\ \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{V}) &= \frac{\partial}{\partial x}(2x - 2y)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(2x - 2y)\mathbf{j} \\ &= 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} \end{aligned}$$



## 笔记

标量场和矢量场的差别在于, 标量场是没有方向的, 是一个数量场, 也就是  $\rho = \rho(x, y, z)$ , 是关于  $x, y, z$  的函数. 矢量场是由向量组成的, 是有方向的, 也就是  $\mathbf{V} = u(x, y, z)\mathbf{i} + v(x, y, z)\mathbf{j} + w(x, y, z)\mathbf{k}$ , 每个分量都是位置的函数.

## 2.3 并矢

将两个矢量写在一起称为并矢, 如  $\mathbf{V}\mathbf{V}$ . 给定矢量  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ . 并矢的计算的定义是

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \alpha_2\beta_3 \\ \alpha_3\beta_1 & \alpha_3\beta_2 & \alpha_3\beta_3 \end{bmatrix}$$

对于速度场的并矢  $\mathbf{V} = (u, v, w)$ , 其中  $u, v, w$  都是关于  $x, y, z$  的函数, 如果非定常, 还是关于时间  $t$  的函数.

$$\mathbf{V}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u^2 & uv & uw \\ vu & v^2 & vw \\ wu & wv & w^2 \end{bmatrix}$$

速度场并矢的散度计算如下,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{V}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 & uv & uw \\ vu & v^2 & vw \\ wu & wv & w^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(u^2 + uv + uw) & \frac{\partial}{\partial y}(uv + v^2 + vw) & \frac{\partial}{\partial z}(uw + vw + w^2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

并矢的散度是一个向量.

 **注意** 并矢已经不是向量场, 而是一个张量, 是一个二阶张量函数.

## 2.4 物质导数

流体的状态参数是位置和时间的函数, 对于速度  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$ , 加速度就是速度  $\mathbf{V}$  对于时间的导数, 但是流体的位置也是关于时间的函数, 因此引入物质导数  $\frac{D}{Dt}$ .

定义物质导数的计算

$$\frac{D}{Dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

用梯度算子可以写成

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$$

物质导数的物理意思是运动流体质点的某个量随时间的变化率.  $\frac{\partial}{\partial t}$  是当地导数, 物理含义是确定空间点上的某个量随时间的变化率.  $\mathbf{V} \cdot \nabla$  是牵连导数, 物理含义是具有空间不均匀流场中, 由于质点的位置变化而导致某个量随时间的变化.

速度的物质导数就是加速度.

### 2.4.1 速度散度的物理意义

速度散度也可以表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{\delta v} \frac{D(\delta v)}{Dt}$$

其物理意义是, 标定流体微团在运动过程中体积对时间的变化率就是速度的散度.

## 第三章 基本方程

### 3.1 连续方程

#### 3.1.1 微分形式

连续方程反应了质量守恒这个基本定律, 也就是流入控制体的质量和流出控制体的质量(负质量) 以及控制体内部的质量和是保持不变的.

也可以描述为, 随流体运动的流体微团内的流体质量是保持不变的. 假设流体微团的体积为  $\delta v$ , 质量为  $\rho\delta v$ , 流速是  $\mathbf{V}$ , 流体微团内部的质量是定常的, 有

$$\frac{D(\rho\delta v)}{Dt} = 0$$

因此有

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

这就是连续方程. 可以写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) = 0$$

这就是流场中某点的流动变量之间的关系.

#### 3.1.2 积分形式

单位时间内, 流过微元面  $dS$  的流体质量就是流过该微元面的质量流量  $\dot{m}$ , 单位是 Kg/s. 连续方程的积分形式用质量表述为

$$\dot{m} = \rho V_n dS = \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

 **注意** 对于不可压流可以用体积流量, 原因请自行思考.

与质量流量相关的概念是质量通量密度, 定义为单位面积上的质量流量. 用  $\dot{m}_A$  表示. 即

$$\dot{m}_A = \frac{\dot{m}}{dS} = \rho V_n = \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$$

单位是  $\text{Kg}/(\text{s} \cdot \text{m}^2)$ .

对于位置固定的控制体来说, 质量守恒的描述就是控制体内增加的流体质量 + 净流出控制体的流体质量 = 0. 就是

$$\oint_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] dv = 0$$

由于控制体任取, 所以被积函数恒等于 0, 也就是前面的微分形式.

## 📝 笔记

1. 对于定常流动, 所有流动参数对时间的偏导数都等于 0. 连续方程可以写为

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

和

$$\oint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

2. 对于不可压流, 密度是常数, 连续方程可以写为

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

和

$$\oint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

## 3.2 动量方程

动量方程描述的是流体在流动过程中动量守恒的规律.

流体受到的外力等于单位时间内净流入控制体的动量和控制体内部动量的增量.

## 📝 笔记

流体微团或控制体受到的外力有两个来源:

1. 重力, 电磁力等, 称为彻体力.
2. 压力, 粘性力, 剪切力等, 称为表面力.

### 3.2.1 微分形式

动量方程的微分形式是

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = -\nabla P + \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

上式左边是动量的变化率, 右边是控制体受到的合力.  $\mathbf{f}$  是控制体受到的彻体力强度, 如重力加速度  $g$ .

### 3.2.2 积分形式

位置固定的控制体受到的彻体力大小是

$$\iiint_V \rho \mathbf{f} dv = \text{彻体力}$$

压强力大小是

$$-\iint_S P \mathbf{n} dS = \text{压力}$$

粘性力大小是

$$\iint_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS = \text{粘性力}$$

动量方程可以写成

$$\text{动量变化率} = G_1 + G_2$$

其中,  $G_1$  是单位时间内净流出控制面的流体质量所携带的总动量;  $G_2$  是控制体内部因流场的非定常特性而产生的动量的当地变化率.

那么

$$G_1 = \iint_S \mathbf{V}(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS)$$

$$G_2 = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \mathbf{V} dv$$

于是就可得到动量方程的微分形式

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} dv + \iint_S \mathbf{V}(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS) = \iiint_V \rho \mathbf{f} dv - \iint_S P \mathbf{n} dS + \iint_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS$$


## 笔记

对于不考虑彻体力的定常、无粘流动, 微分形式的动量方程可以写成

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = -\nabla P$$

积分形式可以写成

$$\oint_S \mathbf{V}(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS) = - \oint_S P \mathbf{n} dS$$

 **注意** 压强力前面有负号的原因是, 压强总是指向控制体内部, 与面法线方向相反, 故压强力总有负号. 当然, 具体问题具体分析, 按照动量方程的本质列出相应的方程, 这些矢量方程过于复杂.

### 3.3 能量方程


能量方程描述的是控制体能量守恒这个规律, 即机械能和内能守恒.

 **注意** 后面还会介绍焓这个概念.

### 3.4 描述流体运动的方法

#### 3.4.1 欧拉法和拉格朗日法

描述流体运动的方法有两个, 欧拉法和拉格朗日法. 欧拉法研究固定位置的流体区域的流动情况. 拉格朗日法则是追踪一个流体微团的运动情况.

 **注意** 由于流体运动微团太多, 而实际只需要一定范围内的流动情况, 因此描述流体运动常用欧拉法.

#### 3.4.2 流线 (streamline) 迹线 (pathline) 脉线 (streakline)

1. 流线: 是流体中的一条瞬时曲线, 其上各点的切线与该点的速度方向相同.
2. 迹线: 同一流体微团在不同时刻的位置所连成的曲线.
3. 脉线: 在某一时间间隔内相继经过空间一固定点的流体质点依次串连起来而成的曲线.

 **注意** 流线、迹线、脉线只有当流动定常的时候才重合, 一般情况下不重合.

##### 1. 流线方程

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$$

也就是

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ dx & dy & dz \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

就是

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

## 2. 迹线方程


由定义有

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dz}{dt} = w \end{cases}$$

整理可得

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt$$

流管是一个和流线相关的概念。在流场任意选取一条不为流线且不自交的封闭曲线, 经过该封闭曲线的每一点作流线, 所有这些流线的集合, 所构成的管状曲面称为流管 (stream tube). 流管是由流线组成, 因此流线不能流出或流入流管表面。

 **注意** 同一流场中的流线不能相交, 原因是同一点只有一个速度方向。流线相当于一堵墙, 流体不能跨过流线, 原因是流线的切线方向和流体的流动速度平行, 不能相交。

### 3.4.3 角速度 角变形率

流体微团在三维空间中的角速度是

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right]$$

实际上流体微团的角速度恰好等于速度旋度的一半。定义

$$\boldsymbol{\Gamma} = 2\boldsymbol{\omega}$$

也就是

$$\boldsymbol{\Gamma} = \text{curl } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V}$$

如果流场的旋度等于 0, 称为无旋流动; 反之则为有旋流动。

 **注意** 无旋流动只做纯粹的平移运动和变形运动, 有旋运动还做旋转运动。




若对于二维的无旋流则满足

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

角变形随时间的变化率称为角变形率.

$$\begin{cases} \gamma_z &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_y &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_x &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

 **注意** 角变形率的记忆方法, 和该维度无关的两个速度分量对该速度分量无关的位置变量的偏导数的和. 比如  $\gamma_x$ , 和该维度无关的两个速度分量是  $v$  和  $w$ , 与速度分量  $v$  无关的位置变量是  $z$ .

### 例题 3.1

**题目** 给定速度场,  $u = \frac{y}{x^2 + y^2}$ ,  $v = \frac{-x}{x^2 + y^2}$ , 计算其旋度和角变形率, 角速度.

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} \mathbf{curl} \mathbf{V} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{-x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= - \left[ \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \mathbf{k} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

显然, 旋度  $\Gamma = \mathbf{0}$ .

**角变形率**

$$\gamma_x = 0 + 0 = 0$$

$$\gamma_y = 0 + 0 = 0$$

$$\gamma_z = \frac{\partial}{\partial x} \frac{-x}{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{-x^2 - y^2 + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

当然, 对于  $x^2 + y^2 \neq 0$  的流场都是无旋的.



## 3.5 流函数和势函数 (速度位)

### 3.5.1 流函数

对于二维不可压流动, 连续方程是  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  也就是

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

如果存在  $p(x, y)$  和  $q(x, y)$  满足,  $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ , 则存在一个函数使得

$$df = p dx + q dy$$

因此, 存在一个函数  $\Psi(x, y, t)$  的全微分是

$$d\Psi = u dy - v dx$$


而

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy$$

故有

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases}$$

函数  $\Psi(x, y, t)$  称为流函数.

 **注意** 对于二维定常不可压流动, 若通过两给定点作流线, 由此两条流线所界定的流管的体积流量就是这两条流线上的流函数数值之差.

#### 例题 3.2

**题目** 给定二维不可压流动的速度分布  $u = x^2 - y^2, v = -2xy$ , 求流函数.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -(-2xy) = 2xy$$

$$\Psi(x, y) = \int \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = \int 2xy dx = x^2 y + C(y)$$

式中  $C$  是和  $x$  无关的常数. 而


$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial (x^2 y + C(y))}{\partial y} = x^2 - y^2$$

两相对比, 有  $C'(y) = -y^2$ , 于是  $C(y) = -\frac{y^3}{3} + C$  所以

$$\Psi(x, y) = x^2y - \frac{y^3}{3} + C$$

一般常数  $C$  也可以不写.



 **注意** 流函数的定义是在不可压流中定义的, 而且是二维平面, 不满足条件则没有流函数. 有旋流和无旋流都有流函数.

### 3.5.2 势函数 (速度位)

无旋流动满足

$$\boldsymbol{\Gamma} = \nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$$

而标量函数梯度的旋度恒等于 0, 于是存在一个标量函数使得

$$\mathbf{V} = \nabla \cdot \Phi$$

成立. 称  $\Phi(x, y, z, t)$  为速度势函数. 根据定义有

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{cases}$$

 **注意** 只有流动无旋才可以定义势函数, 否则没有势函数.

#### 例题 3.3

**题目** 已知二维流场分布,  $u = x, v = -y$ , 求该流场的势函数.

首先先计算该流场的旋度.

$$\text{curl } \mathbf{V} = \left[ \frac{\partial(-y)}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right] \mathbf{k} = 0$$

流动无旋, 因此存在势函数.

于是有

$$d\Phi = xdx - ydy = d\left(\frac{x^2}{2}\right) - d\left(\frac{y^2}{2}\right) = d\left(\frac{x^2 - y^2}{2} + C\right)$$

因此,  $\Phi(x, y, t) = \frac{x^2 - y^2}{2} + C$ , 不同于流函数, 这里常数  $C$  需要根据初值条件来求取.



 **注意** 这里求势函数的方法是凑微分, 和前面求流函数的方法不同, 两种方法都可以求解.

## 笔记

对于二维不可压流动, 流线就是流函数  $\Psi$  值相等的线. 等位线 ( $\Phi = \text{常数}$ ) 和流线 ( $\Psi = \text{常数}$ ) 始终正交 (驻点除外).

## 3.6 旋涡运动

**涡线**是旋涡场中的一条瞬时曲线, 其上各点的切线与该点处的流体微团的旋转角速度方向相同. 涡线的微分形式方程是

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$$

取一条封闭曲线, 速度线积分的值定义为**速度环量**,

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$$

速度环量取逆时针方向为正向.

 **注意** 有些也取顺时针为正向.

把流场中由于旋涡存在而产生的速度称为**诱导速度**, 即

$$d\mathbf{V}_P = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_{1P}}{r_{1P}^3}$$

上式也就是毕奥-萨伐尔定律.

### 3.6.1 亥姆霍兹定理

关于旋涡运动, 有亥姆霍兹的三个定理.

1. 在同一瞬间, 沿涡线或涡管的强度不变.
2. 涡管不能在流体中中断; 只能在流体边界上中断或形成合圈.
3. 如果流体是理想的, 正压的且彻体力有势, 那么涡的强度不随时间变化, 既不会增强, 也不会削弱.

## 第四章 不可压无粘流

无粘流的动量方程就是欧拉方程.

对于不可压定常, 无旋流的伯努利方程是

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + P + \rho U = \text{常数}$$

上式左边分别是单位质量流体所具有的动能, 压力能, 和位能 (重力势), 这三种能量统称为机械能. 它们三者之间可以相互转换, 但是总和是保持不变的.

### 笔记

在空气流动问题中, 重力 (重力势) 可以忽略, 于是伯努利方程可以写成

$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{常数}$$

其中,  $\frac{1}{2}\rho V^2$  称为动压,  $P$  称为静压, 等号右边的常数称为总压 ( $P_0$ ). 总压是无粘流速度为零的点 (驻点) 的压强.

对于有旋流动, 伯努利方程的条件是沿流线成立, 即同一条流线总压相等.

### 4.1 理想不可压无旋流动的控制方程

不可压位流的控制方程是

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

称为拉普拉斯方程.

**边界条件**就是流场的边界对流动规定的条件. 边界条件有三种, 分别是

1. 第一类边值问题, 又称狄利克雷问题, 即在边界上给定  $\Phi$  的值.
2. 第二类边值问题, 又称纽曼问题, 即在边界上给定  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  的值.

3. 第三类边值问题, 即混合边值问题, 又称庞加莱问题, 即在一部分边界上给定  $\Phi$  值, 另一部分边界给定  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  值.

对于理想不可压流的平面定常无旋流动中流函数满足的控制方程是

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

 **注意** 拉普拉斯方程是一个线性方程, 它的解满足叠加定理.

## 4.2 拉普拉斯方程的基本解

### 4.2.1 直匀流

**直匀流 (uniform stream)** 是一种最简单的无旋流动, 其中任何一点的流速都是一样的. 它的流函数是

$$\Phi = ax + by$$

速度分量是

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = a \\ v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = b \end{cases}$$

流函数是

$$\Psi = -bx + ay$$

### 4.2.2 点源

**正源 (source)** 是从流场某点有一定的流量流向四面八方的流动. **负源 (sink)** 则相反, 也称为汇.

 **注意** 点源流动只有径向速度  $V_r$ , 没有周向速度  $V_\theta$ .

记半径  $r$  处的流速为  $V_r$ , 则源的总体积流量是  $Q = 2\pi r V_r$ , 是一个常数. 所以

$$V_r = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{r} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

 **注意** 源的径向流速与  $\theta$  无关,  $Q$  称为源强.

点源的流函数是

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \theta = \frac{Q}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

点源的位函数是

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

## 第五章 高速可压流动

### 5.1 热力学基础

#### 5.1.1 内能 (internal energy)

对于遵守  $P = \rho RT$  的气体称为**热完全气体**, 这种理想化的完全气体, 内能只计微观运动的平均动能, 因此内能只与绝对温度  $T$  有关, 单位完全气体的内能记为  $e$ , 单位是 J/Kg. 于是有

$$e = e(T)$$

内能是与变化过程无关的参数.

#### 5.1.2 焓 (enthalpy)

焓表示单位质量气体的内能和压力能之和, 用  $h$  表示

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

其中  $\frac{p}{\rho}$  表示单位质量气体的压力能, 对于完全气体, 焓也取决于温度, 所以焓也是一个状态参数.

#### 5.1.3 热力学第一定律和比热

外界传递给一个封闭物质系统的热量等于系统内能的增量和系统对外界所做的机械功的总和, 这就是热力学第一定律.

对于单位质量的气体有

$$\delta q = de + Pd\frac{1}{\rho} \quad (5.1)$$

$\frac{1}{\rho}$  是单位质量气体所占的体积, 称为比容. 又

$$dh = de + Pd\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}dP$$

于是

$$\delta q = dh - \frac{1}{\rho} dP$$

若对于等压过程  $dP = 0$ , 焓增量  $dh$  就等于此过程吸收的热量  $\delta q$ . 若一个系统由于加给一微小的热量  $\delta q$  而升高了温度  $dT$ , 定义比值

$$\delta q/dT$$

为热容, 单位 J/K. 单位质量上的热容为比热容, 简称比热, 单位 J/(Kg·T). 在定容情况下,  $d\frac{1}{\rho} = 0$ , 定压情况下,  $dP = 0$ , 于是

$$\begin{aligned} C_v &= \left( \frac{\delta q}{dT} \right)_{\rho=\text{const}} = \frac{de}{dT} \\ C_P &= \left( \frac{\delta q}{dT} \right)_{P=\text{const}} = \frac{dh}{dT} \end{aligned} \quad (5.2)$$

其中,  $C_v$  为比定容热容,  $C_P$  为比定压热容. 取  $T = 0$  时,  $e = h = 0$ , 于是

$$e = C_v T \quad (5.3)$$

$$h = C_P T \quad (5.4)$$

将比定容热容和比定压热容之比称为比热, 用  $\gamma$  表示, 即

$$\gamma = \frac{C_P}{C_v}$$

对于空气,  $\gamma = 1.4$ . 又

$$h = e + \frac{P}{\rho}$$

有

$$C_P T = C_v T + \frac{P}{\rho}$$

于是

$$C_P = C_v + \frac{P}{\rho T} = C_v + R$$

因此,

$$h = C_P T = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T = \frac{\gamma R T}{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}$$

其中  $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ ,  $C_P = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ .



## 笔记

热完全气体 (calorically perfect gas) 是指  $C_v$  和  $C_P$  都是常数的气体。

### 5.1.4 热力学第二定律和熵 (entropy)

热力学第二定律指明能量相互转化是有条件的, 有方向的, 即从一个方向的变化过程可以实现, 而逆向的变化过程不能实现或者只能有条件的实现。

定义单位质量的气体的熵增量  $ds$  为单位质量气体的热量增量与绝对温度的比值, 即

$$ds = \frac{\delta q}{T}$$

又

$$\delta q = de + Pd\frac{1}{\rho}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 ds &= \frac{\delta q}{T} = \frac{1}{T}(de + Pd\frac{1}{\rho}) \\
 &= \frac{1}{T}(dC_v T + Pd\frac{1}{\rho}) \\
 &= \frac{1}{T}C_v dT + \frac{P}{T}d\frac{1}{\rho} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} P = \rho RT \\
 &= \frac{1}{T}C_v dT + \rho R d\frac{1}{\rho} \\
 &= d\left(C_v \ln T + R \ln \frac{1}{\rho}\right)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

因此, 熵是一个状态函数, 当系统由状态 1( $s_1, P_1, \rho_1, T_1$ ) 变化为状态 2( $s_2, P_2, \rho_2, T_2$ ) 时, 过程的熵增量为

$$\begin{aligned}
 \Delta s &= s_2 - s_1 = C_v \ln T_2 + R \ln \frac{1}{\rho_2} - \left(C_v \ln T_1 + R \ln \frac{1}{\rho_1}\right) \\
 &= C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

由  $C_P = C_v + R, \gamma = \frac{C_P}{C_v}$ , 有

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \Delta s &= C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + C_v(\gamma - 1) \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \\
 &= C_v \ln \left[ \frac{T_2}{T_1} \cdot \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\gamma-1} \right] \\
 &= C_v \ln \left[ \frac{T_2}{T_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\gamma} \frac{\rho_2}{\rho_1} \right] \\
 &= C_v \ln \left[ \frac{P_2}{P_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\gamma} \right]
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

上式对于不可逆状态依然适用,前提是热力学系统处于平衡状态.

热力学第二定律指出,在绝热变化过程的孤立系统中,如果过程可逆,则熵值保持不变.如果过程不可逆,则熵必增加.

一般来说,在流场的大部分区域,速度梯度和温度梯度并不是很大,流动过程可以近似看成是绝热的,熵增等于 0,这样的流动称为等熵流 (isentropical flow). 沿一条流线熵值保持不变的情况称为沿流线等熵. 全流场熵值不变的流动称为均匀等熵流动.

对于等熵流即绝热可逆流动有

$$\frac{P_2}{P_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\gamma} = 1 \Rightarrow \frac{P_2}{\rho_2^{\gamma}} = \frac{P_1}{\rho_1^{\gamma}} = \text{const}$$

## 笔记

等熵流动就是绝热可逆流动.

## 5.2 一维等熵绝热流

气体参数发生在微小变化的扰动称为小扰动. 小扰动的传播速度只取决于气体的性质及状态参数,而与何种扰源和其成因无关. 小扰动在气体中的传播速度习惯上称为**声速 (speed of sound)**.

考虑声波以速度  $a$  在空气中传播, 声波向左传播并进入参数分别是  $P, \rho, T$  的静止气体, 在声波之后, 气体参数变成了  $P + dP, \rho + d\rho, T + dT$ . 选择声波前后的气体作为控制体如图, 由连续方程有

$$\rho a = (\rho + d\rho)(a + da)$$

展开并略去高阶项有

$$\rho a = \rho a + a d\rho + \rho da$$

解得

$$a = -\rho \frac{da}{d\rho}$$

再列动量方程有

$$P + \rho a^2 = (P + dP) + (\rho + d\rho)(a + da)^2$$

展开并略去比二阶高的小量有

$$dP = -2\rho a da - a^2 d\rho$$

解得

$$da = \frac{dP + a^2 d\rho}{-2a\rho}$$

代入到

$$a = -\rho \frac{da}{d\rho}$$

得到

$$a^2 = \frac{dP}{d\rho}$$

上述讨论中, 流体流过声波是等熵的, 因此压强对于密度的变化就是等熵的, 可以将方程

$$a^2 = \frac{dP}{d\rho}$$

重写成

$$a^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

假设气体是量热完全气体, 满足方程

$$\frac{P_1}{P_2} = \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma$$

又

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{const} = C$$

或者写成

$$P = C\rho^\gamma$$

于是

$$\left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = C\gamma\rho^{\gamma-1}$$

再将

$$C = \frac{P}{\rho^\gamma}$$

代入, 得到

$$\left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = \frac{P}{\rho^\gamma} \gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{P}{\rho} = \gamma RT$$

## 笔记

$a^2 = \gamma RT$  是量热完全气体等熵流动的计算公式, 说明声速仅仅只是温度  $T$  的函数.

上式中定义的变量  $a$  就是小扰动传播的速度——声速.

### 5.2.1 能量方程

对于一维等熵绝热流, 能量方程可由欧拉方程并利用等熵关系式沿流线积分求出.

由一维伯努利方程, 忽略重力势

$$\frac{1}{2} \mathbf{V}^2 + \int d\frac{P}{\rho} = C$$

因为沿流线等熵, 由等熵关系

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = C$$

有

$$\frac{1}{2} V^2 + \int d\frac{P}{\rho} = \frac{1}{2} V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho}$$

又

$$h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho}$$

于是

$$\frac{1}{2} V^2 + h = C$$

对于定常绝热流, 上述方程不论是否等熵, 在形式上都成立, 也就是绝热流动中粘性摩擦并不改变动能和焓的总和, 而是将一部分动能转化为焓. 上式还可以改写成

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} RT &= \frac{1}{2} V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} \\ &= \frac{1}{2} V^2 + \frac{a^2}{\gamma-1} = C \end{aligned} \quad (5.8)$$

从中可以看出, 对于定常绝热流, 当沿流线速度变大的时候温度, 声速, 焓都要减小, 但是动能和焓的总和不变.

### 5.2.2 参数间的基本关系式

#### 1. 驻点

指流速沿流线等熵地降为 0 的那一点, 该点的参数称为驻点参数, 或者总参数. 对应这个

状态的焓, 温度, 压强, 密度分别称为总焓, 总温, 总压, 总密度. 用  $h_0, T_0, P_0, \rho_0$  表示, 驻点状态的声速用  $a_0$  表示.

### 笔记

总温和总焓是指速度绝热地降为 0 的那点的温度和焓值. 总密度和总压则是指速度等熵地降为 0 的那点的密度和压强.

于是上述能量方程就可以改写为

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0} \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{2}V^2 + h = h_0 \quad (5.10)$$

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{a^2}{\gamma-1} = a_0^2 \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma RT}{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_0 \quad (5.12)$$

显然对于一维定常绝热等熵流,  $h_0, P_0, T_0, \rho_0$  和  $a_0$  沿同一条流线恒等于常数而不发生改变, 和驻点参数对应的是流动过程中任意一点处的当地流动参数  $h, P, T, \rho$  等称为静参数, 即静焓, 静压, 静温, 静密度. 因此上述方程也可以写成

$$\frac{1}{2} \frac{V^2}{\gamma RT} + \frac{1}{\gamma-1} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{T_0}{T}$$

也就是

$$1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{V^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 = \frac{T_0}{T}$$

$$\frac{1}{2} \frac{V^2}{h^2} + 1 = \frac{h_0}{h}, \quad (h = \frac{\gamma}{\gamma-1} RT)$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma-1}{2} \frac{V^2}{\gamma RT} + 1 = \frac{h_0}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma-1}{2} \frac{V^2}{a^2} + 1 = \frac{h_0}{h}$$

也就是

$$\frac{h_0}{h} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \quad (5.13)$$

利用等熵关系  $\frac{P}{\rho^\gamma} = C$  可得

$$\frac{P}{\rho} = C \rho^{\gamma-1}$$

于是有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}V^2 + \frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} &= \frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho_0^{\gamma-1} \\ \Rightarrow \frac{1}{2\rho^{\gamma-1}}V^2 + \frac{C\gamma}{\gamma-1} &= \frac{C\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma-1}\end{aligned}$$

$$\text{又 } \rho^{\gamma-1} = \frac{P}{C\rho} = \frac{RT}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{C}{2RT}V^2 + \frac{C\gamma}{\gamma-1} = \frac{C\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma-1}$$

也就是

$$\frac{1}{2\gamma RT}V^2 + \frac{1}{\gamma-1} = \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma-1}$$

也就是

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (5.14)$$

再利用等熵关系有

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (5.15)$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{P_0}{P} &= \left[\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]^{\gamma} \\ &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\end{aligned} \quad (5.16)$$

其中

$$M = \frac{V}{a}$$

称为流动马赫数, 是反映流体压缩性能大小的相似准则, 是当地流动速度和当地声速的比值.

## ✍ 笔记

当讨论飞机或者其他飞行物体时, 马赫数就是这个物体的速度除以自由来流的声速, 而不是流过该物体的流体的声速. (自由来流就是远前方的气流, 流过该物体的流体的温度和远前方气流的速度并不相同, 一般要高些)

马赫数是流场的当地性质, 流场每个点的马赫数都可能不同.

马赫数还反映了流体内能和动能的比值, 即

$$\frac{V^2}{2e} = \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}M^2$$

## 2. 临界状态

临界状态是指当地流速等于当地声速的状态, 也称为临界点, 用下标 \* 表示, 显然在临界状态, 当地马赫数  $M = 1$ , 式

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1}$$

可以写成

$$\frac{V_*^2}{2} + \frac{a_*^2}{\gamma - 1} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1}$$

又

$$V_* = a_*$$

于是

$$a_*^2 = \frac{2}{\gamma + 1} a_0^2$$

式

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

在临界状态下可以改写成

$$\frac{T_0}{T_*} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} = \frac{\gamma + 1}{2}$$

定义速度系数  $\lambda$  为

$$\lambda = \frac{V}{a_*}$$

由于

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{V^2}{a^2} = \frac{V^2}{a_*^2} \frac{a_*^2}{a^2} \\ &= \lambda^2 \frac{2}{\gamma + 1} \frac{T_0}{T}, \quad (a = \sqrt{\gamma RT}) \\ &= \lambda^2 \frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) \end{aligned} \tag{5.17}$$

于是

$$M^2 = \frac{\frac{2}{\gamma + 1} \lambda^2}{1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \lambda^2}$$

从式

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

中可以看出, 当  $T \rightarrow 0$  时,  $M \rightarrow \infty$ , 而  $\lambda$  趋于有限值, 即

$$\lambda_{\max} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}$$

使用速度系数  $\lambda$  可得

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2$$

类似地

$$\begin{aligned} \frac{P}{P_0} &= \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

临界状态下, 临界参数和总参数的对应关系如下

$$\frac{T_*}{T_0} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (5.19)$$

$$\frac{P_*}{P_0} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (5.20)$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (5.21)$$

从式

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} RT = \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_0$$

可以看出, 当  $T = 0$  时速度达到最大, 即

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} RT_0} = \sqrt{\frac{2a_0^2}{\gamma-1}}$$

这种状态是一种假想状态, 意味着给定一个总温后所能达到的最大流动速度, 是一个上限值, 即流体中的全部焓转换成了动能.

若流动过程绝热, 则总温不变,  $T_{01} = T_{02}$ . 对于等熵绝热流总压也保持不变,  $P_{01} = P_{02}$ . 而对于一个绝热过程, 如果变化过程中有摩擦等损失存在, 则该过程是不可逆过程, 熵必有所增加, 必然表现为  $P_{01} > P_{02}$ , 即总压有所损失, 记  $\sigma = \frac{P_{02}}{P_{01}}$  为总压损失比.

## ✍ 笔记

关于总参数和静参数的理解

如果飞机飞行高度在 10000 英尺, 速度为 0.8 马赫. 那么 10000 英尺高度的压强就是静参数, 用皮托管测到的压强就是总参数 (皮托管测量到的压强是速度为零的压强). 将飞机静止来看, 远前方的气流就是运动的, 就是静参数.



### 5.3 马赫波和膨胀波

亚声速流场中的小扰动可以遍及全场, 在声速和超声速流动中小扰动不会干扰到干扰源的上游。

超声速气流受到小扰动而使气流方向发生微小变化, 扰动的界面就是马赫波。设超声速定常直匀流沿壁面流动, 若壁面外折伴随着流速增大, 压强, 密度, 温度均减小, 此时气流发生膨胀, 此时的马赫波称为膨胀马赫波。壁面内折, 则伴随着流速减小, 压强, 密度, 温度均增大, 气流发生压缩, 称为压缩马赫波。气流通过马赫波后壁面上的压强系数

$$C_p = \frac{(P + dP) - P}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{dP}{\frac{1}{2}\frac{P}{RT}M^2a^2} = -\frac{2}{\sqrt{M^2 - 1}}d\theta$$

对于大角度超声速气流发生折转的情况, 流动参数与方向偏角之间的关系通过膨胀波和激波建立。

膨胀波是超声速气流的基本变化之一, 是一种压强下降, 密度下降, 而流速上升的过程。由于气流经过每一道膨胀马赫波气流参数只发生微小变化, 因此穿过整个扇形膨胀波时气流参数必是连续变化的, 这种连续变化过程必是等熵的。所以气流经过膨胀波是可逆等熵过程, 对于一定的来流条件, 波后气流只取决于总的外折角  $\theta$ , 对

$$V = aM$$

取全微分, 有

$$dV = Mda + adM$$

也就是

$$\frac{dV}{aM} = \frac{da}{a} + \frac{dM}{M} \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{da}{a} + \frac{dM}{M}$$

而

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\sqrt{\gamma RT}}{\sqrt{\gamma RT}} = \frac{dM}{M} + \frac{dT}{2T}, \quad (a = \sqrt{\gamma RT})$$

又

$$\frac{dM}{M} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2}{\sqrt{M^2 - 1}}d\theta$$

当壁面外折角由 0 增大到  $\theta$  时, 马赫数由  $M_1$  增大到  $M_2$  有

$$\theta = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2)M} dM$$

积分得到 (过程参见A.1)

$$\theta = \left[ \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M_2^2 - 1) - \arctan \sqrt{M_2^2 - 1} \right] - \left[ \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M_1^2 - 1) - \arctan \sqrt{M_1^2 - 1} \right]$$

这样给定  $M_1$  和  $\theta$  后就可以求出  $M_2$ , 在膨胀过程中总温, 总压, 总密度均不变, 于是便可以求出  $\frac{P_2}{P_1}, \frac{T_2}{T_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}$ . 若指定气流时从  $M_1 = 1$  的声速流开始膨胀的, 那么达到某个大于 1 的马赫数  $M$  的外折角  $\theta_*$

$$\theta_* = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2 - 1) - \arctan \sqrt{M^2 - 1}$$

于是

$$\theta_{* \max} = \lim_{M \rightarrow \infty} \theta_* = \left( \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right) \frac{\pi}{2}$$

对于空气,  $\theta_{* \max} = 130.45^\circ$ , 此时已经膨胀到温度, 压强, 密度均降为 0 的真空状态.

实际上, 根据能量方程, 膨胀过程实际上时气体的焓值转换为动能的过程, 真空状态其焓值已经耗尽, 因此不能再进行膨胀了.

## ✍ 笔记

计算马赫数  $M_1 > 1$  的气流绕一个外折角  $\nu$  膨胀后的马赫数  $M_2$ . 可以这样认为, 一个  $M = 1$  的气流先绕过一个外折角  $\nu_1$  膨胀后达到马赫数为  $M_1$ , 然后在绕过外折角  $\nu$  膨胀后达到马赫数  $M_2$ , 相当于  $M = 1$  的气流绕过外折角为  $\nu_2 = \nu_1 + \nu$  膨胀后达到马赫数  $M_2$ . 所以可以根据  $M_1$  先查普朗特—迈耶函数表, 得到  $\nu_1$ , 然后计算  $\nu_2$ , 在根据  $\nu_2$  查普朗特—迈耶函数表得到  $M_2$ .

### 例题 5.1

题目 高速导弹在滞止点的温度和压强分别是 518.8K 和 7.8atm, 计算这一点的密度.  
由完全气体状态方程

$$P = \rho RT$$

得到

$$\rho_0 = \frac{P_0}{RT_0} = \frac{7.8 \times 1.01 \times 10^5}{518.8 \times 287.05} = 5.29 \text{ Kg/m}^3$$



**例题 5.2**

**题目** 激波前气体温度和压强分别是 288K 和 1atm; 激波后气体温度和压强分别是 690K 和 8.656atm. 计算经过激波前后焓, 熵, 内能的变化.

$$C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = \frac{1.4 \times 287.05}{1.4 - 1} = 1004.675$$

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{287.05}{1.4 - 1} = 717.625$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = C_p(T_2 - T_1) = 403879.35\text{J}$$

$$\Delta e = e_2 - e_1 = C_v(T_2 - T_1) = 288485.25\text{J}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + C_v(\gamma - 1) \ln \frac{P_2 T_1}{P_1 T_2} = 995.41$$

**例题 5.3**

**题目** 考虑一个等熵流经过机翼, 来流的状态是  $T_\infty = 245\text{K}$ ,  $P_\infty = 4.35 \times 10^4\text{pa}$ , 在机翼上一点的压强是  $3.6 \times 10^4\text{pa}$ . 计算这一点的密度.

由等熵关系

$$\frac{P_2}{P_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma-1}$$

得到机翼上该点的温度

$$T = \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} T_\infty = 114.93\text{K}$$

于是

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{3.6 \times 10^4}{287.05 \times 114.93} = 1.09\text{Kg/m}^3$$



## 5.4 正激波

在流动过程中, 气流的主要参数有显著的, 突跃的变化的那一个地方称为激波, 是在同一个位置有无穷多压缩马赫波叠加而成, 当激波的波阵面与来流方向垂直时, 称为正激波. 如右图, 波前参数为  $P_1, \rho_1, V_1$ , 波后参数为  $P_2, \rho_2, V_2$ , 由连续方程有

插图

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

因为激波很薄, 截面积基本上没有发生变化, 由动量方程有

$$\rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2 = P_1 - P_2$$

即

$$\rho_2 V_2^2 + P_2 = \rho_1 V_1^2 + P_1$$

又波前波后总能量相等, 于是有

$$\frac{1}{2} V_1^2 + \frac{a_1^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} V_2^2 + \frac{a_2^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_*^2$$

在

$$\rho_2 V_2^2 + P_2 = \rho_1 V_1^2 + P_1$$

左边除以  $\rho_2 V_2$ , 右边除以  $\rho_1 V_1$  得到

$$V_2 + \frac{P_2}{\rho_2 V_2} = V_1 + \frac{P_1}{\rho_1 V_1}$$

于是

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \frac{P_2}{\rho_2 V_2} - \frac{P_1}{\rho_1 V_1} \\ &= \frac{a_2^2}{\gamma V_2} - \frac{a_1^2}{\gamma V_1}, \quad \left( \frac{P}{\rho} = RT, \quad a^2 = \gamma RT \right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

又

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\gamma + 1}{2} a_*^2 = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_*^2, \quad (a_*^2 = \frac{2}{\gamma + 1} a_0^2)$$

有

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{\gamma + 1}{2} a_*^2 - \frac{\gamma - 1}{2} V_1^2 \\ a_2^2 &= \frac{\gamma + 1}{2} a_*^2 - \frac{\gamma - 1}{2} V_2^2 \end{aligned} \quad (5.23)$$

代入到

$$V_1 - V_2 = \frac{a_2^2}{\gamma V_2} - \frac{a_1^2}{\gamma V_1}$$

有

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \frac{\gamma + 1}{2\gamma V_2} a_*^2 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} V_2 - \frac{\gamma + 1}{2\gamma V_1} a_*^2 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} V_1 \\ &= \frac{\gamma + 1}{2\gamma} a_*^2 \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (V_1 - V_2) \\ &= \left( \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{a_*^2}{V_1 V_2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right) (V_1 - V_2) \end{aligned} \quad (5.24)$$

又  $V_1 \neq V_2$ , 只能是

$$\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{a_*^2}{V_1 V_2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} = 1$$

即

$$\frac{a_*^2}{V_1 V_2} = 1 \text{ 或 } a_*^2 = V_1 V_2 \quad (5.25)$$

用速度系数表示

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1$$

上式就是普朗特激波公式, 即正激波前后的速度乘积为定值, 即临界速度的平方.

## 笔记

激波并没有加热或者降温气体, 因此气体流过激波是一个绝热过程, 但是不是等熵过程.

从上式可以看出: 超声速气流 ( $\lambda_1 > 1$ ) 经过正激波后变为亚声速气流 ( $\lambda_2 < 1$ ), 而且速度系数  $\lambda_1$  越大则速度系数  $\lambda_2$  就越小. 应当指出, 从亚声速流经过正激波变成超声速流是不可能的.

将式

$$\lambda^2 = \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}$$

代入到

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1$$

即可得到

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$$

当  $M_1 = 1$  时,  $M_2 = 1$ ; 当  $M_1 \rightarrow \infty$ ,  $M_2 \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$ .

由连续方程  $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$  和

$$\lambda^2 = \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}$$

可以得到正激波前后的密度比

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda_1^2 = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}$$

再由过程的绝热性,  $T_{01} = T_{02}$ , 以及静温和总温之间的关系可以得到正激波前后的温度比为

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_{01}}{T_1} \cdot \frac{T_2}{T_{02}} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \left( \frac{2\gamma}{\gamma - 1}M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)$$

于是正激波前后的压强比为

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

也可以写成

$$\frac{\Delta P}{P_1} = \frac{P_2 - P_1}{P_1} \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1)$$

因为流动时超声速,  $M_1 > 1$ , 所以  $\Delta P > 0$

超声速气流经过正激波的变化是绝热不等熵的。客观上, 激波层内速度梯度非常大, 而实际流体总有粘性, 因此必有摩擦发生, 所以经过激波熵必有所增加。

正激波前后总压变化为

$$\sigma = \frac{P_{02}}{P_{01}} = \left[ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right]^{-\frac{1}{\gamma-1}} - \left[ \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2 + 2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

因为过程绝热, 总温相等, 所以总密度之比和总压之比相等。上述正激波前后关系式说明, 正激波前后流动的参数的比值都只取决于波前的马赫数  $M_1$  和比热比  $\gamma$ 。而马赫数  $M_1$  值越大, 激波突跃变化就越强, 熵增也就越大。

## 笔记

不论是正激波还是斜激波, 激波前都是超声速流。斜激波后一般还是超声速, 但是马赫数要下降。正激波后是亚声速流。

下面总结讨论的气体如无特别指出都是量热完全气体。

## 总结

1. 满足  $P = \rho RT$  的气体叫做理想气体或者热完全气体。
2. 定压热容  $C_p$  和定容热容  $C_v$  都是常数的气体叫做量热完全气体。
3. 绝热是一个过程, 即在这个过程中不从外界吸热也不向外界放热, 绝热过程总温不变, 总焓和总内能也不变。
4. 等熵是一个过程, 即在这个过程中熵增为 0, 该过程全流场总压和总密度都是常数。
5. 可逆过程是指气体从状态 1 变化到状态 2, 然后在从状态 2 变回状态 1 的过程对外界没有造成任何影响。强调是否造成影响的过程是从状态 2 变回状态 1 的过程。

6. 气流流过激波的过程是一个绝热过程 (时间很短, 与外界没有热交换), 但不等熵.
7. 流过激波后, 压强, 密度, 温度, 熵都要**增加**; 马赫数, 速度和总压**降低**; 总温和总焓**不变**.
8. 量热完全气体的绝热过程, 内能和焓都只是温度的函数, 满足

$$e = e(T) = C_v T$$

$$h = h(T) = C_p T$$

9. **流动定常绝热**, 满足

$$\frac{1}{2} V^2 + h = h_0$$

10. **声速**计算公式

$$a = \gamma R T$$

11. **流动等熵**则满足

$$\frac{P_2}{P_1} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma-1}$$

12. **熵增**的计算

$$\Delta s = s_2 - s_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

或

$$\Delta s = s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1}$$

## 第六章 喷管中的可压流动

### 6.1 准一维流动的控制方程

喷管中的流动依然满足连续方程, 动量方程和能量方程.

首先是满足连续方程, 即

$$\rho u A = \text{const}$$

微分形式是

$$d(\rho u A) = 0$$

整理得到

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$$

因为

$$dP = -\rho u du$$

上式即欧拉方程. 再由能量方程

$$h + \frac{u^2}{2} = \text{const}$$

微分形式是

$$dh + u du = 0$$

综上, 上述方程就是一维喷管中的控制方程.

声速的定义

$$a^2 = \frac{dP}{d\rho}$$

联立连续方程的微分形式, 以及

$$\frac{dP}{\rho} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -u du$$

可以得到

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{u du}{a^2} = -M^2 \frac{du}{u}$$

这个方程很重要, 我们可以从中得到一下几点重要信息:



1. 对于亚声速流动, 在扩张管道中, 流速是减小的; 在收缩管道中, 流速是增加的.
2. 对于超声速流动, 在扩张管道中, 流速是增加的; 在收敛管道中, 流速是减小的.
3. 对于声速流动, 即  $M = 1$ . 那么  $M^2 - 1 = 0$ , 也就是说速度有微小的变化, 即  $du$  存在, 也不会引起  $dA$  的变化, 即  $dA = 0$ .

请记住, 气流在喷管中加速, 都是在发生膨胀, 也就是气体本身的焓在逐渐转化为动能.

想像一下, 我们想要将静止的气体膨胀加速到超声速, 喷管应该是一个先收缩再扩张形式的, 这就是拉瓦尔喷管. 一般来说, 收缩喷管和扩张喷管都叫做拉瓦尔喷管. 值得注意的是并不是所有的收缩-扩张喷管都能将亚声速气体加速到超声速. 原因我们在后面讲解. 要让亚声速气流加速到超声速, 首先要让在收缩喷管中加速到声速, 然后再接一个扩张喷管, 自然, 加速到声速的位置就是收缩喷管面积最小的位置, 也是扩张喷管面积最小的位置, 我们把这个位置叫做**喉道 (throat)**, 当然, 喉道处气流的流速就是声速. 这是对于一个正常工作的喷管来说的, 这是因为收缩-扩张喷管并不一定能将亚声速气流加速到超声速. 那么反过来, 如果一股超声速气流流过收缩-扩张喷管, 会先在收缩管道中减速到声速, 然后再在扩张管道中减速至亚声速. 同样, 在喉道处达到声速. 这样的装置我们叫做**进气道**.



**注意** 喷管中的流动是等熵流动

## 6.2 喷管中的流动

前面我们讨论了喷管的形状对流速的影响, 接下来讨论喷管中的流动情况.

考虑一个收敛-扩张喷管, 在喉道处的面积记作  $A^*$ , 马赫数和速度分别记作  $M^*$  和  $u^*$ . 因为喉道处是声速, 所以  $M^* = 1, u^* = a^*$ . 喷管其他截面处的面积和马赫数分别记作  $A$  和  $M$ . 根据连续性方程, 我们可以得到

$$\rho^* u^* A^* = \rho u A$$

因为  $u^* = a^*$  所以上式可以写作

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* a^*}{\rho u} = \frac{\rho^* \rho_0 a^*}{\rho_0 \rho u}$$

再由前面的可压流动的能量方程

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

和

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

以及

$$\frac{u}{a^*} = \sqrt{\frac{\frac{\gamma-1}{2}M^2}{1 + \frac{\gamma+1}{2}M^2}}$$

代入得到

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2}{1 + \frac{\gamma+1}{2}M^2}$$

简化后得到

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right) \right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

上面这个方程同样很重要, 这个方程叫做面积-马赫数关系. 这就是说任何位置处的马赫数都是这个截面面积和喉道面积比值的函数. 任何位置处的面积都要比喉道处的面积大,  $A < A^*$  的情况对于等熵流动在理论上是不可能发生的. 因此, 对于上式来说  $\frac{A}{A^*} > 1$ . 对于给定  $\frac{A}{A^*}$  来说,  $M$  有两个解, 一个对应超声速, 一个对应亚声速. 在给定情况下,  $M$  取那个值, 取决于喷管入口和出口的压强.

想象你已经获得了一根收敛-扩张喷管, 简单将它放在你面前的桌子上, 接下来会发生什么呢? 空气会自动从喷管中流出来吗? 答案当然是不会啦! 我们必须施加一个力来产生一定的加速度. 事实上这就是动量方程的本质, 入口处空气的动量是 0, 出口处空气的动量也必须是 0. 这里我们考虑的是无粘流体, 推动空气流动的力就变成了压强, 也就是喷管出口和入口的压强差, 这个压力会持续地提供冲量. 回到桌子上的这个喷管, 只有当出口和入口存在压强差, 空气才会流入喷管. 并且, 入口处的压强必须大于出口处的压强, 即  $P_e < P_0$  其中  $P_e$  表示出口处的压强,  $P_0$  表示入口处的压强. 更重要的是如果我们希望产生等熵流动, 压比  $\frac{P_e}{P_0}$  必须和我们前面的面积-马赫数关系计算得到的压比一样, 否则就达不到我们所希望的速度.

## ✍ 笔记

每个喷管都有一个设计压比, 如果是按照设计的压比工作, 就是正常工作, 也就是说符合面积-马赫数关系, 否则喷管内部将产生激波, 使得出口处的速度比理想的速度要小.

接下来我们讨论实际压比不等于理论压比的情况. 如果  $P_e = P_0$ , 那么喷管中的空气将不会发生流动; 如果  $P_e$  只比  $P_0$  小一点点, 比如  $P_e = 0.999P_0$ , 那么喷管中将会产生一个流速很小的亚声速流动, 喷管中将会吹出一股小风. 马赫数将会在收敛喷管中变大一些, 在喉道处达到最大值, 但是并没有达到声速, 然后在扩张喷管处马赫数减小. 相应地, 压强在收敛管道中逐渐减小, 在喉道处达到最小值, 然后在逐渐地增大, 直到在出口处达到  $P_{e,1}$ .

假设出口处的压强进一步减小, 气流在喷管中的流动就会更快, 但是喉道处的马赫数依然小于 1. 记这个时候出口处的压强是  $P_{e,2}$ . 如果继续减小出口处的压强, 这个时候, 喉道处的马赫数就等于 1 了, 但是喉道下游的马赫数依然小于 1. 记这个时候出口处的压强是  $P_{e,3}$ .

通过上面的讨论我们知道, 只有一种等熵流动的解满足超声速的情况. 与之相反的是, 对于满足亚声速流动的解却有很多. 只要任何满足  $P_0 \geq P_e \geq P_{e,3}$  的出口压强  $P_e$ , 喷管中都是亚声速流动. 因此分析收敛-扩张喷管中的两个关键因素是  $\frac{A}{A^*}$  和  $\frac{P_e}{P_0}$ .

考虑喷管中质量流量的变化. 随着出口压强减小, 气流的流速逐渐变大, 质量流量也逐渐变大. 但是随着  $P_e$  减小, 速度  $u_t$  在变大, 密度  $\rho_t$  在减小. 然而, 速度增大的比例比密度减小的比例更大, 所以总体上来说, 质量流量还是变大的. 现在如果出口压强进一步减小, 减小到比  $P_{e,3}$  还要小, 喉道处的流动情况就发生了变化, 质量流量不在发生变化. 这是因为喉道处的马赫数不能大于 1, 因此, 如果出口处的压强进一步减小, 喉道处的压强始终保持为 1. 结果是喉道处的质量流量也保持为常数. 形象地说, 喉道的上游就像是被冻住了一样. 一旦在喉道处达到了声速, 喉道处的扰动就不能传递到上游. 因此喷管的收敛段就不再和出口处的压强“交流”, 也不知道出口处的压强还在减小. 当喉道处气流达到声速, 无论出口处的压强减小到多小, 喷管中的质量流量都不再变化的情况叫做**壅塞流 (choked flow)**.

当出口处的压强降低到比  $P_{e,3}$  还小, 会发生什么呢? 收敛段的情况如前所述, 但是扩张段会发生很多变化. 首先, 下游将会出现超声速区域. 然而, 由于出口处的压强还是太大而不允许整个扩张喷管都是等熵流动. 因此当  $P_{e,3} \geq P_e \geq P_{e,6}$  时 ( $P_{e,6}$  是指喷管设计的出口压强, 也就是在给定的  $P_0$  下, 喷管中都是等熵流动时, 出口处的压强), 将会在喉道的下游形成一道正激波, 此时出口处的压强就变成了  $P_{e,4}$  ( $P_{e,3} \geq P_{e,4} \geq P_{e,6}$ ). 我们可以观察到正激波出现在距离喉道  $d$  的下游处. 在正激波和喉道中间的区域, 气流已经被加速到了超声速, 这部分流动符合等熵流动的解. 在正激波后, 就变成亚声速了, 这股亚声速流将会随着它向出口流动等熵地减速. 相应地, 压强随着正激波出现而不连续地增加, 并且将随着气流减速进一步增加. 因此在激波的左右两侧都是等熵流动, 但是跨越激波后, 出现了熵增. 随着  $P_e$  继续减小, 正激波逐渐向出口处移动, 直到减小到  $P_{e,5}$  时, 正激波恰好移动到了出口处. 这种情况下, 流过整个喷管的气流都是等熵的, 出来喷管的出口处.

前面我们讨论了出口处的压强, 但是还没讨论喷管出口下游的流动情况. 想象一下, 喷管直接向环境排气. 在很多情况下, 下游出口处环境的压强叫做**背压 (back pressure)**, 记作  $P_B$ . 当喷管出口处是亚声速的时候, 出口压强必须等于背压,  $P_e = P_B$ , 这是因为稳定的亚声速流动不能出现压强的不连续. 也就是说, 出口是亚音速的时候, 环境的背压直接作用在出口的气流上. 只要  $P_e \geq P_{e,3}$  就有  $P_B = P_e$ . 同样的,  $P_B = P_{e,4}$  和  $P_B = P_{e,5}$ .

如果我们将背压减小到比  $P_{e,5}$  还要小会怎么样? 当  $P_{e,6} < P_B < P_{e,5}$ , 背压依然高于喷管设计时的出口压强. 所以从出口处喷出的气流为了流向环境中, 气流必须以某种方式被压缩, 使得压强与背压相匹配. 这些压缩过程时通过出口处的斜激波系来完成的. 当背压降低到  $P_B = P_{e,6}$  时, 出口压强和背压不存在不匹配的情况. 从喷管喷出的气流平滑地稳定地向周围排除, 没有经过任何的激波. 最后, 当背压进一步减小, 即  $P_B < P_{e,6}$  的时候, 气流必须进一步膨胀, 以减小压强和背压相匹配. 这些膨胀过程发生在出口处的一些膨胀波系中. 当出现这种情况时, 我们说喷管是**过膨胀 (over-expanded)** 的. 这就是说气流在喷管中膨胀得太多, 必须通过一些斜激波取达到比  $P_e$  更大的背压. 相反地, 如果从喷管中喷出后, 必须经过一系列的膨胀波来加速, 使之与背压相匹配, 即  $P_{e,6} > P_B$ , 这种情况叫做**欠膨胀 (under-expanded)** 的. 这就是说, 气流在喷管中膨胀得不够, 导致出口压强比环境背压还要大, 必须通过一系列膨胀波来降压.

记住只要  $P_B \leq P_{e,5}$  时, 管内都是纯粹得等熵流动, 没有激波出现, 而且都是完全膨胀的. 前面的讨论给了我们研究喷管中流动的性质, 但是并没有给出如何设计喷管轮廓的方法. 这需要用到三维流动的设计方法.

## 笔记

相信你看到这里已经有一些迷糊了, 出口压强、入口压强、背压、喉道处的压强以及一些列的出口压强也许已经分不清了吧! 如果你还能分清, 那说明你已经把喷管中流动的本质搞清楚了. 如果你还没有理解, 请你继续阅读下面的内容, 也许对你理解有所帮助.

首先, 你需要弄清楚上面这些压强的概念, 即入口压强, 出口压强, 背压分别是什么.

因为喷管中气流流动必须需要出口和入口存在一定的压强差, 所以要求  $P_0 > P_e$ . 这是前提条件, 如果不满足这个条件, 气流在喷管中不再流动, 后面的讨论就没有意义. 如果说入口处的压强只比出口处的压强稍大一些, 首先气流肯定会在压强的作用下向出口流去, 但是由于压强差太小了, 所以气流的加速效应不太明显, 在喉道处并没有加速到声速. 这里不要认为只要是亚声速气流流过收敛-扩张喷管就会被加速到超声速, 这种理解是错误的. 这是因为出口压强有可能会阻止气流向外流动, 也就是说气流在喉道处加速到声速, 喉道处的压强小于出口压强, 这样气流就在一个逆压梯度区流动, 如此气流必定减速, 动能转化为压力能, 或者说是焓. 另外, 气流的能量不一定能够支持气流加速到超声速, 加速过程本质上是气流的焓转化为气流流动的动能, 如果焓太小, 这个转化过程可能就不能持续下去. 我们继续刚刚的讨论. 气流流到喉道处没有加速到声速, 然后就要流经扩张喷管, 所以气流是减速的, 也就是说气流在流经收敛喷管加速后又经扩张喷管减



速. 这时, 我们把出口处的压强记为  $P_{e,1}$ . 这里我们把气流在喷管中全部等熵膨胀后, 出口处的压强记为  $P_{e,6}$ . 这就是说,  $P_{e,1} > P_{e,6}$ , 这是因为气流在膨胀后压强必然减小, 而全部等熵膨胀压强就会减到最小, 而这里并没有完全等熵膨胀.

接下来, 让我们在减小出口处的压强, 这样在喉道处的马赫数依然小于 1, 注意这种情况和前面那种情况的差别, 第一种情况下, 我们说出口处的压强只比入口处的压强小一些, 也就是说出口压强和入口压强十分接近, 只是满足了气流会从入口流向出口. 而这里还要满足喉道处的马赫数小于 1. 我们记这种情况下, 出口的压强是  $P_{e,2}$ . 也许你还不能理解, 你可以理解成  $P_{e,1} = 0.9999P_0$ , 而比这个大, 同时满足喉道处马赫数压强小于 1 这两个条件的出口压强就是  $P_{e,2}$ , 也就是说  $P_{e,2} > P_{e,1}$ . 注意, 这两个压强并没有明显的区分, 只不过第二种情况下, 整体的流动速度比第一种大.

如果再减小压强, 使得喉道处的马赫数刚好达到了 1, 也就是说喉道处是声速流动. 这个时候, 记出口处的压强为  $P_{e,3}$ . 显然,  $P_{e,3} > P_{e,2}$ . 这种情况下, 出口处还不能达到超声速, 也许你会有疑惑, 明明喉道处都达到声速了, 在扩张管道中应该是膨胀加速的才对. 但是喉道处的压强比出口处的压强低, 压强使得气流不能往外流动, 因此气流必须减速以匹配出口压强, 从而向外流动. 注意, 喷管中等熵膨胀的超声速流动解只有一个, 而等熵膨胀的亚声速流动解有很多个, 只要满足  $P_0 > P_e > P_{e,3}$ .

如果继续减小压强, 小于  $P_{e,3}$ . 这时, 喷管中的气流流量不会像前面几种情况一样, 减小出口压强, 气流流量会增加, 而是保持不变了. 这时, 继续减小压强, 就会出现堵塞, 或者说是喷管中的气流像被冻住了一样, 记这个时候出口处的压强是  $P_{e,4}$ . 这时, 收敛喷管中的流动情况和上面描述的情况一样. 在扩张喷管中, 气流将会被加速到超声速. 但是, 由于  $P_{e,4} > P_{e,6}$ , 所以气流不可能在喷管中完全膨胀, 所以在扩张段中必定要减速, 所以会出现一道正激波, 使得气流减速到亚声速, 从而气流在扩张管道中继续减速, 直到达到出口处的压强  $P_{e,4}$ .

如果继续减小压强, 扩张管道中的正激波将会向出口处移动, 直到刚好移动到出口, 记这个时候出口处的压强是  $P_{e,5}$ . 显然,  $P_{e,5} > P_{e,6}$ , 这是因为这种情况依然需要一道正激波来使气流增压达到出口处的压强.

如果再减小压强, 气流将在喷管中完全膨胀, 出口处的压强就是  $P_{e,6}$ , 此时再研究出口处的压强没有意义了, 因为出口处的压强将保持不变, 管内也不会出现正激波, 如果出口处的压强比  $P_{e,6}$  还低, 气流也无法膨胀到很高的速度, 使得压强降低得比  $P_{e,6}$  还低. 这个时候引入背压  $P_B$ . 如果背压比  $P_{e,6}$  还要低, 那么气流流出喷管后还有经历一次膨胀,

在喷管出口处产生一系列得膨胀波, 这个时候  $P_B < P_{e,6}$ . 如果背压大于  $P_{e,6}$ , 那么气流就要增压, 必然减速, 因为没有外界的能量注入. 而减速就需要激波, 这里在喷管外部产生的是一系列斜激波来使得气流减速增压. 如果出口处是亚声速流, 那么  $P_e = P_B$ , 这是因为, 亚声速不能产生激波使得压强发生突变, 也就是说亚声速流中压强是连续变化的. 所以  $P_B = P_{e,1}, P_B = P_{e,2}, P_B = P_{e,3}, P_B = P_{e,4}, P_B = P_{e,5}$  都成立. 所以前面所说的斜激波系将会在  $P_{e,5} < P_e < P_B$  的条件下产生.

至此就把喷管的流动情况都介绍完了, 希望你能全部理解.

## 第二部分

# 空气动力学

## 第七章 低速翼型的气动特性

### 7.1 翼形的几何尺寸

机翼是飞行器产生升力的主要部件,一般都有对称面. 平行于机翼对称面所截得的机翼剖面称为翼剖面 (profile) 或者翼型 (airfoil). 翼型可以分为两类,一类是圆头尖尾的翼型,一类是尖头尖尾的翼型.

翼型的尖尾点,称为翼型的**后缘点 (trailing edge)**. 在翼型的众轮廓点中,有一点与后缘点的距离最长,称为翼型的**前缘点 (leading edge)**. 连接前缘和后缘的直线段,称为翼型的**弦线 (chord line)**,它的长度就是**弦长 (chord)**. 具体尺寸如下图7.1. 如图7.1所示,以前缘点为坐标原

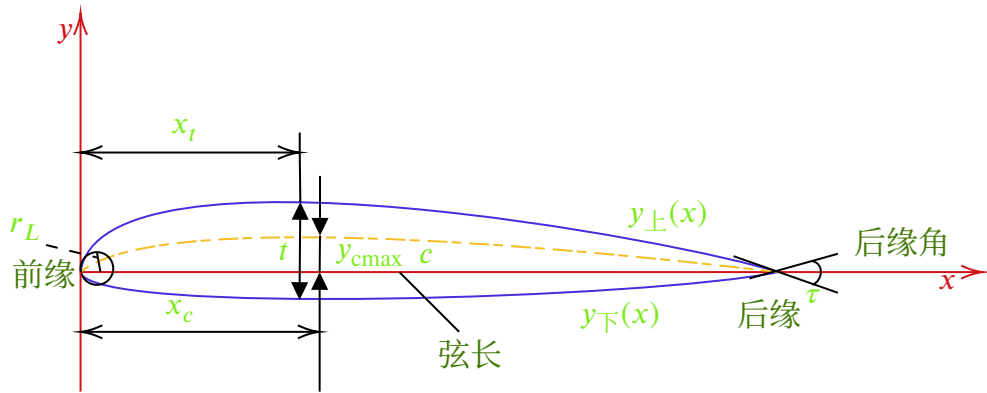


图 7.1: 翼型的几何参数定义

点,沿弦线建立  $x$  轴,垂直弦线向上建立  $y$  轴,这样的坐标系称为**体坐标系**. 在体坐标系中,弦向的无量纲坐标是  $\bar{x} = \frac{x}{c}$ . 翼型的上表面和下表面的无量纲坐标分别是

$$\begin{cases} \bar{y}_{\text{上}}(\bar{x}) = \frac{y_{\text{上}}(\bar{x})}{c} \\ \bar{y}_{\text{下}}(\bar{x}) = \frac{y_{\text{下}}(\bar{x})}{c} \end{cases}$$

翼型上下表面平行于  $y$  轴的连线的中点连成的曲线,称为翼型的**中弧线 (mean camber line)**. 中弧线可以用来描述翼型的弯曲程度. 中弧线的无量纲坐标  $\bar{y}_c(\bar{x})$  称为弯度分布函数,其



最大值称为**相对弯度** $\bar{f} = \bar{y}_{cmax}$ , 其所在的弦向位置记为  $\bar{x}_c$ .

 **注意** 如果中弧线是一条直线, 这个翼型必为对称翼型.

## 笔记

关于中弧线的解释原文如下:

The mean camber line is the locus of points halfway between the upper and lower surfaces as measured perpendicular to the mean camber line itself.

中弧线的起点和终点分别是前缘点和后缘点. **厚度 (thickness)** 是翼型上下表面的距离, 这个距离垂直于弦长. 翼型在前缘点附近的形状通常是一段圆弧, 这个圆弧的半径近似是  $0.02c$ . 翼型的气动力和气动力矩在1.3节已经讨论, 请往回看.

这里讨论对于机翼的属性都是对于无限长的翼型来说的, 即在翼展方向翼型的截面形状不变.

### 7.1.1 NACA 翼型的命名规则

四位数字的命名含义见下图7.2. 五位数字的命名含义见下图7.3

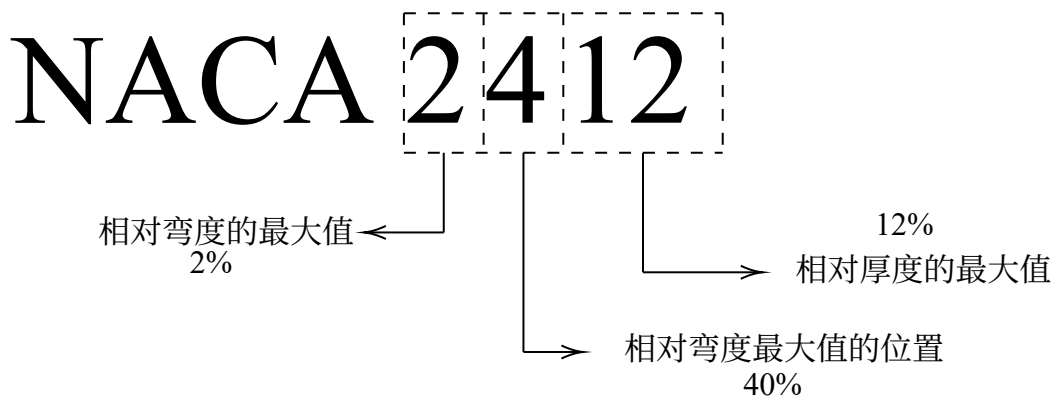


图 7.2: 四位数命名含义

典型的升力系数和攻角之间的变化关系如图7.4所示. 在小攻角和中等攻角的情况下, 升力系数随攻角线性变化, 这条直线的斜率记作  $a_0$ , 称为**升力曲线斜率 (lift slope)**. 在这个区域, 空气从平滑的沿着机翼表面的大部分地方流过. 如下图7.5中左图所示. 然而, 当攻角逐渐变大到一定值时, 气流有从翼型上表面分离的趋势, 在翼型后面产生一片“死区空气” (dead air), 如

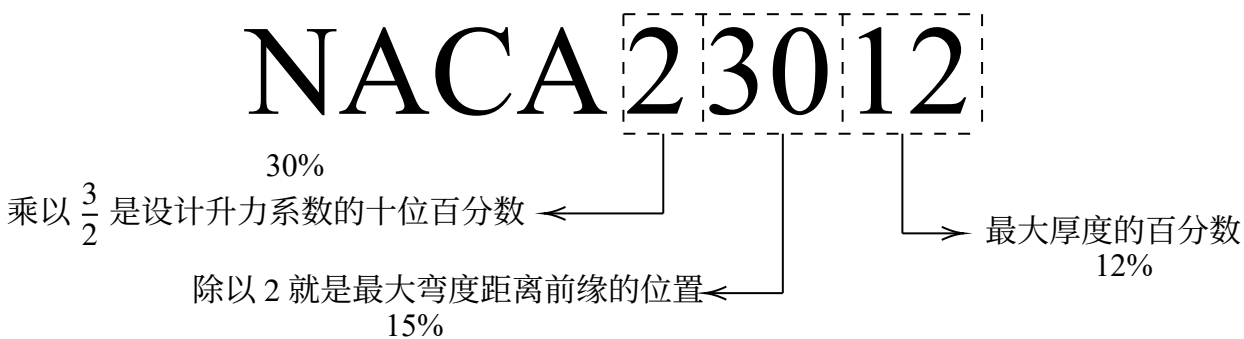


图 7.3: 五位数命名含义

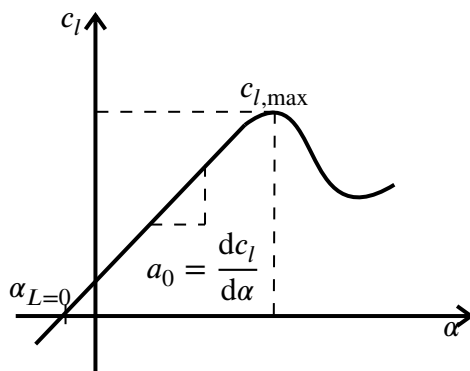


图 7.4: 攻角升力系数曲线

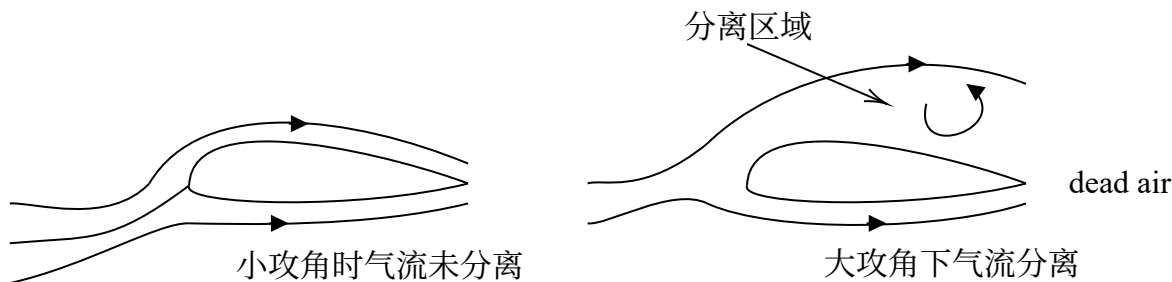


图 7.5: 攻角大小不同时气流流过机翼的流场

图7.5右图所示. 在气流分离的区域, 流动时再循环的. 并且有部分流动是与自由来流的方向相反的, 这就是**逆流 (reversed flow)**. 流动分离主要是因为流体的粘性效应. 在大攻角下流动分离引起的后果就是**升力急剧减小, 阻力急剧增加**, 这种情况就叫做**失速 (stalled)**.

## 笔记

关于流体分离的原文:

This separated flow is due to viscous effects.

在失速之前,  $c_l$  的最大值记作  $c_{l,\max}$ . 这是衡量一款翼型的重要指标, 因为它决定了飞机发生失速时的速度.

为了安全起见, 把  $c_{l,\max}$  对应的飞行迎角定义为失速迎角, 而不是飞机失速时实际稍高的极限迎角.

### 笔记

$c_{l,\max}$  越大, 失速速度就越小.

回到图7.4中,  $c_l$  随着攻角的增大线性增加, 直到流动分离开始产生影响. 然后, 曲线开始变成非线性的,  $c_l$  达到最大值, 最终机翼发生失速. 在曲线的另一端, 在  $\alpha = 0$  时, 升力是有限的. 事实上, 只有当飞机低头使得攻角是负的时候, 升力才会减小到 0. 当升力等于 0 时的攻角大小叫作零升攻角 (zero-lift angle of attack), 记作  $\alpha_{L=0}$ .

### 笔记

对于对称翼型,  $\alpha_{L=0} = 0$ . 但是对于大部分有着正弯度的翼型来说,  $\alpha_{L=0}$  是一个负值, 一般是  $-2$  或  $-3^\circ$  的数量级.

实验表明, 升力曲线的斜率不受雷诺数影响, 但是  $c_{l,\max}$  取决于雷诺数.

### 笔记

因为  $c_{l,\max}$  被粘性控制, 并且雷诺数是一个相似参数, 它决定了流动中惯性力和粘性力的比值.

翼型的气动力矩是攻角的函数, 但是在翼型上存在一个点, 使得气动力矩的大小和攻角无关, 这个点叫做空气动力中心 (aerodynamic center). 这个点一般位于距机翼前缘  $\frac{c}{4}$  的位置.

#### 例题 7.1

题目 给定翼型为 NACA 2412, 弦长是 0.64m, 在标准海平面上飞行, 自由来流的速度是 70m/s, 单位翼展上的升力是 1254N/m. 计算飞行迎角和单位翼展上的阻力大小. 在标准海平面上,  $\rho = 1.23\text{Kg/m}^3$ :

$$q_\infty = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 = \frac{1}{2} \times 1.23 \times 70^2 = 3013.5\text{N/m}^2$$

$$c_l = \frac{L}{q_\infty S} = \frac{L}{q_\infty c} = \frac{1254}{3013.3 \times 0.64} = 0.65$$

对于  $c_l = 0.65$ , 查升力曲线图, 得到  $\alpha = 4^\circ$ .

标准海平面上,  $\mu = 1.789 \times 10^{-5} \text{ Kg/m} \cdot \text{s}$ :

$$\text{Re} = \frac{\rho_\infty V_\infty c}{\mu_\infty} = \frac{14.23 \times 70 \times 0.64}{1.789 \times 10^{-5}} = 3.08 \times 10^6$$

查阻力曲线图, 得到  $c_d = 0.0068$ , 因此

$$D = q_\infty S c_d = q_\infty c c_d = 3013.5 \times 0.64 \times 0.0068 = 13.1 \text{ N/m}$$

### 例题 7.2

题目 对于 NACA 2412 翼型, 计算并比较攻角分别在  $0^\circ, 4^\circ, 8^\circ, 12^\circ$  时的升阻比, 雷诺数是  $3.1 \times 10^6$ .

查升力曲线图和阻力曲线图得到下表

| $\alpha$ | $c_l$ | $c_d$  | $c_l/c_d$ |
|----------|-------|--------|-----------|
| 0        | 0.25  | 0.0065 | 38.5      |
| 4        | 0.65  | 0.0070 | 93        |
| 8        | 1.08  | 0.0112 | 96        |
| 12       | 1.44  | 0.017  | 85        |

从上面例题可以看出, 随着攻角增大, 升阻比先增大, 达到一个最大值, 然后减小. 升阻比的最大值是翼型性能的一个重要参数. 它能直接表明翼型的效率. **升阻比越大, 翼型的效率就越高.** 由于飞机其他部分的阻力, 实际飞机的升阻比一般在 10 到 20 这样的量级.

### 例题 7.3

题目 一架低速飞行的平直机翼采用 NACA 2415 翼型, 问此翼型的  $\bar{f}$ ,  $\bar{x}_f$  和  $\bar{c}$  各等于多少?

## 7.2 用于低速流动下的翼型的理论解法:面涡

想象一根直线垂直于纸面, 通过一个点  $O$ , 并且向纸面的里面和外面无限延伸. 这条直线就是强度为  $\Gamma$  的**涡旋线 (vortex filament)**. 通过这根涡旋线在任意垂直于这个涡旋线的平面上诱导出的流场和强度为  $\Gamma$  的点涡诱导出的流场是一样的. 事实上, 可以将涡旋线看成是无数点

涡组成的。

对于一个涡流场, 考虑和面源相似的情况. 想象无数根涡旋线紧挨着, 这些涡旋线的强度又是无穷小. 这些涡旋线就形成了一个**面涡 (vortex sheet)**. 顺着这些涡旋线看去, 面涡就会变成如图7.6 所示的场景. 所有的涡旋线都垂直于纸面. 设  $s$  是沿着面涡边缘视角下的距离坐标.

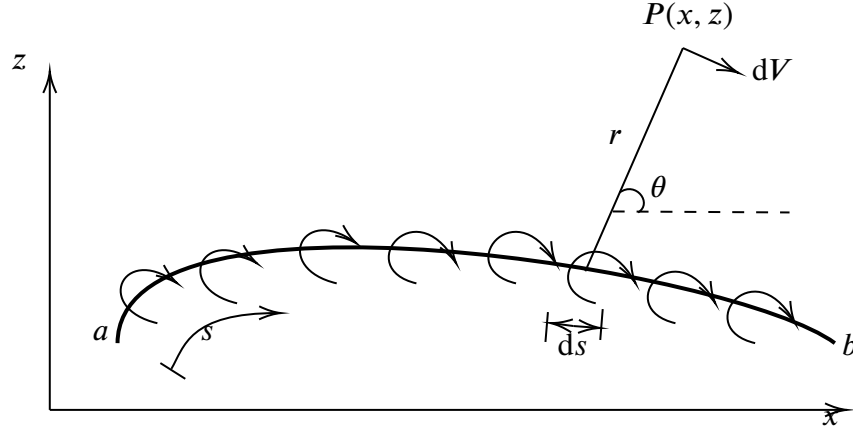


图 7.6: 面涡的边缘视角

定义  $\gamma = \gamma(s)$  是坐标为  $s$  的单位长度上面涡的强度. 因此, 对于无限小长度  $ds$  上的面涡强度就是  $\gamma ds$ . 面涡的这一小部分可以看成是强度为  $\gamma ds$  的点涡. 现在考虑位于流场中的一个点  $P$ , 和  $ds$  的距离是  $r$ ; 坐标是  $(x, z)$ . 强度为  $\gamma ds$  的面涡在  $P$  点诱导出无穷小的速度  $dV$ , 即

$$dV = -\frac{\gamma ds}{2\pi r}$$

并且方向垂直于  $r$ .  $P$  点的诱导速度就是整个面涡从  $a$  点到  $b$  点上式的总和. 不同面涡部分在  $P$  点产生的速度的叠加必须是矢量叠加的. 由于这个, 使得处理速度势就更方便了. 通过单元涡  $\gamma ds$  在  $P$  点诱导出速度势  $d\Phi$  的增量就是

$$d\Phi = -\frac{\gamma ds}{2\pi} \theta$$

相应的, 从  $a$  到  $b$  整个面涡在  $P$  点的速度势就是

$$\Phi(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_a^b \theta \gamma ds$$

上面这个方程对于薄翼理论的讨论是特别有用的, 同时对于涡面元的数值解法也是特别重要的.

一个点涡的环量  $\Gamma$  等于这个涡的强度. 在图7.6 中面涡的环量就是这些涡单元的强度的总和; 即

$$\Gamma = \int_a^b \gamma ds$$

面源的法向速度分量是不连续的,而速度的切向分量在面源的上方和下方是一样的.与面源恰恰相反,面涡的切向速度分量是不连续的,而法向速度分量是连续的.速度的切向分量的变化大小和面涡的强度是有关系的.考虑一个面涡如下图7.7所示,使用一个虚线的矩形框包围

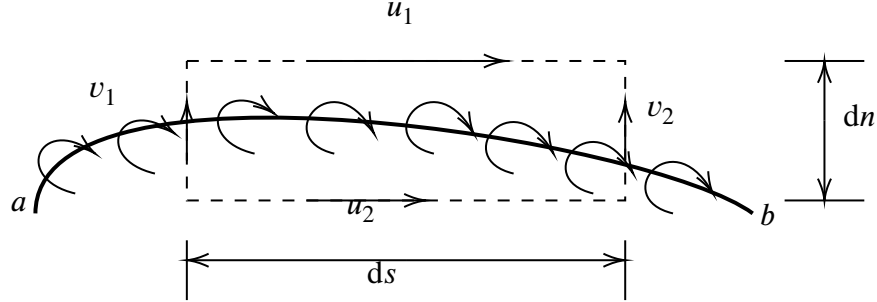


图 7.7: 面涡切向分量的跳跃

一部分面涡,长度是  $ds$ . 速度在上下的切向分量分别是  $u_1$  和  $u_2$ , 左右两边的切向分量分别是  $v_1$  和  $v_2$ , 上下两边的距离是  $dn$ . 从环量的定义,可以得到这个虚线框的环量是

$$\Gamma = -(v_2 dn - u_1 ds - v_1 dn + u_2 ds)$$

或

$$\Gamma = (u_1 - u_2)ds + (v_1 - v_2)dn$$

然而,因为包围在虚线路径中的面涡的强度是  $\gamma ds$ , 于是

$$\Gamma = \gamma ds$$

因此

$$\gamma ds = (u_1 - u_2)ds + (v_1 - v_2)dn$$

现在让上下表面靠近面涡,即  $dn \rightarrow 0$ . 在极限情况下,  $u_1$  和  $u_2$  就迅速称为面涡上下表面的切向速度,上式就可以写成

$$\gamma ds = (u_1 - u_2)ds$$

或者

$$\gamma = u_1 - u_2$$

这个等式非常重要. 它表明了**当地面涡切向速度跳跃的差值就等于当地面涡的强度**.

面涡的概念是在低速翼型性质分析中的一个工具. 考虑在自由来流的速度为  $V_\infty$  中的有着任意形状和厚度的翼型,如图7.8 面涡的强度分布函数就是  $\gamma(s)$ . 计算  $\gamma$  关于  $s$  的函数,当诱导



图 7.8: 任意翼型面涡在表面的分布

出的速度场加上统一的速度大小为  $V_\infty$  后, 就会使得面涡 (翼型表面) 称为流场中的一条流线. 相应的, 绕机翼的环量就通过

$$\Gamma = \int \gamma ds$$

给出, 这个积分是沿着整个机翼表面给出的. 最后, 升力通过库塔-茹科夫斯基定理给出

$$L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma$$

然而, 并没有通用的分析解法给出  $\gamma = \gamma(s)$  对于任意厚度和形状的机翼. 相反, 面涡的强度必须通过数值的方法求解出. 上述解法是**涡流面元解法 (vortex panel method)**的基础. 在真实生活中, 由于气流和翼面的摩擦作用, 在翼面上总有一个很薄的边界层. 边界层是一个有着高度粘性的区域, 并且有着很大的速度梯度产生大量的涡, 也就是  $\nabla \times \mathbf{V}$  在边界层中是有限的. 因此, 在真实世界中, 总是有涡因为粘性效应沿着翼型表面分布. 我们的使用面涡替代翼型表面的理念可以被解释为在无粘流中模拟这种效应的一种方式.

想象一下, 在图7.8中的翼型如果变得非常薄. 如果你退后几步, 看着这个如此薄的翼型, 在翼型上下表面的面涡几乎就要重叠在一起了. 这就产生了一个薄翼型的方法, 即用单一的沿着中弧线分布的面涡取代掉这个翼型. 这个面涡的强度可以被这样计算出来, 和自由来流结合在一起, 那么中弧线就变成了流场中的一条流线. 尽管这个方法和前述方法是比较相似的, 但是它得到封闭形式的解析解的优点.

### 7.3 库塔条件

对于一个给定翼型在给定攻角下, 有无数种有效的理论解, 对应着无数种  $\Gamma$  的选择. 如图7.9展示了不同  $\Gamma$  的流动流过相同翼型在相同攻角的情况. 乍一看, 似乎令人进退两难. 从实验中, 我们知道, 给定翼型在给定攻角的情况下, 只会产生一个单值升力. 所以, 尽管有无数种势流解, 大自然知道如何去选取一种合适的解. 显然, 在前述的解法讨论中, 并不完全—我们需要一种条件去确定给定翼型在给定攻角下的  $\Gamma$ .

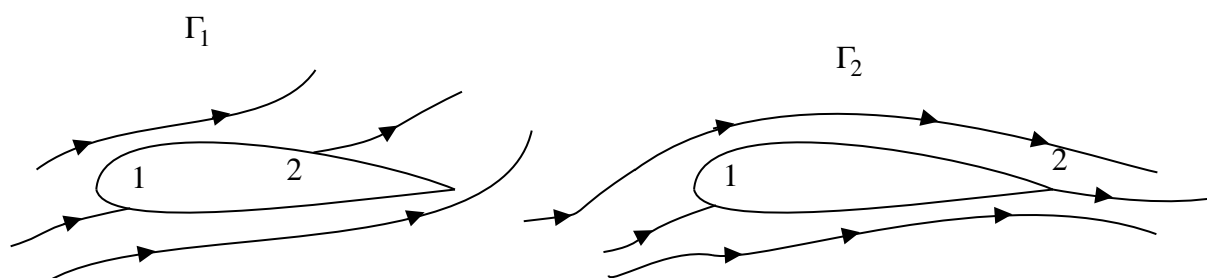


图 7.9: 在势流中不同环量值流过翼型在给定攻角. 1 和 2 都是驻点

为了找到这个条件, 让我们先查看一些从静止的初始条件到运动的绕翼型流动的发展实验情况. 流动一开始, 流动模式是从绕着翼型开始发展的. 在早期发展的时间, 流动是绕着尖后缘点从下翼面流到上翼面的, 和图7.9中左图相似. 然而, 更准确的考虑无粘不可压流动表明, 在尖后缘点的速度是无穷大的. 因此, 这种流动是不能被大自然长时间容忍的. 然而, 真实的流过翼型的流动, 在上翼面的驻点会向后缘点移动. 最后, 在初始瞬态过程结束后, 稳定的流动状态就达到了, 即气流是平滑的从后缘点离开上翼面和下翼面. 这种流动模式就是图7.9中的右图, 并且表示了在翼型上稳定的流动类型.

再次强调, 给定翼型在给定攻角下建立稳定流动时, 大自然会自动产生一个满足要求的特定环量, 这个环量使得气流平滑的离开后缘点. 这就是**库塔条件 (Kutta condition)**.

为了使库塔条件理论化, 我们需要更多的在后缘点的自然流动的细节. 后缘点处可以有一个有限的角度, 或者可以是圆弧过渡的. 首先, 考虑后缘点处是一个有限角度的情形. 记上翼面和下翼面的速度分别是  $V_1$  和  $V_2$ , 如图7.10,  $V_1$  是在点  $a$  平行于上翼面的速度,  $V_2$  是在点  $a$  平

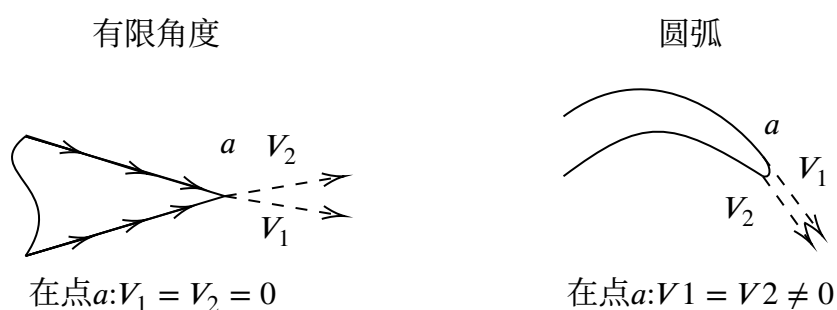


图 7.10: 不同后缘点的形状和库塔条件的关系

行于下翼面的速度. 对于一个有限角度的后缘点, 如果在点  $a$  的两个速度都是有限的, 那么我们在同一个点就有两个不同方向的两个速度, 如图7.10左图所示. 但是, 这是在物理上是不可能的, 唯一的办法就是让  $V_1$  和  $V_2$  都等于 0. 也就是说, 对于有限角度的后缘点,  $a$  点就是驻点. 相反的是, 对于圆弧过渡的后缘点,  $V_1$  和  $V_2$  在  $a$  点方向相同, 并且  $V_1$  和  $V_2$  都是有限值. 但是,  $a$



点的压强是一个唯一的值, 将伯努利方程应用于上下翼面接近于  $a$  点处, 得到

$$P_a + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_a + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

或者

$$V_1 = V_2$$

因此, 对于圆弧过渡的后缘点, 我们可以发现, 从翼型后缘点离开上下翼面的速度是有限的, 并且大小和方向都是相等的.

我们可以将库塔条件总结表述如下:

1. 对于给定翼型在给定攻角的情况下,  $\Gamma$  的值要使得气流平滑地离开后缘点.
2. 如果后缘角是有限的, 那么后缘点就是一个驻点.
3. 如果后缘角是圆弧过渡的, 那么气流在后缘点离开上下翼面的速度大小是有限的, 并且大小和方向都是一样的.

再次考虑使用面涡模拟翼型的方法, 面涡不论是放在翼面还是中弧线上. 沿着面涡的分布, 面涡的强度都是变化的, 并且记作  $\gamma(s)$ . 库塔条件使用面涡来表述如下. 在后缘点 (TE), 我们有

$$\gamma(\text{TE}) = V_1 - V_2$$

然而, 对于有限角度的后缘点,  $V_1 = V_2 = 0$ ; 因此,  $\gamma(\text{TE}) = 0$ . 对于圆弧过渡的后缘点,  $V_1 = V_2 \neq 0$ ; 因此,  $\gamma(\text{TE}) = 0$ . 因此, 库塔条件使用面涡表述就是

$$\gamma(\text{TE}) = 0$$

### 7.3.1 没有摩擦能产生升力吗?

在前面的讨论中, 我们强调, 浸没在空气中的翼型受到的气动力是分布在翼型表面上的压强和剪切力的净综合效应. 更重要的是, 我们注意到, 翼型的升力主要是由于翼面上的压强分布, 并且剪应力对于升力基本上没有影响. 这很容易知道是为什么. 请看图7.9 中翼型的形状. 回想到压强作用在翼面的法线上, 对于这些翼型, 法向的压力基本上是竖直的, 也就是升力的方向. 与之相反的是, 剪应力作用在翼面的切线方向, 对于这些翼型, 剪应力主要是在水平方向, 也就是阻力的方向. 因此压力是产生升力的主导者, 剪应力对升力的影响可以忽略不计. 这就是为什么升力可以在失速前精准的被无粘理论预测出来, 正如本章所讨论的那样.

然而, 如果我们生活在一个完美地无粘世界中, 翼型就不能产生升力. 事实上, 摩擦的存在就是有升力的原因. 这听起来很奇怪, 甚至与我们前一段的陈述相互矛盾. 为什么会这样? 答

案就是,在真实生活中,自然确保气流在后缘点平滑的离开的方法就是自然选择气流的机制,即粘性边界层一直附着在翼型表面,直到后缘点. 自然通过摩擦来确保达到库塔条件. 如果没有粘性边界层(如没有摩擦),在自然界中就没有物理机制可以满足库塔条件.

所以我们被代入了最为讽刺的境地,升力是有翼型表面的压强分布产生的——一种无粘现象,不存在没有摩擦(无粘)的世界中. 在这方面,我们可以说没有摩擦就没有升力. 然而,我们以上述讨论的内容明智地这么说.

## 7.4 开尔文环量定理和启动涡

库塔条件描述了翼型绕流的环流是一个正值(顺时针为正)确保气流能平滑的流过后缘点. 问题是:这个环量是怎么产生的? 它是凭空产生的,还是整个流场的环量都是守恒的呢?

如图7.11, 考虑任意一个无粘、不可压流动. 假设所有的彻体力都是 0. 选择任意一个

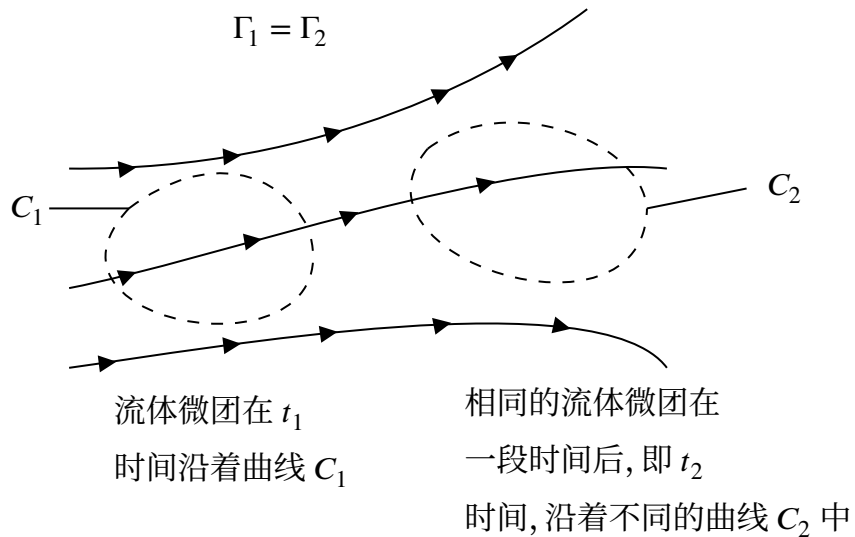


图 7.11: 开尔文定律

闭合曲线  $C_1$ , 这条曲线确定了一定数量的在  $t_1$  时刻的流体单元. 记沿着曲线  $C_1$  的环量是  $\Gamma_1 = - \int_{C_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ . 现在, 让这些流体单元向下游流动, 一段时间后, 到达  $t_2$  时刻. 这些相同的流体单元将来自不同的曲线  $C_2$ , 该曲线确定的环量是  $\Gamma_2 = - \int_{C_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ . 对于上述描述的状态, 我们可以很容易地证明  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ . 事实上, 我们追踪了一组特定的流体单元, 我们可以描述为, 由一组连续的流体单元确定的闭合曲线, 随着这些流体单元在全流场中移动, 这条闭合曲线确定的环量是一个常数. 关于上述描述的数学化表述可以简化为

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

这就是说, 有相同的流体单元组成的闭合曲线的环量对时间的变化率是 0. 这就是**开尔文环量定理 (Kelvin's circulation theorem)**. 证明过程详见附录B. 开尔文环量定理的一个有趣的结论就是, 如果在某个瞬间, 一个流动表面是面涡, 那么它将一直保持是面涡.

开尔文环量定理可以帮助解释绕翼型的环量是怎么产生的, 如下. 考虑一个翼型在静止的流体中, 如图7.12 中左图. 因为全流场  $\mathbf{V} = 0$ , 所以闭合曲线  $C_1$  确定的环量也是 0. 现在开始

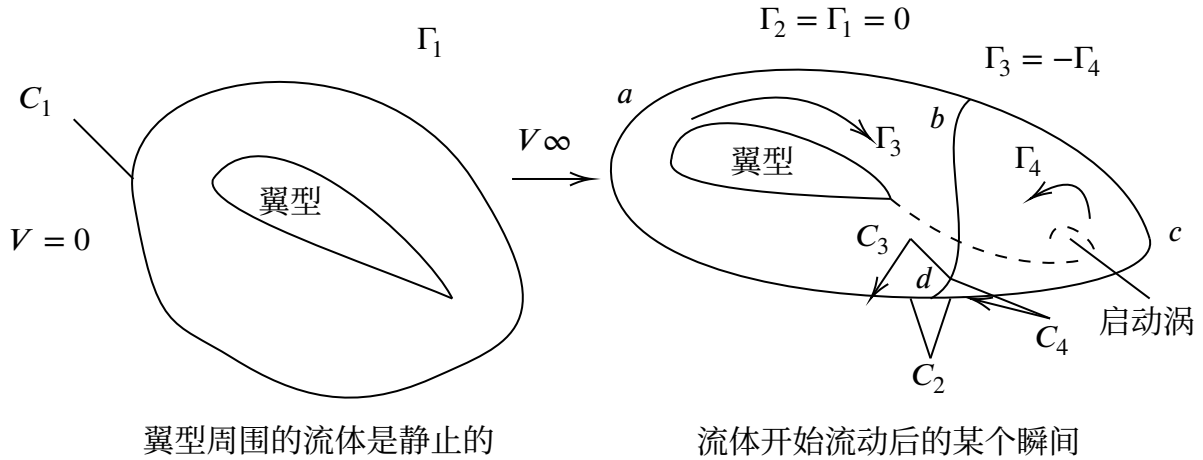


图 7.12: 启动涡和绕翼型环量产生的原因

让流体开始运动绕过翼型, 气流将倾向于在后缘周围卷起, 如图7.12中右图. 这样的话, 后缘点的理论速度将达到无穷大. 在真实生活中, 这个速度将会是一个非常大的有限的值. 因此, 在流动开始的最初时刻, 在后缘点的一个很薄的区域一个非常大的速度梯度(也就是很大的涡强)就形成了. 这个巨大的涡强被相同的流体单元确定, 因此当流体单元向下游流动时, 它被冲到下游. 当它向下游运动时, 这种薄的很大涡强的单元是不稳定的, 并且它将倾向于向前卷起, 形成类似于点涡的图像. 这个涡就叫做**启动涡 (starting vortex)**, 如图 7.12右图所示. 当翼型周围的气流达到稳定的状态后, 气流将平滑地流过后缘点(库塔条件), 在后缘点附近的很大的速度梯度也就消失了, 在后缘点上也就不在产生涡强了. 然而, 启动涡在流动开始流动的过程中已经产生了, 并且随着流体永远地稳定流向下流了. 图7.12中右图展示了稳定流动后的流场, 并且在下游某处出现涡流. 一开始图7.12 左图组成曲线  $C_1$  的流体单元流到下游, 现在组成了曲线  $C_2$ , 即闭合曲线  $abcd$ , 如图7.12右图所示. 根据开尔文环量定理, 绕曲线  $C_2$  (包含了翼型和后面的启动涡)的环量和绕曲线  $C_1$  的环量是一样的, 即都是 0. 所以

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$$

现在让我们将曲线  $C_2$  沿着曲线  $bd$  分成两个闭合的曲线, 即  $C_3(bcdb)$  和  $C_4(abda)$ . 曲线  $C_4$  包围了启动涡, 曲线  $C_3$  包围了翼型. 沿着  $C_4$  的环量  $\Gamma_4$  是因为启动涡的存在. 包围翼型的曲线

$C_3$  的环量是  $\Gamma_4$ . 因为  $bc$  是曲线  $C_3$  和  $C_4$  的公共边, 所以  $C_3$  和  $C_4$  的环量之和就等于  $C_2$  的环量, 即

$$\Gamma_3 + \Gamma_4 = \Gamma_2$$

然而, 我们已经知道  $\Gamma_2 = 0$ , 所以

$$\Gamma_4 = -\Gamma_3$$

这就是说, 绕机翼的环量等于绕启动涡环量的相反数.

这就引出了本节的关键和总结所在. 当翼型绕流开始流动, 在尖后缘点处产生的很大的速度梯度产生一个很大的涡强, 这个涡强使得后缘点下游区域的气流卷起来, 形成启动涡. 这个启动涡有一个逆时针的环量. 因此, 一个等大反向的环量就在翼型上产生了. 当这个开始流动过程就继续下去, 后缘点的涡强就不断流入启动涡, 使得很大的逆时针环量变得更大了. 相应的, 翼型上顺时针的环量也变得更大了, 使得流过后缘点的气流逐渐达到库塔条件, 从而减弱了后缘脱落涡的强度. 最后, 启动涡达到刚刚满足条件的强度, 使得等大反向的绕翼型的环量导致气流平滑地从后缘流出. 当这种情况发生, 从后缘脱落涡的强度就变为了 0, 启动涡的强度就不在增加了, 绕翼型的环量将稳定存在.

## 7.5 经典薄翼理论:对称翼型

建立翼型的体坐标系, 其中  $x$  沿弦线方向,  $z$  垂直于弦线.

对于薄翼型, 我们可以用沿中弧线分布的面涡代替这个翼型. 我们的目标是计算出在中弧线成为一条流线, 并且满足库塔条件下的  $\gamma(s)$  函数. 一旦我们找到了一个特定的函数  $\gamma(s)$  满足这两个条件, 那么我们就可以用积分计算出总的环量, 然后用库塔-茹科夫斯基定理计算相应的升力.

考虑用一个沿中弧线分布的面涡取代翼型的情况. 自由来流的速度是  $V_\infty$ , 翼型的攻角是  $\alpha$ . 如果一个翼型很薄, 那么中弧线非常接近弦线, 从很远的地方看, 这个面涡就是沿着弦线分布的. 因此, 再来一次替换, 将沿中弧线的面涡分布替换成沿弦线的分布, 那么  $\gamma = \gamma(x)$ . 我们依然希望中弧线是流场中的一条流线, 并且  $\gamma(x)$  被计算出来后依然满足库塔条件,  $\gamma(c) = 0$ . 这就是说, 沿弦线分布的面涡的强度决定了中弧线(不是弦线)是流线.

因为中弧线是流线, 所以中弧线上所有点在垂直于中弧线上的速度分量都是 0. 流场中任何一点的速度就是远前方自由来流的速度和面涡诱导出来的速度的矢量和. 记  $V_{\infty, n}$  是自由来流在中弧线法向的速度分量,  $w'(s)$  是由面涡诱导出来的速度在中弧线法向上的速度分量. 因

此, 因为中弧线成为了一条流线, 所以

$$V_{\infty,n} + w'(s) = 0$$

在中弧线上任意一点都成立, 这就是中弧线的边界条件.

对于一个小攻角的薄翼型, 有

$$V_{\infty,n} = V_{\infty}(\alpha - \frac{dz}{dx})$$

记  $w(x)$  是由面涡在弦线上一点诱导出来的速度在法向上的分量, 由于中弧线和弦线非常接近, 那么可以做如下近似

$$w'(s) \approx w(x)$$

我们希望计算出在坐标  $x$  的  $w(x)$  的值. 考虑一个微元涡  $\gamma d\xi$  在沿着弦线距离原点  $\xi$  的地方. 那么在  $x$  点由  $\xi$  产生的诱导速度  $dw$  就是

$$dw = -\frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)}$$

相应的, 在  $x$  点的速度就可以通过积分求解出来, 即

$$w(x) = -\int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)}$$

将上面做的两个近似代入到中弧线的边界条件中就有

$$V_{\infty}(\alpha - \frac{dz}{dx}) - \int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)} = 0$$

或者

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{x-\xi} = V_{\infty}(\alpha - \frac{dz}{dx})$$

这就是**薄翼理论的基本方程**. 这描述了中弧线是流场中的一条流线.

对于薄翼理论的基本方程, 一个给定翼型在给定攻角下,  $\alpha$  和  $\frac{dz}{dx}$  都是已知量. 实际上, 唯一的未知量就是  $\gamma(\xi)$ . 基本方程是一个积分方程, 它的解  $\gamma(\xi)$  满足中弧线是流线的这个条件. 薄翼理论的核心问题是在满足中弧线是流线的条件下, 找到满足库塔条件的解, 即  $\gamma(c) = 0$ .

如果是一个对称翼, 那么

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{x-\xi} = V_{\infty}\alpha$$

可以使用三角换元得到

$$\gamma(\theta) = 2\alpha V_{\infty} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

于是就有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} &= \frac{V_\infty \alpha}{\pi} \int_0^c \frac{(1 + \cos \theta) d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} \\ &= V_\infty \alpha\end{aligned}$$

在后缘点处,  $\theta = \pi$ , 那么有

$$\gamma(\pi) = 2\alpha V_\infty \left. \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right|_{\theta=\pi} = 2\alpha V_\infty \frac{0}{0}$$

这是一个不确定的极限, 使用洛必达法则得到

$$\gamma(\pi) = 2\alpha V_\infty \frac{-\sin \pi}{\cos \pi} = 0$$

满足库塔条件.

在这种情况下, 现在求解升力系数. 绕翼型的总环量是

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(\xi) d\xi$$

使用  $\xi = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta)$  换元得到

$$\Gamma = \frac{c}{2} \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin \theta d\theta$$

将  $\gamma(\theta)$  代入就可以得到

$$\Gamma = \alpha c V_\infty \int_0^\pi (1 + \cos \theta) d\theta = \pi \alpha c V_\infty$$

因此单位翼展上的升力就是

$$L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma = \pi \alpha c V_\infty^2$$

因此升力系数就是, 其中  $S = c(1)$ ,

$$c_l = \frac{L'}{q_\infty S}$$

得到

$$c_l = \frac{L'}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c(1)} = 2\pi \alpha$$

也就是说

$$\text{升力曲线的斜率} = \frac{dc_l}{d\alpha} = 2\pi$$

这是一个重要的结果, 它表明了升力系数和攻角是线性相关的. 同样, 这依然表明升力曲线的斜率等于  $2\pi \text{ rad}^{-1}$ .

根据前缘力矩计算公式

$$M'_{LE} = - \int_0^c \xi(dL) = -\rho_\infty V_\infty \int_0^c \xi \gamma(\xi) d\xi$$

作积分变换  $\xi = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta)$  代入  $\gamma(\theta)$  积分得到

$$M'_{LE} = -q_\infty c^2 \frac{\pi \alpha}{2}$$

所以前缘力矩系数就是

$$c_{m,le} = \frac{M'_{LE}}{q_\infty S c}$$

其中,  $S = c(1)$ , 所以前缘力矩系数就是

$$c_{m,le} = -\frac{\pi \alpha}{2}$$

又

$$2\pi \alpha = c_l$$

所以

$$c_{m,le} = -\frac{c_l}{4}$$

四分之一弦线处力矩的计算公式是

$$c_{m,\frac{c}{4}} = c_{m,le} + \frac{c_l}{4}$$

所以  $\frac{c}{4}$  弦线处的力矩即

$$c_{m,\frac{c}{4}} = 0$$

这表明了对称翼型的压心在  $\frac{c}{4}$  弦线处. 由空气动力学中心的定义, 我们得到对称翼型的气动中心和压心重合, 都在  $\frac{c}{4}$  弦线处.

## ✍ 笔记

压心的定义是对压心取矩为 0, 也就是压心处的气动力矩为 0.

空气动力中心(气动中心)的定义是翼型上存在一点使得对该点取矩, 气动力矩的大小和攻角的变化无关.

注意, 当翼型的攻角变大时, 压心要往前移, 也就是说压心的位置和攻角大小有关. 所以, 一般情况下, 压心和气动中心不重合.

这里压心和气动中心重合的原因是, 首先对  $\frac{1}{4}$  弦线处取力矩为 0, 所以就是压心. 其次,



这个力矩恒为 0, 和攻角无关, 所以就成为了气动中心.

对本节内容做一个总结如下, 对于对称翼型:

1.  $c_l = 2\pi\alpha$
2. 升力曲线的斜率是  $2\pi$
3. 压心和气动中心是重合的, 也就是都在  $\frac{c}{4}$  弦线处

#### 例题 7.4

题目 考虑一种平盘在攻角  $5^\circ$  的情况下, 计算 1) 升力系数; 2) 计算前缘力矩系数; 3) 关于  $\frac{c}{4}$  弦线处的力矩系数; 4) 关于后缘点的力矩系数;

$$c_l = 2\pi\alpha = \frac{2\pi \times 5}{57.3} = 0.5485$$

$$c_{m,le} = -\frac{c_l}{4} = -0.137$$

$$c_{m,\frac{c}{4}} = 0$$

$$c_{m,te} = \frac{3}{4}c_l = 0.411$$

对于弧形翼(有弯度的翼型)来说,  $\frac{dz}{dx}$  不等于 0, 上述结论就不在适用了. 与对称薄翼型一样, 中弧线也是流场中的一条流线, 同样满足库塔条件.

同样, 基本方程是

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{x-\xi} = V_\infty \left( \alpha - \frac{dz}{dx} \right)$$

换元  $\xi = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta)$ , 得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = V_\infty \left( \alpha - \frac{dz}{dx} \right)$$

将  $\gamma(\theta)$  展开成傅里叶正弦级数, 即:

$$\gamma(\theta) = 2V_\infty \left( A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right)$$

代入到基本方程中得到

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{A_0 (1 + \cos \theta) d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{A_n \sin n\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = \alpha - \frac{dz}{dx}$$



使用积分结果(见附录A.2), 即:

$$\int_0^\pi \frac{\sin n\theta \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = -\pi \cos n\theta_0$$

和

$$\int_0^\pi \frac{1 + \cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \pi$$

得到

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta_0 = \alpha - \frac{dz}{dx}$$

或者

$$\frac{dz}{dx} = (\alpha - A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta_0$$

上式可以在给定点  $x$  计算出来, 这里  $\frac{dz}{dx}$  和  $\theta_0$  都是和弦线上  $x$  点相关的参数, 其中,  $x = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta_0)$ .

回到上面的那个方程, 这是将函数  $\frac{dz}{dx}$  用傅里叶余弦级数展开的. 那么函数  $f(\theta)$  可以用级数来表示

$$f(\theta) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta$$

其中,  $0 \leq \theta \leq \pi$ . 系数可以用如下的方法计算出来:

$$B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) d\theta$$

和

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \cos n\theta d\theta$$

$\frac{dz}{dx}$  和  $f(\theta)$  是一样的, 所以

$$\alpha - A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} d\theta_0$$

和

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} \cos n\theta_0 d\theta_0$$

请记住,  $\frac{dz}{dx}$  是关于  $\theta_0$  的函数. 从上面的方程可以看出,  $A_0$  与飞行迎角和中弧线的形状有关系, 但是  $A_n$  只和中弧线的形状有关.

在上面的讨论中, 我们考虑了气流流过一个有弯度的翼型在给定的形状  $\frac{dz}{dx}$  和给定的攻角. 为了使得中弧线成为流线, 我们需要计算出沿弦线的面涡强度分布. 同样, 也要满足库塔条件.

$A_0$  和  $A_n$  的实际数值可以在给定攻角下通过简单的积分计算得到. 当  $dz/dx = 0$  的时候, 那就是一个对称翼型, 是上述积分计算公式的一种特殊情况.

下面我们计算对于一个有弯度的翼型的空气动力系数. 从前缘点到后缘点的总环量可以通过下面的积分得到

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(\xi) d\xi = \int_0^\pi \gamma(\theta) d\theta$$

将我们得到的  $\gamma(\theta)$  代入到上式得到

$$\Gamma = cV_\infty \left[ A_0 \int_0^\pi (1 + \cos \theta) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \sin n\theta \sin \theta d\theta \right]$$

其中

$$\int_0^\pi (1 + \cos \theta) d\theta = \pi$$

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin \theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , n = 1 \\ 0 & , n \neq 1 \end{cases}$$

因此, 总环量就是

$$\Gamma = cV_\infty \left( \pi A_0 + \frac{\pi}{2} A_1 \right)$$

根据库塔-茹科夫斯基定理得到单位翼展上的升力

$$L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma = \rho_\infty V_\infty^2 c \left( \pi A_0 + \frac{\pi}{2} A_1 \right)$$

那么升力系数就是

$$c_l = \frac{L'}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c(1)} = \pi(2A_0 + A_1)$$

代入  $A_0$  和  $A_1$  的计算公式得到

$$c_l = 2\pi \left[ \alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0 \right]$$

也就是

$$\text{升力线斜率} = \frac{dc_l}{d\alpha} = 2\pi$$

记住这是一个重要结果, 对于对称翼型和有弯度的翼型升力线斜率都是  $2\pi$ . 事实上, 这个从薄翼理论得到的结果对于所有翼型都适用, 也就是所有翼型的升力线斜率都是  $2\pi$ . 请注意, 对称翼型的升力系数  $c_l$  和有弯度的翼型的升力系数是有区别的. 回忆零升攻角  $\alpha_{L=0}$  的概念, 它一般是一个负值, 升力线的方程可以写成

$$c_l = \frac{dc_l}{d\alpha} (\alpha - \alpha_{L=0})$$

也即是

$$c_l = 2\pi(\alpha - \alpha_{L=0})$$

比较我们推导的升力线方程, 可以得到

$$\alpha_{L=0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{d\alpha} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0$$

这个方程提供了一种方法去预测零升攻角的大小. 对于对称翼型的零升攻角就是 0. 相应的, 对于弯度比较大的翼型, 它的零升攻角的值就要大一些.

根据前缘力矩的定义

$$M'_{LE} = - \int_0^c \xi(dL) = -\rho_\infty V_\infty \int_0^c \xi \gamma(\xi) d\xi$$

换元, 并将  $\gamma(\theta)$  代入, 计算得到

$$c_{m,le} = -\frac{\pi}{2} \left( A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right)$$

将升力系数代入得到

$$c_{m,le} = - \left[ \frac{c_l}{4} + \frac{\pi}{4} (A_1 - A_2) \right]$$

当  $dz/dx = 0$ , 即  $A_1 = A_2 = 0$ , 代入到上式就得到了对称翼型的前缘力矩.

$\frac{c}{4}$  处的力矩可以通过

$$c_{m,\frac{c}{4}} = c_{m,le} + \frac{c_l}{4}$$

计算得到所以

$$c_{m,\frac{c}{4}} = -\frac{\pi}{4} (A_1 - A_2)$$

不像对称翼型那样, 有弯度的翼型  $\frac{c}{4}$  处的力矩不等于 0. 上式表明, 四分之一弦线处的力矩是有限的. 然而  $A_1$  和  $A_2$  是只和翼型的弯度大小有关的, 而与攻角大小无关. 所以四分之一弦线处是有弯度翼型的理论的气动中心.

压心的位置可以通过下面的公式计算得到

$$x_{cp} = -\frac{M'_{LE}}{L'} = -\frac{c_{m,le}c}{L'}$$

也就是

$$x_{cp} = \frac{c}{4} \left[ 1 + \frac{\pi}{c_l} (A_1 - A_2) \right]$$

这表明有弯度翼型的压心位置是随着升力系数的大小变化而变化的. 因此, 攻角变化, 压心也随着变化. 事实上, 当升力趋向于 0,  $x_{cp}$  就移动到无穷远处了; 这就是说, 它离开了翼型. 因为这样, 压心并不是一个很方便的点来描述翼型上的力系. 反而, 气动中心就十分方便来描述翼型上的力系和力矩系.

**例题 7.5**

**题目** 给定翼型 NACA 23012. 这个翼型的中弧线方程是

$$\frac{z}{c} = 2.6595 \left[ \left( \frac{x}{c} \right)^3 - 0.6075 \left( \frac{x}{c} \right)^2 + 0.1147 \left( \frac{x}{c} \right) \right] \quad 0 \leq \frac{x}{c} \leq 0.2025$$

和

$$\frac{z}{c} = 0.02208 \left( 1 - \frac{x}{c} \right) \quad 0.2025 \leq \frac{x}{c} \leq 1.0$$

计算 a) 零升攻角; b)  $\alpha = 4^\circ$  时的升力系数; c) 四分之一弦线处的气动力矩系数; d)  $\alpha = 4^\circ$  时的压心的位置, 用  $x_{cp}/c$  表示.

首先, 我们需要计算出  $\frac{dz}{dx}$ . 对于给定的中弧线, 有

$$\frac{dz}{dx} = 2.6595 \left[ 3 \left( \frac{x}{c} \right) - 1.215 \left( \frac{x}{c} \right) + 0.1147 \right] \quad 0 \leq \frac{x}{c} \leq 0.2025$$

和

$$\frac{dz}{dx} = 0.02208 \quad 0.2025 \leq \frac{x}{c} \leq 1.0$$

将坐标  $x$  变换到  $\theta$ , 即  $x = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta)$ , 我们有

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= 2.6595 \left[ \frac{3}{4}(1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) - 0.6075(1 - \cos \theta) + 0.1147 \right] \\ &= 0.6840 - 2.3736 \cos \theta + 1.995 \cos^2 \theta \quad 0 \leq \theta \leq 0.9335 \text{ rad} \end{aligned}$$

和

$$\frac{dz}{dx} = -0.02208 \quad 0.9335 \leq \theta \leq \pi$$

(a)

$$\alpha_{L=0} = \int_0^\pi \frac{dz}{dx} (\cos \theta - 1) d\theta = -0.0191 \text{ rad}$$

(b)  $\alpha = 4^\circ = 0.0698 \text{ rad}$ ,

$$c_l = 2\pi(\alpha - \alpha_{L=0}) = 2\pi(0.0698 + 0.0191) = 0.559$$

(c) 我们需要先计算出  $A_1$  和  $A_2$  的值.

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} \cos \theta d\theta = 0.0954$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} \cos 2\theta d\theta = 0.0792$$

于是

$$c_{m, \frac{c}{4}} = \frac{\pi}{4}(A_2 - A_1) = \frac{\pi}{4}(0.0792 - 0.0954) = -0.0127$$

(d) 由

$$x_{cp} = \frac{c}{4} \left[ 1 + \frac{\pi}{c_l} (A_1 - A_2) \right]$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{x_{cp}}{c} &= \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{\pi}{c_l} (A_1 - A_2) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{\pi}{0.559} (0.0954 - 0.0792) \right] = 0.273 \end{aligned}$$



至此, 本节的任务已经全部完成了. 本节内容我们计算了薄翼型的升力系数, 力矩系数和前缘力矩等, 还证明了升力线的斜率是  $2\pi$ .

## 7.6 关于气动中心的额外讨论

在前面薄翼理论中, 我们证明了气动中心不仅是真实存在的, 而且位置在翼型的四分之一的弦线处. 因此, 我们可以增加一种新的方法来描述翼型上的气动力和气动力矩, 也就是气动力和气动力矩通过气动中心.

对于大部分常规的翼型, 不是很精确地说, 气动中心都是比较靠近四分之一弦线这个位置. 只要给出任意一个翼型的气动力系数曲线和气动力矩系数曲线, 我们都可以按照下面的方法计算出气动中心的位置. 考虑对四分之一弦线取力矩和升力的升力力矩系. 将气动中心到前缘点的距离记为  $c\bar{x}_{ac}$ , 将气动中心记作  $ac$ , 于是我们有

$$M'_{ac} = L' \left( c\bar{x}_{ac} - \frac{c}{4} \right) + M'_{\frac{c}{4}}$$

上式两边同时除以  $q_{\infty}Sc$  我们得到

$$c_{m,ac} = c_l(\bar{x}_{ac} - \frac{1}{4}) + c_{m,\frac{c}{4}}$$

对上式两边同时对攻角  $\alpha$  取微分, 我们有

$$\frac{dc_{m,ax}}{d\alpha} = \frac{dc_l}{d\alpha}(\bar{x}_{ac} - \frac{1}{4}) + \frac{dc_{m,\frac{c}{4}}}{d\alpha}$$

根据气动中心定义, 有

$$\frac{dc_{m,ac}}{d\alpha} = 0$$

所以

$$0 = \frac{dc_l}{d\alpha}(\bar{x}_{ac} - \frac{1}{4}) + \frac{dc_{m,\frac{c}{4}}}{d\alpha}$$

对于一个尚未达到失速的翼型, 升力系数曲线和力矩系数曲线的斜率都是一个常数, 所以

$$\frac{dc_l}{d\alpha} = a_0 \quad \frac{dc_{m,\frac{c}{4}}}{d\alpha} = m_0$$

就得到了

$$0 = a_0(\bar{x}_{ac} - \frac{1}{4}) + m_0$$

或者

$$\bar{x}_{ac} = -\frac{m_0}{a_0} + \frac{1}{4}$$

这个方程证明了, 对于一个有着线性的升力线和力矩线的翼型来说, 气动中心的位置就是固定的. 当然, 这还给出了一个计算气动中心位置的方法.

## 7.7 粘性流动:翼型阻力

我们知道翼型的升力主要是翼面上的压强分布产生的;翼面上的剪切力的分布在沿升力方向上的积分通常是微不足道的。因此,升力可以通过无粘不可压流动结合后缘点的库塔条件被精确地计算出来。当需要去预测阻力的时候,这个方法得到的结果就是0,这个结果和常见的场景是截然相反的,这就是达朗贝尔谬论。

直到粘性这个概念引入流动,这个悖论才被解决。事实上,粘性完全是翼型产生阻力的原因。它通过两种机制产生作用:

1. 表面摩擦阻力,即主要由翼型表面上的剪切力分布产生的;
2. 压差阻力,主要是由流动分离产生的,也叫做型阻;

剪切力产生阻力是显而易见的,流动分离产生阻力是一个微妙的现象,我们将在后面讨论。

### 7.7.1 估计表面摩擦阻力:层流

作为一种近似,我们假设一个翼型上的表面摩擦阻力和一块平板上的表面摩擦阻力是一样的,如图7.13。显然,这种近似对于更薄的翼型和更小的攻角是更加准确的。

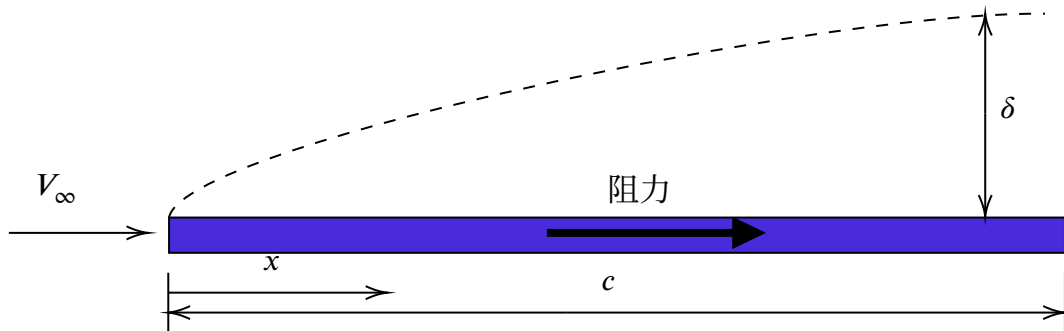


图 7.13: 平板上的总摩擦阻力

我们首先来计算层流流过翼型(或者是薄平板)的情况。对于层流边界层是有精确的解析解的。

对于一个不可压层流在零攻角的情况下流过薄平板,边界层厚度的计算公式如下

$$\delta = \frac{5.0x}{\sqrt{Re_x}}$$

其中,  $Re_x$  是距离前缘  $x$  处的雷诺数,也就是

$$Re_x = \frac{\rho_e V_\infty x}{\mu_\infty}$$

也就是  $\delta \propto \sqrt{x}$ , 也就是边界层的厚度随着到前缘点的距离抛物线地增长.

当地的剪切应力沿着平板的上下表面积分就得到了最终的摩擦阻力,  $D_f$ . 首先, 不管怎样, 我们先考虑平板的一个表面, 不论是上表面还是下表面. 剪切力在上下表面的分布是一样的. 让我们选择上表面. 在整个上表面对剪切力积分得到最终的上表面的摩擦阻力,  $D_{f,top}$ . 显然这个阻力大小和下表面的阻力大小,  $D_{f,bottom}$ , 是一样大的. 因此, 总的摩擦阻力就是

$$D_f = 2D_{f,top} = 2D_{f,bottom}$$

定义一个表面的阻力系数是

$$C_f = \frac{D_{f,top}}{q_\infty S} = \frac{D_{f,bottom}}{q_\infty S}$$

表面摩擦阻力系数是雷诺数的函数, 即

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re_c}}$$

其中  $Re_c$  通过如下公式计算

$$Re_c = \frac{\rho_\infty V_\infty c}{\mu_\infty}$$

对于一个非常大的雷诺数的流动, 翼型边界层内的流动是湍流. 我们的层流计算就不足以近似估计边界层厚度和翼型的阻力系数了. 让我们采取下一步.

### 7.7.2 估计表面摩擦阻力:湍流

和层流的情况相反, 对于湍流边界层是没有精确的解析解的. 对于任意湍流的分析需要大量的数据. 湍流的分析都是近似的.

流过平板的湍流边界层的分析是不例外的. 我们直接给出这个经验公式

$$\delta = \frac{0.37x}{Re_x^{\frac{1}{5}}}$$

阻力系数计算公式如下

$$C_f = \frac{0.074}{Re_c^{\frac{1}{5}}}$$

这里再次强调, 上面两个公式都是近似结果, 并且它们只代表了对于平板湍流边界层的一组大量的不同湍流分析的实验数据. 然而, 这两个公式给了我们估计湍流边界层厚度和表面摩擦阻力系数的一个方法.

值得注意的是, 这种估计湍流表面摩擦阻力的计算公式过高估计了表面摩擦阻力系数. 实际上, 在距离前缘点的一段距离内, 边界层总是起始于层流边界层, 在前缘点后的某个点之后开



始向湍流边界层转捩。因此表面摩擦阻力是层流边界层和湍流边界层的组合。接下来,让我们开始检查这种情况。

### 7.7.3 转捩

前面的讨论中,我们分别假设了平板的边界层分别全是层流和全是湍流。然后在前缘下游的某个点开始,层流边界层开始变得不稳定,变成湍流边界层。层流边界层向湍流边界层发展的区域叫做转捩区域。在这个区域之后,边界层全部都是湍流边界层。记转捩点的位置是  $x_c r$ , 这是一个临界位置,这个位置的雷诺数叫做临界雷诺数,  $Re_{cr}$ , 计算公式如下

$$Re_{cr} = \frac{\rho_{\infty} V_{\infty} x_c r}{\mu_{\infty}}$$

如果给出临界雷诺数,那么临界位置也就能计算出来了。大量的实验表明,临界雷诺数大约是  $5 \times 10^5$ 。

总的来说,只要知道了临界雷诺数,就能计算出转捩点。然而,精确的临界雷诺数必须来自实验,惯性飞行或者是一些半实验理论。

对于边界层有转变的边界层阻力系数的计算,我们可以先假设整个边界层都是湍流边界层,这样计算的结果肯定是偏大的,然后分别计算出转捩点之前的层流边界层的阻力系数和湍流边界层的阻力系数。最后,将全湍流边界层的阻力系数减去转捩点之前的湍流边界层的阻力系数,再加上转捩点之前的层流边界层的阻力系数,这样就得到了边界层有转捩的阻力系数。

### 7.7.4 流动分离

翼型上的压差阻力是由流动分离造成的。对于气流全部附在翼型表面的流动来说,翼型后面的压强产生的向前的力会被翼型前面压强产生的向后的力抵消掉。这就导致了零压差阻力。然而,如果流过翼型后表面的气流部分分离,这就会导致翼型后面的压强产生的向前的力比流体全部附在翼型上的情况小,即不能和翼型前面压强产生的向后的力全部抵消掉,从而产生了一个净压差阻力—这个压差阻力是由于流动分离产生的。

那么什么情况有助于流动分离呢?为了回答这个问题,首先考虑气体在零攻角的情况下流过一个翼型。流线平滑地经过翼型的表面—没有任何的流动分离。计算流体力学的结果表明,这种情况下,翼型的前缘点是驻点,压强系数  $C_p = 1.0$ ,然后上翼面的气流快速地膨胀,压强急剧减小,在上翼面前缘点下游的某个位置达到最小值。然后随着气流往下游流去,压强逐渐增加,在后缘点的压强比自由来流的压强稍大。这个压强增大的区域叫做**逆压梯度区 (adverse pressuer gradient)**。通过定义,逆压梯度区的压强是随着流动方向增强的。这个区域的  $\frac{dP}{dx}$  是

正值. 逆压梯度区是变化不大的, 也就是  $\frac{dP}{dx}$  是比较小的. 对于所有的实际情况, 气流依然保持附在翼型的表面上, 除了后缘点附近的区域.

现在, 我们考虑一个相同的翼型在攻角很大的情况下. 假设这是一个纯粹的没有流动分离的无粘流动——一种纯粹的理想情况. 在这种理想情况下, 数值解表明, 在前缘点下游的某个点, 压强会急剧地下降到  $C_p = -9$ , 然后在下游快速地上升, 在后缘点恢复到比  $P_\infty$  稍大的一个值. 在这个恢复的过程中, 压强是急剧变大的, 这和我们前面讨论的零攻角的情况是相反的. 这个逆压梯度区的变化是很大的, 所以,  $\frac{dP}{dx}$  是非常大的. 在这种情况下, 真实的粘性流将要从翼型的表面分离. 这种情况下, 压强没有急剧地下降到一个最小值, 后缘点的压强也没有恢复到  $P_\infty$ .

请看这两种情况下翼型上的压强分布图, 如图 7.14. 图中, 在非常大攻角下, 有着流动分离

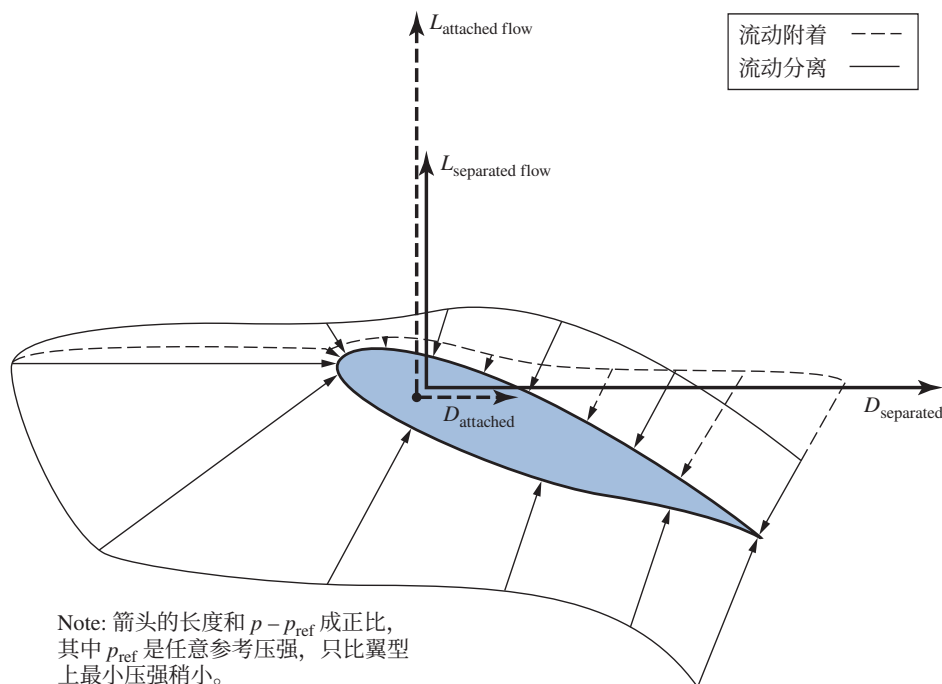


图 7.14: 流动分离与流动附着时的对比

情况的压强分布是实线, 没有流动分离的情况是虚线. 箭头的长度代表了压强的大小. 其中, 流动分离的情况下, 压强分布曲线的形状像一个口袋, 这使得压强分布更容易可视化了. 如果流动没有分离, 压强分布就是虚线表示的那样. 图中的实线箭头和虚线箭头应该被仔细的对比. 它们可以解释流动分离造成的两个后果. 第一个后果是升力的减小. 气动升力来源于压强分布在竖直方向上的净分量 (假设自由来流的方向是水平的). 大升力可以在下表面的压强非常大而上表面的压强非常小的情况下获得. 流动分离不会影响下表面的压强分布. 对比上翼面前缘

点下游的的实线和虚线箭头, 可以发现在流动分离的时候, 实现箭头代表了更大的压强. 这些压强是向下作用的, 因此升力要减小.

那么为什么气流会从翼型表面分离呢? 简而言之, 在逆压梯度区, 沿着流线运动的流体微团不得不顶着增加的压强运动. 结果就是, 流体微团将会在逆压梯度的影响下减速. 对于边界层外面的流体微团来说, 它们的速度(或者内能)很大, 这没什么太大的问题. 它们可以持续地向下游运动. 但是对于边界层内部的流体微团, 它们的速度已经被内部的摩擦阻力减速到很小了. 然而, 这些流体微团还要受逆压梯度的影响, 因为压强在翼面的法线方向上是一样的, 但是这些流体微团的速度太小了, 所以不能顺利地通过逆压梯度区. 最终, 这些流体微团在下游的某个点就会减速到 0, 然后再往回运动. 这些往回流动的流动就从翼型表面分离了.

## 7.8 失速的再介绍

前面我们分析了失速的原因, 即在大迎角下, 气流从翼型表面分离, 造成升力系数急剧减小. 通过前面的讨论, 我们知道, 在达到失速迎角前, 增加迎角可以增加升力系数, 但是一旦超过失速迎角, 升力系数就会急剧减小. 但是失速发生主要有两种形式, 一种是**前缘点失速 (leading-edge stall)**, 另一种是**后缘点失速 (trailing-edge stall)**.

前缘点失速主要发生在中等翼型中, 也就是相对厚度在 10% 到 16% 之间的翼型. 这种翼型, 流动分离是突然发生在整个上翼面的, 开始气流分离主要发生在前缘点处. 相应的, 升力曲线在  $c_{l,max}$  处是尖峰状, 跨过失速迎角后, 升力系数将急剧下降.

与之相应的是后缘点失速, 这种失速特性主要发生在厚度比较大的翼型中, 比如 NACA 4412. 和前缘点失速不同, 气流是从后缘点开始分离的, 并且随着攻角的增大, 分离点逐渐向前缘点移动. 升力曲线在失速迎角处没有中等厚度的翼型那样陡峭, 是比较平缓的, 跨过失速迎角后, 升力系数下降的没那么快.

比较两种失速形式, 如下:

1. 后缘点失速的升力曲线在最大升力系数处是逐渐弯曲的, 即相对平滑; 而前缘点失速则是升力曲线急剧下降的. 后缘点失速是比较“软”的(原文如此).
2. 后缘点失速的最大升力系数的值相对没那么大.
3. 翼型厚度主要影响翼型的最大升力系数, 这种影响主要反映在相对厚度比较大的翼型和中等厚度翼型的失速行为之间.

除了前面所述的两种失速行为之外, 还有第三种失速行为, 即和非常薄的翼型对应的失速. 这种翼型在小迎角下, 气流就会在前缘点附近开始分离形成一个小的**分离泡 (separation**

**buddle)**. 随后, 气流又会在下游重新附着在翼型表面上. 随着攻角的增大, 这个分离泡会逐渐变大. 增大到某个攻角后, 这个分离泡基本上就覆盖了整个上翼面. 这个迎角的大小就对应着最大升力系数. 当迎角在增大, 气流就从上翼面完全分离了. 这种翼型的升力曲线, 在失速迎角附近和厚度比较大的翼型相似, 都是比较平缓, 但是这种很薄的翼型的最大升力系数是三种翼型中最小的.

升力阻力曲线的可取之处是我们可以用来初步地评定翼型品质的好坏, 即:

1. **升阻比 (lift-to-drag ratio)  $\frac{L}{D}$** . 一个效率很高的翼型在产生升力的同时只产生很小的阻力. 也就是说, 升阻比可以衡量一个翼型的气动特性.
2. **最大升力系数  $c_{l,max}$** . 一个有效的翼型会产生更高的升力系数—至少比牛栏门的升力系数要高.

这里最大升力系数值得额外的讨论. 对于一个飞行器, 最大升力系数决定了它的失速速度. 给出失速速度的计算公式

$$V_{stall} = \sqrt{\frac{2W}{q_{\infty} S C_{L,max}}}$$

因此, 我们有很大的动力去获得更大的升力系数, 要么是为了更小的失速速度, 要么是在相同速度下获得更大的荷载.

## 笔记

假设飞机在海拔 10000 m 的高空, 该飞机的设计的最大速度是 1000 Km/h, 设计的失速速度是 200 Km/h. 那么飞行员在这个高度下, 可以操纵飞机飞行的速度区间就是 200 – 1000Km/h, 低于失速速度, 飞机就要发生失速, 超过最大速度, 飞机就要发生解体. 因此, 更低的失速速度意味着飞行员有更大的操纵空间, 这款飞机就更容易操控, 因为飞机安全飞行的速度区间更大.

更重要的是, 操纵性取决于升力系数的大小. 另一方面, 在给定雷诺数的情况下, 升力系数主要是翼型形状的函数. 一旦翼型的形状确定了, 升力系数的大小也就被确定了. 因此, 为了使升力系数超过这个值, 我们必须采取一些特别的方法, 比如, 前缘缝翼和后缘襟翼. 这些装置叫做**增升装置 (high-lift devices)**.

**后缘襟翼 (trailing-edge flap)** 是后缘的一部分, 铰接在后缘处, 可以上下翻转. 当后缘襟翼向下翻转的时候, 升力就会增加. 这是因为, 当襟翼向下翻转的时候相当于增加了翼型的弯度, 从而使得升力变大. 在前面的薄翼理论中, 我们知道, 零升迎角是弯度的函数, 增大弯度, 就会

让零升迎角变得更小, 相当于升力曲线向左移动了, 这样在同迎角下, 升力系数就变大了. 更为重要的是, 最大升力系数也变大了, 尽管失速迎角稍稍变小了一点. 然而, 当迎角保持  $0^\circ$  时, 后缘襟翼向下翻转的角度过大, 这时, 流线就不对称了, 就容易出现失速那样的情况.

当然, 增升装置也可以用在前沿, 主要有三种形式, 即前缘缝翼 (leading-edge slat), leading-edge droop, 前缘襟翼 (leading-edge flap). 前缘缝翼只是一个安装在前沿的很薄的曲面. 气流除了从上翼面流过翼型, 在下翼面的气流会通过缝翼和前沿之间的小缝流往上翼面, 这样就能增加上翼面气流的能量. 这股气流叫做二次流动, 它能缓解上翼面的逆压梯度区, 因此会延缓气流从上翼面分离. 因此, 前缘缝翼增大了失速迎角, 同时提高了最大升力系数. 前缘缝翼和后缘襟翼的本质并不相同, 前缘襟翼并没有改变零升攻角的大小. 它只是扩大了升力曲线, 即增大了失速迎角, 附带提高了最大升力系数.

在现代的高性能大型飞机上, 增升装置经常是几种联合一起使用.

## 7.9 总结

前面我们介绍了很多关于低速翼型的知识, 接下来, 请确保对于下面总结的知识你是熟悉的.

### 总结

1. 平面内一点  $(x, y)$  由从  $a$  点到  $b$  点的面涡诱导的速度势由下式给出

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_a^b \theta \gamma(s) ds$$

2. 面涡的环量

$$\Gamma = \int_a^b \gamma(s) ds$$

3. 穿过面涡, 切向速度是不连续的,

$$\gamma = u_1 - u_2$$

4. 库塔条件: 如果后缘角是有限的, 那么后缘点就是一个驻点; 如果后缘是圆角过渡的, 那么流过上翼面在后缘点的速度和流下翼面在后缘点的速度是相同的, 大小和方向都相等, 同时, 在后缘点处, 上翼面的压强和下翼面的压强相等. 总结如下

$$\gamma(\text{TE}) = 0$$

5. 薄翼理论: 用中弧线代替翼型. 面涡可以放置在弦线上, 同时面涡的强度可以改变, 在叠加自由来流后, 中弧线就是流场中的一条流线, 同时满足库塔条件. 面涡的强度可以用下面的公式计算

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi) d\xi}{x - \xi} = V_\infty \left( \alpha - \frac{dz}{dx} \right)$$

## 6. 薄翼理论的几个结论

### a) 对称翼型

1.  $c_l = 2\pi\alpha$
2. 升力线斜率  $\frac{dc_l}{d\alpha} = 2\pi$
3. 压心和气动中心重合, 且都在四分之一弦线处
4.  $c_{m, \frac{c}{4}} = c_{m, ac} = 0$

### b) 有弯度的翼型

1.  $c_l = 2\pi \left[ \alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{d\alpha} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0 \frac{dz}{d\alpha} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0 \right]$
2. 升力线斜率  $\frac{dc_l}{d\alpha} = 2\pi$
3. 气动中心在四分之一弦线处
4. 压心是随着升力系数变化的



## 第八章 不可压无粘流绕流有限翼展的机翼

前面介绍了无限翼展的翼型气动特性,这一章主要介绍有限翼展的机翼的气动特性.

### 8.1 下洗和诱导阻力

有限翼展的机翼是三维的,所以机翼的气动特性和翼型的气动特性不同,如下图8.1. 在上

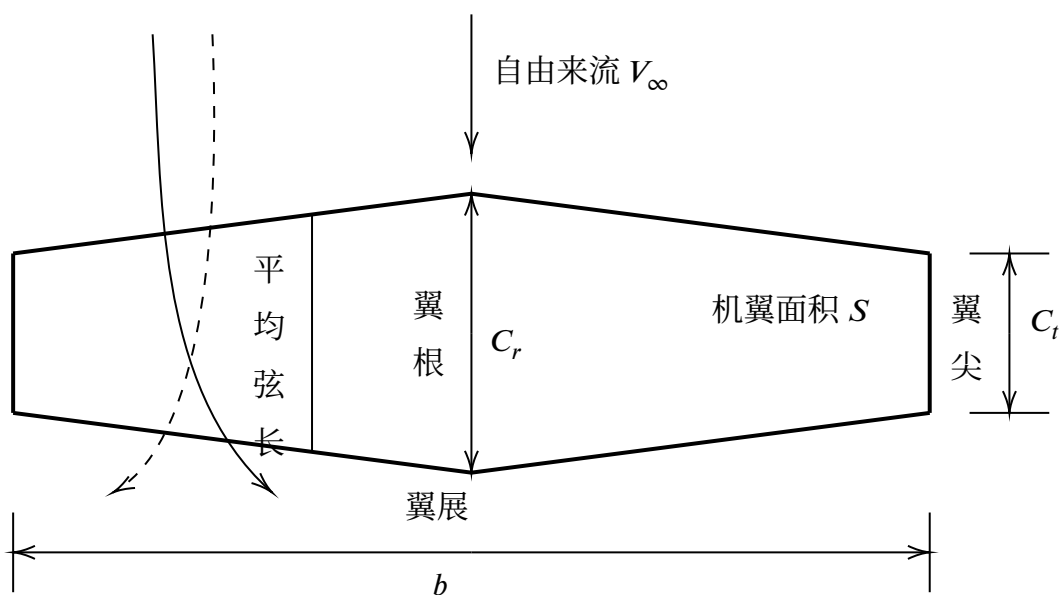


图 8.1: 机翼

图中,实线代表机翼上方气流的流动情况;虚线代表机翼下方气流的流动情况.

下面先介绍几个概念. **翼展 (span)** $b$  是机翼两个翼尖之间的距离. **平均弦长** $c$  即机翼的平均气动弦长. 对于矩形机翼来说,机翼的弦长都相等,所以平均气动弦长也等于翼型的弦长. **后掠角** $\chi$  机翼前缘和机身纵轴的夹角. **根梢比** $\eta$  机翼根部的弦长和翼尖的弦长的比值,  $\eta = \frac{c_r}{c_t}$ . **展弦比** $\lambda$ , 机翼翼展和平均气动弦长的比值. 机翼的面积  $S = bc$ , 即平均气动弦长和翼展乘积. 所以展弦比也等于  $\lambda = \frac{b^2}{S}$ .

暂时,可以将机翼产生升力的原因归结于机翼下表面的压强比上表面的大,所以机翼受到

一个向上的压强力, 即升力. 在翼尖处, 由于机翼下表面的压强大于上表面, 所以气流就会在这压强的推动下, 向上流动, 这就是为什么下表面的气流会向翼尖处流动, 而上表面的气流会向翼根处流动.

**注意** 升力产生的原因不全是压强差的问题, 还有牛顿第三定律的缘故. 关于压强差产生的原因, 不能完全用伯努利方程解释, 但确实机翼上表面的流速大于下表面的流速, 参考上一章讨论翼型的升力.

翼尖处气流向上流动, 形成了一个涡, 这个涡叫做翼尖涡 (wing-tip vortice), 也叫尾涡 (trailing vortex).

**注意** 对于一些大飞机, 比如 Boeing 747, 它们产生的翼尖涡非常强大, 会使得跟得太近的小飞机失控, 从而导致事故.

这些翼尖涡会诱导一个小的向下的速度, 也就是下洗, 用符号  $w$  表示. 相应地, 下洗的速度  $w$  和自由来流的速度  $V_\infty$  的合速度就是流过机翼翼型的实际速度.

自由来流和翼型弦线的夹角叫做攻角, 这里我们记为几何攻角 (geometric angle of attack)  $\alpha$ , 如图8.2 当地气流的方向相对于自由来流的方向向下倾斜了  $\alpha_i$  角度, 这个角度叫做诱导攻角

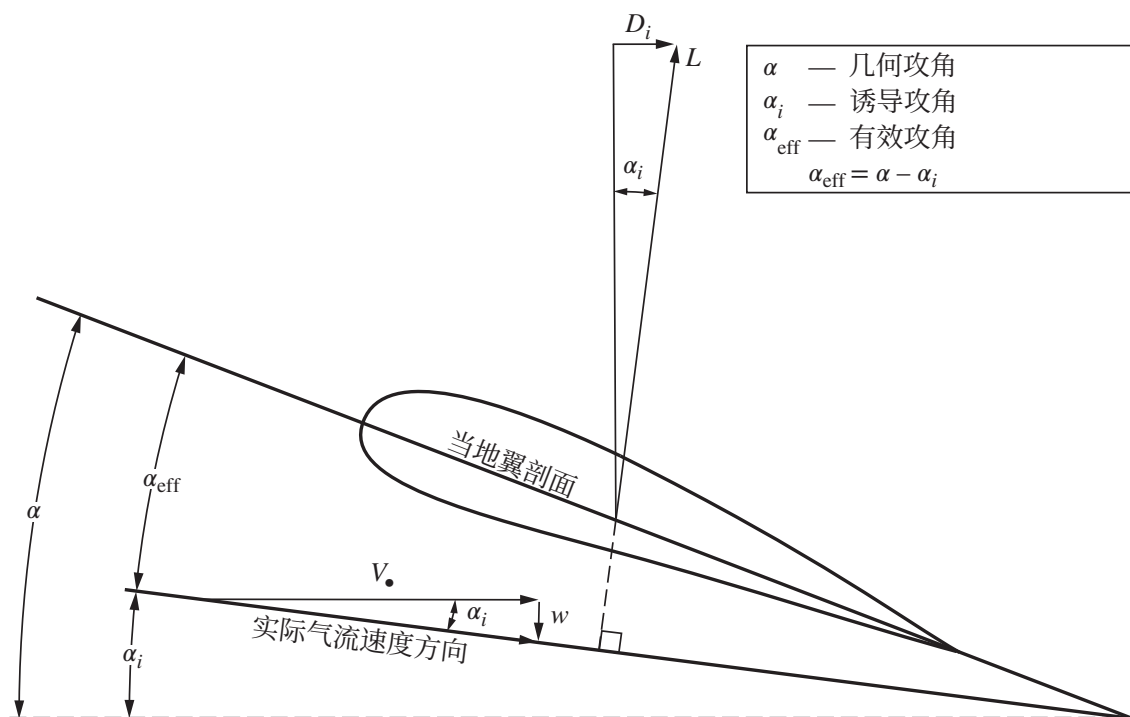


图 8.2: 下洗对有限翼展机翼当地翼型截面的影响

(induced angle of attack). 下洗流的存在, 使得当地气流方向向下倾斜, 同时对当地翼有剖面主



要有两个影响,如下:

1. 实际的迎角是当地气流的方向和当地翼型弦线的夹角, 这个夹角叫做**有效迎角 (effective angle of attack)**, 记作  $\alpha_{\text{eff}}$ . 因此, 即使机翼有着几何攻角  $\alpha$ , 当地翼型的迎角实际上更下一些, 即有效迎角.

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i$$

2. 当地的升力向量垂直于当地气流方向, 因此相较于原来的升力向量(竖直方向)落后了角度  $\alpha_i$ . 结果是在自由来流的方向会有一个当地升力向量的分量. 也就是说, 这个阻力是因为下洗的原因产生的. 这个阻力就被叫做**诱导阻力 (induced drag)**, 记作  $D_i$ .

升力向后倾斜是诱导阻力产生的一种解释, 另外的两个解释如下:

1. 翼尖涡诱导出来的速度, 使得机翼上在自由来流的方向上压强不平衡产生了一个向后的力, 这个力就是诱导阻力. 在这种情况下, 诱导阻力也是压差阻力的一种.
2. 翼尖涡中包含了大量的平移和转动的内能, 这部分能量必须来自于某个地方. 事实上, 这部分能量几乎都是由飞机的发动机提供的, 而发动机是飞机唯一相关的动力来源. 由于翼尖涡的能量没有任何用处, 因此这种能量基本上已经丧失. 实际上, 发动机提供的进入涡流的额外动力就是发动机克服诱导阻力所需的额外动力.

## ✍ 笔记

关于本章的符号问题

对于单位翼展上的升力, 阻力, 气动力矩, 记作  $L', D', M'$ . 相应的升力系数, 阻力系数, 力矩系数, 记作  $c_l, c_d, c_m$ . 对于三维机翼, 比如有限翼展的机翼, 升力, 阻力, 气动力矩记作  $L, D, M$ . 相应的升力系数, 阻力系数, 力矩系数记作  $C_L, C_D, C_M$ . 对于亚音速的机翼上阻力是诱导阻力  $D_i$ , 表面摩擦阻力  $D_f$  和压差阻力  $D_p$  的和. 后面两个阻是因为粘性产生的, 它们的和叫做型阻. 对于任何攻角, 有限翼展的机翼的型阻系数都是一样的.

$$c_d = \frac{D_f + D_p}{q_\infty S}$$

诱导阻力系数是

$$C_{D,i} = \frac{D_i}{q_\infty S}$$

总的阻力系数是

$$C_D = c_d + C_{D,i}$$

## 8.2 面涡, 毕奥-萨伐尔定律和亥姆霍兹定理

在前面, 我们介绍了无限长的直线分布的面涡, 实际上, 面涡分布也可以是曲线, 沿着涡线积分, 就可以得到涡量  $\Gamma$ , 也是涡强.

考虑涡线上一点的一段有向线段  $d\mathbf{l}$ , 在任意一点  $P$  处, 有向线段到该点的径矢是  $\mathbf{r}$ , 那么有向线段在  $P$  点处的诱导速度是

$$d\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

这就是毕奥-萨伐尔定律. 这和磁场中的毕奥-萨伐尔定律是一样的. 一根无限长的直涡线在任意一点  $P$  处的诱导速度是

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi h}$$

其中,  $h$  是  $P$  点到涡线的距离.

亥姆霍兹定理的内容如下:

1. 面涡的强度沿着它的长度方向是一个常数
2. 面涡不能在流体中结束, 必须在边界上结束或者形成一个闭合的路径

下面介绍**升力分布 (lift distribution)** 的概念. 在给定位置  $y_1$  升力大小是  $L'(y_1)$ , 这个位置处的弦长和迎角分别是  $c$  和  $\alpha$ . 现在在另外一个位置  $y_2$  处的弦长和迎角可能会发生变化, 在这个位置的升力是  $L'(y_2)$

### 笔记

大部分机翼的翼型的弦长都会随着位置发生变化, 矩形机翼除外; 并且每个截面翼型的几何攻角也可能不同, 这是因为机翼有可能发生扭转了. 如果翼根处的翼型的几何攻击大于翼尖的几何攻击, 叫做 washout, 反之叫做 washin. 这种情况叫做**几何扭转 (geometrical twist)**. 另外, 现代的机翼, 不同截面的翼型也不同, 所以每个截面的零升迎角也不同, 这叫做**气动扭转 (aerodynamic twist)**.

在不同位置处, 单位翼展上的升力是不同的, 这就是机翼上沿着翼展方向上的单位翼展上的升力分布, 即  $L' = L'(y)$ . 根据茹科夫斯基定理, 我们知道

$$L' = L'(y) = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma(y)$$

在翼尖处, 由于上下表面的压强平衡, 所以在翼尖位置, 即  $y = -\frac{b}{2}$  和  $y = \frac{b}{2}$  处的升力等于 0.

总的来说, 本章的问题就是计算诱导阻力, 总升力, 有限翼展机翼的升力分布.

### 8.3 普朗特经典升力线理论

普朗特认为, 一个强度为  $\Gamma$  的面涡将被以某种方式固定在流场中的某个固定位置, 这个叫做**附着涡 (bound vortex)**, 并且产生一个升力  $L' = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma$ . 与附着涡相反的是**自由涡 (free vortex)**, 它会随着同一个流体微团运动而遍及全流场. 用一个从  $y = -\frac{b}{2}$  到  $y = \frac{b}{2}$  的附着涡替换掉机翼. 根据亥姆霍兹定理, 涡线不能再流场中结束, 因此假设在翼尖的下游有两条向无限远方向延伸的自由涡. 因为附着涡和自由涡叠加而形成的涡系形状上像一个马蹄, 因此叫做**马蹄涡 (horseshoe vortex)**. 附着涡不会在翼展这段位置上诱导出下洗的速度, 因此, 下洗速度  $w$  都是由自由涡诱导出来的. 我们可以用毕奥萨伐尔定律计算出翼展上的诱导速度

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi(\frac{b}{2} + y)} - \frac{\Gamma}{4\pi(\frac{b}{2} - y)} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{b}{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2}$$

单个马蹄涡产生的下洗速度分布和实际情况并不一致, 并且在翼尖处诱导速度将接近无穷大, 这显然不合理. 假设在翼展上分布由大量的马蹄涡形成一个马蹄涡系, 每个马蹄涡的附着涡长度都不一样, 并且强度也不一样, 但是每条附着涡都还是沿着一条直线分布的, 这条线叫做**升力线 (lifting line)**. 这一部分请参考教材. 请记住尾涡的强度等于升力线上面涡强度的变化.

如果叠加无穷多的马蹄涡, 形成一个马蹄涡系, 这样沿翼展方向, 面涡强度  $\Gamma$  就变成了一个连续分布的函数, 也就是  $\Gamma = \Gamma(y)$  在微元长度上的面涡强度就是

$$d\Gamma = \left(\frac{d\Gamma}{dy}\right) dy$$

相应地, 尾涡的强度就等于  $d\Gamma$  的变化. 那么任意一点  $y$  处的涡强  $d\Gamma$  在  $y_0$  处的诱导速度就是

$$dw = -\frac{(d\Gamma/dy)dy}{4\pi(y_0 - y)}$$

这个速度是在  $y$  处的半无限长的自由涡在点  $y_0$  诱导出的下洗速度. 这个负号表示速度方向是向下的. 在  $y_0$  点的总诱导速度由下式给出

$$w = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)}{y_0 - y} dy$$

上式很重要, 它给出了在  $y_0$  处由所有自由涡诱导出来的下洗速度.

从图8.2中, 我们得到诱导迎角的大小

$$\alpha_i(y_0) = \tan^{-1} \left( \frac{-w(y_0)}{V_{\infty}} \right)$$

一般来说,  $w$  远小于  $V_\infty$ , 所以诱导迎角也可以写成

$$\alpha_i(y_0) = -\frac{w(y_0)}{V_\infty}$$

再将前面计算下洗速度的积分公式代入就可以得到

$$\alpha_i(y_0) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)}{y_0 - y} dy$$

这样我们就可以通过涡强分布来计算诱导迎角的大小.

根据前面所述的几何迎角和有效迎角之间的关系, 我们可以计算处有效迎角

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i = \alpha - \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)}{y_0 - y} dy$$

然后根据前面我们讨论的翼型的升力曲线, 我们就可以得到在  $y_0$  处的升力系数

$$c_l = a_0 (\alpha_{\text{eff}}(y_0) - \alpha_{L=0}) = 2\pi (\alpha_{\text{eff}}(y_0) - \alpha_{L=0})$$

在任何情况下, 零升迎角都是已知的, 它只与翼型有关. 同样, 升力不仅可以通过升力系数进行计算, 还可以用茹科夫斯基升力公式进行计算, 也就是

$$L' = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c(y_0) c_l = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_0)$$

于是我们又可以得到计算机翼单位翼展上升力系数的第二个公式, 即

$$c_l = \frac{2\Gamma(y_0)}{V_\infty c(y_0)}$$

所以有效攻角也可以用下式计算

$$\alpha_{\text{eff}} = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0}$$

带入到

$$\alpha = \alpha_{\text{eff}} + \alpha_i$$

中, 我们就得到了几何攻角的计算公式, 即

$$\alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0}(y_0) + \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{dy}}{y_0 - y} dy$$

这就是普朗特升力线理论的基本方程. 这表明了几何迎角等于有效迎角加上诱导迎角. 这个方程是一个积分—微分方程, 唯一的未知量就是  $\Gamma$ , 其他量都是已知的.

从基本方程得出  $\Gamma = \Gamma(y_0)$  的解给了我们三个关于有限翼展机翼的基本性质, 即:

1. 升力分布可以从库塔—茹科夫斯基定理中得到, 即

$$L'(y_0) = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_0)$$

2. 总升力可以对第一点性质中的公式积分得到, 即

$$L = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} L'(y) dy$$

或

$$L = \rho_\infty V_\infty \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) dy$$

升力系数可以由下式给出

$$C_L = \frac{L}{q_\infty S} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) dy$$

3. 从图8.1中, 我们可以得到诱导阻力的计算公式, 即

$$D'_i = L'_i \sin \alpha_i$$

因为诱导迎角很小, 所以

$$D'_i = L'_i \alpha_i$$

于是总的诱导阻力由下面的积分公式给出

$$D_i = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} L'(y) \alpha_i(y) dy$$

或

$$D_i = \rho_\infty V_\infty \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy$$

相应地, 诱导阻力系数就是

$$C_{D,i} = \frac{D_i}{q_\infty S} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy$$

在介绍椭圆形升力分布之前, 先介绍一个重要的结论, 即椭圆形机翼的升力分布就是椭圆形升力分布, 椭圆形升力分布的机翼就是椭圆形机翼.

### 8.3.1 椭圆型升力分布

考虑一个涡强分布, 即

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}$$

请记住:

1.  $\Gamma_0$  是涡强的初始值, 是在翼展中间的值
2. 环量随着坐标  $y$  椭圆型地变化, 单位翼展上的升力由下式给出

$$L'(y) = \rho_\infty V_\infty \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}$$

3.  $\Gamma\left(-\frac{b}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)$ , 环量和升力在翼尖出等于 0.

首先, 我们先计算下洗,

$$\frac{d\Gamma}{dy} = -\frac{4\Gamma_0}{b^2} \frac{y}{\left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

带入到下式中

$$w(y_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma/dy}{y_0 - y} dy$$

得到

$$w(y_0) = \frac{\Gamma_0}{\pi b^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{y}{\left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} (y_0 - y)} dy$$

作变量替换

$$y = \frac{b}{2} \cos \theta \quad dy = -\frac{b}{2} \sin \theta d\theta$$

上述积分就变成了

$$w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi b} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta$$

计算得到

$$w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2b}$$

这结果表明, **对于椭圆型升力分布的机翼来说, 下洗速度是一个常数**. 这个结论很有趣也很重要. 我们可以计算得到诱导迎角

$$\alpha_i = -\frac{w}{V_\infty} = \frac{\Gamma_0}{2bV_\infty}$$

对于椭圆型分布的机翼来说, 诱导迎角也是一个常数. 并且, 当翼展趋于无穷大时, 诱导迎角和下洗都趋于 0. 这就是前面我们讨论的翼型理论. 一个关于诱导迎角更有用的公式如下:

$$L = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy$$

再用前面所说的三角代换, 计算这个积分得到

$$L = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma_0 \frac{b}{4} \pi$$

于是就得到了  $\Gamma_0$  的计算公式

$$\Gamma_0 = \frac{4L}{\rho_{\infty} V_{\infty} b \pi}$$

其中  $L = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S C_L$  于是

$$\Gamma_0 = \frac{2V_{\infty} S C_L}{b \pi}$$

诱导迎角的计算公式就可以写成

$$\alpha_i = \frac{2V_{\infty} S C_L}{b \pi} \frac{1}{2bV_{\infty}}$$

或者

$$\alpha_i = \frac{S C_L}{\pi b^2}$$

机翼的一个重要几何参数就是**展弦比 (aspect ratio)**, 这里记作 AR, 即

$$AR = \frac{b^2}{S}$$

于是, 上式就可以写成

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR}$$

诱导阻力系数有下式给出, 请记住诱导迎角是一个常数

$$C_{D,i} = \frac{2\alpha_i}{V_{\infty} S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) dy = \frac{2\alpha_i \Gamma_0}{V_{\infty} S} \frac{b}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi \alpha_i \Gamma_0 b}{2V_{\infty} S}$$

代入  $\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR}$  得到

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR}$$

这是一个很重要的结果, 它表明诱导阻力系数正比于升力系数的平方. 前面我们已经知道, 诱导阻力是翼尖涡出现的结果, 而翼尖涡是由于翼尖处上下表面压强差的结果. 升力也同样是由

于上下表面的压强差产生的。因此,诱导阻力与有限翼展机翼上的升力产生密切相关。事实上,诱导阻力经常被叫做**升致阻力 (drag due to lift)**。显然,任何一架飞机不能免费地产生升力,诱导阻力就是产生升力的代价。飞机克服诱导阻力所需的功率就是产生升力所需的功率。诱导阻力系数随升力系数增大而迅速增大,当升力系数比较大的时候,诱导阻力系数就变成总阻力系数的一个重要组成部分了。

## ✍ 笔记

比如飞机起飞和着陆时,因为飞机的速度比较小,而需要比较大的升力,这个时候就需要我们在上一章中提到的增升装置,当增升装置启用的时候,飞行阻力也会相应变大很多。

甚至在一个很高的巡航速度飞行时,诱导阻力系数都占到总阻力系数的 25%。

另外一个重要的结论是**诱导阻力系数反比于展弦比**。因此,为了减小阻力,我们希望机翼有一个尽可能最大的展弦比。但是,展弦比很大,机翼的结构强度就会相应减小,或者说机翼更难设计。对于一般的飞行器来说,展弦比是气动设计和结构设计中的一个两难的选择。

椭圆型升力分布的机翼的一些其他性质如下。考虑一个没有几何扭转的机翼,同时也没有气动扭转。因为整个机翼上的诱导迎角是一个常数,所以有效迎角也是一个常数,因此当地截面翼型的升力系数如下

$$c_l = a_0(\alpha_{\text{eff}} - \alpha_{L=0})$$

假设每个截面翼型的升力系数曲线的斜率都是  $a_0$ , 都是  $2\pi$ 。因此,沿着翼展方向,升力系数也是常数,单位翼展上的升力由下式给出

$$L'(y)q_\infty c_l$$

于是,我们就可以求得这个机翼的弦长分布

$$c(y) = \frac{L'(y)}{q_\infty c_l}$$

因为动压和升力系数沿着翼展方向都是常数,所以对于这样一个椭圆型升力分布的机翼,弦长沿翼展方向也必须是椭圆型变化的。这种情况下,我们说这个机翼就是椭圆形机翼,即从上往下看,机翼的形状是椭圆形的。

### 8.3.2 一般升力分布

考虑一个积分变换

$$y = -\frac{b}{2}$$



对于任意一个机翼的一般环量分布, 我们可以把  $\Gamma(y)$  展开成一个傅里叶正弦级数, 即

$$\Gamma(\theta) = 2bV_\infty \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta$$

于是我们就可以得到

$$\frac{d\Gamma}{dy} = 2bV_\infty \sum_{n=1}^N n \cos n\theta \frac{d\theta}{dy}$$

几何攻角的计算公式如下

$$\alpha(\theta_0) = \frac{2b}{\pi c(\theta_0)} \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta + \alpha_{L=0}(\theta_0) + \sum_{n=1}^N \frac{\sin n\theta_0}{\theta_0}$$

给出升力系数计算公式

$$C_L = \frac{2b^2}{S} \sum_{n=1}^N A_n \int_0^\pi \sin n\theta \sin \theta d\theta$$

计算上面这个积分得到

$$C_L = A_1 \pi AR$$

诱导阻力系数的计算公式

$$C_{D,i} = \frac{2b^2}{S} \int_0^\pi \left( \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta \right) \alpha_i(\theta) \sin \theta d\theta$$

诱导迎角的计算公式

$$\alpha_i(y_0) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N n A_n \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \theta_0} d\theta$$

于是

$$\alpha_i(\theta_0) = \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin n\theta_0}{\sin \theta_0}$$

代入到诱导阻力的计算公式中

$$C_{D,i} = \pi AR A_1^2 \left[ 1 + \sum_{n=2}^N n \left( \frac{A_n}{A_1} \right)^2 \right]$$

将升力系数的计算公式代入, 并令  $\delta = \sum_{n=2}^N n (A_n/A_1)^2$  得到

$$\begin{aligned} C_{D,i} &= \frac{C_L^2}{\pi AR} (1 + \delta) \\ &= \frac{C_L^2}{\pi e AR} \end{aligned}$$

其中  $e = (1 + \delta)^{-1}$ , 并且  $e$  是一个小于 1 的系数. 当  $\delta = 0$  和  $e = 1$  的时候, 升力分布是一个椭圆型的升力分布.

### 8.3.3 展弦比的影响

从诱导阻力系数的计算公式中, 可以发现展弦比和诱导阻力系数是反比关系. 因此, 最小化诱导阻力的主要设计因素不是让升力分布更加接近椭圆形而是展弦比尽可能大. 回忆一下, 总阻力系数由下式给出

$$C_D = c_d + \frac{C_L^2}{\pi e AR}$$

不难得出总阻力系数和升力系数是二次相关的.

翼型和机翼的性质有两个主要的差别. 一个是前面讨论的诱导阻力系数, 即机翼会产生诱导阻力; 另外一个接下来要讨论的升力系数曲线. 定义机翼的升力线斜率是  $a = \frac{dC_L}{d\alpha}$ . 与当地截面翼型的升力线斜率相比, 我们知道  $a < a_0$ . 这是因为诱导迎角的存在, 使得有效迎角小于实际迎角. 但是零升迎角却没有发生变化, 这就相当于  $x$  轴被拉长了. 也就是

$$\frac{dC_l}{d(\alpha - \alpha_i)} = a_0$$

积分我们得到

$$C_L = a_0(\alpha - \frac{C_L}{\pi AR}) + const$$

整理一下, 不难得到

$$a = \frac{a_0}{1 + \frac{a_0}{\pi AR}}$$

上式只适用于椭圆形机翼, 对于一般升力分布的机翼来说, 升力线斜率的计算公式如下

$$a = \frac{a_0}{1 + (1 + \tau) \frac{a_0}{\pi AR}}$$

$\tau$  是傅里叶级数系数  $A_n$  的函数, 一般  $0.05 \leq \tau \leq 0.25$

展弦比越大, 机翼的升力线斜率就越接近翼型的升力线斜率.

## 8.4 总结

在总结之前, 请确保你对一下概念都是熟悉的, 请保证你对一下的内容式舒适的.

## 📁 总结

1. 展弦比      根梢比      诱导阻力      下洗      诱导迎角      有效迎角      几何迎角

2. 诱导迎角, 几何迎角, 有效迎角之间的关系

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i$$

3. 椭圆形机翼的计算公式

a) 下洗

$$w = -\frac{\Gamma_0}{2b}$$

b) 诱导迎角

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR}$$

c) 诱导阻力系数

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR}$$

d) 升力线斜率

$$a = \frac{a_0}{1 + \frac{a_0}{\pi AR}}$$

4. 一般机翼

a) 诱导阻力系数

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR}(1 + \delta) = \frac{C_L^2}{\pi e AR} \quad (8.1)$$

b) 升力线斜率

$$a = \frac{a_0}{1 + (1 + \tau) \frac{a_0}{\pi AR}} \quad (8.2)$$

## 第三部分

### 附录

## 附录 A 积分

### A.1 第一个积分

求积分

$$\int \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) M} dM$$

首先, 换元, 令  $M = \sec \alpha$ , 得到  $dM = \tan \alpha \sec \alpha d\alpha$ , 则有  $\tan \alpha = \sqrt{M^2 - 1}, \alpha = \arctan \sqrt{M^2 - 1}$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) M} dM &= \int \frac{\tan^2 \alpha \cdot \sec \alpha}{\sec \alpha \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \sec^2 \alpha\right)} d\alpha \\ &= \int \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \sec^2 \alpha} d\alpha \\ &= \int \left(-1 + \frac{\gamma+1}{2 \cos^2 \alpha + \gamma-1}\right) d\alpha \\ &= -\alpha + \int \frac{\gamma+1}{\frac{2}{1+u^2} + \gamma-1} \cdot \frac{du}{1+u^2} \\ &= -\alpha + \int \frac{1}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} u^2 + 1} du \\ &= -\alpha + \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} u\right)^2 + 1} d\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} u\right) \\ &= -\alpha + \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} u \\ &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2 - 1) - \arctan \sqrt{M^2 - 1} \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{分子分母同乘} \\ \cos^2 \alpha, \text{并约化} \\ u = \tan \alpha \\ d\alpha = \frac{du}{1+u^2} \end{array} \right\}$

### A.2 第二个积分

证明定积分

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \frac{\pi \sin n\theta_0}{\sin \theta_0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

积化和差公式

$$\begin{aligned} \cos \theta - \cos \theta_0 &= \cos \left( \frac{\theta + \theta_0}{2} + \frac{\theta - \theta_0}{2} \right) - \cos \left( \frac{\theta + \theta_0}{2} - \frac{\theta - \theta_0}{2} \right) \\ &= -2 \sin \frac{\theta + \theta_0}{2} \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin \left( \frac{\theta + \theta_0}{2} + \frac{\theta - \theta_0}{2} \right) \\ &= \cos \frac{\theta + \theta_0}{2} \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} + \cos \frac{\theta - \theta_0}{2} \sin \frac{\theta + \theta_0}{2} \end{aligned}$$

那么

$$\frac{2 \sin \theta_0}{\cos \theta - \cos \theta_0} = \cot \frac{\theta_0 - \theta}{2} + \cot \frac{\theta_0 + \theta}{2}$$

考虑积分

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} \sin \theta_0 d\theta = \int_0^\pi \left( \cot \frac{\theta_0 - \theta}{2} + \cot \frac{\theta_0 + \theta}{2} \right) \cos n\theta d\theta$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cot \frac{\theta_0 - \theta}{2} \cos n\theta d\theta &\stackrel{\text{用 } -\theta \text{ 换 } \theta}{=} \int_{-\pi}^0 \cot \frac{\theta_0 + \theta}{2} \cos n\theta d\theta \\ \int_0^\pi \cot \frac{\theta_0 + \theta}{2} \cos n\theta d\theta &\stackrel{\text{用 } -\theta \text{ 换 } \theta}{=} \int_{-\pi}^0 \cot \frac{\theta_0 - \theta}{2} \cos n\theta d\theta \\ \int_0^\pi \left( \cot \frac{\theta_0 - \theta}{2} + \cot \frac{\theta_0 + \theta}{2} \right) \cos n\theta d\theta &= \int_{-\pi}^0 \left( \cot \frac{\theta_0 + \theta}{2} + \cot \frac{\theta_0 - \theta}{2} \right) \cos n\theta d\theta \end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left( \cot \frac{\theta_0 - \theta}{2} + \cot \frac{\theta_0 + \theta}{2} \right) \cos n\theta d\theta &= \int_0^\pi \cot \frac{\theta_0 - \theta}{2} \cos n\theta d\theta + \int_0^\pi \cot \frac{\theta_0 + \theta}{2} \cos n\theta d\theta \\ &= \int_{-\pi}^0 \cot \frac{\theta_0 + \theta}{2} \cos n\theta d\theta + \int_0^\pi \cot \frac{\theta_0 + \theta}{2} \cos n\theta d\theta \\ &= \int_{-\pi}^\pi \cot \frac{\theta_0 + \theta}{2} \cos n\theta d\theta \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left( \cot \frac{\theta_0 + \theta}{2} + \cot \frac{\theta_0 - \theta}{2} \right) \cos n\theta \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \cot \frac{\theta_0 + \theta}{2} \cos n\theta \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \cos n(t - \theta_0) \cot \frac{t}{2} \, dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} (\cos nt \cos n\theta_0 + \sin nt \sin n\theta_0) \cot \frac{t}{2} \, dt \\
 &= \frac{\cos n\theta_0}{2} \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \cos nt \cot \frac{t}{2} \, dt + \frac{\sin n\theta_0}{2} \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \sin nt \cot \frac{t}{2} \, dt
 \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} t = \theta + \theta_0 \\ \text{展开 } \cos n(t - \theta_0) \end{array} \right\}$

其中  $\sin n\theta_0$  和  $\cos n\theta_0$  都是和积分变量无关的常数.

下证积分

$$\int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \cos nt \cot \frac{t}{2} \, dt = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

显然

$$\int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \sin nt \, dt = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

而积分

$$\begin{aligned}
 \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \sin(n-1)t \cos t \, dt &= \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \sin(n-1)t \, d \sin t \\
 &= \sin(n-1)t \sin t \Big|_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} - \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \sin t (n-1) \cos(n-1)t \, dt \\
 &= (n-1) \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \cos(n-1)t \, d \cos t \\
 &= (n-1) \cos t \cos(n-1)t \Big|_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} + \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} (n-1)^2 \sin(n-1)t \cos t \, dt \\
 &= (n-1)^2 \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \sin(n-1)t \cos t \, dt
 \end{aligned}$$

所以积分

$$\int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \sin(n-1)t \cos t \, dt = 0$$

同理可证下面积分

$$\begin{aligned}
 \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \sin(n-1)t \sin t \, dt &= 0 \\
 \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \cos(n-1)t \cos t \, dt &= 0
 \end{aligned}$$

$$\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \cos(n-1)t \sin t \, dt = 0$$

于是

$$\begin{aligned} \cos nt \cdot \cot \frac{t}{2} &= \cos nt \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \\ &= \cos nt \frac{\cos^2 \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} \\ &= \cos nt \frac{1 + \cos t}{\sin t} \\ &= \cos[(n-1)t + t] \frac{1 + \cos t}{\sin t} \\ &= [\cos(n-1)t \cos t - \sin(n-1)t \sin t] \frac{1 + \cos t}{\sin t} \\ &= \frac{\cos(n-1)t \cos t (1 + \cos t)}{\sin t} - \sin(n-1)t - \sin(n-1)t \cos t \end{aligned}$$

记  $I_n = \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \cos nt \cot \frac{t}{2} \, dt$ , 那么

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \cos t \cot \frac{t}{2} \, dt \\ &= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \cos t \frac{1 + \cos t}{\sin t} \, dt \\ &= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{\cos t + \cos^2 t}{\sin t} \, dt \\ &= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{\cos t + 1 - \sin^2 t}{\sin t} \, dt \\ &= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \left( \cot \frac{t}{2} + \sin t \right) \, dt \\ &= 0 \end{aligned}$$



所以

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \cos nt \cot \frac{t}{2} dt = \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{\cos(n-1)t \cos t (1 + \cos t)}{\sin t} dt - \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \sin(n-1)t dt \\
 &\quad - \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \sin(n-1)t \cos t dt \\
 &= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{\cos(n-1)t \cos t (1 + \cos t)}{\sin t} dt \\
 &= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{\cos(n-1)t (\cos t + \cos^2 t)}{\sin t} dt \\
 &= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{\cos(n-1)t (\cos t + 1 - \sin^2 t)}{\sin t} dt \\
 &= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{(1 + \cos t) \cos(n-1)t}{\sin t} dt - \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \cos(n-1)t \sin t dt \\
 &= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{(1 + \cos t) \cos(n-1)t}{\sin t} dt \\
 &= I_{n-1}
 \end{aligned}$$

所以  $I_n = I_{n-1} = \cdots = I_1 = 0$ . 同上可证

$$\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \sin nt \cot \frac{t}{2} dt = \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \sin(n-1)t \cot \frac{t}{2} dt$$

而

$$\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \sin t \cot \frac{t}{2} dt = 2\pi$$

所以

$$\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \sin nt \cot \frac{t}{2} dt = 2\pi$$

所以

$$I = \frac{\sin n\theta_0}{2} \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \sin nt \cot \frac{t}{2} dt = \pi \sin n\theta_0$$

原积分

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \frac{\pi \sin n\theta_0}{\sin \theta_0}$$

### A.3 第三个积分

证明

$$\int_0^\pi \frac{\sin n\theta \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = -\pi \cos n\theta_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

由积化和差公式

$$\sin n\theta \sin \theta = \frac{1}{2} [\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta]$$

所以原积分

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{\sin n\theta \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos(n-1)\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi \sin(n-1)\theta_0}{\sin \theta_0} - \frac{\pi \sin(n+1)\theta_0}{\sin \theta_0} \right) \\ &= -\pi \cos n\theta_0 \end{aligned}$$

## 附录 B 开尔文环量定理证明

考虑无粘不可压流动, 由环量定义有

$$\Gamma = \oint_c \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$$

由于力学中, 函数的性质都很好, 所以微分运算和积分运算可以直接交换次序. 即

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \oint_c \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \oint_c \frac{D}{Dt} (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}) \\ &= \oint_c \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} + \mathbf{V} \cdot \frac{D(d\mathbf{s})}{Dt} \end{aligned}$$

因为

$$\frac{D(d\mathbf{s})}{Dt} = d\mathbf{V}$$

$\mathbf{V}$  是一个单值函数, 所以

$$\begin{aligned} \oint_c \mathbf{V} \cdot \frac{D(d\mathbf{s})}{Dt} &= \oint_c \mathbf{V} \cdot d\mathbf{V} \\ &= \oint_c (d\frac{V^2}{2}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_c \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot d\mathbf{s}$$

由动量方程,  $\frac{D\mathbf{V}}{Dt}$  是加速度, 也即单位质量流体受到的合外力. 所以

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P$$

而

$$\begin{aligned} \nabla P \cdot d\mathbf{s} &= \left( \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \\ &= dP (\text{全微分定义}) \end{aligned}$$

---

于是

$$\begin{aligned}\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P \cdot d\mathbf{s} \\ &= -\frac{1}{\rho} dP\end{aligned}$$

于是

$$\oint_c \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} = \oint_c -\frac{1}{\rho} dP = 0$$

其中  $\rho = \text{常数}$  或者  $\rho = \rho(P)$ , 即为不可压流动, 或者是密度只是压强的函数的流动.