力学笔记

朱荣博

目录

第一部分

空气动力学

第一章　基础知识

流体力学认为物体的存在形态只有固态和液态两种形态，区别在于固体可以通过产生有限的形变来承受剪切应变.

流体力学作出的基本假设是连续介质假设. 即把流体看成连续不断，没有间隙，始终充满整个空间的连续介质.

控制体是在流场中一个有限封闭区域，这个区域就定义了一个控制体. 控制体可大可小，而这个控制体的封闭表面就是控制面. 换句话说，一个控制体对应着一个控制面. 控制体是固定在流场中的，流体从控制面流入. 然后再流出. 当然，控制体也可以随着流体运动，而与周围的流体没有交换. 当控制体的体积趋于微元的控制体的时候，称为微元体.

笔记

微元的体积不能无限小，否则不满足连续介质假设了.

流体具有压缩性，粘性，传热性等性质.

1. 压缩性是指流体可以被压缩，压缩时流体的体积发生变化. 此时流体的密度一般也要发生变化.
2. 粘性是指两层相邻速度不同的流体之间存在着相互牵扯的力，称作粘性力或者内摩擦力. 这个力的大小与接触面法线的方向的速度梯度成正比.

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}$$

3. 传热性是指流体沿某一方向存在温度梯度时，热量就会从温度高的地方传向温度低的地方.

流体的几个状态参数是压强 P，温度 T，密度 ρ，速度 $\mathbf{V}$，焓值 h 等. 这些参数都是关于 x,y,z,t 的函数，也就是关于坐标和时间的函数. 其中坐标也是时间 t 的函数.

定常是指流体的状态参数和时间变化无关.

1.1 流体模型

1. 理想流体

   不考虑流体的粘性作用的流体模型.

2. 不可压流体

   不考虑流体压缩性的流体模型. 不可压流体流场中流体的密度是常数, 即密度是定常的.

3. 绝热流体

   不考虑流体传热性的流体模型, 即与外界没有热交换.

1.2 量纲分析：白金汉 Π 定理 (Dimensional Analysis: The BuckingHam PI Theorem)

考虑一个给定形状的翼型在一定的攻角下, 它受到的总空气动力是 R. 在物理、直观的基础上, 我们期望 R 取决于:

1. 自由来流的速度 V_∞.
2. 自由来流的密度 ρ_∞.
3. 流体的黏度. 我们已经知道剪切力 τ 贡献了空气动力和空气动力矩, 并且 τ 正比于流体的流动的速度梯度. 例如, 如果给定速度梯度 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, 那么 $\tau = \mu\dfrac{\partial u}{\partial y}$. 这个常数的比例值 μ 就是粘性系数. 因此, 我们用自由来流的粘性系数 μ_∞ 来表示粘度对气动力和力矩的影响.
4. 翼型的尺寸, 以翼型的参考长度为代表. 方便的参考长度是弦长 c.
5. 流体的可压性. 可压性和遍及全流场的密度变化相关. 相应的, 可压性和流动过程中的声速相关. 因此, 我们用自由来流的声速 a_∞ 来表示可压性对气动力和力矩的影响.

鉴于以上, 在没有任何关于 R 变化的先验知识下, 我们可以用常识写出:

$$R = f(\rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty, a_\infty)$$

上式就是一般的函数关系, 对于计算 R 就不太实用. 原则上, 我们可以将给定的翼型放到风洞中, 倾斜到给定的攻角, 然后一次一个地系统性地测量 R 由于 ρ_∞,V_∞,c,μ_∞, 和 a_∞ 的变化而引起的变化. 通过交叉绘制这样获得的大量数据, 我们就能提取出对于 $R = f(\rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty, a_\infty)$ 的精确函数关系. 然而, 这肯定是一项艰苦的工作, 而且就所需的大量风洞实验的时间而言,

这肯定是昂贵的．幸运的是，首先采用量纲分析的方法，我们可以简化问题，大大减少我们的时间和精力．

这个方法先定义一组关于气动力和力矩的无量纲参数；这组参数将大大减少出现在 $R = f(\rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty, a_\infty)$ 中自变量的数量．

量纲分析基于一个很明显的事实，即对于真实物理世界中的方程，每一项都必须具有相同的量纲．例如，如果

$$\Psi + \eta + \xi = \Phi$$

是一个物理关系，那么 Ψ,η,ξ 和 Φ 必须具有相同的量纲．否则，我们就会把苹果和橘子加起来．上面那个方程可以通过除以其中任何一个因子而变成无量纲的，比如 Φ:

$$\frac{\Psi}{\Phi} + \frac{\eta}{\Phi} + \frac{\xi}{\Phi} = 1$$

这些思想在白金汉 Π 定理中有正式的体现．如下所示．

笔记

白金汉 Π 定理

设 K 表示描述物理变量所需的基本量纲数量．（在力学中，所有的物理变量都可以用质量，长度，时间的量纲来表示；因此，$K = 3$.）设 $P_1,P_2,\cdots,P_N$ 表示在下述物理关系中的 N 个物理变量

$$f_1(P_1, P_2, \ldots, P_N) = 0$$

然后，上面的物理关系就可以重新表示为 $(N - K)$ 个无量纲积 (Π 积) 的关系，

$$f_2(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{N-K}) = 0$$

在这些无量纲积中，每个 Π 积是一个有一组 K 个物理变量乘上一个其他物理变量的无量纲积．设 $P_1,P_2,\cdots, P_K$ 是被选择的 K 个物理变量，那么：

$$\Pi_1 = f_3(P_1, P_2, \ldots, P_K, P_{K+1})$$

$$\Pi_2 = f_4(P_1, P_2, \ldots, P_K, P_{K+2})$$

$$\Pi_3 = f_5(P_1, P_2, \ldots, P_K, P_{K+3})$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$\Pi_{N-K} = f_5(P_1, P_2, \ldots, P_K, P_N)$$

重复变量的选择，$P_1,P_2,\cdots,P_K$ 应该包含用于这个问题的所有量纲．当然，这些相互独立的变量应当只在 Π 积中出现一次．

回到，我们考虑的对于给定攻角和给定翼型的气动力和力矩的问题中，方程

$$R = f(\rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty, a_\infty)$$

可以写成

$$g(R, \rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty, a_\infty) = 0$$

的形式．根据白金汉 Π 定理，基本的量纲是

$$m = \text{质量的量纲}$$

$$l = \text{长度的量纲}$$

$$t = \text{时间的量纲}$$

因此，$K = 3$．物理变量和他们的量纲是

$$[R] = mlt^{-2}$$

$$[\rho_\infty] = ml^{-3}$$

$$[V_\infty] = lt^{-1}$$

$$[c] = l$$

$$[\mu_\infty] = ml^{-1}t^{-1}$$

$$[a_\infty] = lt^{-1}$$

因此，$N = 6$．在上述，气动力 R 的量纲是通过牛顿第二定律获得的，力 = 质量 × 加速度；因此 $[R] = mlt^{-2}$．μ_∞ 的量纲是通过它的定义获得的，并且使用了牛顿第二定理．将 ρ_∞, V_∞ 和 c 作为任意选取 K 个物理变量中的几个．那么

$$g(R, \rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty, a_\infty) = 0$$

可以用 $N - K = 6 - 3 = 3$ 个无量纲 Π 积来重新表示:

$$f_2(\Pi_1, P_2, P_3) = 0$$

这些 Π 积是:

$$\Pi_1 = f_3(\rho_\infty, V_\infty, c, R)$$

$$\Pi_2 = f_4(\rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty)$$

$$\Pi_3 = f_5(\rho_\infty, V_\infty, c, a_\infty)$$

首先，集中注意在 Π_1 上，从上述方程组中的第一个，假定

$$\Pi_1 = \rho_\infty^d V_\infty^b c^e R$$

d,b,e 是需要找到的指数．在量纲上，上式就是

$$[\Pi_1] = (ml^{-3})^d(lt^{-1})^b(l)^e(mlt^{-2})$$

因为 Π_1 是无量纲的，因此，上面方程的右边就必须是无量纲的．这意味着量纲 m 的指数加起来必须是 0，对于量纲 l 和 t 也是一样的．因此

$$\begin{aligned}
\text{对于}m\text{：}\ d+l &= 0\\
\text{对于}l\text{：}\ -3d+b+e+1 &= 0\\
\text{对于}t\text{：}\ -b-2 &= 0
\end{aligned}$$

解上述方程，我们可以得到 $d=-1$,$b=-2$ 和 $e=-2$．代入到方程

$$\Pi_1 = \rho_\infty^d V_\infty^b c^e R$$

中，得到

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= R\rho_\infty^{-1}V_\infty^{-2}c^{-2}\\
&= \frac{R}{\rho_\infty V_\infty^2 c^2}
\end{aligned}$$

物理量 $\dfrac{R}{\rho_\infty V_\infty^2 c^2}$ 是一个无量纲的参数，其中 c^2 是一个面积，我们可以将 c^2 替换为任何我们希望的参考面积（例如机翼的平面面积 S），并且 Π_1 将依然是无量纲的．更重要的是，我们可以将 Π_1 乘一个纯粹的数量，并且它依然是无量纲的．因此，从上面的方程，Π_1 可以被定义为

$$\Pi_1 = \frac{R}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S} = \frac{R}{q_\infty S}$$

因此，Π_1 是气动力系数 C_R．在上式中，S 就是和给定翼型有着密切关系的参考面积.

剩余的 Π 积可以按照相同的方法求出来．假设

$$\Pi_2 = \rho_\infty V_\infty^h c^i \mu_\infty^j$$

参考上述的分析，我们可以获得

$$[\Pi_2] = (ml^{-3})(lt^{-1})^h(l)^i(ml^{-1}t^{-1})^j$$

因此，

$$\begin{aligned}
1+j &= 0\\
-3+h+i-j &= 0\\
-h-j &= 0
\end{aligned}$$

因此，$j=-1, h=1$, 和 $i=1$．代入到上式中就有

$$\Pi_2=\frac{\rho_\infty V_\infty c}{\mu_\infty}$$

这个无量纲结合体被定义为雷诺数．雷诺数是在流动中物理测量的惯性力和粘性力的比值，并且在流体力学中是最有力的参数之一．

再假设

$$\Pi_3=V_\infty \rho_\infty^k c^r a_\infty^s$$

$$[\Pi_3]=(lt^{-1})(ml^{-3})^k(l)^r(lt^{-1})^s$$

同样得到方程组

$$k=0$$

$$1-3k+r+s=0$$

$$-1-s=0$$

因此，$k=0, s=-1, r=0$．代入到上式有，

$$\Pi_3=\frac{V_\infty}{a_\infty}$$

这个无量纲量被定义为马赫数 $M=\dfrac{V_\infty}{a_\infty}$．马赫数是流动速度和声速的比值；它是研究气体动力的强有力的参数．

无量纲分析的结果可以被写成如下

$$f_2\left(\frac{R}{\frac{1}{2}\rho_\infty v_\infty^2 S}, \frac{\rho_\infty V_\infty c}{\mu_\infty}, \frac{V_\infty}{a_\infty}\right)=0$$

$$f_2(C_R, Re, M_\infty)=0$$

$$C_R=f_6(Re, M_\infty)$$

这是一个重要的结果！在一开始，R 被表示成有 5 个独立变量的一般函数关系．然而，我们的量纲分析已经表示成：

1．R 可以被表示为无量纲气动力系数的项，$C_R=\dfrac{R}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S}$.

2．C_R 只是 Re 和 M_∞ 的函数.

因此，通过用白金汉 Π 定理，可以减少不相互独立变量的数目，即从 5 个变量减少成 2 个变量．现在，如果我们希望对一个给定的翼型在一个固定的攻角下，做一系列风洞测试，我们只需要变化雷诺数和马赫数去获得数据得到 R 的计算公式．通过很少的分析，我们就已经节约

了很多努力和大量的风洞时间．更重要的是，我们定义了两个控制流动的无量纲参数，雷诺数和马赫数．它们叫做**相似参数 (similarity parameters)**．因为升力和阻力都是总空气动力的分量，因此

$$C_L = f_7(Re, M_\infty)$$

$$C_D = f_8(Re, M_\infty)$$

更重要的是，这个关系对于气动力矩也成立，即

$$C_M = f_9(Re, M_\infty)$$

请记住, 上述关系是对于给定翼型在固定攻角下成立的. 如果 α 是允许可变的, 那么 C_L,C_D,C_M 都是依赖于变量 α 的．因此

$$C_L = f_{10}(Re, M_\infty, \alpha)$$

$$C_D = f_{11}(Re, M_\infty, \alpha)$$

$$C_M = f_{12}(Re, M_\infty, \alpha)$$

上述方程的前提是假定翼型形状是给定的．大量的理论和实验都聚焦在获取对于固定翼型形状的清晰的表达式，即上述方程.

1.3　气动力和气动力矩

气动力的来源主要有两部分，即:

1．作用在机翼表面的压强力.

2．作用在机翼表面的剪切力.

无论机翼形状多么复杂，气动力和气动力矩总是来源于上述两个方面．一般把垂直于机翼表面的力称作**压强力 (pressure stress)**．平行于机翼表面的力称作**剪切力 (shear stress)**．将压强力和剪切力沿机翼表面积分，得到总空气动力 R 和总空气动力矩 M，并将总空气动力的作用点叫做**压心**．如下图1.1，将机翼远前方的气流速度记作 V_∞，远离机翼的流体也叫做**自由来流 (freestream)**，因此，V_∞ 也叫做自由来流速度.

把总空气动力 R 在垂直于自由来流速度 V_∞ 方向上的分量叫做**升力 (lift)**，记作 L．把总空气动力 R 在平行于自由来流速度 V_∞ 方向的分量叫做**阻力 (drag)**，记作 D.

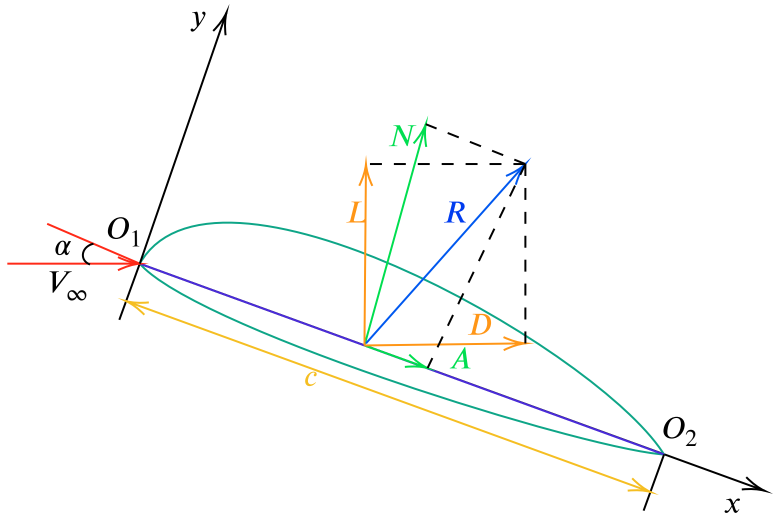


图 1.1: 机翼气动力图

总空气动力 R 的大小和自由来流的密度，速度，机翼的弦长，自由来流的粘性，自由来流的声速大小有关，即

$$R = f(\rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty, a_\infty)$$

也可以写成

$$C_R = f(\mathrm{Re}, M_\infty)$$

其中

$$C_R = \frac{R}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S}$$

弦长 (chord) c 是从机翼的前缘点到后缘点的直线距离．有时，R 可以被分解成垂直弦长的正压力 N 和平行于弦长的轴向力 A.

攻角 (angle of attack) α 是弦长 c 和自由来流速度 V_∞ 的夹角，又称为飞行迎角．同时，攻角也是 L 和 N 的夹角或 D 和 A 的夹角．它们之间的几何关系是

$$L = N\cos\alpha - A\sin\alpha$$

$$D = N\sin\alpha + A\cos\alpha$$

自由来流的速度和密度分别是 V_∞,ρ_∞．自由来流的动压 q_∞ 就是

$$q_\infty = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2$$

另外，给出特征面积 S 和特征长度 l, 具体见下图1.2，给出气动力系数和气动力矩系数的计算

公式:

$$C_L = \frac{L}{q_\infty S}$$
$$C_D = \frac{D}{q_\infty S}$$
$$C_M = \frac{M}{q_\infty S l}$$

由于，升力和阻力都是总空气动力的分量，因此

$$C_L = f_1(\mathrm{Re}, M_\infty, \alpha)$$
$$C_D = f_2(\mathrm{Re}, M_\infty, \alpha)$$
$$C_M = f_3(\mathrm{Re}, M_\infty, \alpha)$$

笔记

下标 ∞ 表示单位翼展长度上的气动力和气动力矩，与三维气动力和气动力矩的符号区分开.

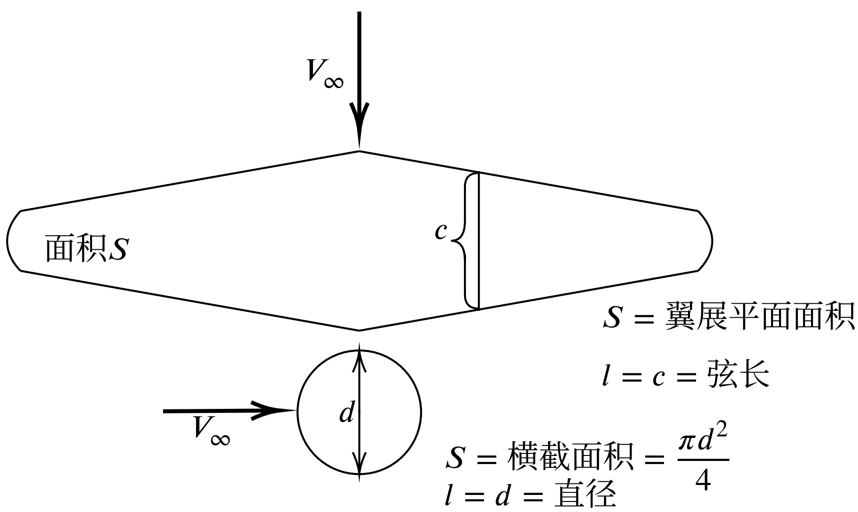


图 1.2: 机翼特征尺寸

对于二维平面的机翼，也就是单位长度上的升力 L 和阻力 D，力矩 M. 特征面积 $S = c(1) = c$, 上述气动力系数和气动力矩系数写成

$$c_l = \frac{L}{q_\infty c}$$
$$c_d = \frac{D}{q_\infty c}$$
$$c_m = \frac{M}{q_\infty c^2}$$

压强系数是自由来流的压强 P_∞ 和与机翼上压强 P 的差值与动压的比值．即

$$C_P = \frac{P - P_\infty}{q_\infty}$$

表面摩擦系数

$$C_f = \frac{\tau}{q_\infty}$$

升阻比是机翼的升力和阻力的比值即

$$\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D}$$

压心 (center of pressure) 是总空气动力的作用点，同时对压心取矩为 0.

笔记

对于压心的定义可以参考如下:

It is the location where the resultant of a distributed load effectively acts on the body.If moments were taken about the center of pressure, the integrated effect of the distributed loads would be zero.

如果将气动力平移到机翼**前缘点 (leading edge)** 位置 (图1.3)，同时产生一个力矩 M_{LE}，称为**前缘力矩**，那么压心的位置 x_{cp} 由下式给出

$$x_{cp} = -\frac{M_{LE}}{L}$$

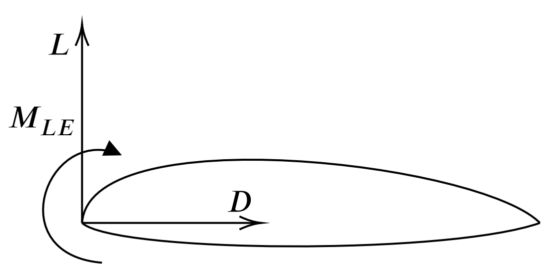


图 1.3: 前缘力矩

一般规定，使得飞机抬头的力矩为正，使得飞机低头的力矩为负．或者说，使得飞行迎角增大的力矩为正.

当气动力 N 和 A 减小时，x_{cp} 增大．当气动力趋近于 0 时，压心就移动到无穷远处了.

第二章　场论基础知识

在介绍场论基础知识之前，这里不加约定地将速度场 $\mathbf{V}$ 认为是矢量场，而密度场 ρ，压强场 P，温度场 T 等是标量场．如无特殊说明，均认为上述参数是定常的．在引入新的场变量时，用加粗字母表示矢量，不加粗字母表示数量．比如 $\mathbf{V}$ 时矢量场，但是 V 时标量场．

2.1　梯度，旋度，散度

2.1.1　梯度计算

对于标量场 $\rho=\rho(x,y,z)$，它的梯度是

$$\nabla\rho=\frac{\partial\rho}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\mathbf{k}$$

标量场的梯度是一个向量，是这个标量函数下降最快的方向．记作 $\mathbf{grad}\,\rho$.

2.1.2　旋度计算

对于矢量场 $\mathbf{V}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}$，它的旋度是

$$\nabla\times\mathbf{V}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ u & v & w\end{vmatrix}$$

记作 $\mathbf{rot}\,\mathbf{V}$ 或者 $\mathbf{curl}\,\mathbf{V}$.

注意 **标量场梯度的旋度恒等于 0.**

2.1.3　散度

对于向量场 $\mathbf{V}$，它的散度是

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

记作 div $\mathbf{V}$.

笔记

梯度计算是对于标量场，而散度，旋度均是对于向量场．梯度和旋度的计算结果是向量，而散度的计算结果是标量．

2.2 斯托克斯公式，散度定理，梯度定理

假设有一个封闭曲面 S，$\mathbf{A}$ 是一个在封闭曲面 S 上有定义的矢量场．

根据斯托克斯公式有 (该公式中 S 是非封闭曲面，C 是非封闭曲面 S 的边界曲线)

$$\oint_C \mathbf{A} \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S$$

也就是矢量场 $\mathbf{A}$ 沿非封闭曲面 S 的边界曲线 C 的积分等于 $\mathbf{A}$ 的旋度在非封闭曲面上的积分．

根据散度定理有

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S = \iiint_v (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathrm{d}v$$

也就是矢量场 $\mathbf{A}$ 在封闭曲面上面的积分等于这个矢量场在由这个封闭曲面包裹的闭空间中对体积的积分．

对于一个标量场 P，由梯度定理有

$$\oiint_S P\mathbf{n} \mathrm{d}S = \iiint_v \nabla P \mathrm{d}v$$

例题 2.1

题目 有一个矢量场 $\mathbf{V} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j}$ 求 $\mathbf{V}$ 的旋度，散度，散度的梯度．

$$\begin{aligned}
\mathbf{curl}\,\mathbf{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2)\right)\mathbf{k} \\
&= (2x + 2y)\mathbf{k} \\
\mathrm{div}\,\mathbf{V} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) \\
&= 2x - 2y \\
\mathbf{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{V}) &= \frac{\partial}{\partial x}(2x - 2y)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(2x - 2y)\mathbf{j} \\
&= 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}
\end{aligned}$$

♣

笔记

标量场和矢量场的差别在于, 标量场是没有方向的, 是一个数量场, 也就是 $\rho = \rho(x,y,z)$, 是关于 x,y,z 的函数. 矢量场是由向量组成的, 是有方向的, 也就是 $\mathbf{V} = u(x,y,z)\mathbf{i} + v(x,y,z)\mathbf{j} + w(x,y,z)\mathbf{k}$, 每个分量都是位置的函数.

2.3 并矢

将两个矢量写在一起称为并矢, 如 $\mathbf{VV}$. 给定矢量 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. 并矢的计算的定义是

$$\boldsymbol{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \alpha_2\beta_3 \\ \alpha_3\beta_1 & \alpha_3\beta_2 & \alpha_3\beta_3 \end{bmatrix}$$

对于速度场的并矢 $\mathbf{V} = (u, v, w)$, 其中 u,v,w 都是关于 x,y,z 的函数, 如果非定常, 还是关于时间 t 的函数.

$$\mathbf{VV} = \begin{bmatrix} u^2 & uv & uw \\ vu & v^2 & vw \\ wu & wv & w^2 \end{bmatrix}$$

速度场并矢的散度计算如下,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{VV}) &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 & uv & uw \\ vu & v^2 & vw \\ wu & vw & w^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(u^2 + uv + uw) & \dfrac{\partial}{\partial y}(uv + v^2 + vw) & \dfrac{\partial}{\partial z}(uw + vw + w^2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

并矢的散度是一个向量.

注意 **并矢已经不是向量场, 而是一个张量, 是一个二阶张量函数.**

2.4 物质导数

流体的状态参数是位置和时间的函数, 对于速度 $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x,y,z,t)$, 加速度就是速度 $\mathbf{V}$ 对于时间的导数, 但是流体的位置也是关于时间的函数, 因此引入物质导数 $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$.

定义物质导数的计算

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

用梯度算子可以写成

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$$

物质导数的物理意思是运动流体质点的某个量随时间的变化率. $\frac{\partial}{\partial t}$ 是当地导数，物理含义是确定空间点上的某个量随时间的变化率. $\mathbf{V} \cdot \nabla$ 是牵连导数，物理含义是具有空间不均匀流场中，由于质点的位置变化而导致某个量随时间的变化.

速度的物质导数就是加速度.

2.4.1　速度散度的物理意义

速度散度也可以表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{\delta v}\frac{\mathrm{D}(\delta v)}{\mathrm{D}t}$$

其物理意义是，标定流体微团在运动过程中体积对时间的变化率就是速度的散度.

第三章　基本方程

3.1　连续方程

3.1.1　微分形式

连续方程反应了质量守恒这个基本定律，也就是流入控制体的质量和流出控制体的质量(负质量) 以及控制体内部的质量和是保持不变的.

也可以描述为，随流体运动的流体微团内的流体质量是保持不变的．假设流体微团的体积为 δv，质量为 $\rho\delta v$，流速是 $\mathbf{V}$，流体微团内部的质量是定常的，有

$$\frac{\mathrm{D}(\rho\delta v)}{\mathrm{D}t} = 0$$

因此有

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$$

这就是连续方程．可以写成

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) = 0$$

这就是流场中某点的流动变量之间的关系.

3.1.2　积分形式

单位时间内，流过微元面 $\mathrm{d}S$ 的流体质量就是流过该微元面的质量流量 $\dot{m}$，单位是 Kg/s. 连续方程的积分形式用质量表述为

$$\dot{m} = \rho V_n \mathrm{d}S = \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S$$

注意 对于不可压流可以用体积流量，原因请自行思考.

与质量流量相关的概念是质量通量密度，定义为单位面积上的质量流量．用 $\dot{m}_A$ 表示．即

$$\dot{m}_A = \frac{\dot{m}}{\mathrm{d}S} = \rho V_n = \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$$

单位是 $\mathrm{Kg/(s\cdot m^2)}$.

对于位置固定的控制体来说，质量守恒的描述就是控制体内增加的流体质量 + 净流出控制体的流体质量 = 0．就是

$$\oiiint_v \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{V})\right]\mathrm{d}v = 0$$

由于控制体任取，所以被积函数恒等于 0，也就是前面的微分形式.

笔记

1. 对于定常流动，所有流动参数对时间的偏导数都等于 0．连续方程可以写为

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) = 0$$

和

$$\oiint_S \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = 0$$

2. 对于不可压流，密度是常数，连续方程可以写为

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$$

和

$$\oiint_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = 0$$

3.2 动量方程

动量方程描述的是流体在流动过程中动量守恒的规律.

流体受到的外力等于单位时间内净流入控制体的动量和控制体内部动量的增量.

笔记

流体微团或控制体受到的外力有两个来源:

1. 重力，电磁力等，称为彻体力.
2. 压力，粘性力，剪切力等，称为表面力.

3.2.1 微分形式

动量方程的微分形式是

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V}\mathbf{V})=-\nabla P+\rho\mathbf{f}+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}$$

上式左边是动量的变化率，右边是控制体受到的合力．$\mathbf{f}$ 是控制受到的彻体力强度，如重力加速度 g．

3.2.2 积分形式

位置固定的控制体受到的彻体力大小是

$$\oiiint_v \rho\mathbf{f}\,\mathrm{d}v=\text{彻体力}$$

压强力大小是

$$-\oiint_S P\mathbf{n}\mathrm{d}S=\text{压力}$$

粘性力大小是

$$\oiint_S \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S=\text{粘性力}$$

动量方程可以写成

$$\text{动量变化率}=G_1+G_2$$

其中，G_1 是单位时间内净流出控制面的流体质量所携带的总动量；G_2 是控制体内部因流场的非定常特性而产生的动量的当地变化率．

那么

$$G_1=\oiint_S \mathbf{V}(\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S)$$

$$G_2=\frac{\partial}{\partial t}\oiiint_v \rho\mathbf{V}\mathrm{d}v$$

于是就可得到动量方程的微分形式

$$\oiiint_v \frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t}\mathrm{d}v+\oiint_S \mathbf{V}(\rho\mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S})=\oiiint_v \rho\mathbf{f}\mathrm{d}v-\oiiint_v \nabla P\mathrm{d}v+\oiiint_v \nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}v$$

笔记

对于不考虑彻体力的定常、无粘流动，微分形式的动量方程可以写成

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{V}\mathbf{V})=-\nabla P$$

积分形式可以写成

$$\oiint_S \mathbf{V}(\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S) = -\oiint_S P\mathbf{n}\mathrm{d}S$$

注意 **压强力前面有负号的原因是，压强总是指向控制体内部，与面法线方向相反，故压强力总有负号. 当然，具体问题具体分析，按照动量方程的本质列出相应的方程，这些矢量方程过于复杂.**

3.3 能量方程

能量方程描述的是控制体能量守恒这个规律，即机械能和内能守恒.

注意 **后面还会介绍焓这个概念.**

3.4 描述流体运动的方法

3.4.1 欧拉法和拉格朗日法

描述流体运动的方法有两个，欧拉法和拉格朗日法. 欧拉法研究固定位置的流体区域的流动情况. 拉格朗日法则是追踪一个流体微团的运动情况.

注意 **由于流体运动微团太多，而实际只需要一定范围内的流动情况，因此描述流体运动常用欧拉法.**

3.4.2 流线 (streamline) 迹线 (pathline) 脉线 (streakline)

1. 流线: 是流体中的一条瞬时曲线，其上各点的切线与该点的速度方向相同.
2. 迹线: 同一流体微团在不同时刻的位置所连成的曲线.
3. 脉线: 在某一时间间隔内相继经过空间一固定点的流体质点依次串连起来而成的曲线.

注意 **流线、迹线、脉线只有当流动定常的时候才重合，一般情况下不重合.**

1. 流线方程

$$\mathrm{d}\mathbf{r}\times\mathbf{V} = \mathbf{0}$$

也就是

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ u & v & w \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

就是

$$\frac{\mathrm{d}x}{u} = \frac{\mathrm{d}y}{v} = \frac{\mathrm{d}z}{w}$$

2. 迹线方程

由定义有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = w \end{cases}$$

整理可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{u} = \frac{\mathrm{d}y}{v} = \frac{\mathrm{d}z}{w} = \mathrm{d}t$$

流管是一个和流线相关的概念. 在流场任意选取一条不为流线且不自交的封闭曲线, 经过该封闭曲线的每一点作流线, 所有这些流线的集合, 所构成的管状曲面称为流管 (stream tube). 流管是由流线组成, 因此流线不能流出或流入流管表面.

注意 **同一流场中的流线不能相交, 原因是同一点只有一个速度方向. 流线相当于一堵墙, 流体不能跨过流线, 原因是流线的切线方向和流体的流动速度平行, 不能相交.**

3.4.3 角速度 角变形率

流体微团在三维空间中的角速度是

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right]$$

实际上流体微团的角速度恰好等于速度旋度的一半. 定义

$$\boldsymbol{\Gamma} = 2\boldsymbol{\omega}$$

也就是

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{curl}\,\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V}$$

如果流场的旋度等于 0, 称为无旋流动; 反之则为有旋流动.

注意 **无旋流动只做纯粹的平移运动和变形运动, 有旋运动还做旋转运动.**

若对于二维的无旋流则满足

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{z}} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

角变形随时间的变化率称为角变形率.

$$\begin{cases} \gamma_z &= \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_y &= \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_x &= \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

注意 **角变形率的记忆方法，和该维度无关的两个速度分量对该速度分量无关的位置变量的偏导数的和. 比如 γ_x，和该维度无关的两个速度分量是 v 和 w，与速度分量 v 无关的位置变量是 z.**

例题 3.1

题目 **给定速度场，$u = \dfrac{y}{x^2+y^2}$，$v = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$，计算其旋度和角变形率，角速度.**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\textbf{curl}\,\mathbf{V} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{V} &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{-x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\left[\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\mathbf{k} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

显然，旋度 $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{0}$.

角变形率

$$\begin{aligned} \gamma_x &= 0 + 0 = 0 \\ \gamma_y &= 0 + 0 = 0 \\ \gamma_z &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{-x^2-y^2+2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

当然，对于 $x^2+y^2 \neq 0$ 的流场都是无旋的.

3.5 流函数和势函数 (速度位)

3.5.1 流函数

对于二维不可压流动，连续方程是 $\nabla \cdot \mathbf{V}$ 也就是

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

如果存在 $p(x,y)$ 和 $q(x,y)$ 满足，$\dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial q}{\partial x}$，则存在一个函数使得

$$\mathrm{d}f=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y$$

因此，存在一个函数 $\Psi(x,y,t)$ 的全微分是

$$\mathrm{d}\Psi=u\mathrm{d}y-v\mathrm{d}x$$

而

$$\mathrm{d}\Psi=\frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \Psi}{\partial y}\mathrm{d}y$$

故有

$$\begin{cases} u &= \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v &= -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases}$$

函数 $\Psi(x,y,t)$ 称为流函数.

注意 **对于二维定常不可压流动，若通过两给定点作流线，由此两条流线所界定的流管的体积流量就是这两条流线上的流函数数值之差.**

例题 3.2

题目 给定二维不可压流动的速度分布 $u=x^2-y^2$，$v=-2xy$，求流函数.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= x^2-y^2 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= -(-2xy)=2xy \\ \Psi(x,y) &= \int \frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x=\int 2xy\mathrm{d}x=x^2y+C(y) \end{aligned}$$

式中 C 是和 x 无关的常数. 而

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}=\frac{\partial (x^2y+C(y))}{\partial y}=x^2-y^2$$

两相对比，有 $C'(y) = -y^2$，于是 $C(y) = -\frac{y^3}{3} + C$ 所以

$$\Psi(x, y) = x^2 y - \frac{y^3}{3} + C$$

一般常数 C 也可以不写.

注意 **流函数的定义是在不可压流中定义的，而且是二维平面，不满足条件则没有流函数．有旋流和无旋流都有流函数.**

3.5.2　势函数 (速度位)

无旋流动满足

$$\boldsymbol{\Gamma} = \nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$$

而标量函数梯度的旋度恒等于 0，于是存在一个标量函数使得

$$\mathbf{V} = \nabla \cdot \Phi$$

成立．称 $\Phi(x, y, z, t)$ 为速度势函数．根据定义有

$$\begin{cases} u & = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \\ v & = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \\ w & = \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \end{cases}$$

注意 **只有流动无旋才可以定义势函数，否则没有势函数.**

例题 3.3

题目　已知二维流场分布，$u = x$，$v = -y$，求该流场的势函数.

首先先计算该流场的旋度.

$$\mathbf{curl\,V} = \left[\frac{\partial(-y)}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right]\mathbf{k} = 0$$

流动无旋，因此存在势函数.

于是有

$$\mathrm{d}\Phi = x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\frac{x^2}{2}) - \mathrm{d}(\frac{y^2}{2}) = \mathrm{d}(\frac{x^2 - y^2}{2} + C)$$

因此，$\Phi(x, y, t) = \dfrac{x^2 - y^2}{2} + C$，不同于流函数，这里常数 C 需要根据初值条件来求取.

注意 **这里求势函数的方法是凑微分，和前面求流函数的方法不同，两种方法都可以求解.**

笔记

对于二维不可压流动，流线就是流函数 Ψ 值相等的线. 等位线 (Φ = 常数) 和流线 (Ψ = 常数) 始终正交 (驻点除外).

3.6 旋涡运动

涡线是旋涡场中的一条瞬时曲线，其上各点的切线与该点处的流体微团的旋转角速度方向相同. 涡线的微分形式方程是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\boldsymbol{\omega}_x}=\frac{\mathrm{d}y}{\boldsymbol{\omega}_y}=\frac{\mathrm{d}z}{\boldsymbol{\omega}_z}$$

取一条封闭曲线，速度线积分的值定义为**速度环量**，

$$\Gamma=\oint_C \mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$$

速度环量取逆时针方向为正向.

注意 **有些也取顺时针为正向.**

把流场中由于旋涡存在而产生的速度称为**诱导速度**，即

$$\mathrm{d}\mathbf{V}_P=\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_{1P}}{r_{1P}^3}$$

上式也就是毕奥-萨伐尔定律.

3.6.1 亥姆霍兹定理

关于旋涡运动，有亥姆霍兹的三个定理.

1. 在同一瞬间，沿涡线或涡管的强度不变.
2. 涡管不能在流体中中断; 只能在流体边界上中断或形成合圈.
3. 如果流体是理想的，正压的且彻体力有势，那么涡的强度不随时间变化，既不会增强，也不会削弱.

第四章　不可压无粘流

无粘流的动量方程就是欧拉方程.

对于不可压定常，无旋流的伯努利方程是

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + P + \rho U = 常数$$

上式左边分别是单位质量流体所具有的动能，压力能，和位能 (重力势)，这三种能量统称为机械能．它们三者之间可以相互转换，但是总和是保持不变的.

笔记

在空气流动问题中，重力 (重力势) 可以忽略，于是伯努利方程可以写成

$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 = 常数$$

其中，$\frac{1}{2}\rho V^2$ 称为动压，P 称为静压，等号右边的常数称为总压 (P_0)．总压是无粘流速度为零的点 (驻点) 的压强.

对于有旋流动，伯努利方程的条件是沿流线成立，即同一条流线总压相等.

4.1　理想不可压无旋流动的控制方程

不可压位流的控制方程是

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

称为拉普拉斯方程.

边界条件就是流场的边界对流动规定的条件．边界条件有三种，分别是

1. 第一类边值问题，又称狄利克雷问题，即在边界上给定 Φ 的值.
2. 第二类边值问题，又称纽曼问题，即在边界上给定 $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ 的值.

3. 第三类边值问题，即混合边值问题，又称庞加莱问题，即在一部分边界上给定 Φ 值，另一部分边界给定 $\dfrac{\partial \Phi}{\partial n}$ 值.

对于理想不可压流的平面定常无旋流动中流函数满足的控制方程是

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

注意 **拉普拉斯方程是一个线性方程，它的解满足叠加定理.**

4.2 拉普拉斯方程的基本解

4.2.1 直匀流

直匀流 (uniform stream) 是一种最简单的无旋流动，其中任何一点的流速都是一样的．它的流函数是

$$\Phi = ax + by$$

速度分量是

$$\begin{cases} u &= \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = a \\ v &= \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = b \end{cases}$$

流函数是

$$\Psi = -bx + ay$$

4.2.2 点源

正源 (source)是从流场某点有一定的流量流向四面八方的流动．**负源 (sink)** 则相反，也称为汇.

注意 **点源流动只有径向速度 V_r，没有周向速度 V_θ.**

记半径 r 处的流速为 V_r，则源的总体积流量是 $Q = 2\pi r V_r$，是一个常数．所以

$$V_r = \frac{Q}{2\pi}\frac{1}{r} = \frac{Q}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

注意 **源的径向流速与 θ 无关，Q 称为源强.**

点源的流函数是

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi}\theta = \frac{Q}{2\pi}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

点源的位函数是

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi}\ln r = \frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

第五章　高速可压流动

5.1　热力学基础

5.1.1　内能 (internal energy)

对于遵守 $P = \rho RT$ 的气体称为**热完全气体**，这种理想化的完全气体，内能只计微观运动的平均动能，因此内能只与绝对温度 T 有关，单位完全气体的内能记为 e，单位是 J/Kg．于是有

$$e = e(T)$$

内能是与变化过程无关的参数.

5.1.2　焓 (enthalpy)

焓表示单位质量气体的内能和压力能之和，用 h 表示

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

其中 $\dfrac{P}{\rho}$ 表示单位质量气体的压力能，对于完全气体，焓也取决于温度，所以焓也是一个状态参数.

5.1.3　热力学第一定律和比热

外界传递给一个封闭物质系统的热量等于系统内能的增量和系统对外界所做的机械功的总和，这就是热力学第一定律.

对于单位质量的气体有

$$\delta q = \mathrm{d}e + P\mathrm{d}\frac{1}{\rho} \tag{5.1}$$

$\frac{1}{\rho}$ 是单位质量气体所占的体积，称为比容．又

$$\mathrm{d}h = \mathrm{d}e + \mathrm{Pd}\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}\mathrm{d}P$$

于是

$$\delta q = \mathrm{d}h - \frac{1}{\rho}\mathrm{d}P$$

若对于等压过程 $\mathrm{d}P = 0$，焓增量 $\mathrm{d}h$ 就等于此过程张吸收的热量 δq．若一个系统由于加给一微小的热量 δq 而升高了温度 $\mathrm{d}T$，定义比值

$$\delta q/\mathrm{d}T$$

为热容，单位 J/K．单位质量上的热容为比热容，简称比热，单位 J/(Kg·T)．在定容情况下，$\mathrm{d}\frac{1}{\rho} = 0$，定压情况下，$\mathrm{d}P = 0$，于是

$$\begin{aligned} C_v &= \left(\frac{\delta q}{\mathrm{d}T}\right)_{\rho=const} = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}T} \\ C_P &= \left(\frac{\delta q}{\mathrm{d}T}\right)_{P=const} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}T} \end{aligned} \tag{5.2}$$

其中，C_v 为比定容热容，C_P 为比定压热容．取 $T = 0$ 时，$e = h = 0$，于是

$$e = C_v T \tag{5.3}$$

$$h = C_P T \tag{5.4}$$

将比定容热容和比定压热容之比称为比热，用 γ 表示，即

$$\gamma = \frac{C_P}{C_v}$$

对于空气，$\gamma = 1.4$．又

$$h = e + \frac{P}{\rho}$$

有

$$C_P T = C_v T + \frac{P}{\rho}$$

于是

$$C_P = C_v + \frac{P}{\rho T} = C_v + R$$

因此，

$$h = C_P T = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}T = \frac{\gamma RT}{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho}$$

其中 $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$，$C_P = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$．

笔记

热完全气体 (calorically perfect gas) 是指 C_v 和 C_P 都是常数的气体.

5.1.4 热力学第二定律和熵 (entropy)

热力学第二定律指明能量相互转化是有条件的，有方向的，即从一个方向的变化过程可以实现，而逆向的变化过程不能实现或者只能有条件的实现.

定义单位质量的气体的熵增量 ds 为单位质量气体的热量增量与绝对温度的比值，即

$$\mathrm{d}s = \frac{\delta q}{T}$$

又

$$\delta q = \mathrm{d}e + P\mathrm{d}\frac{1}{\rho}$$

于是,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s = \frac{\delta q}{T} &= \frac{1}{T}(\mathrm{d}e + P\mathrm{d}\frac{1}{\rho}) \\
&= \frac{1}{T}(\mathrm{d}C_vT + P\mathrm{d}\frac{1}{\rho}) \qquad P = \rho RT \\
&= \frac{1}{T}C_v\mathrm{d}T + \frac{P}{T}\mathrm{d}\frac{1}{\rho} \\
&= \frac{1}{T}C_v\mathrm{d}T + \rho R\mathrm{d}\frac{1}{\rho} \\
&= \mathrm{d}\left(C_v\ln T + R\ln\frac{1}{\rho}\right)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

因此，熵是一个状态函数，当系统由状态 $1(s_1,P_1,\rho_1,T_1)$ 变化为状态 $2(s_2,P_2,\rho_2,T_2)$ 时，过程的熵增量为

$$\begin{aligned}
\Delta s = s_2 - s_1 &= C_v\ln T_2 + R\ln\frac{1}{\rho_2} - \left(C_v\ln T_1 + R\ln\frac{1}{\rho_1}\right) \\
&= C_v\ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

由 $C_P = C_v + R$, $\gamma = \dfrac{C_P}{C_v}$，有

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

于是

$$\begin{aligned}\Delta s &= C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + C_v(\gamma - 1)\ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \\ &= C_v \ln \left[\frac{T_2}{T_1}\cdot\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma-1}\right] \\ &= C_v \ln \left[\frac{T_2}{T_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma}\frac{\rho_2}{\rho_1}\right] \\ &= C_v \ln \left[\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma}\right]\end{aligned} \tag{5.7}$$

上式对于不可逆状态依然适用，前提是热力学系统处于平衡状态.

热力学第二定律指出，在绝热变化过程的孤立系统中，如果过程可逆，则熵值保持不变. 如果过程不可逆，则熵必增加.

一般来说，在流场的大部分区域，速度梯度和温度梯度并不是很大，流动过程可以近似看成是绝热的，熵增等于 0，这样的流动称为等熵流 (isentropical flow). 沿一条流线熵值保持不变的情况称为沿流线等熵. 全流场熵值不变的流动称为均匀等熵流动.

对于等熵流即绝热可逆流动有

$$\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma} = 1 \Rightarrow \frac{P_2}{\rho_2^{\gamma}} = \frac{P_1}{\rho_1^{\gamma}} = const$$

笔记

等熵流动就是绝热可逆流动.

5.2 一维等熵绝热流

气体参数发生在微小变化的扰动称为小扰动. 小扰动的传播速度只取决于气体的性质及状态参数，而与何种扰源和其成因无关. 小扰动在气体中的传播速度习惯上称为**声速 (speed of sound)**.

考虑声波以速度 a 在空气中传播，声波向左传播并进入参数分别是 P,ρ,T 的静止气体，在声波之后，气体参数变成了 $P+\mathrm{d}P,\rho+\mathrm{d}\rho,T+\mathrm{d}T$. 选择声波前后的气体作为控制体如图，由连续方程有

$$\rho a = (\rho + \mathrm{d}\rho)(a + \mathrm{d}a)$$

展开并略去高阶项有

$$\rho a = \rho a + a\mathrm{d}\rho + \rho\mathrm{d}a$$

解得

$$a = -\rho \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\rho}$$

再列动量方程有

$$P + \rho a^2 = (P + \mathrm{d}P) + (\rho + \mathrm{d}\rho)(a + \mathrm{d}a)^2$$

展开并略去比二阶高的小量有

$$\mathrm{d}P = -2\rho a \mathrm{d}a - a^2 \mathrm{d}\rho$$

解得

$$\mathrm{d}a = \frac{\mathrm{d}P + a^2 \mathrm{d}\rho}{-2a\rho}$$

代入到

$$a = -\rho \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\rho}$$

得到

$$a^2 = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}$$

上述讨论中，流体流过声波是等熵的，因此压强对于密度的变化就是等熵的，可以将方程

$$a^2 = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}$$

重写成

$$a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s$$

假设气体是量热完全气体，满足方程

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma$$

又

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = const = C$$

或者写成

$$P = C\rho^\gamma$$

于是

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = C\gamma\rho^{\gamma-1}$$

再将

$$C = \frac{P}{\rho^\gamma}$$

代入，得到

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = \frac{P}{\rho^\gamma}\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma\frac{P}{\rho} = \gamma RT$$

笔记

$a^2 = \gamma RT$ 是量热完全气体等熵流动的计算公式，说明声速仅仅只是温度 T 的函数.

上式中定义的变量 a 就是小扰动传播的速度——声速.

5.2.1 能量方程

对于一维等熵绝热流，能量方程可由欧拉方程并利用等熵关系式沿流线积分求出.

由一维伯努利方程，忽略重力势

$$\frac{1}{2}\mathbf{V}^2 + \int \mathrm{d}\frac{P}{\rho} = C$$

因为沿流线等熵，由等熵关系

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = C$$

有

$$\frac{1}{2}V^2 + \int \mathrm{d}\frac{P}{\rho} = \frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho}$$

又

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho}$$

于是

$$\frac{1}{2}V^2 + h = C$$

对于定常绝热流，上述方程不论是否等熵，在形式上都成立，也就是绝热流动中粘性摩擦并不改变动能和焓的总和，而是将一部分动能转化为焓. 上式还可以改写成

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}RT &= \frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho} \\ &= \frac{1}{2}V^2 + \frac{a^2}{\gamma - 1} = C \end{aligned} \tag{5.8}$$

从中可以看出，对于定常绝热流，当沿流线速度变大的时候温度，声速，焓都要减小，但是动能和焓的总和不变.

5.2.2 参数间的基本关系式

1. 驻点

指流速沿流线等熵地降为 0 的那一点，该点的参数称为驻点参数，或者总参数. 对应这

个状态的焓，温度，压强，密度分别称为总焓，总温，总压，总密度．用 h_0,T_0,P_0,ρ_0 表示，驻点状态的声速用 a_0 表示．

笔记

总温和总焓是指速度绝热地降为 0 的那点的温度和焓值．总密度和总压则是指速度等熵地降为 0 的那点的密度和压强．

于是上述能量方程就可以改写为

$$\frac{1}{2}V^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P_0}{\rho_0} \tag{5.9}$$

$$\frac{1}{2}V^2+h=h_0 \tag{5.10}$$

$$\frac{1}{2}V^2+\frac{a^2}{\gamma-1}=a_0^2 \tag{5.11}$$

$$\frac{1}{2}V^2+\frac{\gamma RT}{\gamma-1}=\frac{\gamma}{\gamma-1}RT_0 \tag{5.12}$$

显然对于一维定常绝热等熵流，h_0,P_0,T_0,ρ_0 和 a_0 沿同一条流线恒等于常数而不发生改变，和驻点参数对应的是流动过程中任意一点处的当地流动参数 h,P,T,ρ 等称为静参数，即静焓，静压，静温，静密度．因此上述方程也可以写成

$$\frac{1}{2}\frac{V^2}{\gamma RT}+\frac{1}{\gamma-1}=\frac{1}{\gamma-1}\frac{T_0}{T}$$

也就是

$$1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{V^2}{a^2}=1+\frac{\gamma-1}{2}M^2=\frac{T_0}{T}$$

$$\frac{1}{2}\frac{V^2}{h^2}+1=\frac{h_0}{h},\quad (h=\frac{\gamma}{\gamma-1}RT)$$

$$\Rightarrow\frac{\gamma-1}{2}\frac{V^2}{\gamma RT}+1=\frac{h_0}{h}$$

$$\Rightarrow\frac{\gamma-1}{2}\frac{V^2}{a^2}+1=\frac{h_0}{h}$$

也就是

$$\frac{h_0}{h}=1+\frac{\gamma-1}{2}M^2 \tag{5.13}$$

利用等熵关系 $\frac{P}{\rho^\gamma}=C$ 可得

$$\frac{P}{\rho}=C\rho^{\gamma-1}$$

于是有

$$\frac{1}{2}V^2+\frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}=\frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho_0^{\gamma-1}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2\rho^{\gamma-1}}V^2+\frac{C\gamma}{\gamma-1}=\frac{C\gamma}{\gamma-1}(\frac{\rho_0}{\rho})^{\gamma-1}$$

又 $\rho^{\gamma-1}=\dfrac{P}{C\rho}=\dfrac{RT}{C}$

$$\Rightarrow\frac{C}{2RT}V^2+\frac{C\gamma}{\gamma-1}=\frac{C\gamma}{\gamma-1}(\frac{\rho_0}{\rho}^{\gamma-1})$$

也就是

$$\frac{1}{2\gamma RT}V^2+\frac{1}{\gamma-1}=\frac{1}{\gamma-1}(\frac{\rho_0}{\rho})^{\gamma-1}$$

也就是

$$\boxed{\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}\tag{5.14}$$

再利用等熵关系有

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\tag{5.15}$$

于是

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{P_0}{P}&=\left[\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]^{\gamma}\\&=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\end{aligned}}\tag{5.16}$$

其中

$$\boxed{M=\frac{V}{a}}$$

称为流动马赫数，是反映流体压缩性能大小的相似准则，是当地流动速度和当地声速的比值.

笔记

当讨论飞机或者其他飞行物体时，马赫数就是这个物体的速度除以自由来流的声速，而不是流过该物体的流体的声速. (自由来流就是远前方的气流，流过该物体的流体的温度和远前方气流的速度并不相同，一般要高些)

马赫数是流场的当地性质，流场每个点的马赫数都可能不同.

马赫数还反映了流体内能和动能的比值，即

$$\frac{\frac{V^2}{2}}{e}=\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}M^2$$

2. 临界状态

临界状态是指当地流速等于当地声速的状态，也称为临界点，用下标 * 表示，显然在临界状态，当地马赫数 $M = 1$，式

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1}$$

可以写成

$$\frac{V_*^2}{2} + \frac{a_*^2}{\gamma - 1} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1}$$

又

$$V_* = a_*$$

于是

$$\boxed{a_*^2 = \frac{2}{\gamma + 1} a_0^2}$$

式

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

在临界状态下可以改写成

$$\frac{T_0}{T_*} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} = \frac{\gamma + 1}{2}$$

定义速度系数 λ 为

$$\lambda = \frac{V}{a_*}$$

由于

$$\begin{aligned} M^2 = \frac{V^2}{a^2} &= \frac{V^2}{a_*^2} \frac{a_*^2}{a_0^2} \frac{a_0^2}{a^2} \\ &= \lambda^2 \frac{2}{\gamma + 1} \frac{T_0}{T}, \quad (a = \sqrt{\gamma R T}) \\ &= \lambda^2 \frac{2}{\gamma + 1} (1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2) \end{aligned} \tag{5.17}$$

于是

$$M^2 = \frac{\frac{2}{\gamma+1} \lambda^2}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2}$$

从式

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

中可以看出，当 $T \to 0$ 时，$M \to \infty$，而 λ 趋于有限值，即

$$\lambda_{\max} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}$$

使用速度系数 λ 可得

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2 = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2$$

类似地

$$\begin{aligned} \frac{P}{P_0} &= \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \end{aligned} \tag{5.18}$$

临界状态下，临界参数和总参数的对应关系如下

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{T_*}{T_0} &= 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} && (5.19) \\ \frac{P_*}{P_0} &= \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} && (5.20) \\ \frac{\rho_*}{\rho_0} &= \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} && (5.21) \end{aligned}}$$

从式

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}RT = \frac{\gamma}{\gamma-1}RT_0$$

可以看出，当 $T = 0$ 时速度达到最大，即

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}RT_0} = \sqrt{\frac{2a_0^2}{\gamma-1}}$$

这种状态是一种假想状态，意味着给定一个总温后所能达到的最大流动速度，是一个上限值，即流体中的全部焓转换成了动能.

若流动过程绝热，则总温不变，$T_{01} = T_{02}$. 对于等熵绝热流总压也保持不变，$P_{01} = P_{02}$. 而对于一个绝热过程，如果变化过程中有摩擦等损失存在，则该过程是不可逆过程，熵必有所增加，必然表现为 $P_{01} > P_{02}$，即总压有所损失，记 $\sigma = \dfrac{P_{02}}{P_{01}}$ 为总压损失比.

笔记

关于总参数和静参数的理解

如果飞机飞行高度在 10000 英尺，速度为 0.8 马赫. 那么 10000 英尺高度的压强就是静参数，用皮托管测到的压强就是总参数 (皮托管测量到的压强是速度为零的压强). 将飞机静止来看，远前方的气流就是运动的，就是静参数.

5.3　马赫波和膨胀波

亚声速流场中的小扰动可以遍及全场，在声速和超声速流动中小扰动不会干扰到干扰源的上游.

超声速气流受到小扰动而使气流方向发生微小变化，扰动的界面就是马赫波．设超声速定常直匀流沿壁面流动，若壁面外折伴随着流速增大，压强，密度，温度均减小，此时气流发生膨胀，此时的马赫波称为膨胀马赫波．壁面内折，则伴随着流速减小，压强，密度，温度均增大，气流发生压缩，称为压缩马赫波．气流通过马赫波后壁面上的压强系数

解释壁面
折和外折
内容 (插图

$$C_p = \frac{(P+\mathrm{d}P)-P}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{\mathrm{d}P}{\frac{1}{2}\frac{P}{RT}M^2a^2} = -\frac{2}{\sqrt{M^2-1}}\mathrm{d}\theta$$

对于大角度超声速气流发生折转的情况，流动参数与方向偏角之间的关系通过膨胀波和激波建立.

膨胀波是超声速气流的基本变化之一，是一种压强下降，密度下降，而流速上升的过程.由于气流经过每一道膨胀马赫波气流参数只发生微小变化，因此穿过整个扇形膨胀波时气流参数必是连续变化的，这种连续变化过程必是等熵的．所以气流经过膨胀波是可逆等熵过程，对于一定的来流条件，波后气流只取决于总的外折角 θ，对

$$V = aM$$

取全微分，有

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}a + a\mathrm{d}M$$

也就是

$$\frac{\mathrm{d}V}{aM} = \frac{\mathrm{d}a}{a} + \frac{\mathrm{d}M}{M} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\mathrm{d}a}{a} + \frac{\mathrm{d}M}{M}$$

而

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\mathrm{d}\sqrt{\gamma RT}}{\sqrt{\gamma RT}} = \frac{\mathrm{d}M}{M} + \frac{\mathrm{d}T}{2T},\quad (a = \sqrt{\gamma RT})$$

又

$$\frac{\mathrm{d}M}{M} = \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{\sqrt{M^2-1}}\mathrm{d}\theta$$

当壁面外折角由 0 增大到 θ 时，马赫数由 M_1 增大到 M_2 有

$$\theta = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2-1}}{(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)M}\mathrm{d}M$$

积分得到 (过程参见A.1)

$$\boxed{\begin{aligned}\theta =&\left[\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M_2^2-1)}-\arctan\sqrt{M_2^2-1}\right]\\ &-\left[\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M_1^2-1)}-\arctan\sqrt{M_1^2-1}\right]\end{aligned}}$$

这样给定 M_1 和 θ 后就可以求出 M_2，在膨胀过程中总温，总压，总密度均不变，于是便可以求出 $\frac{P_2}{P_1},\frac{T_2}{T_1},\frac{\rho_2}{\rho_1}$. 若指定气流时从 $M_1=1$ 的声速流开始膨胀的，那么达到某个大于 1 的马赫数 M 的外折角 θ_*

$$\theta_*=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M_2^2-1)}-\arctan\sqrt{M_2-1}$$

于是

$$\theta_{*\max}=\lim_{M\to\infty}\theta_*=\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}-1\right)\frac{\pi}{2}$$

对于空气，$\theta_{*\max}=130.45°$，此时已经膨胀到温度，压强，密度均降为 0 的真空状态.

实际上，根据能量方程，膨胀过程实际上时气体的焓值转换为动能的过程，真空状态其焓值已经耗尽，因此不能再进行膨胀了.

例题 5.1

题目 高速导弹在滞止点的温度和压强分别是 518.8K 和 7.8atm，计算这一点的密度.

由完全气体状态方程

$$P=\rho RT$$

得到

$$\rho_0=\frac{P_0}{RT_0}=\frac{7.8\times1.01\times10^5}{518.8\times287.05}=5.29\mathbf{Kg/m^3}$$

♣

例题 5.2

题目 激波前气体温度和压强分别是 288K 和 1atm; 激波后气体温度和压强分别是 690K 和 8.656atm. 计算经过激波前后焓，熵，内能的变化.

$$C_P=\frac{\gamma R}{\gamma-1}=\frac{1.4\times287.05}{1.4-1}=1004.675$$

$$C_v=\frac{R}{\gamma-1}=\frac{287.05}{1.4-1}=717.625$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = C_P(T_2 - T_1) = 403879.35\mathbf{J}$$

$$\Delta e = e_2 - e_1 = C_v(T_2 - T_1) = 288485.25\mathbf{J}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + C_v(\gamma - 1) \ln \frac{P_2 T_1}{P_1 T_2} = 995.41$$

♣

例题 5.3

题目 考虑一个等熵流经过机翼，来流的状态是 $T_\infty = 245$K，$P_\infty = 4.35 \times 10^4$pa，在机翼上一点的压强是 3.6×10^4pa．计算这一点的密度．

由等熵关系

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma - 1}$$

得到机翼上该点的温度

$$T = \left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} T_\infty = 114.93\mathbf{K}$$

于是

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{3.6 \times 10^4}{287.05 \times 114.93} = 1.09\mathbf{Kg/m}^3$$

♣

5.4 正激波

在流动过程中，气流的主要参数有显著的，突跃的变化的那一个地方称为激波，是在同一个位置有无穷多压缩马赫波叠加而成，当激波的波阵面与来流方向垂直时，称为正激波．如右图，波前参数为 P_1, ρ_1, V_1，波后参数为 P_2, ρ_2, V_2，由连续方程有 插图

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

因为激波很薄，截面积基本上没有发生变化，由动量方程有

$$\rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2 = P_1 - P_2$$

即

$$\rho_2 V_2^2 + P_2 = \rho_1 V_1^2 + P_1$$

又波前波后总能量相等，于是有

$$\frac{1}{2} V_1^2 + \frac{a_1^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} V_2^2 + \frac{a_2^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_*^2$$

在

$$\rho_2 V_2^2 + P_2 = \rho_1 V_1^2 + P_1$$

左边除以 $\rho_2 V_2$，右边除以 $\rho_1 V_1$ 得到

$$V_2 + \frac{P_2}{\rho_2 V_2} = V_1 + \frac{P_1}{\rho_1 V_1}$$

于是

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \frac{P_2}{\rho_2 V_2} - \frac{P_1}{\rho_1 V_1} \\ &= \frac{a_2^2}{\gamma V_2} - \frac{a_2^2}{\gamma V_1}, \quad \left(\frac{P}{\rho} = RT, \ \ a^2 = \gamma RT\right) \end{aligned} \tag{5.22}$$

又

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{a^2}{\gamma-1} = \frac{a_0^2}{\gamma-1} = \frac{1}{\gamma-1}\frac{\gamma+1}{2}a_*^2 = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}a_*^2, \ \ (a_*^2 = \frac{2}{\gamma+1}a_0^2)$$

有

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{\gamma+1}{2}a_*^2 - \frac{\gamma-1}{2}V_1^2 \\ a_2^2 &= \frac{\gamma+1}{2}a_*^2 - \frac{\gamma-1}{2}V_2^2 \end{aligned} \tag{5.23}$$

代入到

$$V_1 - V_2 = \frac{a_2^2}{\gamma V_2} - \frac{a_1^2}{\gamma V_1}$$

有

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \frac{\gamma+1}{2\gamma V_2}a_*^2 - \frac{\gamma-1}{2\gamma}V_2 - \frac{\gamma+1}{2\gamma V_1}a_*^2 + \frac{\gamma-1}{2\gamma}V_1 \\ &= \frac{\gamma+1}{2\gamma}a_*^2\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) + \frac{\gamma-1}{2\gamma}(V_1 - V_2) \\ &= \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{a_*^2}{V_1 V_2} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)(V_1 - V_2) \end{aligned} \tag{5.24}$$

又 $V_1 \neq V_2$，只能是

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{a_*^2}{V_1 V_2} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} = 1$$

即

$$\boxed{\frac{a_*^2}{V_1 V_2} = 1 \text{或} a_*^2 = V_1 V_2} \tag{5.25}$$

用速度系数表示

$$\boxed{\lambda_1 \lambda_2 = 1}$$

上式就是普朗特激波公式，即正激波前后的速度乘积为定值，即临界速度的平方.

笔记

激波并没有加热或者降温气体，因此气体流过激波是一个绝热过程，但是不是等熵过程.

从上式可以看出：超声速气流 ($\lambda_1 > 1$) 经过正激波后变为亚声速气流 ($\lambda_2 < 1$)，而且速度系数 λ_1 越大则速度系数 λ_2 就越小. 应当指出，从亚声速流经过正激波变成超声速流是不可能的.

将式

$$\lambda^2 = \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}$$

代入到

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1$$

即可得到

$$\boxed{M_2^2 = \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}}$$

当 $M_1 = 1$ 时，$M_2 = 1$；当 $M_1 \to \infty$，$M_2 \to \sqrt{\dfrac{\gamma-1}{2\gamma}}$.

由连续方程 $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$ 和

$$\lambda^2 = \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}$$

可以得到正激波前后的密度比

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda_1^2 = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2}}$$

再由过程的绝热性，$T_{01} = T_{02}$，以及静温和总温之间的关系可以得到正激波前后的温度比为

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_{01}}{T_1}\cdot\frac{T_2}{T_{02}} = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2}\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)}$$

于是正激波前后的压强比为

$$\boxed{\frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

也可以写成

$$\boxed{\frac{\Delta P}{P_1} = \frac{P_2 - P_1}{P_1}\frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1)}$$

因为流动时超声速，$M_1 > 1$，所以 $\Delta P > 0$

超声速气流经过正激波的变化是绝热不等熵的．客观上，激波层内速度梯度非常大，而实际流体总有粘性，因此必有摩擦发生，所以经过激波熵必有所增加．

正激波前后总压变化为

$$\boxed{\sigma = \frac{P_{02}}{P_{02}} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1)\right]^{-\frac{1}{\gamma-1}} - \left[\frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

因为过程绝热，总温相等，所以总密度之比和总压之比相等．上述正激波前后关系式说明，正激波前后流动的参数的比值都只取决于波前的马赫数 M_1 和比热比 γ．而马赫数 M_1 值越大，激波突跃变化就越强，熵增也就越大．

笔记

不论是正激波还是斜激波，激波前都是超声速流．斜激波后一般还是超声速，但是马赫数要下降．正激波后是亚声速流．

下面总结讨论的气体如无特别指出都是量热完全气体．

总结

1. 满足 $P = \rho RT$ 的气体叫做理想气体或者热完全气体.
2. 定压热容 C_P 和定容热容 C_v 都是常数的气体叫做量热完全气体.
3. 绝热是一个过程，即在这个过程中不从外界吸热也不向外界放热，绝热过程总温不变，总焓和总内能也不变.
4. 等熵是一个过程，即在这个过程中熵增为 0，该过程全流场总压和总密度都是常数.
5. 可逆过程是指气体从状态 1 变化到状态 2，然后在从状态 2 变回状态 1 的过程对外界没有造成任何影响．强调是否造成影响的过程是从状态 2 变回状态 1 的过程.
6. 气流流过激波的过程是一个绝热过程 (时间很短，与外界没有热交换)，但不等熵.
7. 流过激波后，压强，密度，温度，熵都要增加; 马赫数，速度和总压降低; 总温和总焓不变.

8．量热完全气体的绝热过程，内能和焓都只是温度的函数，满足

$$e = e(T) = C_v T$$
$$h = h(T) = C_P T$$

9．流动定常绝热，满足

$$\frac{1}{2}V^2 + h = h_0$$

10．声速计算公式

$$a = \gamma RT$$

11．流动等熵则满足

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma-1}$$

12．熵增的计算

$$\Delta s = s_2 - s_1 = C_v \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{\rho_1}{\rho_1}$$

或

$$\Delta s = s_2 - s_1 = C_P \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{P_2}{P_1}$$

第六章　低速翼型的气动特性

6.1　翼形的几何尺寸

机翼是飞行器产生升力的主要部件，一般都有对称面．平行于机翼对称面所截得的机翼剖面称为翼剖面 (profile) 或者翼型 (airfoil)．翼型可以分为两类，一类是圆头尖尾的翼型，一类是尖头尖尾的翼型．

翼型的尖尾点，称为翼型的**后缘点 (trailing edge)**．在翼型的众轮廓点中，有一点与后缘点的距离最长，称为翼型的**前缘点 (leading edge)**．连接前缘和后缘的直线段，称为翼型的**弦线 (chord line)**，它的长度就是**弦长 (chord)**．具体尺寸如下图6.1．如图6.1所示，以前缘点为

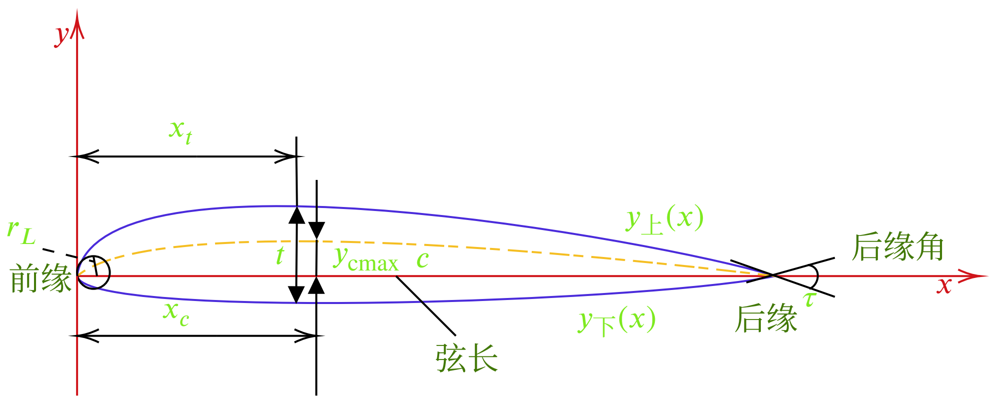


图 6.1: 翼型的几何参数定义

坐标原点，沿弦线建立 x 轴，垂直弦线向上建立 y 轴，这样的坐标系称为**体坐标系**．在体坐标系中，弦向的无量纲坐标是 $\overline{x} = \dfrac{x}{c}$．翼型的上表面和下表面的无量纲坐标分别是

$$\begin{cases} \overline{y}_上(\overline{x}) & = \dfrac{y_上(\overline{x})}{c} \\ \overline{y}_下(\overline{x}) & = \dfrac{y_下(\overline{x})}{c} \end{cases}$$

翼型上下表面平行于 y 轴的连线的中点连成的曲线，称为翼型的**中弧线 (mean camber line)**．中弧线可以用来描述翼型的弯曲程度．中弧线的无量纲坐标 $\overline{y}_c(\overline{x})$ 称为弯度分布函数，

其最大值称为**相对弯度** $\overline{f} = \overline{y}_{cmax}$，其坐在的弦向位置记为 $\overline{x}_c$.

注意 **如果中弧线是一条直线，这个翼型必为对称翼型.**

笔记

关于中弧线的解释原文如下:

The mean camber line is the locus of points halfway between the upper and lower surfaces as measured perpendicular to the mean camber line itself.

中弧线的起点和终点分别是前缘点和后缘点. **厚度 (thickness)** 是翼型上下表面的距离, 这个距离垂直于弦长. 翼型在前缘点附近的形状通常是一段圆弧, 这个圆弧的半径近似是 0.02c. 机翼的气动力和气动力矩在1.3节已经讨论，请往回看.

这里讨论对于机翼的属性都是对于无限长的翼型来说的，即在翼展方向翼型的截面形状不变.

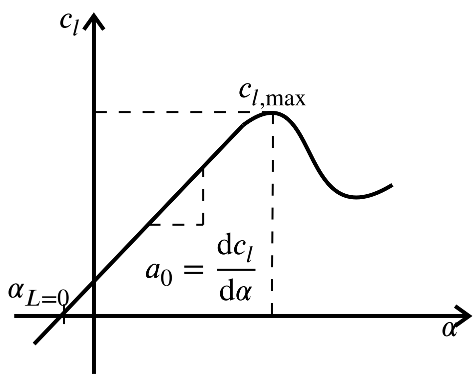


图 6.2: 攻角升力系数曲线

典型的升力系数和攻角之间的变化关系如图6.2所示. 在小攻角和中等攻角的情况下，升力系数随攻角线性变化，这条直线的斜率记作 a_0，称为**升力曲线斜率 (lift slope)**. 在这个区域，空气从平滑的沿着机翼表面的大部分地方流过. 如下图6.3中左图所示. 然而，当攻角逐渐变大到一定值时，气流有从翼型上表面分离的趋势，在机翼后面产生一片“死区空气”(dead air)，如图6.3右图所示. 在气流分离的区域，流动时再循环的. 并且有部分流动是与自由来流的方向相反的，这就是**逆流 (reversed flow)**. 流动分离主要是因为流体的粘性效应. 在大攻角下流动分离引起的后果就是升力急剧减小，阻力急剧增加，这种情况就叫做**失速 (stalled)**.

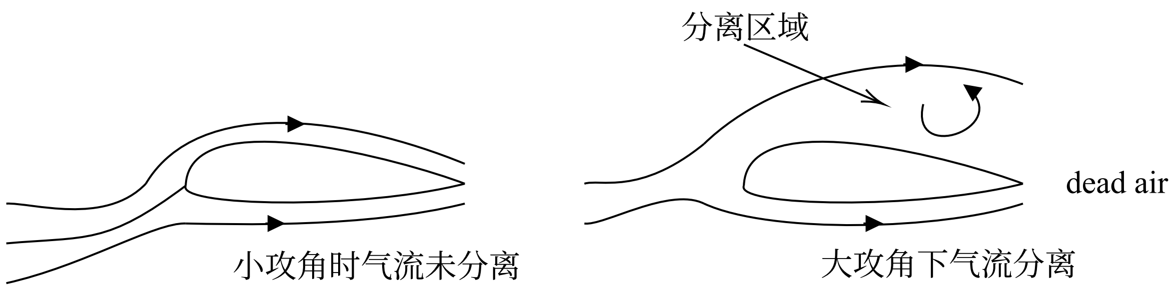


图 6.3: 攻角大小不同时气流流过机翼的流场

笔记

关于流体分离的原文:

This separated flow is due to viscous effects.

在失速之前，c_l 的最大值记作 $c_{l,\max}$. 这是衡量一款翼型的重要指标，因为它决定了飞机发生失速时的速度.

为了安全起见，把 $c_{l\,\max}$ 对应的飞行迎角定义为失速迎角，而不是飞机失速时实际稍高的极限迎角.

笔记

$c_{l,\max}$ 越大，失速速度就越小.

回到图6.2中，c_l 随着攻角的增大线性增加，直到流动分离开始产生影响. 然后，曲线开始变成非线性的，c_l 达到最大值，最终机翼发生失速. 在曲线的另一端，在 $\alpha = 0$ 时，升力是有限的. 事实上，只有当飞机低头使得攻角是负的时候，升力才会减小到 0. 当升力等于 0 时的攻角大小叫作**零升攻角 (zero-lift angle of attack)**，记作 $\alpha_{L=0}$.

笔记

对于对称翼型，$\alpha_{L=0} = 0$. 但是对于大部分有着正弯度的翼型来说，$\alpha_{L=0}$ 是一个负值，一般是 -2 或 -3° 的数量级.

实验表明，升力曲线的斜率不受雷诺数影响，但是 $c_{l,\max}$ 取决于雷诺数.

笔记

因为 $c_{l,\max}$ 被粘性控制，并且雷诺数是一个相似参数，它决定了流动中惯性力和粘性力的比值.

翼型的气动力矩是攻角的函数，但是在翼型上存在一个点，使得气动力矩的大小和攻角无关，这个点叫做**空气动力中心 (aerodynamic center)**. 这个点一般位于距机翼前缘 $\frac{c}{4}$ 的位置.

例题 6.1

题目　给定翼型为 NACA 2412，弦长是 0.64**m，在标准海平面上飞行，自由来流的速度是** 70**m/s，单位翼展上的升力是** 1254**N/m. 计算飞行迎角和单位翼展上的阻力大小.**

在标准海平面上，$\rho = 1.23\mathbf{Kg/m^3}$**：**

$$q_\infty = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 = \frac{1}{2} \times 1.23 \times 70^2 = 3013.5\mathbf{N/m^2}$$

$$c_l = \frac{L}{q_\infty S} = \frac{L}{q_\infty c} = \frac{1254}{3013.3 \times 0.64} = 0.65$$

对于 $c_l = 0.65$**，查升力曲线图，得到** $\alpha = 4^\circ$**.**

标准海平面上，$\mu = 1.789 \times 10^{-5}\mathbf{Kg/m \cdot s}$**：**

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_\infty V_\infty c}{\mu_\infty} = \frac{14.23 \times 70 \times 0.64}{1.789 \times 10^{-5}} = 3.08 \times 10^6$$

查阻力曲线图，得到 $c_d = 0.0068$**，因此**

$$D = q_\infty S c_d = q_\infty c c_d = 3013.5 \times 0.64 \times 0.0068 = 13.1\mathbf{N/m}$$

♣

例题 6.2

题目　对于 NACA 2412 翼型，计算并比较攻角分别在 0°**，**4°**，**8°**，**12° **时的升阻比，雷诺数是** 3.1×10^6**.**

查升力曲线图和阻力曲线图得到下表

α	c_l	c_d	c_l/c_d
0	**0.25**	**0.0065**	**38.5**
4	**0.65**	**0.0070**	**93**
8	**1.08**	**0.0112**	**96**
12	**1.44**	**0.017**	**85**

♣

从上面例题可以看出，随着攻角增大，升阻比先增大，达到一个最大值，然后减小．升阻比的最大值是翼型性能的一个重要参数．它能直接表明翼型的效率．升阻比越大，翼型的效率就越高．由于飞机其他部分的阻力，实际飞机的升阻比一般在 10 到 20 这样的量级．

6.2 用于低速流动下的机翼的理论解法：面涡

想象一根直线垂直于纸面，通过一个点 O，并且向纸面的里面和外面无限延伸．这条直线就是强度为 Γ 的**涡旋线 (vortex filament)**．通过这根涡旋线在任意垂直于这个涡旋线的平面上诱导出的流场和强度为 Γ 的点涡诱导出的流场是一样的．事实上，可以将涡旋线看成是无数点涡组成的．

对于一个涡流场，考虑和面源相似的情况．想象无数根涡旋线紧挨着，这些涡旋线的强度又是无穷小．这些涡旋线就形成了一个**面涡 (vortex sheet)**．顺着这些涡旋线看去，面涡就会变成如图6.4 所示的场景．所有的涡旋线都垂直于纸面．设 s 是沿着面涡边缘视角下的距离坐

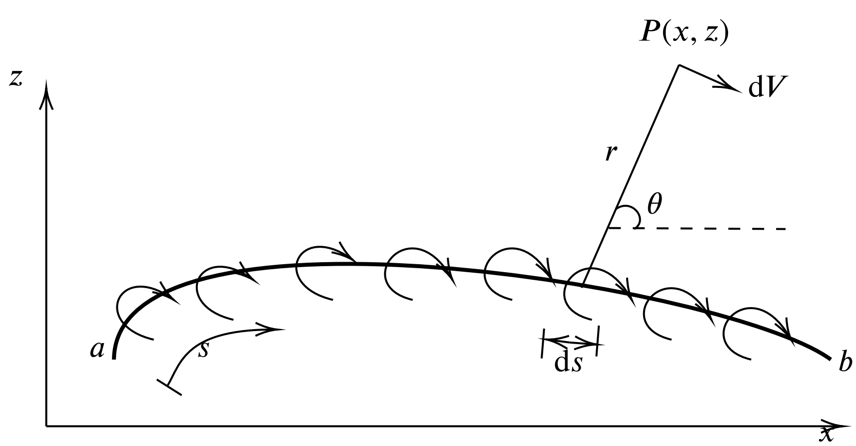


图 6.4: 面涡的边缘视角

标．定义 $\gamma = \gamma(s)$ 是坐标为 s 的单位长度上面涡的强度．因此，对于无限小长度 ds 上的面涡

强度就是 γds．面涡的这一小部分可以看成是强度为 γds 的点涡．现在考虑位于流场中的一个点 P，和 ds 的距离是 r；坐标是 (x, z)．强度为 γds 的面涡在 P 点诱导出无穷小的速度 dV，即

$$dV = -\frac{\gamma ds}{2\pi r}$$

并且方向垂直于 r．P 点的诱导速度就是整个面涡从 a 点到 b 点上式的总和．不同面涡部分在 P 点产生的速度的叠加必须是矢量叠加的．由于这个，使得处理速度势就更方便了．通过单元涡 γds 在 P 点诱导出的速度势 $d\Phi$ 的增量就是

$$d\Phi = -\frac{\gamma ds}{2\pi}\theta$$

相应的，从 a 到 b 整个面涡在 P 点的速度势就是

$$\Phi(x, z) = -\frac{1}{2\pi}\int_a^b \theta\gamma ds$$

上面这个方程对于薄翼理论的讨论是特别有用的，同时对于涡面元的数值解法也是特别重要的．

一个点涡的环量 Γ 等于这个涡的强度．在图6.4 中面涡的环量就是这些涡单元的强度的总和；即

$$\Gamma = \int_a^b \gamma ds$$

面源的法向速度分量是不连续的，而速度的切向分量在面源的上方和下方是一样的．与面源恰恰相反，面涡的切向速度分量是不连续的，而法向速度分量是连续的．速度的切向分量的变化大小和面涡的强度是有关系的．考虑一个面涡如下图6.5所示，使用一个虚线的矩形

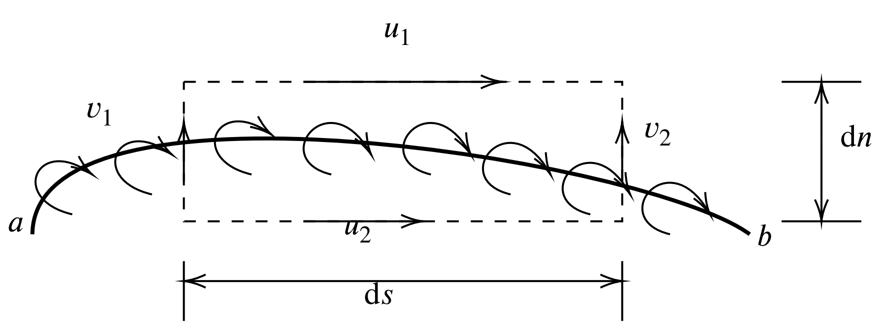


图 6.5: 面涡切向分量的跳跃

框包围一部分面涡，长度是 ds．速度在上下的切向分量分别是 u_1 和 u_2，左右两边的切向分量分别是 v_1 和 v_2，上下两边的距离是 dn．从环量的定义，可以得到这个虚线框的环量是

$$\Gamma = -(v_2 dn - u_1 ds - v_1 dn + u_2 ds)$$

或

$$\Gamma = (u_1 - u_2)\mathrm{d}s + (v_1 - v_2)\mathrm{d}n$$

然而，因为包围在虚线路径中的面涡的强度是 $\gamma \mathrm{d}s$，于是

$$\Gamma = \gamma \mathrm{d}s$$

因此

$$\gamma \mathrm{d}s = (u_1 - u_2)\mathrm{d}s + (v_1 - v_2)\mathrm{d}n$$

现在让上下表面靠近面涡，即 $\mathrm{d}n \to 0$．在极限情况下，u_1 和 u_2 就迅速称为面涡上下表面的切向速度，上式就可以写成

$$\gamma \mathrm{d}s = (u_1 - u_2)\mathrm{d}s$$

或者

$$\gamma = u_1 - u_2$$

这个等式非常重要．它表明了**当地面涡切向速度跳跃的差值就等于当地面涡的强度**.

面涡的概念是在低速翼型性质分析中的一个工具．考虑在自由来流的速度为 V_∞ 中的有着任意形状和厚度的翼型，如图6.6 面涡的强度分布函数就是 $\gamma(s)$．计算 γ 关于 s 的函数，当

图 6.6: 任意翼型面涡在表面的分布

诱导出的速度场加上统一的速度大小为 V_∞ 后，就会使得面涡（翼型表面）称为流场中的一条流线．相应的，绕机翼的环量就通过

$$\Gamma = \int \gamma \mathrm{d}s$$

给出，这个积分是沿着整个机翼表面给出的．最后，升力通过库塔-茹科夫斯基定理给出

$$L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma$$

然而，并没有通用的分析解法给出 $\gamma = \gamma(s)$ 对于任意厚度和形状的机翼．相反，面涡的强度必须通过数值的方法求解出．上述解法是**涡流面元解法 (vortex panel method)** 的基础．在真实

生活中，由于气流和翼面的摩擦作用，在翼面上总有一个很薄的边界层．边界层是一个有着高度粘性的区域，并且有着很大的速度梯度产生大量的涡，也就是 $\nabla \times \mathbf{V}$ 在边界层中是有限的．因此，在真实世界中，总是有涡因为粘性效应沿着翼型表面分布．我们的使用面涡替代翼型表面的理念可以被解释为在无粘流中模拟这种效应的一种方式．

想象一下，在图6.6中的翼型如果变得非常薄．如果你退后几步，看着这个如此薄的翼型，在翼型上下表面的面涡几乎就要重叠在一起了．这就产生了一个薄翼型的方法，即用单一的沿着中弧线分布的面涡取代掉这个翼型．这个面涡的强度可以被这样计算出来，和自由来流结合在一起，那么中弧线就变成了流场中的一条流线．尽管这个方法和前述方法是比较相似的，但是它有得到封闭形式的解析解的优点．

6.3　库塔条件

对于一个给定翼型在给定攻角下，有无数种有效的理论解，对应着无数种 Γ 的选择．如图6.7 展示了不同 Γ 的流动流过相同翼型在相同攻角的情况．乍一看，似乎令人进退两难．从

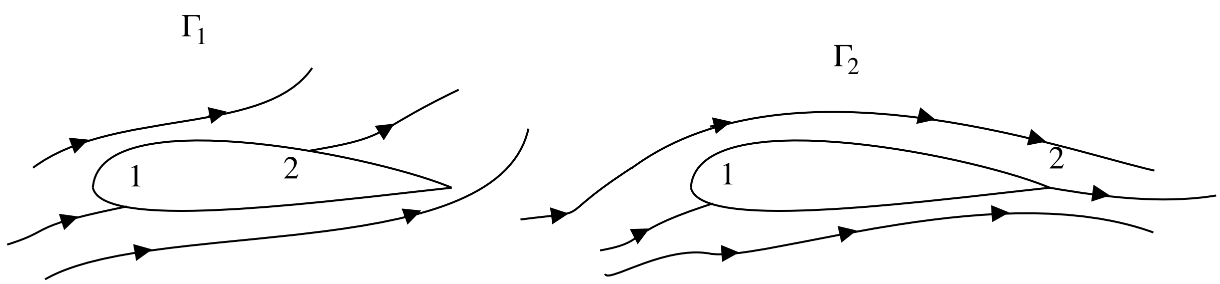


图 6.7: 在势流中不同环量值流过翼型在给定攻角．1 和 2 都是驻点

实验中，我们知道，给定翼型在给定攻角的情况下，只会产生一个单值升力．所以，尽管有无数种势流解，大自然知道如何去选取一种合适的解．显然，在前述的解法讨论中，并不完全—我们需要一种条件去确定给定翼型在给定攻角下的 Γ.

为了找到这个条件，让我们先查看一些从静止的初始条件到运动的绕翼型流动的发展实验情况．流动一开始，流动模式是从绕着翼型开始发展的．在早期发展的时间，流动是绕着尖后缘点从下翼面流到上翼面的，和图6.7中左图相似．然而，更准确的考虑无粘不可压流动表明，在尖后缘点的速度是无穷大的．因此，这种流动是不能被大自然长时间容忍的．然而，真实的流过翼型的流动，在上翼面的驻点会向后缘点移动．最后，在初始瞬态过程结束后，稳定的流动状态就达到了，即气流是平滑的从后缘点离开上翼面和下翼面．这种流动模式就是图6.7中的右图，并且表示了在翼型上稳定的流动类型．

再次强调，给定翼型在给定攻角下建立稳定流动时，大自然会自动自动产生一个满足要求的特定环量，这个环量使得气流平滑的离开后缘点．这就是**库塔条件 (Kutta condition)**.

为了使库塔条件理论化，我们需要更多的在后缘点的自然流动的细节．后缘点处可以有一个有限的角度，或者可以是圆弧过渡的．首先，考虑后缘点处是一个有限角度的情形．记上翼面和下翼面的速度分别是 V_1 和 V_2，如图6.8，V_1 是在点 a 平行于上翼面的速度，V_2 是在点

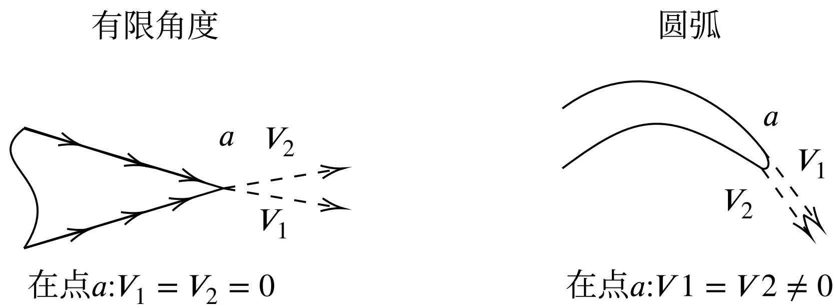


图 6.8: 不同后缘点的形状和库塔条件的关系

a 平行于下翼面的速度．对于一个有限角度的后缘点，如果在点 a 的两个速度都是有限的，那么我们在同一个点就有两个不同方向的两个速度，如图6.8左图所示．但是，这是在物理上是不可能的，唯一的办法就是让 V_1 和 V_2 都等于 0．也就是说，对于有限角度的后缘点，a 点就是驻点．相反的是，对于圆弧过渡的后缘点，V_1 和 V_2 在 a 点方向相同，并且 V_1 和 V_2 都是有限值．但是，a 点的压强是一个唯一的值，将伯努利方程应用于上下翼面接近于 a 点处，得到

$$P_a + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_a + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

或者

$$V_1 = V_2$$

因此，对于圆弧过渡的后缘点，我们可以发现，从翼型后缘点离开上下翼面的速度是有限的，并且大小和方向都是相等的.

我们可以将库塔条件总结表述如下:

1. 对于给定翼型在给定攻角的情况下，Γ 的值要使得气流平滑地离开后缘点.
2. 如果后缘角是有限的，那么后缘点就是一个驻点.
3. 如果后缘角是圆弧过渡的，那么气流在后缘点离开上下翼面的速度大小是有限的，并且大小和方向都是一样的.

再次考虑使用面涡模拟翼型的方法，面涡不论是放在翼面还是中弧线上．沿着面涡的分布，面涡的强度都是变化的，并且记作 $\gamma(s)$．库塔条件使用面涡来表述如下．在后缘点 (TE)，我们有

$$\gamma(\mathrm{TE}) = V_1 - V_2$$

然而，对于有限角度的后缘点，$V_1 = V_2 = 0$；因此，$\gamma(TE) = 0$．对于圆弧过渡的后缘点，$V_1 = V_2 \neq 0$；因此，$\gamma(TE) = 0$．因此，库塔条件使用面涡表述就是

$$\boxed{\gamma(\mathrm{TE}) = 0}$$

6.3.1 没有摩擦能产生升力吗?

在前面的讨论中，我们强调，浸没在空气中的翼型受到的气动力是分布在翼型表面上的压强和剪切力的净综合效应．更重要的是，我们注意到，翼型的升力主要是由于翼面上的压强分布，并且剪应力对于升力基本上没有影响．这很容易知道是为什么．请看图6.7 中翼型的形状．回想到压强作用在翼面的法线上，对于这些翼型，法向的压力基本上是竖直的，也就是升力的方向．与之相反的是，剪应力作用在翼面的切线方向，对于这些翼型，剪应力主要是在水平方向，也就是阻力的方向．因此压力是产生升力的主导者，剪应力对升力的影响可以忽略不记．这就是为什么升力可以在失速前精准的被无粘理论预测出来，正如本章所讨论的那样．

然而，如果我们生活在一个完美地无粘世界中，翼型就不能产生升力．事实上，摩擦的存在就是有升力的原因．这听起来很奇怪，甚至与我们前一段的陈述相互矛盾．为什么会这样?答案就是，在真实生活中，自然确保气流在后缘点平滑的离开的方法就是自然选择气流的机制，即粘性边界层一直附着在翼型表面，直到后缘点．自然通过摩擦来确保达到库塔条件．如果没有粘性边界层（如没有摩擦），在自然界中就没有物理机制可以满足库塔条件．

所以我们被代入了最为讽刺的境地，升力是有翼型表面的压强分布产生的—一种无粘现象，不存在没有摩擦（无粘）的世界中．在这方面，我们可以说没有摩擦就没有升力．然而，我们以上述讨论的内容明智地这么说．

6.4 开尔文环量定理和启动涡

库塔条件描述了翼型绕流的环流是一个正值（顺时针为正）确保气流能平滑的流过后缘点．问题是：这个环量是这么产生的? 它是凭空产生的，还是整个流场的环量都是守恒的呢?

如图6.9,考虑任意一个无粘、不可压流动.假设所有的彻体力都是 0.选择任意一个闭合曲线

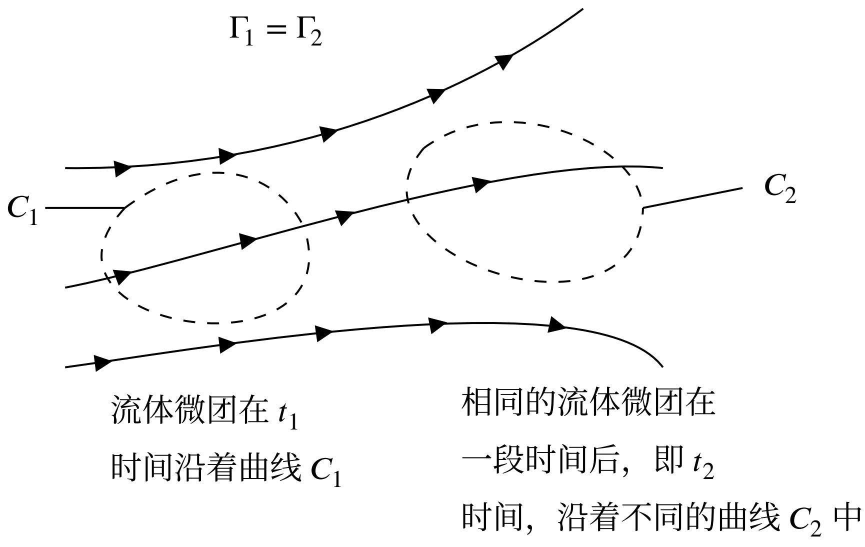


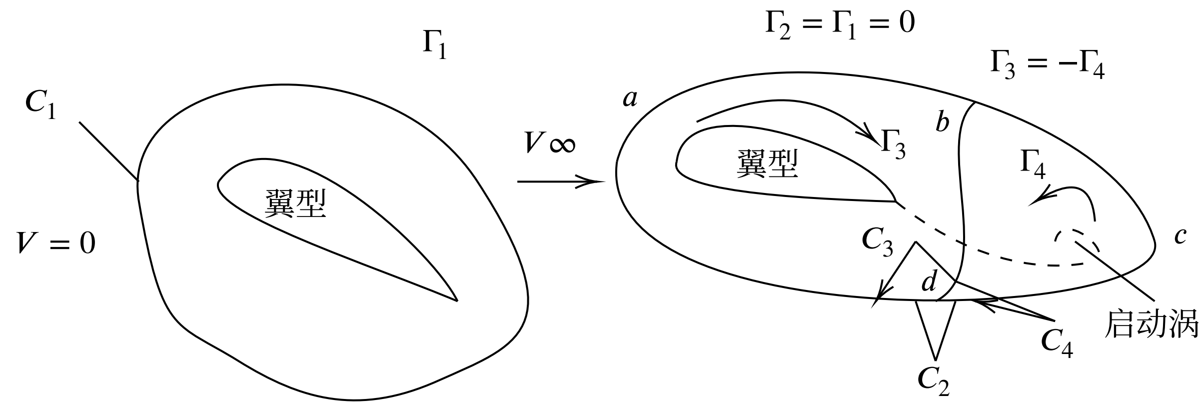
图 6.9: 开尔文定律

C_1,这条曲线确定了一定数量的在 t_1 时刻的流体单元. 记沿着曲线 C_1 的环量是 $\Gamma_1 = -\int_{C_1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{ds}$. 现在，让这些流体单元向下游流动，一段时间后，到达 t_2 时刻．这些相同的流体单元将来自不同的曲线 C_2，该曲线确定的环量是 $\Gamma_2 = -\int_{C_2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{ds}$．对于上述描述的状态，我们可以很容易地证明 $\Gamma_1 = \Gamma_2$．事实上，我们追踪了一组特定的流体单元，我们可以描述为，由一组连续的流体单元确定的闭合曲线，随着这些流体单元在全流场中移动，这条闭合曲线确定的环量是一个常数．关于上述描述的数学化表述可以简化为

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t} = 0$$

这就是说，有相同的流体单元组成的闭合曲线的环量对时间的变化率是 0．这就是**开尔文环量定理 (Kelvin's circulation theoerm)**．证明过程详见附录C. 开尔文环量定理的一个有趣的结论就是，如果在某个瞬间，一个流动表面是面涡，那么它将一直保持是面涡.

开尔文环量定理可以帮助解释绕翼型的环量是怎么产生的，如下．考虑一个翼型在静止的流体中，如图6.10 中左图．因为全流场 $\mathbf{V} = 0$，所以闭合曲线 C_1 确定的环量也是 0．现在开始让流体开始运动绕过翼型，气流将倾向于在后缘周围卷起，如图6.10中右图．这样的话，后缘点的理论速度将达到无穷大．在真实生活中，这个速度将会是一个非常大的有限的值．因此，在流动开始的最初时刻，在后缘点的一个很薄的区域一个非常大的速度梯度（也就是很大的涡强）就形成了．这个巨大的涡强被相同的流体单元确定，因此当流体单元向下游流动时，它被冲到下游．当它向下游运动时，这种薄的很大涡强的单元是不稳定的，并且它将倾向于向前卷起，形成类似于点涡的图像．这个涡就叫做**启动涡 (starting vortex)**，如图 6.10右图所



翼型周围的流体是静止的　　　流体开始流动后的某个瞬间

图 6.10: 启动涡和绕翼型环量产生的原因

示．当翼型周围的气流达到稳定的状态后，气流将平滑地流过后缘点（库塔条件），在后缘点附近的很大的速度梯度也就消失了，在后缘点上也就不在产生涡强了．然而，启动涡在流动开始流动的过程中已经产生了，并且随着流体永远地稳定流向下游了．图6.10中右图展示了稳定流动后的流场，并且在下游某处出现涡流．一开始图6.10 左图组成曲线 C_1 的流体单元流到下游，现在组成了曲线 C_2，即闭合曲线 $abcda$，如图6.10右图所示．根据开尔文环量定理，绕曲线 C_2（包含了翼型和后面的启动涡）的环量和绕曲线 C_1 的环量是一样的，即都是 0．所以

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$$

现在让我们将曲线 C_2 沿着曲线 bd 分成两个闭合的曲线，即 $C_3(bcdb)$ 和 $C_4(abda)$．曲线 C_4 包围了启动涡，曲线 C_3 包围了翼型．沿着 C_4 的环量 Γ_4 是因为启动涡的存在．包围翼型的曲线 C_3 的环量是 Γ_4．因为 bc 是曲线 C_3 和 C_4 的公共边，所以 C_3 和 C_4 的环量之和就等于 C_2 的环量，即

$$\Gamma_3 + \Gamma_4 = \Gamma_2$$

然而，我们已经知道 $\Gamma_2 = 0$，所以

$$\Gamma_4 = -\Gamma_3$$

这就是说，绕机翼的环量等于绕启动涡环量的相反数．

这就引出了本节的关键和总结所在．当翼型绕流开始流动，在尖后缘点处产生的很大的速度梯度产生一个很大的涡强，这个涡强使得后缘点下游区域的气流卷起来，形成启动涡．这个启动涡有一个逆时针的环量．因此，一个等大反向的环量就在翼型上产生了．当这个开始流动过程就继续下去，后缘点的涡强就不断流入启动涡，使得很大的逆时针环量变得更大了．相应的，翼型上顺时针的环量也变得更大了，使得流过后缘点的气流逐渐达到库塔条件，从

而减弱了后缘脱落涡的强度．最后，启动涡达到刚刚满足条件的强度，使得等大反向的绕翼型的环量导致气流平滑地从后缘流出．当这种情况发生，从后缘脱落涡的强度就变为了 0，启动涡的强度就不在增加了，绕翼型的环量将稳定存在.

6.5 经典薄翼理论：对称翼型

建立翼型的体坐标系，其中 x 沿弦线方向，z 垂直于弦线.

对于薄翼型，我们可以用沿中弧线分布的面涡代替这个翼型．我们的目标是计算出在中弧线成为一条流线，并且满足库塔条件下的 $\gamma(s)$ 函数．一旦我们找到了一个特定的函数 $\gamma(s)$ 满足这两个条件，那么我们就可以用积分计算出总的环量，然后用库塔–茹科夫斯基定理计算相应的升力.

考虑用一个沿中弧线分布的面涡取代翼型的情况．自由来流的速度是 V_∞，翼型的攻角是 α．如果一个翼型很薄，那么中弧线非常接近弦线，从很远的地方看，这个面涡就是沿着弦线分布的. 因此, 再来一次替换, 将沿中弧线的面涡分布替换成沿弦线的分布, 那么 $\gamma = \gamma(x)$. 我们依然希望中弧线是流场中的一条流线, 并且 $\gamma(x)$ 被计算出来后依然满足库塔条件, $\gamma(c) = 0$. 这就是说，沿弦线分布的面涡的强度决定了中弧线（不是弦线）是流线.

因为中弧线是流线, 所以中弧线上所有点在垂直于中弧线上的速度分量都是 0 . 流场中任何一点的速度就是远前方自由来流的速度和面涡诱导出来的速度的矢量和．记 $V_{\infty,n}$ 是自由来流在中弧线法向的速度分量，$w'(s)$ 是由面涡诱导出来的速度在中弧线法向上的速度分量．因此，因为中弧线成为了一条流线，所以

$$V_{\infty,n} + w'(s) = 0$$

在中弧线上任意一点都成立, 这就是中弧线的边界条件.

对于一个小攻角的薄翼型，有

$$V_{\infty,n} = V_\infty(\alpha - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x})$$

记 $w(x)$ 是由面涡在弦线上一点诱导出来的速度在法向上的分量, 由于中弧线和弦线非常接近, 那么可以做如下近似

$$w'(s) \approx w(x)$$

我们希望计算出在坐标 x 的 $w(x)$ 的值．考虑一个微元涡 $\gamma \mathrm{d}\xi$ 在沿着弦线距离原点 ξ 的地方．那么在 x 点由 ξ 产生的诱导速度 $\mathrm{d}w$ 就是

$$\mathrm{d}w = -\frac{\gamma(\xi)\mathrm{d}\xi}{2\pi(x-\xi)}$$

相应的，在 x 点的速度就可以通过积分求解出来，即

$$w(x) = -\int_0^c \frac{\gamma(\xi)\mathrm{d}\xi}{2\pi(x-\xi)}$$

将上面做的两个近似代入到中弧线的边界条件中就有

$$V_\infty(\alpha - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}) - \int_0^c \frac{\gamma(\xi)\mathrm{d}\xi}{2\pi(x-\xi)} = 0$$

或者

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^c \frac{\gamma(\xi)\mathrm{d}\xi}{x-\xi} = V_\infty(\alpha - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x})$$

这就是薄翼理论的基本方程．这描述了中弧线是流场中的一条流线．

对于薄翼理论的基本方程，一个给定翼型在给定攻角下，α 和 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 都是已知量．实际上，唯一的未知量就是 $\gamma(\xi)$．基本方程是一个积分方程，它的解 $\gamma(\xi)$ 满足中弧线是流线的这个条件．薄翼理论的核心问题是在满足中弧线是流线的条件下，找到满足库塔条件的解，即 $\gamma(c) = 0$．

如果是一个对称翼，那么

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^c \frac{\gamma(\xi)\mathrm{d}\xi}{x-\xi} = V_\infty\alpha$$

可以使用三角换元得到

$$\gamma(\theta) = 2\alpha V_\infty \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

于是就有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^c \frac{\gamma(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} &= \frac{V_\infty\alpha}{\pi}\int_0^c \frac{(1+\cos\theta)\mathrm{d}\theta}{\cos\theta-\cos\theta_0} \\ &= V_\infty\alpha\end{aligned}$$

在后缘点处，$\theta = \pi$，那么有

$$\gamma(\pi) = 2\alpha V_\infty \left.\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right|_{\theta=\pi} = 2\alpha V_\infty \frac{0}{0}$$

这是一个不确定的极限，使用洛必达法则得到

$$\gamma(\pi) = 2\alpha V_\infty \frac{-\sin\pi}{\cos\pi} = 0$$

满足库塔条件．

在这种情况下，现在求解升力系数．绕翼型的总环量是

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(\xi)\mathrm{d}\xi$$

使用 $\xi = \frac{c}{2}(1 - \cos\theta)$ 换元得到

$$\Gamma = \frac{c}{2}\int_0^{\pi} \gamma(\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta$$

将 $\gamma(\theta)$ 代入就可以得到

$$\Gamma = \alpha c V_\infty \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)\mathrm{d}\theta = \pi\alpha c V_\infty$$

因此单位翼展上的升力就是

$$L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma = \pi\alpha c V_\infty^2$$

因此升力系数就是，其中 $S = c(1)$，

$$c_l = \frac{L'}{q_\infty S}$$

得到

$$c_l = \frac{L'}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c(1)} = 2\pi\alpha$$

也就是说

$$\text{升力曲线的斜率} = \frac{\mathrm{d}c_l}{\mathrm{d}\alpha} = 2\pi$$

这是一个重要的结果，它表明了升力系数和攻角是线性相关的．同样，这依然表明升力曲线的斜率等于 $2\pi\mathrm{rad}^{-1}$．同样的前缘力矩也可以计算出来，$\frac{c}{4}$ 弦线处的力矩即

$$c_{m,\frac{c}{4}} = 0$$

这表明了对称翼型的压心在 $\frac{c}{4}$ 弦线处．由空气动力学中心的定义，我们得到对称翼型的气动中心和压心重合，都在 $\frac{c}{4}$ 弦线处．

笔记

压心的定义是对压心取矩为 0，也就是压心处的气动力矩为 0．

空气动力中心（气动中心）的定义是翼型上存在一点使得对该点取矩，气动力矩的大小和攻角的变化无关．

注意，当翼型的攻角变大时，压心要往前移，也就是说压心的位置和攻角大小有关．所以，一般情况下，压心和气动中心不重合．

这里压心和气动中心重合的原因是，首先对 $\frac{1}{4}$ 弦线处取力矩为 0，所以就是压心．其次，这个力矩恒为 0，和攻角无关，所以就成为了气动中心．

同样的，根据傅里叶级数的展开定理，我们可以将 $\gamma(\xi)$ 展开成一个傅里叶级数，求出基本方程的级数解．

对本节内容做一个总结如下，对于对称翼型：

1. $c_l = 2\pi\alpha$
2. 升力曲线的斜率是 2π
3. 压心和气动中心是重合的，也就是都在 $\frac{c}{4}$ 弦线处

例题 6.3

题目　考虑一种平盘在攻角 5° 的情况下，计算 1) 升力系数；2) 计算前缘力矩系数；3) 关于 $\frac{c}{4}$ 弦线处的力矩系数；4) 关于后缘点的力矩系数；

$$c_l = 2\pi\alpha = \frac{2\pi \times 5}{57.3} = 0.5485$$

$$c_{m,le} = -\frac{c_l}{4} = -0.137$$

$$c_{m,\frac{c}{4}} = 0$$

$$c_{m,te} = \frac{3}{4}c_l = 0.411$$

♣

附录 A　积分

A.1　第一个积分

求积分

$$\int \frac{\sqrt{M^2-1}}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)M}\mathrm{d}M$$

首先, 换元, 令 $M=\sec\alpha$, 得到 $\mathrm{d}M=\tan\alpha\sec\alpha\mathrm{d}\alpha$, 则有 $\tan\alpha=\sqrt{M^2-1}$,$\alpha=\arctan\sqrt{M^2-1}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{M^2-1}}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)M}\mathrm{d}M &= \int \frac{\tan^2\alpha\cdot\sec\alpha}{\sec\alpha\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\sec^2\alpha\right)}\mathrm{d}\alpha \\
&= \int \frac{\tan^2\alpha}{1+\frac{\gamma-1}{2}\sec^2\alpha}\mathrm{d}\alpha \\
&= \int \left(-1+\frac{\gamma+1}{2\cos^2\alpha+\gamma-1}\right)\mathrm{d}\alpha \\
&= -\alpha+\int \frac{\gamma+1}{\frac{2}{1+u^2}+\gamma-1}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= -\alpha+\int \frac{1}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}u^2+1}\mathrm{d}u \\
&= -\alpha+\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}u\right)^2+1}\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}u\right) \\
&= -\alpha+\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}u \\
&= \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)}-\arctan\sqrt{M^2-1}
\end{aligned}$$

分子分母同乘 $\cos^2\alpha$, 并约化

$u=\tan\alpha$

$\mathrm{d}\alpha=\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$

A.2　第二个积分

证明定积分

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi \sin n\theta_0}{\sin\theta_0}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

积化和差公式

$$\begin{aligned}\cos\theta - \cos\theta_0 &= \cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2} + \frac{\theta-\theta_0}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2} - \frac{\theta-\theta_0}{2}\right) \\ &= -2\sin\frac{\theta+\theta_0}{2}\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sin\left(\frac{\theta+\theta_0}{2} + \frac{\theta-\theta_0}{2}\right) \\ &= \cos\frac{\theta+\theta_0}{2}\sin\frac{\theta-\theta_0}{2} + \cos\frac{\theta-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta+\theta_0}{2}\end{aligned}$$

那么

$$\frac{2\sin\theta_0}{\cos\theta - \cos\theta_0} = \cot\frac{\theta_0-\theta}{2} + \cot\frac{\theta_0+\theta}{2}$$

考虑积分

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0}\sin\theta_0\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \left(\cot\frac{\theta_0-\theta}{2} + \cot\frac{\theta_0+\theta}{2}\right)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta$$

而

$$\int_0^\pi \cot\frac{\theta_0-\theta}{2}\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta \xlongequal{\text{用}-\theta\text{换}\theta} \int_{-\pi}^0 \cot\frac{\theta_0+\theta}{2}\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^\pi \cot\frac{\theta_0+\theta}{2}\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta \xlongequal{\text{用}-\theta\text{换}\theta} \int_{-\pi}^0 \cot\frac{\theta_0-\theta}{2}\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^\pi \left(\cot\frac{\theta_0-\theta}{2} + \cot\frac{\theta_0+\theta}{2}\right)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^0 \left(\cot\frac{\theta_0+\theta}{2} + \cot\frac{\theta_0-\theta}{2}\right)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta$$

那么

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\cot\frac{\theta_0-\theta}{2} + \cot\frac{\theta_0+\theta}{2}\right)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^\pi \cot\frac{\theta_0-\theta}{2}\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta + \int_0^\pi \cot\frac{\theta_0+\theta}{2}\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\pi}^0 \cot\frac{\theta_0+\theta}{2}\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta + \int_0^\pi \cot\frac{\theta_0+\theta}{2}\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\pi}^\pi \cot\frac{\theta_0+\theta}{2}\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\cot\frac{\theta_0+\theta}{2}+\cot\frac{\theta_0-\theta}{2}\right)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cot\frac{\theta_0+\theta}{2}\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta && t=\theta+\theta_0 \\
&= \frac{1}{2}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta+\pi}\cos n\left(t-\theta_0\right)\cot\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t && \text{展开 } \cos n(t-\theta_0) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\theta-\pi}^{\theta_0+\pi}\left(\cos nt\cos n\theta_0+\sin nt\sin n\theta_0\right)\cot\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\cos n\theta_0}{2}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\cos nt\cot\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t+\frac{\sin n\theta_0}{2}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\sin nt\cot\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

其中 $\sin n\theta_0$ 和 $\cos n\theta_0$ 都是和积分变量无关的常数.

下证积分

$$\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\cos nt\cot\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=0,\qquad n=1,2,\dots$$

显然

$$\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\sin nt\,\mathrm{d}t=0,\qquad n=1,2,\dots$$

而积分

$$
\begin{aligned}
\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\sin(n-1)t\cos t\,\mathrm{d}t &= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\sin(n-1)t\,\mathrm{d}\sin t \\
&= \sin(n-1)t\sin t\Big|_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}-\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\sin t(n-1)\cos(n-1)t\,\mathrm{d}t \\
&= (n-1)\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\cos(n-1)t\,\mathrm{d}\cos t \\
&= (n-1)\cos t\cos(n-1)t\Big|_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}+\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}(n-1)^2\sin(n-1)t\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= (n-1)^2\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\sin(n-1)t\cos t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

所以积分

$$\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\sin(n-1)t\cos t\,\mathrm{d}t=0$$

同理可证下面积分

$$\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\sin(n-1)t\sin t\,\mathrm{d}t=0$$

$$\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\cos(n-1)t\cos t\,\mathrm{d}t=0$$

$$\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \cos(n-1)t \sin t \,\mathrm{d}t = 0$$

于是

$$\begin{aligned}
\cos nt \cdot \cot \frac{t}{2} &= \cos nt \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \\
&= \cos nt \frac{\cos^2 \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} \\
&= \cos nt \frac{1+\cos t}{\sin t} \\
&= \cos[(n-1)t+t] \frac{1+\cos t}{\sin t} \\
&= [\cos(n-1)t \cos t - \sin(n-1)t \sin t] \frac{1+\cos t}{\sin t} \\
&= \frac{\cos(n-1)t \cos t(1+\cos t)}{\sin t} - \sin(n-1)t - \sin(n-1)t \cos t
\end{aligned}$$

记 $I_n = \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \cos nt \cot \frac{t}{2} \,\mathrm{d}t$, 那么

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \cos t \cot \frac{t}{2} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta 0+\pi} \cos t \frac{1+\cos t}{\sin t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{\cos t+\cos^2 t}{\sin t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{\cos t+1-\sin t^2 t}{\sin t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \left(\cot \frac{t}{2}+\sin t\right) \,\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
I_n = \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \cos nt \cot \frac{t}{2} \,\mathrm{d}t &= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{\cos(n-1)t \cos t(1+\cos t)}{\sin t} \,\mathrm{d}t - \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \sin(n-1)t \,\mathrm{d}t \\
&- \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \sin(n-1)t \cos t \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{\cos(n-1)t \cos t(1+\cos t)}{\sin t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{\cos(n-1)t(\cos t+\cos^2 t)}{\sin t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{\cos(n-1)t(\cos t+1-\sin^2 t)}{\sin t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\theta 0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{(1+\cos t)\cos(n-1)t}{\sin t} \,\mathrm{d}t - \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \cos(n-1)t \sin t \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{(1+\cos t)\cos(n-1)t}{\sin t} \,\mathrm{d}t \\
&= I_{n-1}
\end{aligned}
$$

所以 $I_n = I_{n-1} = \cdots = I_1 = 0$. 同上可证

$$
\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \sin nt \cot \frac{t}{2} \,\mathrm{d}t = \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \sin(n-1)t \ \cot \frac{t}{2} \,\mathrm{d}t
$$

而

$$
\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \sin t \ \cot \frac{t}{2} \,\mathrm{d}t = 2\pi
$$

所以

$$
\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \sin nt \ \cot \frac{t}{2} \,\mathrm{d}t = 2\pi
$$

所以

$$
I = \frac{\sin n\theta_0}{2} \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \sin nt \cot \frac{t}{2} \,\mathrm{d}t = \pi \sin n\theta_0
$$

原积分

$$
\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi \sin n\theta_0}{\sin\theta_0}
$$

A.3 第三个积分

证明

$$
\int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta \ \sin\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} \,\mathrm{d}\theta = -\pi \cos n\theta_0, \qquad n = 1, 2, \ldots
$$

由积化和差公式

$$\sin n\theta \sin\theta = \frac{1}{2}\left[\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta\right]$$

所以原积分

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \frac{\sin n\theta \sin\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\cos(n-1)\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0}\,\mathrm{d}\theta - \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\cos(n+1)\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\sin(n-1)\theta_0}{\sin\theta_0} - \frac{\pi\sin(n+1)\theta_0}{\sin\theta_0}\right) \\
&= -\pi\cos n\theta_0
\end{aligned}$$

附录 B　超静定次数

B.1　基本原则

1. 平面内的任意一个刚性杆件，如果要静定就要三个约束．如果没有约束就看成 -3 次静定．

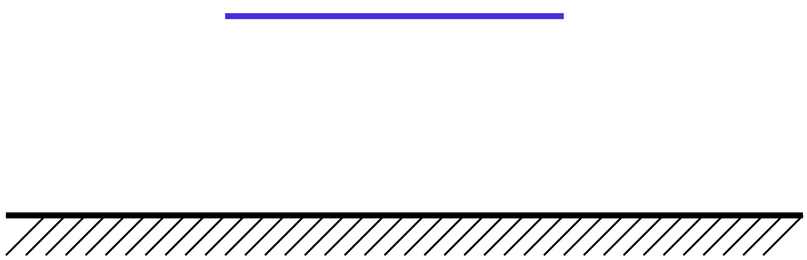


图 B.1: 第一条原则

2. 只要刚性连接的都看成一根杆．

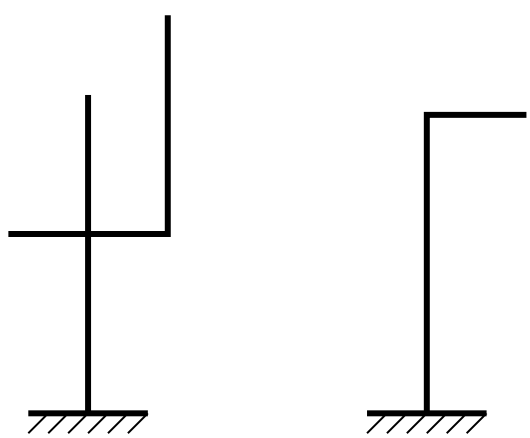


图 B.2: 第二条原则

3. 刚性节点看成 3 个约束，刚性封闭框格也看成 3 个约束．

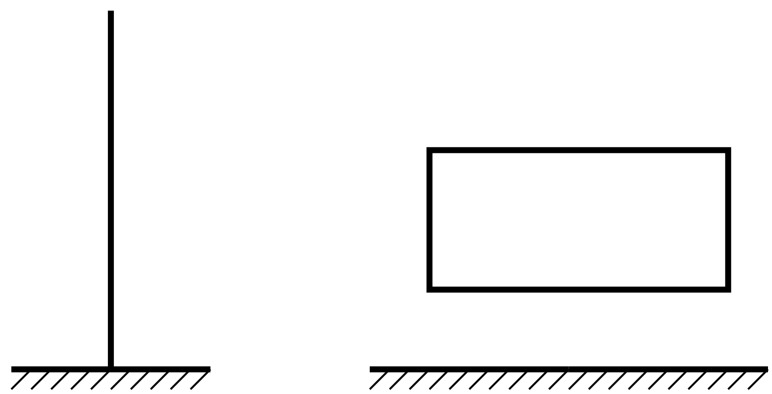


图 B.3: 第三条原则

4 . 一个铰接点看成两个约束.

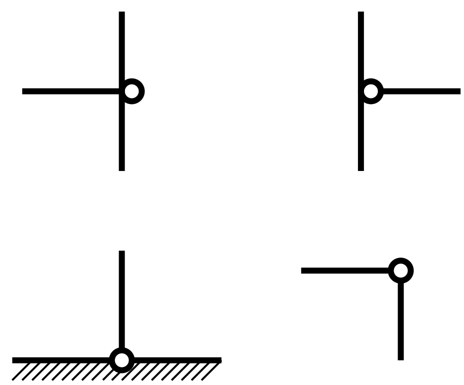


图 B.4: 第四条原则

5 . N 个连杆铰接，算 $N-1$ 个铰接点.

6 . 组合式铰链可以分解计算.

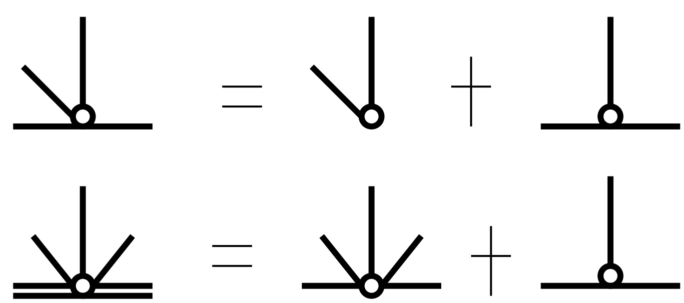


图 B.5: 第六条原则

B.2 计算规则

1. 分析有几个独立杆件，按照原则 2 判定；
2. 计算独立的杆件有几根，乘 3 就是静定所需的约束数；
3. 计算杆件和地面的独立刚节点，乘 3 就是约束数；计算独立杆件和地面的铰接点，乘 2 就是约束数；如果有刚性封闭框格，乘 3 就是约束数；
4. 约束数减去静定约束数量就是超静定次数；

B.3 计算讲解

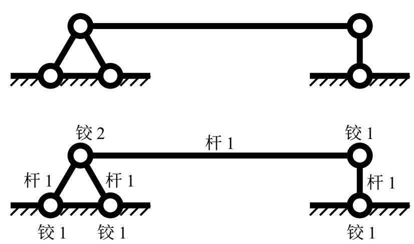


图 B.6: 题图 1

1. 4 根杆件，需要 $3 \times 4 = 12$ 个约束；6 个铰，共 $6 \times 2 = 12$ 个约束，静定.

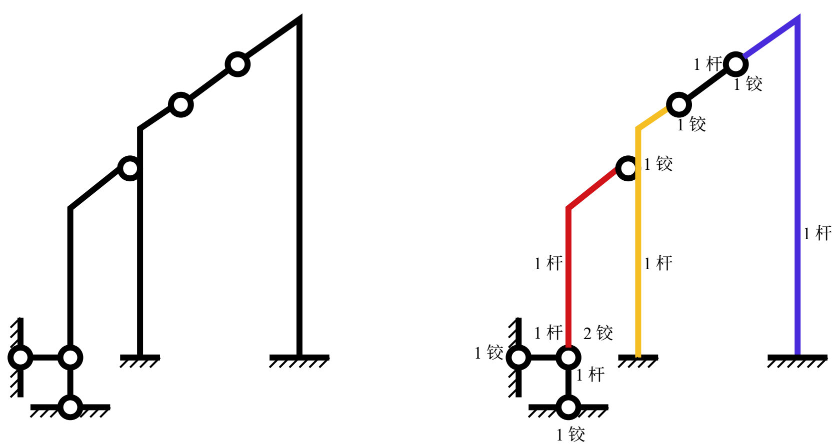


图 B.7: 题图 2

2. 6 根杆，需要 18 个静定约束；7 个铰链，两个刚性节点，共 20 个约束，所以静不定.
3. 注意，不要把交叉连杆看成一个刚性体.

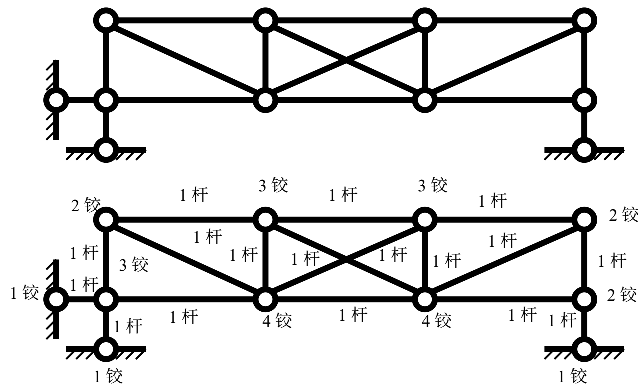


图 B.8: 题图 3

共有 17 根杆，所需约束数是 $17 \times 3 = 51$，共有 26 个铰接点，提供 $26 \times 2 = 52$ 个约束，所以是一次超静定.

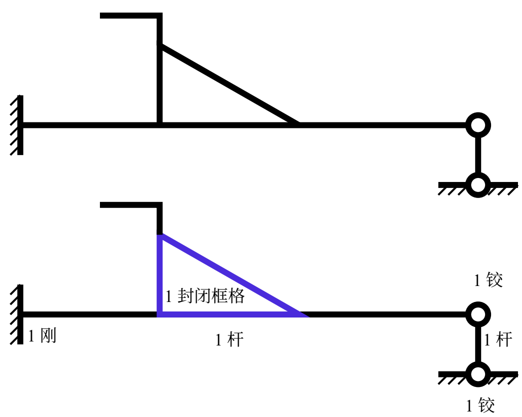


图 B.9: 题图 4

4. 共有两根杆，所需的约束数是 $2 \times 3 = 6$, 共有两个铰接点，一个刚节点，一个封闭框格，将封闭框格当作刚节点处理，提供 $2 \times 3 + 2 \times 2 = 10$ 个约束，所以超静定次数是 4.

5. 共有 13 根杆，所需的约束数是 $13 \times 3 = 39$，共有 21 个铰，提供 $2 \times 21 = 42$ 个约束，所以是 3 次超静定.

6. 红色部分为一根杆，所以共有 3 根杆，所需约束数是 $3 \times 3 = 9$；共有 3 个铰，3 个刚节点，提供了 $3 \times 3 + 2 \times 3 = 15$ 个约束，所以超静定次数是 6 次.

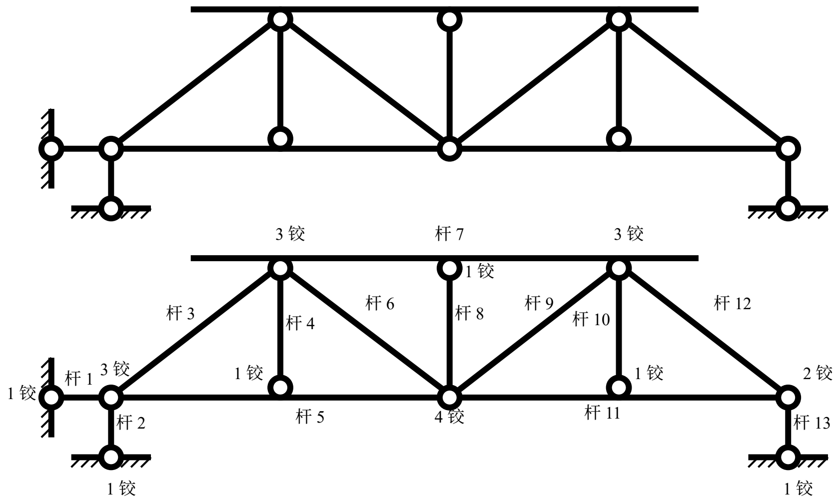


图 B.10: 题图 5

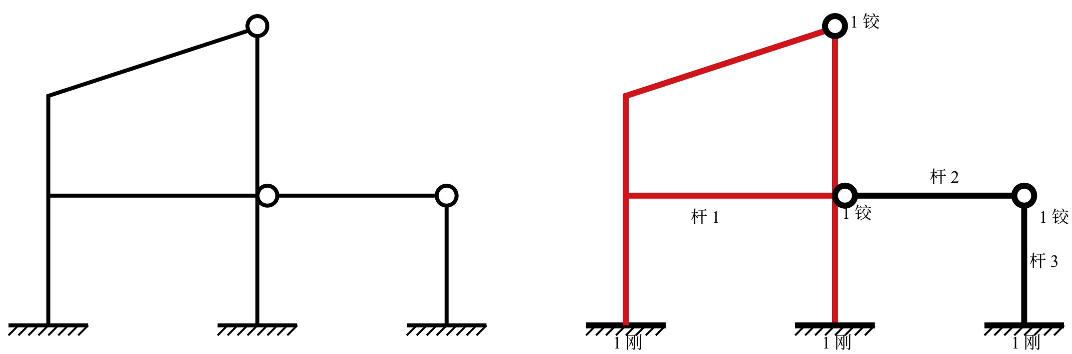


图 B.11: 题图 6

附录 C　开尔文环量定理证明

考虑无粘不可压流动，由环量定义有

$$\Gamma = \oint_c \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

由于力学中，函数的性质都很好，所以微分运算和积分运算可以直接交换次序．即

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t} &= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\oint_c \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \\ &= \oint_c \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}) \\ &= \oint_c \frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \mathbf{V} \cdot \frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}\mathbf{s})}{\mathrm{D}t}\end{aligned}$$

因为

$$\frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}\mathbf{s})}{\mathrm{D}t} = \mathrm{d}\mathbf{V}$$

V 是一个单值函数，所以

$$\begin{aligned}\oint_c \mathbf{V} \cdot \frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}\mathbf{s})}{\mathrm{D}t} &= \oint_c \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{V} \\ &= \oint_c (\mathrm{d}\frac{V^2}{2}) \\ &= 0\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t} = \oint_c \frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

由动量方程，$\dfrac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t}$ 是加速度，也即单位质量流体受到的合外力．所以

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla P$$

而

$$\begin{aligned}\nabla P \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} &= (\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z \\ &= \mathrm{d}P(\text{全微分定义})\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}&=-\frac{1}{\rho}\nabla P\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}\\&=-\frac{1}{\rho}\mathrm{d}P\end{aligned}$$

于是

$$\oint_c\frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}=\oint_c-\frac{1}{\rho}\mathrm{d}P=0$$

其中 $\rho=$ 常数 或者 $\rho=\rho(P)$，即为不可压流动，或者是密度只是压强的函数的流动.