5 Stochastic Integration

5.5 Girsanov's Theorem

Theorem 5.23. L: CLM s.t. $L_0 = 0$. 以下の性質を考える：

(i) $E[\exp \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty] < \infty$ (Novikov's criterion[a])

(ii) L: CLM かつ $E[\exp \frac{1}{2} L_\infty] < \infty$ (Kazamaki's criterion)

(iii) $\mathcal{E}(L)$: UIM

このとき，(i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) の順で成立．

[a] criterion（クライテリオン）：基準

証明. (i) ⇒ (ii) (i) より $E[\langle L, L \rangle_\infty] < \infty$ であり，さらに Thm. 4.13 より L は L^2-bdd. な連続 martingale. このとき

$$\exp \frac{1}{2} L_\infty = (\mathcal{E}(L)_\infty)^{1/2} (\exp \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty)^{1/2}$$

が成り立つので，Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} E[\exp \frac{1}{2} L_\infty] &\le (E[\mathcal{E}(L)_\infty])^{1/2} (E[\exp \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty])^{1/2} \\ &\le (E[\exp \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty])^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

(ii) ⇒ (iii) L が UIM であることから Thm. 3.22 より任意の stopping time T に対し $L_T = E[L_\infty \mid \mathcal{F}_T]$. Jensen の不等式より

$$\exp \frac{1}{2} L_T \le E[\exp \frac{1}{2} L_\infty \mid \mathcal{F}_T].$$

$E[\exp \frac{1}{2} L_\infty] < \infty$ という仮定より，任意の stopping time T に対し $E[\exp \frac{1}{2} L_\infty \mid \mathcal{F}_T]$ の形をしたすべての r.v. の族は一様可積分．さらに先ほどの有界性より，任意の stopping time T に対し $\exp \frac{1}{2} L_T$ の形をしたすべての r.v. の族もまた一様可積分.

$0 < {}^\forall a < 1$ に対し，$Z_t^{(a)} := \exp(\frac{a L_t}{1+a})$ と定める．このとき

$$\mathcal{E}(aL)_t = (\mathcal{E}(L)_t)^{a^2} (Z_t^{(a)})^{1-a^2}$$

となることがすぐにわかる．もし $\Gamma \in \mathcal{F}$ かつ T: stopping time ならば，Hölder の不等式より

$$E[\mathbf{1}_\Gamma \mathcal{E}(aL)_T] \le E[\mathcal{E}(L)_T]^{a^2} E[\mathbf{1}_\Gamma Z_T^{(a)}]^{1-a^2} \le E[\mathbf{1}_\Gamma Z_T^{(a)}]^{1-a^2} \le E[\mathbf{1}_\Gamma \exp \frac{1}{2} L_T]^{2a(1-a)}.$$

２つ目の不等号では $E[\mathcal{E}(L)_T] \le 1$ という性質を用いた ($\mathcal{E}(L)$: 非負 supermartingale かつ $\mathcal{E}(L)_0 = 1$ より Prop. 3.25 が適用できる)．３つ目の不等号では $\frac{1+a}{2a} > 1$ に注意して Jensen の不等式を用いた. 任意の stopping time T に対し $\exp \frac{1}{2} L_T$ の形をしたすべての r.v. の族が一様可積分であることより，先ほどの表示から任意の stopping time T に対し $\mathcal{E}(aL)_T$ の形をしたすべての r.v. の族もまた一様可

積分であることが言える．CLM の定義より $^\forall n$ に対し $\mathcal{E}(aL)_{t\wedge T_n}$: martingale となる stopping time の増加列 $T_n \uparrow \infty$ が存在する．$0 \leq s \leq t$ に対し $E[\mathcal{E}(aL)_{t\wedge T_n} \mid \mathcal{F}_s] = \mathcal{E}(aL)_{s\wedge T_n}$ が成り立ち，一様可積分性より両辺について $n \to \infty$ とすると $\mathcal{E}(aL)$ は一様可積分．これより再び Jensen の不等式を用いることで

$$1 = E[\mathcal{E}(aL)_\infty] \leq E[\mathcal{E}(L)_\infty]^{a^2} E[Z_\infty^{(a)}]^{1-a^2} \leq E[\mathcal{E}(L)_\infty]^{a^2} E[\exp \frac{1}{2} L_\infty]^{2a(1-a)}$$

がわかる．$a \to 1$ とすると $E[\mathcal{E}(L)_\infty] \geq 1$ より $E[\mathcal{E}(L)_\infty] = 1$.

■

5.6 A Few Applications of Girsanov's Theorem

Constructing solutions of stochastic differential equations（確率微分方程式の解の構成） b: bdd. m'ble ft. on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ とする．$^\forall(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ に対し $|b(t,x)| \leq g(t)$ を満たす関数 $g \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt)$ が存在すると仮定．これは特に

$$|b| = \begin{cases} \text{bdd.} & \text{on} \quad [0,A] \times \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{on} \quad (A,\infty) \times \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

を満たす $A > 0$ が存在するときに成り立つ．

B: $(\mathcal{F}_t)$-BM とする．以下の CLM

$$L_t = \int_0^t b(s, B_s) dB_s$$

と関連する指数 martingale

$$D_t = \mathcal{E}(L)_t = \exp\left(\int_0^t b(s,B_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b(s,B_s)^2 ds\right)$$

について考える．b の仮定より Thm. 5.23 の (i) が成り立つことは保証され，ゆえに D: UIM. $Q \coloneqq D_\infty \cdot P$ と定める．Girsanov's Thm と Consequences の (c) より

$$\beta_t \coloneqq B_t - \int_0^t b(s, B_s) ds$$

で定まる process は $(\mathcal{F}_t)$-BM under Q.

この性質は process $X = B$ が確率微分方程式

$$dX_t = d\beta_t + b(t, X_t)dt$$

の解であるような $(\mathcal{F}_t)$-BM β が確率測度 Q の下で存在する，と言い換えることができる．（この式は後述の第 7 章で検討されるタイプのものであるが，この章の記述とは異なり，第 7 章では関数 b に正則性は仮定していない．Girsanov's Thm により係数の正則性を仮定することなく確率微分方程式の解を構成することができる．）

The Cameron-Martin formula 先ほどの議論を $b(t,x)$ が x に依存しない場合に限って議論する．$g \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt)$ に対し $b(t,x) = g(t)$ と定め，また $^\forall t \geq 0$ に対し

$$h(t) = \int_0^t g(s) ds$$

と定める．この形で表される関数 h 全体の集合 $\mathcal{H}$ を Cameron-Martin sp. と呼ぶ．$h \in \mathcal{H}$ のとき，しばしば $\dot{h} = g$ と書く（g は distribution の意味で h の微分である）．

先ほどの議論の特別な場合として，以下に定める確率測度

$$Q \coloneqq D_\infty \cdot P = \exp\left(\int_0^\infty g(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)^2 ds\right) \cdot P$$

の下で，process $\beta_t \coloneqq B_t - h(t)$ は BM. ゆえに任意の非負可測関数 Φ on $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ に対し

$$\begin{aligned} E_P[D_\infty \Phi((B_t)_{t\geq 0})] &= E_Q[\Phi((B_t)_{t\geq 0})] \\ &= E_Q[\Phi((\beta_t + h(t))_{t\geq 0})] \\ &= E_P[\Phi((B_t + h(t))_{t\geq 0})]. \end{aligned}$$

この式の両端の等式（$E_P[D_\infty \Phi((B_t)_{t\geq 0})] = E_P[\Phi((B_t + h(t))_{t\geq 0})]$）を Cameron-Martin formula と呼ぶ（本当か？）．次の命題ではこの公式を Wiener sp. 上の BM の canonical construction（Section 2.2 末尾参照）の特別な場合について書く．