5 Stochastic Integration

5.5 Girsanov's Theorem

Theorem 5.23. L: CLM s.t. $L_0 = 0$. 以下の性質を考える：

(i) $E[\exp \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty] < \infty$ (Novikov's criterion[a])

(ii) L: UIM かつ $E[\exp \frac{1}{2} L_\infty] < \infty$ (Kazamaki's criterion)

(iii) $\mathcal{E}(L)$: UIM

このとき，(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) の順で成立.

[a] criterion（クライテリオン）: 基準

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\langle L, L \rangle_\infty < \exp \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty$ と (i) より $E[\langle L, L \rangle_\infty] < E[\exp \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty] < \infty$ であり，さらに Thm.4.13 より L は L^2-bdd. な連続 martingale. つまり L^1-bdd. な連続 martingale なので Prop.3.19 より $^\exists L_\infty = \lim_{t\to\infty} L_t$ a.s. よって Thm.3.21 より L: UIM. このとき

$$\begin{aligned}
\exp \frac{1}{2} L_\infty = (\exp L_\infty)^{1/2} &= \left(\exp\left(L_\infty - \frac{1}{2}\langle L, L \rangle_\infty + \frac{1}{2}\langle L, L \rangle_\infty\right)\right)^{1/2} \\
&= \left(\exp\left(L_\infty - \frac{1}{2}\langle L, L \rangle_\infty\right)\right)^{1/2} \left(\exp \frac{1}{2}\langle L, L \rangle_\infty\right)^{1/2} \\
&= (\mathcal{E}(L)_\infty)^{1/2} \left(\exp \frac{1}{2}\langle L, L \rangle_\infty\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

が成り立つので，Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned}
E\left[\exp \frac{1}{2} L_\infty\right] &= E\left[(\mathcal{E}(L)_\infty)^{1/2} \left(\exp \frac{1}{2}\langle L, L \rangle_\infty\right)^{1/2}\right] \\
&\le (\underbrace{E[\mathcal{E}(L)_\infty]}_{\le E[\mathcal{E}(L)_0] \le 1})^{1/2} \left(E\left[\exp \frac{1}{2}\langle L, L \rangle_\infty\right]\right)^{1/2} \\
&\le \left(E\left[\exp \frac{1}{2}\langle L, L \rangle_\infty\right]\right)^{1/2} < \infty.
\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) L が UIM であることから Thm.3.22 より任意の stopping time T に対し $L_T = E[L_\infty \mid \mathcal{F}_T]$. $e^{x/2}$: convex であることから Jensen の不等式より

$$\exp \frac{1}{2} L_T = \exp \frac{1}{2} E[L_\infty \mid \mathcal{F}_T] \le E\left[\exp \frac{1}{2} L_\infty \mid \mathcal{F}_T\right].$$

$E[\underbrace{\exp \frac{1}{2} L_\infty}_{\text{ある r.v.}}] < \infty$ という仮定より，任意の stopping time T に対し $E[\exp \frac{1}{2} L_\infty \mid \mathcal{F}_T]$ の形をしたすべての r.v. の族は一様可積分（by Thm.3.21 の最初）. さらに先ほどの有界性より，任意の stopping time T に対し $\exp \frac{1}{2} L_T$ の形をしたすべての r.v. の族もまた一様可積分.

$0 < {}^\forall a < 1$ に対し，$Z_t^{(a)} := \exp(\frac{aL_t}{1+a})$ と定める．このとき

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(aL)_t &= \exp\left(aL_t - \frac{1}{2}\langle aL, aL\rangle_t\right) \\
&= \exp\left(a^2L_t - \frac{1}{2}\langle aL, aL\rangle_t + aL_t - a^2L_t\right) \\
&= \exp\left(a^2L_t - \frac{a^2}{2}\langle L, L\rangle_t\right)\cdot\exp((1-a)aL_t) \\
&= \left(\exp\left(L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\right)\right)^{a^2}\left(\exp\left(\frac{aL_t}{1+a}\right)\right)^{1-a^2} \\
&= (\mathcal{E}(L)_t)^{a^2}(Z_t^{(a)})^{1-a^2}
\end{aligned}$$

となる．よって，$\Gamma \in \mathcal{F}$, T: stopping time に対し，Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{1}_\Gamma\mathcal{E}(aL)_T] &= E[\mathbf{1}_\Gamma(\mathcal{E}(L)_T)^{a^2}(Z_T^{(a)})^{1-a^2}] \\
&\le E[\mathcal{E}(L)_T]^{a^2}E[\mathbf{1}_\Gamma Z_T^{(a)}]^{1-a^2} \\
&\le E[\mathbf{1}_\Gamma Z_T^{(a)}]^{1-a^2} \\
&= E\left[\mathbf{1}_\Gamma\exp\left(\frac{aL_T}{1+a}\right)\right]^{1-a^2} \\
&\le E\left[\mathbf{1}_\Gamma\exp\frac{1}{2}L_T\right]^{2a(1-a)}.
\end{aligned}$$

２つ目の不等号では $E[\mathcal{E}(L)_T] \le (E[\mathcal{E}(L)_0] =)1$ という性質を用いた（$\mathcal{E}(L)$: 非負 supermartingale かつ $\mathcal{E}(L)_0 = 1$ より Prop.3.25 が適用できる）．３つ目の不等号では $\frac{1+a}{2a} > 1$ に注意して Jensen の不等式を用いた．

$\because$) $x^{\frac{1+a}{2a}}$: convex より

$$E\left[\mathbf{1}_\Gamma\exp\left(\frac{aL_T}{1+a}\right)\right]^{\frac{1+a}{2a}} \le E\left[\mathbf{1}_\Gamma\left(\exp\left(\frac{aL_T}{1+a}\right)\right)^{\frac{1+a}{2a}}\right] = E\left[\mathbf{1}_\Gamma\exp\frac{1}{2}L_T\right].$$

両辺を $2a(1-a)$ 乗すれば目的の不等式を得る． ■

任意の stopping time T に対し $\exp\frac{1}{2}L_T$ の形をしたすべての r.v. の族が一様可積分であることより，先ほどの表示から任意の stopping time T に対し $\mathcal{E}(aL)_T$ の形をしたすべての r.v. の族もまた一様可積分であることが言える．CLM の定義より ${}^\forall n$ に対し $\mathcal{E}(aL)_{t\wedge T_n}$: UIM となる stopping time の増加列 $T_n \uparrow \infty$ が存在する．$0 \le s \le t$ に対し $E[\mathcal{E}(aL)_{t\wedge T_n} \mid \mathcal{F}_s] = \mathcal{E}(aL)_{s\wedge T_n}$ が成り立ち，一様可積分性より Vitali の収束定理が適用できるので，両辺について $n \to \infty$ とすると $\mathcal{E}(aL)$ は UIM（$\implies E[\mathcal{E}(aL)_\infty] = 1$）．これより再び Jensen の不等式を用いることで

$$1 = E[\mathcal{E}(aL)_\infty] \le E[\mathcal{E}(L)_\infty]^{a^2}E[Z_\infty^{(a)}]^{1-a^2} \le E[\mathcal{E}(L)_\infty]^{a^2}E\left[\exp\frac{1}{2}L_\infty\right]^{2a(1-a)}$$

がわかる．$a \to 1$ とすると $E[\mathcal{E}(L)_\infty] \ge 1$ より $E[\mathcal{E}(L)_\infty] = 1$.

■

5.6　A Few Applications of Girsanov's Theorem

Constructing solutions of stochastic differential equations（確率微分方程式の解の構成） b: bdd. m'ble ft. on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ とする．$^\forall(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ に対し $|b(t,x)| \le g(t)$ を満たす関数 $g \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt)$ が存在すると仮定．これは特に

$$|b(t,x)| = \begin{cases} \text{bdd.} & \text{on} \quad [0,A] \times \mathbb{R} \\ 0 & \text{on} \quad (A,\infty) \times \mathbb{R} \end{cases}$$

を満たす $A > 0$ が存在するときに成り立つ（$g(t) := \sup_{x\in\mathbb{R}}|b(t,x)|$ と定めればよい）[1]．

B: $(\mathcal{F}_t)$-BM とする．以下の CLM

$$L_t = \int_0^t b(s, B_s) dB_s$$

と関連する exponential martingale

$$D_t = \mathcal{E}(L)_t = \exp\left(\int_0^t b(s,B_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b(s,B_s)^2 ds\right)$$

について考える．b の仮定より Thm.5.23 の (i) が成り立つことは保証されるので D: UIM.

∵)

$$\exp\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty b(s,B_s)^2 ds\right) \le \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)^2 ds\right) < \infty.$$

■

$Q \coloneqq D_\infty \cdot P$, i.e. $A \in \mathcal{F}_\infty$ に対し $Q(A) \coloneqq \int_A D_\infty dP$ と定める．Girsanov's Thm. と Consequences の (c) より

$$\beta_t \coloneqq B_t - \langle B, L\rangle_t = B_t - \int_0^t b(s, B_s) ds$$

で定まる process は $(\mathcal{F}_t)$-BM under Q.

この性質は process $X = B$ が確率微分方程式

$$dX_t = d\beta_t + b(t, X_t)dt$$

の解であるような $(\mathcal{F}_t)$-BM β が確率測度 Q の下で存在する，と言い換えることができる．（この式は後述の Chapter 7 で検討されるタイプのものであるが，この Chapter での記述とは異なり，Chapter 7 では関数 b に正則性は仮定していない．Girsanov's Thm. によりドリフト係数の正則性を仮定することなく確率微分方程式の解を構成することができる．）

The Cameron-Martin formula 先ほどの議論を $b(t,x)$ が x に依存しない場合に限って議論する．$g \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt)$ に対し $g(t) \coloneqq b(t,x)$ と定め，また $^\forall t \ge 0$ に対し

$$h(t) = \int_0^t g(s) ds$$

[1] この係数 b をドリフト係数という．

と定める．

$$\mathcal{H} = \left\{ h : h(t) = \int_0^t g(s)ds \text{ for } {}^\forall t \geq 0 \right\}$$

を Cameron-Martin sp. という．$h \in \mathcal{H}$ のとき，しばしば $\dot{h} = g$ と書く（g は分布の意味で h の導関数である）．

先ほどの議論の特別な場合として，以下に定める確率測度

$$Q \coloneqq D_\infty \cdot P = \exp\left(\int_0^\infty g(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)^2 ds \right) \cdot P$$

の下で，process $\beta_t \coloneqq B_t - h(t)$ は BM. ゆえに任意の非負可測関数 Φ on $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ に対し

$$\begin{aligned} E_P[D_\infty \Phi((B_t)_{t\geq 0})] &= E_Q[\Phi((B_t)_{t\geq 0})] \\ &= E_Q[\Phi((\underbrace{\beta_t}_{\text{BM under } Q} + h(t))_{t\geq 0})] \\ &= E_P[\Phi((\underbrace{B_t}_{\text{BM under } P} + h(t))_{t\geq 0})]. \end{aligned}$$

この式の両端の等式

$$\int dP \Phi(B+h) = \int dP \exp\left(\int_0^\infty g(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)^2 ds \right) \Phi(B)$$

を Cameron-Martin の公式と呼ぶ．次の命題ではこの公式を Wiener sp. 上の BM の canonical construction（Section 2.2 末尾参照）の特別な場合について書く．

Proposition 5.24 (Cameron-Martin formula)**.** $W(dw)$: Wiener meas. on $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), h \in \mathcal{H}$
このとき ${}^\forall \Phi$：非負可測関数 on $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ に対し

$$\int W(dw)\Phi(w+h) = \int W(dw) \exp\left(\int_0^\infty \dot{h}(s)dw_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}(s)^2 ds \right) \Phi(w).$$