5 Stochastic Integration

5.5 Girsanov's Theorem

Theorem 5.23. L: CLM s.t. $L_0 = 0$. 以下の性質を考える：

(i) $E[\exp \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty] < \infty$ (Novikov's criterion[a])

(ii) L: UIM かつ $E[\exp \frac{1}{2} L_\infty] < \infty$ (Kazamaki's criterion[b])

(iii) $\mathcal{E}(L)$: UIM

このとき，(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) の順で成立.

[a] criterion（クライテリオン）：基準

[b] 風巻紀彦（`https://researchmap.jp/read0009617`）

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\langle L, L \rangle_\infty < \exp \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty$ と (i) より $E[\langle L, L \rangle_\infty] \leq E[\exp \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty] < \infty$ であり，さらに Thm.4.13 より L は L^2-bdd. な連続 martingale.

$\because$) （$\langle L, L \rangle_\infty < \exp \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty$ であること）$g(x) := e^{x/2} - x$ と定めると $g(x) \geq g(2 \log 2) = 2(1 - \log 2) > 0$.

つまり L^1-bdd. な連続 martingale なので Prop.3.19 より $^\exists L_\infty = \lim_{t \to \infty} L_t$ a.s. よって Thm.3.21 より L: UIM. このとき

$$
\begin{aligned}
\exp \frac{1}{2} L_\infty = (\exp L_\infty)^{1/2} &= \left(\exp \left(L_\infty - \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty + \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty \right) \right)^{1/2} \\
&= \left(\exp \left(L_\infty - \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty \right) \right)^{1/2} \left(\exp \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty \right)^{1/2} \\
&= (\mathcal{E}(L)_\infty)^{1/2} \left(\exp \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty \right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

が成り立つので

$$
\begin{aligned}
E\left[\exp \frac{1}{2} L_\infty \right] &= E\left[(\mathcal{E}(L)_\infty)^{1/2} \left(\exp \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty \right)^{1/2} \right] \\
&\overset{\text{C-S}}{\leq} (\underbrace{E[\mathcal{E}(L)_\infty]}_{\leq E[\mathcal{E}(L)_0] \leq 1})^{1/2} \left(E\left[\exp \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty \right] \right)^{1/2} \\
&\leq \left(E\left[\exp \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_\infty \right] \right)^{1/2} < \infty.
\end{aligned}
$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) L が UIM であることから Thm.3.22 より任意の stopping time T に対し $L_T = E[L_\infty \mid \mathcal{F}_T]$. $e^{x/2}$: convex であることから Jensen の不等式より

$$
\exp \frac{1}{2} L_T = \exp \frac{1}{2} E[L_\infty \mid \mathcal{F}_T] \leq E\left[\exp \frac{1}{2} L_\infty \mid \mathcal{F}_T \right].
$$

$\underbrace{E[\exp\frac{1}{2}L_\infty]}_{\text{ある r.v.}} < \infty$ という仮定より，任意の stopping time T に対し $E[\exp\frac{1}{2}L_\infty \mid \mathcal{F}_T]$ の形をしたすべての r.v. の族は一様可積分（by Thm.3.21 の証明の最初）．さらに先ほどの評価より，任意の stopping time T に対し $\exp\frac{1}{2}L_T$ の形をしたすべての r.v. の族もまた一様可積分.
$0 < {}^\forall a < 1$ に対し，$Z_t^{(a)} \coloneqq \exp(\frac{aL_t}{1+a})$ と定める．このとき

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(aL)_t &= \exp\left(aL_t - \frac{1}{2}\langle aL, aL\rangle_t\right) \\
&= \exp\left(a^2L_t - \frac{1}{2}\langle aL, aL\rangle_t + aL_t - a^2L_t\right) \\
&= \exp\left(a^2L_t - \frac{a^2}{2}\langle L, L\rangle_t\right)\cdot\exp((1-a)aL_t) \\
&= \left(\exp\left(L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\right)\right)^{a^2}\left(\exp\left(\frac{aL_t}{1+a}\right)\right)^{1-a^2} \\
&= (\mathcal{E}(L)_t)^{a^2}(Z_t^{(a)})^{1-a^2}
\end{aligned}$$

となる．よって $\Gamma \in \mathcal{F}$, T: stopping time に対し

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{1}_\Gamma\mathcal{E}(aL)_T] &= E[\mathbf{1}_\Gamma(\mathcal{E}(L)_T)^{a^2}(Z_T^{(a)})^{1-a^2}] \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} E[\mathcal{E}(L)_T]^{a^2}E[\mathbf{1}_\Gamma Z_T^{(a)}]^{1-a^2} \\
&\leq E[\mathbf{1}_\Gamma Z_T^{(a)}]^{1-a^2} \\
&= E\left[\mathbf{1}_\Gamma\exp\left(\frac{aL_T}{1+a}\right)\right]^{1-a^2} \\
&\overset{(*)}{\leq} E\left[\mathbf{1}_\Gamma\exp\frac{1}{2}L_T\right]^{2a(1-a)}.
\end{aligned}$$

２つ目の不等号では $E[\mathcal{E}(L)_T] \leq (E[\mathcal{E}(L)_0] =)1$ という性質を用いた（$\mathcal{E}(L)$: 非負 supermartingale かつ $\mathcal{E}(L)_0 = 1$ より Prop.3.25 が適用できる）．３つ目の不等号では $\frac{1+a}{2a} > 1$ に注意して Jensen の不等式を用いた.

$\because$)（$(*)$ が成り立つこと）$x^{\frac{1+a}{2a}}$: convex より

$$E\left[\mathbf{1}_\Gamma\exp\left(\frac{aL_T}{1+a}\right)\right]^{\frac{1+a}{2a}} \leq E\left[\mathbf{1}_\Gamma\left(\exp\left(\frac{aL_T}{1+a}\right)\right)^{\frac{1+a}{2a}}\right] = E\left[\mathbf{1}_\Gamma\exp\frac{1}{2}L_T\right].$$

両辺を $2a(1-a)$ 乗すれば目的の不等式を得る.

任意の stopping time T に対し $\exp\frac{1}{2}L_T$ の形をしたすべての r.v. の族が一様可積分であることより，先ほどの表示から任意の stopping time T に対し $\mathcal{E}(aL)_T$ の形をしたすべての r.v. の族もまた一様可積分であることが言える.

$\because$) $\lambda > 0$: fix
$\exp \frac{1}{2} L_T$ は一様可積分なので，定義より

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_T E\left[\mathbf{1}_{\{\exp \frac{1}{2}L_T > \lambda\}} \exp \frac{1}{2} L_T\right] = 0.$$

$\Gamma = \{\mathcal{E}(aL)_T > \lambda\} \in \mathcal{F}$ に対し

$$\mathcal{E}(aL)_T = \exp\left(aL_T - \frac{1}{2}\langle aL, aL\rangle_T\right) \leq \left(\exp \frac{1}{2} L_T\right)^{2a}$$

より $\Gamma \subset \{\exp \frac{1}{2} L_T > \lambda^{1/2a}\}$ が成り立つので

$$\begin{aligned}\sup_T E\left[\mathbf{1}_\Gamma \mathcal{E}(aL)_T\right] &\leq \sup_T E\left[\mathbf{1}_\Gamma \exp \frac{1}{2} L_T\right]^{2a(1-a)} \\ &\leq \sup_T E\left[\mathbf{1}_{\{\exp \frac{1}{2}L_T > \lambda^{1/2a}\}} \exp \frac{1}{2} L_T\right]^{2a(1-a)} \longrightarrow 0 \quad (\lambda \to 0).\end{aligned}$$

ゆえに $\mathcal{E}(aL)_T$ は一様可積分.

CLM の定義より $^\forall n$ に対し $\mathcal{E}(aL)_{t\wedge T_n}$: UIM となる stopping time の増加列 $T_n \uparrow \infty$ が存在する．$0 \leq s \leq t$ に対し $E[\mathcal{E}(aL)_{t\wedge T_n} \mid \mathcal{F}_s] = \mathcal{E}(aL)_{s\wedge T_n}$，つまり $^\forall A \in \mathcal{F}_s$ に対し $E[\mathcal{E}(aL)_{t\wedge T_n}; A] = E[\mathcal{E}(aL)_{s\wedge T_n}; A]$ が成り立ち，一様可積分性より Vitali の収束定理が適用できるので，両辺について $n \to \infty$ とすると $\mathcal{E}(aL)$ は UIM（$\Longrightarrow$ $E[\mathcal{E}(aL)_\infty] = 1$）．これより再び Jensen の不等式を用いることで

$$1 = E[\mathcal{E}(aL)_\infty] \leq E[\mathcal{E}(L)_\infty]^{a^2} E[Z_\infty^{(a)}]^{1-a^2} \leq E[\mathcal{E}(L)_\infty]^{a^2} E\left[\exp \frac{1}{2} L_\infty\right]^{2a(1-a)}$$

がわかる．$a \to 1$ とすると $E[\mathcal{E}(L)_\infty] \geq 1$ より $E[\mathcal{E}(L)_\infty] = 1$.

■

5.6 A Few Applications of Girsanov's Theorem

Constructing solutions of stochastic differential equations（確率微分方程式の解の構成） b : 有界可測関数 on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ とする．$^\forall(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ に対し $|b(t,x)| \leq g(t)$ を満たす関数 $g \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt)$ が存在すると仮定．これは特に

$$|b(t,x)| = \begin{cases} \text{bdd.} & \text{on} \quad [0,A] \times \mathbb{R} \\ 0 & \text{on} \quad (A,\infty) \times \mathbb{R} \end{cases}$$

を満たす $A > 0$ が存在するときに成り立つ（$g(t) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |b(t,x)|$ と定めればよい）[1]．

B: $(\mathcal{F}_t)$-BM とする．以下の CLM

$$L_t = \int_0^t b(s, B_s) dB_s$$

[1] この係数 b を**ドリフト係数**という．

と関連する exponential martingale

$$D_t = \mathcal{E}(L)_t = \exp\left(\int_0^t b(s, B_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b(s, B_s)^2 ds\right)$$

について考える．b の仮定より Thm.5.23 の (i) が成り立つことは保証されるので D: UIM.

$\because$)

$$\exp\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty b(s, B_s)^2 ds\right) \leq \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)^2 ds\right) < \infty.$$

$Q \coloneqq D_\infty \cdot P$, i.e. $A \in \mathcal{F}_\infty$ に対し $Q(A) \coloneqq \int_A D_\infty dP$ と定める．Girsanov の定理と Consequences の (c) より

$$\beta_t \coloneqq B_t - \langle B, L\rangle_t = B_t - \int_0^t b(s, B_s)ds$$

で定まる process は $(\mathcal{F}_t)$-BM under Q.

この性質は process $X = B$ が確率微分方程式

$$dX_t = d\beta_t + b(t, X_t)dt$$

の解であるような $(\mathcal{F}_t)$-BM β が確率測度 Q の下で存在する，と言い換えることができる．（この式は後述の Chapter 7 で検討されるタイプのものであるが，この Chapter での記述とは異なり，Chapter 7 では関数 b に正則性は仮定していない．Girsanov の定理によりドリフト係数の正則性を仮定することなく確率微分方程式の解を構成することができる．）

The Cameron-Martin formula 先ほどの議論を $b(t, x)$ が x に依存しない場合に限って議論する．$g \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt)$ に対し $g(t) \coloneqq b(t, x)$ と定め，また $^\forall t \geq 0$ に対し

$$h(t) = \int_0^t g(s)ds$$

と定める．

$$\mathcal{H} = \left\{h : h(t) = \int_0^t g(s)ds \text{ for } {}^\forall t \geq 0\right\}$$

を **Cameron-Martin 空間**という．$h \in \mathcal{H}$ のとき，しばしば $\dot{h} = g$ と書く（g は分布の意味で h の導関数である）．

先ほどの議論の特別な場合として，以下に定める確率測度

$$Q \coloneqq D_\infty \cdot P = \exp\left(\int_0^\infty g(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)^2 ds\right) \cdot P$$

の下で，process $\beta_t \coloneqq B_t - h(t)$ は BM. ゆえに任意の非負可測関数 Φ on $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ に対し

$$\begin{aligned} E_P[D_\infty \Phi((B_t)_{t\geq 0})] = E_Q[\Phi((B_t)_{t\geq 0})] &= E_Q[\Phi((\underbrace{\beta_t}_{\text{BM under } Q} + h(t))_{t\geq 0})] \\ &= E_P[\Phi((\underbrace{B_t}_{\text{BM under } P} + h(t))_{t\geq 0})]. \end{aligned}$$

この式の最左辺と最右辺を見た

$$\int \Phi(B+h)dP = \int \exp\left(\int_0^\infty g(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)^2 ds\right)\Phi(B)dP$$

を **Cameron-Martin の公式**という．次の命題では，この公式を Wiener 空間上の BM の canonical construction（Section 2.2 末尾参照）の特別な場合について書く．

Proposition 5.24 (Cameron-Martin の公式)**.** $W(dw)$: Wiener 測度 on $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}), h \in \mathcal{H}$
このとき $^\forall\Phi$: 非負可測関数 on $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ に対し

$$\int \Phi(w+h)W(dw) = \int \exp\left(\int_0^\infty \dot{h}(s)dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}(s)^2 ds\right)\Phi(w)W(dw).$$

Remark. 積分 $\int_0^\infty \dot{h}(s)dw(s)$ は $W(dw)$ の下での BM $w(s)$ について確率積分であるが，関数 $\dot{h}(s)$ は決定論的な progressive process なので Wiener 積分とみなすこともできる．よって，実は Cameron-Martin の公式は確率積分や Girsanov の定理を用いない Gaussian calculations（分布の計算）から導くことができる．しかしこの公式を Girsanov の定理を用いて導出することは有益である．

Cameron-Martin の公式より，Wiener 測度は Cameron-Martin 空間に属する関数 h による平行移動の下で「quasi-invariance（準不変性）」を持つことがわかる．つまり（平行移動させる）写像 $w \mapsto w+h$ の下での Wiener 測度 $W(dw)$ の像測度は $W(dw)$ に関する密度を持ち (←?)，この密度は martingale $\int_0^t \dot{h}(s)dw(s)$ に関連する exponential martingale の $t=\infty$ での値，つまり

$$\mathcal{E}\left(\int_0^\cdot \dot{h}(s)dw(s)\right)_\infty = \exp\left(\int_0^\infty \dot{h}(s)dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}(s)^2 ds\right)$$

である．

Law of hitting times for Brownian motion with drift B : 0 スタートの real BM, $T_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ for $^\forall a > 0$ (first hitting time)

$c \in \mathbb{R}$ のとき，stopping time

$$U_a := \inf\{t \geq 0 : B_t + ct = a\}$$

の分布を求める．

証明. $c=0$ のときは $U_a = T_a$ であり，Cor.2.22 より a^2/B_1^2 と同じ分布をもつ．Girsanov の定理（または Cameron-Martin の公式）より，$c=0$ の特別な場合から c が任意の実数の場合を導くことができる．

$t > 0$ を固定する．

$$\dot{h}(s) = c\mathbf{1}_{\{s \leq t\}}, \quad h(s) = c(s \wedge t)$$

と

$$\Phi(w) = \mathbf{1}_{\{\max_{s\in[0,t]} w(s) \geq a\}} \text{ for } ^\forall w \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$$

に対し，Cameron-Martin の公式を適用する：

$$P(U_a \leq t) = P(\max_{s\in[0,t]}(B_s + cs) \geq a)$$

$$
\begin{aligned}
&= P(\max_{s\in[0,t]}(B_s + c(s\wedge t)) \geq a)\\
&= P(\max_{s\in[0,t]}(B_s + h(s)) \geq a)\\
&= E[\mathbf{1}_{\{\max_{s\in[0,t]}(B_s+h(s))\geq a\}}] = E[\Phi(B+h)]\\
&\overset{\text{C-M}}{=} E\left[\Phi(B)\exp\left(\int_0^\infty \dot{h}(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}(s)^2 ds\right)\right]\\
&= E\left[\mathbf{1}_{\{T_a\leq t\}}\exp\left(c\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{s\leq t\}}dB_s - \frac{c^2}{2}\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{s\leq t\}}ds\right)\right]\\
&= E\left[\mathbf{1}_{\{T_a\leq t\}}\exp\left(cB_t - \frac{c^2}{2}t\right)\right]\\
&\overset{(*)}{=} E\left[\mathbf{1}_{\{T_a\leq t\}}\exp\left(cB_{t\wedge T_a} - \frac{c^2}{2}(t\wedge T_a)\right)\right]\\
&= E\left[\mathbf{1}_{\{T_a\leq t\}}\exp\left(ca - \frac{c^2}{2}T_a\right)\right]\\
&= \int_{-\infty}^\infty \mathbf{1}_{\{s\leq t\}} e^{ca-\frac{c^2}{2}s}\cdot \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}}e^{-\frac{a^2}{2s}}\mathbf{1}_{\{s>0\}}ds\\
&= \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}}e^{-\frac{a^2}{2s}}e^{ca-\frac{c^2}{2}s}ds\\
&= \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}}e^{-\frac{1}{2s}(a-cs)^2}ds.
\end{aligned}
$$

$\because$)（$(*)$ が成り立つこと）$\exp\left(cB_t - \frac{c^2}{2}t\right)$: martingale であることから Cor.3.23 より

$$
E\left[\exp\left(cB_t - \frac{c^2}{2}t\right) \mid \mathcal{F}_{t\wedge T_a}\right] = \exp\left(cB_{t\wedge T_a} - \frac{c^2}{2}(t\wedge T_a)\right).
$$

この計算により r.v. U_a は $\mathbb{R}_+$ 上に密度

$$
\psi(s) = \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}}e^{-\frac{1}{2s}(a-cs)^2}
$$

を持つことがわかる. ■

この密度を積分することで

$$
P(U_a < \infty) = \begin{cases} 1 & \text{if } c\geq 0,\\ e^{2ca} & \text{if } c\leq 0 \end{cases}
$$

がわかるが，この結果は連続 martingale $\exp(-2c(B_t+ct))$ に対し optional stopping theorem を適用することで，より簡単に得ることができる (←?).