

**Exercise 5.33 (Study of multidimensional Brownian motion)**  $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^N)$  を  $x = (x_1, \dots, x_N) (\in \mathbb{R}^N)$  スタートの  $N$  次元  $(\mathcal{F}_t)$ -BM とする. ここで  $N$  は 2 以上の整数とする.

1.  $|B_t|^2$  は連続 semimartingale であり,  $|B_t|^2$  の martingale part が true martingale であることを示せ.

**証明.** (途中)  $B_t^1, \dots, B_t^N$  は BM より連続 semimartingale なので, 伊藤の公式が適用できて, a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し

$$\begin{aligned} |B_t|^2 &= |B_0|^2 + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} |B_s|^2 dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} |B_s|^2 d\langle B^i, B^j \rangle_s \\ &= |x|^2 + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} |B_s|^2 dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} |B_s|^2 ds \quad (\because i \neq j \implies \langle B^i, B^j \rangle = 0) \\ &= |x|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \int_0^t B_s^i dB_s^i + Nt. \end{aligned}$$

$$\because |B|^2 = \sum_{i=1}^N (B^i)^2 \text{ より } \frac{\partial}{\partial x_i} |B|^2 = 2B^i, \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} |B|^2 = 2.$$

■

- 2.

$$\beta_t = \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i$$

と定める (ただし  $|B_s| = 0$  のとき  $\frac{B_s^i}{|B_s|} = 0$  とする).  $\beta_t$  の定義に現れる確率積分の定義を正当化し, さらに  $(\beta_t)_{t \geq 0}$  が 0 スタートの  $(\mathcal{F}_t)$ -BM であることを示せ.

**証明.** (途中) 任意の  $1 \leq i \leq N$  に対し  $\frac{B^i}{|B|} \leq 1$  より, a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し

$$\int_0^t \left( \frac{B_s^i}{|B_s|} \right)^2 d\langle B^i, B^i \rangle_s \leq \int_0^t ds = t < \infty$$

が成り立つので, 任意の  $1 \leq i \leq N$  に対し  $\frac{B^i}{|B|} \in L_{\text{loc}}^2(B^i)$ . よって  $\int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i$  は確率積分の意味で well-defined な CLM である.

したがって  $\beta$  は  $(\mathcal{F}_t)$ -CLM である (←?). ここで

$$\begin{aligned} \langle \beta, \beta \rangle_t &= \left\langle \sum_{i=1}^N \int_0^\cdot \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i, \sum_{i=1}^N \int_0^\cdot \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i \right\rangle_t \\ &= \sum_{i=1}^N \left\langle \int_0^\cdot \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i, \int_0^\cdot \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i \right\rangle_t \\ &= \int_0^t \frac{\sum_{i=1}^N (B_s^i)^2}{|B_s|^2} ds = \int_0^t \frac{|B_s|^2}{|B_s|^2} ds = t \end{aligned}$$

が成り立つことより,  $\beta$  は 0 スタートの  $(\mathcal{F}_t)$ -BM である.

■

3.

$$|B_t|^2 = |x|^2 + 2 \int_0^t |B_s| d\beta_s + Nt$$

が成り立つことを示せ.

証明.

$$\frac{d\beta_t}{dB_t^i} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dB_t^i} \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i = \sum_{i=1}^N \frac{B_t^i}{|B_t|}$$

より  $d\beta_t = \sum_{i=1}^N \frac{B_t^i}{|B_t|} dB_t^i$  となるので

$$\begin{aligned} |B_t|^2 &= |x|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \int_0^t B_s^i dB_s^i + Nt \\ &= |x|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} |B_s| dB_s^i + Nt \\ &= |x|^2 + 2 \int_0^t |B_s| \sum_{i=1}^N \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i + Nt \\ &= |x|^2 + 2 \int_0^t |B_s| d\beta_s + Nt. \end{aligned}$$

■

4. 以降,  $x \neq 0$  を仮定する.  $\varepsilon \in (0, |x|)$ ,  $T_\varepsilon = \inf \{t \geq 0 : |B_t| \leq \varepsilon\}$  とする. ここで任意の  $a > 0$  に対し

$$f(a) = \begin{cases} \log a & (N = 2), \\ a^{2-N} & (N \geq 3) \end{cases}$$

と定める.  $f(|B_{t \wedge T_\varepsilon}|)$  が CLM となることを示せ.

証明. (途中)

■

5.  $R > |x|$ ,  $S_R = \inf \{t \geq 0 : |B_t| \geq R\}$  とする.

$$P(T_\varepsilon < S_R) = \frac{f(R) - f(|x|)}{f(R) - f(\varepsilon)}$$

となることを示せ. また  $\varepsilon \rightarrow 0$  としたとき  $P(T_\varepsilon < S_R) \rightarrow 0$  となることを確かめ, a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し  $B_t \neq 0$  となることを示せ.

証明. (途中)

■

6. a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し

$$|B_t| = |x| + \beta_t + \frac{N-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{|B_s|}$$

となることを示せ.

証明. (途中)

■

7.  $N \geq 3$  を仮定する. a.s. で  $t \rightarrow \infty$  としたとき  $|B_t| \rightarrow \infty$  となることを示せ (ヒント:  $|B_t|^{2-N}$  が非負 supermartingale であることを確かめよ).

証明. (途中)

■

8.  $N = 3$  を仮定する. Gaussian density の形式を用いて, r.v. の族  $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$  が  $L^2$ -bdd. であることを確かめよ. また  $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$  が CLM であり, かつ true martingale でないことを示せ.

証明. (途中)

■