Exercise 5.33 (Study of multidimensional Brownian motion) $B_t = (B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^N)$ を $x = (x_1, \cdots, x_N)(\in \mathbb{R}^N)$ スタートの N 次元 $(\mathcal{F}_t)$-BM とする．ここで N は 2 以上の整数とする．

1. $|B_t|^2$ は連続 semimartingale であり，$|B_t|^2$ の martingale part が true martingale であることを示せ．

   証明. ■

2. $$\beta_t = \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i$$

   と定める（ただし $|B_s| = 0$ のとき $\frac{B_s^i}{|B_s|} = 0$ とする）．β_t の定義に現れる確率積分の定義を正当化し，さらに $(\beta_t)_{t \geq 0}$ が 0 スタートの $(\mathcal{F}_t)$-BM であることを示せ．

   証明. ■

3. $$|B_t|^2 = |x|^2 + 2 \int_0^t |B_t| d\beta_s + Nt$$

   が成り立つことを示せ．

   証明. ■

4. 以降，$x \neq 0$ を仮定する．$\varepsilon \in (0, |x|), T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \leq \varepsilon\}$ とする．ここで任意の $a > 0$ に対し

   $$f(a) = \begin{cases} \log a & (N = 2), \\ a^{2-N} & (N \geq 3) \end{cases}$$

   と定める．$f(|B_{t \wedge T_\varepsilon}|)$ が CLM となることを示せ．

   証明. ■

5. $R > |x|, S_R = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq R\}$ とする．

   $$P(T_\varepsilon < S_R) = \frac{f(R) - f(|x|)}{f(R) - f(\varepsilon)}$$

   となることを示せ．また $\varepsilon \to 0$ としたとき $P(T_\varepsilon < S_R) \to 0$ となることを確かめ，a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し $B_t \neq 0$ となることを示せ．

   証明. ■

6. a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し

   $$|B_t| = |x| + \beta_t + \frac{N-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{|B_s|}$$

   となることを示せ．

   証明. ■

7. $N \geq 3$ を仮定する．a.s. で $t \to \infty$ としたとき $|B_t| \to \infty$ となることを示せ（ヒント：$|B_t|^{2-N}$ が非負 supermartingale であることを確かめよ）．

証明. ■

8. $N = 3$ を仮定する．Gaussian density の形式を用いて，r.v. の族 $(|B_t|^{-1})_{t\geq 0}$ が L^2-bdd. であることを確かめよ．また $(|B_t|^{-1})_{t\geq 0}$ が CLM であり，かつ true martingale でないことを示せ．

証明. ■