

**Exercise 5.33 (Study of multidimensional Brownian motion)**  $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^N)$  を  $x = (x_1, \dots, x_N) (\in \mathbb{R}^N)$  スタートの  $N$  次元  $(\mathcal{F}_t)$ -BM とする. ここで  $N$  は 2 以上の整数とする.

1.  $|B_t|^2$  は連続 semimartingale であり,  $|B_t|^2$  の martingale part が true martingale であることを示せ.

**証明.**  $B_t^1, \dots, B_t^N$  は BM より連続 semimartingale. よって  $F(x) = |x|^2$  に対して Itô's formula が適用できて, a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し

$$\begin{aligned} |B_t|^2 &= F(B_t) = |B_0|^2 + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} |B_s|^2 dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} |B_s|^2 d\langle B^i, B^j \rangle_s \\ &= |x|^2 + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} |B_s|^2 dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} |B_s|^2 ds \quad (\because i \neq j \implies \langle B^i, B^j \rangle = 0) \\ &= |x|^2 + \sum_{i=1}^N \int_0^t 2B_s^i dB_s^i + Nt. \end{aligned}$$

$$\because |B|^2 = \sum_{i=1}^N (B^i)^2 \text{ より } \frac{\partial F}{\partial x_i}(B) = 2B^i, \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(B) = 2.$$

a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し

$$\int_0^t (2B_s^i)^2 ds \leq 4t \sup_{0 \leq s \leq t} (B_s^i)^2 < \infty$$

が成り立つので, 任意の  $1 \leq i \leq N$  に対し  $2B^i \in L_{\text{loc}}^2(B^i)$ . したがって  $(\sum_{i=1}^N \int_0^t 2B_s^i dB_s^i)_{t \geq 0}$  は CLM. また  $(|x|^2 + Nt)_{t \geq 0}$  は FV なので,  $|B|^2$  は連続 semimartingale である.

次に  $(\sum_{i=1}^N \int_0^t 2B_s^i dB_s^i)_{t \geq 0}$  が true martingale であることを示す. Doob's ineq. in  $L^2$  より

$$\begin{aligned} E\left[\left\langle \sum_{i=1}^N \int_0^t 2B_s^i dB_s^i, \sum_{i=1}^N \int_0^t 2B_s^i dB_s^i \right\rangle_t\right] &= E\left[\sum_{i=1}^N \int_0^t (2B_s^i)^2 ds\right] \\ &\leq 4t \sum_{i=1}^N E\left[\sup_{0 \leq s \leq t} (B_s^i)^2\right] \\ &\leq 4t 2^2 \sum_{i=1}^N E[(B_s^i)^2] \\ &= 16t(|x|^2 + Nt). \end{aligned}$$

$\because$  任意の  $1 \leq i \leq N$  に対し

$$\begin{aligned} t &= E[(B_t^i - x_i)^2] \\ &= E[(B_t^i)^2] - 2x_i E[B_t^i] + E[x_i^2] \\ &= E[(B_t^i)^2] - x_i^2 \end{aligned}$$

$$\text{より } E[(B_t^i)^2] = x_i^2 + t.$$

よって Thm. 4.13(ii) より  $(\sum_{i=1}^N \int_0^t 2B_s^i dB_s^i)_{t \geq 0}$  は true martingale. ■

2.

$$\beta_t = \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i$$

と定める (ただし  $|B_s| = 0$  のとき  $\frac{B_s^i}{|B_s|} = 0$  とする).  $\beta_t$  の定義に現れる確率積分の定義を正当化し, さらに  $(\beta_t)_{t \geq 0}$  が 0 スタートの  $(\mathcal{F}_t)$ -BM であることを示せ.

**証明.** 任意の  $1 \leq i \leq N$  に対し  $\frac{B^i}{|B|} \leq 1$  より, a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し

$$\int_0^t \left( \frac{B_s^i}{|B_s|} \right)^2 ds \leq \int_0^t ds = t < \infty$$

が成り立つので, 任意の  $1 \leq i \leq N$  に対し  $\frac{B^i}{|B|} \in L_{\text{loc}}^2(B^i)$ . よって Thm 5.6 より  $(\int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i)_{t \geq 0}$  は確率積分の意味で well-defined な CLM である.

したがって  $\beta$  は  $(\mathcal{F}_t)$ -adapted な CLM である. ここで

$$\begin{aligned} \langle \beta, \beta \rangle_t &= \left\langle \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i, \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i \right\rangle_t \\ &= \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(B_s^i)^2}{|B_s|^2} ds = t \end{aligned}$$

が成り立つことより, Thm. 5.12 から  $\beta$  は 0 スタートの  $(\mathcal{F}_t)$ -BM である. ■

3.

$$|B_t|^2 = |x|^2 + 2 \int_0^t |B_s| d\beta_s + Nt$$

が成り立つことを示せ.

**証明.**

$$\frac{d\beta_t}{dB_t^i} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dB_t^i} \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i = \sum_{i=1}^N \frac{B_t^i}{|B_t|}$$

より  $d\beta_t = \sum_{i=1}^N \frac{B_t^i}{|B_t|} dB_t^i$  となるので

$$\begin{aligned} |B_t|^2 &= |x|^2 + \sum_{i=1}^N \int_0^t 2B_s^i dB_s^i + Nt \\ &= |x|^2 + \sum_{i=1}^N \int_0^t 2|B_s| \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i + Nt \\ &= |x|^2 + 2 \int_0^t |B_s| \sum_{i=1}^N \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i + Nt \\ &= |x|^2 + 2 \int_0^t |B_s| d\beta_s + Nt. \end{aligned}$$
■

4. 以降,  $x \neq 0$  を仮定する.  $\varepsilon \in (0, |x|)$ ,  $T_\varepsilon = \inf \{t \geq 0 : |B_t| \leq \varepsilon\}$  とする. ここで任意の  $a > 0$  に対し

$$f(a) = \begin{cases} \log a & (N = 2), \\ a^{2-N} & (N \geq 3) \end{cases}$$

と定める.  $f(|B_{t \wedge T_\varepsilon}|)$  が CLM となることを示せ.

**証明.**  $F(x) = f(|x|)$  と定めると  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$  であり,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \frac{x_i}{|x|^2} & N = 2, \\ \frac{(2-N)x_i}{|x|^N} & N \geq 3, \end{cases} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^2} \left(1 - \frac{2x_i^2}{|x|^2}\right) & N = 2, \\ \frac{2-N}{|x|^N} \left(1 - \frac{Nx_i^2}{|x|^2}\right) & N \geq 3. \end{cases}$$

ここで, 任意の  $t \geq 0, \omega \in \Omega$  に対し  $|B_{t \wedge T_\varepsilon}(\omega)| \geq \varepsilon$  が成り立つので,  $B_{t \wedge T_\varepsilon} \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ . Itô's formula より

$$\begin{aligned} f(|B_{t \wedge T_\varepsilon}|) &= F(B_{t \wedge T_\varepsilon}) \\ &= \begin{cases} f(|x|) + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2} dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{1}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2} \left(1 - \frac{2(B_{s \wedge T_\varepsilon}^i)^2}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2}\right) ds & N = 2, \\ f(|x|) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{2-N}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} \left(1 - \frac{N(B_{s \wedge T_\varepsilon}^i)^2}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2}\right) ds & N \geq 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(|x|) + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2} dB_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2} \left(2 - 2 \sum_{i=1}^2 \frac{(B_{s \wedge T_\varepsilon}^i)^2}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2}\right) ds & N = 2, \\ f(|x|) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{2-N}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} \left(N - N \sum_{i=1}^N \frac{(B_{s \wedge T_\varepsilon}^i)^2}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2}\right) ds & N \geq 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(|x|) + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2} dB_s^i & N = 2, \\ f(|x|) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} dB_s^i & N \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立ち, 任意の  $N \geq 2$  と  $1 \leq i \leq N$  に対し  $\frac{B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} \in L_{\text{loc}}^2(B_t^i)$  であるので  $(\int_0^t \frac{B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} dB_s^i)_{t \geq 0}$  は CLM. したがって  $(f(|B_{t \wedge T_\varepsilon}|))_{t \geq 0}$  は CLM.  $\blacksquare$

5.  $R > |x|$ ,  $S_R = \inf \{t \geq 0 : |B_t| \geq R\}$  とする.

$$P(T_\varepsilon < S_R) = \frac{f(R) - f(|x|)}{f(R) - f(\varepsilon)}$$

となることを示せ. また  $\varepsilon \rightarrow 0$  としたとき  $P(T_\varepsilon < S_R) \rightarrow 0$  となることを確かめ, a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し  $B_t \neq 0$  となることを示せ.

**証明.**  $T := T_\varepsilon \wedge S_R$  とすると a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対しある  $M > 0$  が存在し  $f(|B_t^T|) \leq M$ .  $(f(|B_{t \wedge T_\varepsilon}|))_{t \geq 0}$  が CLM であることから  $(f(|B_t^T|))_{t \geq 0}$  は有界な CLM なので, Prop. 4.7(ii) より  $(f(|B_t^T|))_{t \geq 0}$  は UIM. ゆえに optional stopping theorem より

$$\begin{aligned} f(|x|) &= E[f(|B_0^T|)] = E[f(|B_T|)] \\ &= E[f(\varepsilon) \mathbf{1}_{\{T_\varepsilon < S_R\}} + R \mathbf{1}_{\{T_\varepsilon \geq S_R\}})] \\ &= E[f(\varepsilon) \mathbf{1}_{\{T_\varepsilon < S_R\}} + f(R) \mathbf{1}_{\{T_\varepsilon \geq S_R\}}] \\ &= f(\varepsilon) P(T_\varepsilon < S_R) + f(R) P(T_\varepsilon \geq S_R). \end{aligned}$$

$P(T_\varepsilon < S_R) + P(T_\varepsilon \geq S_R) = 1$  より  $P(T_\varepsilon < S_R) = \frac{f(R) - f(|x|)}{f(R) - f(\varepsilon)}$  を得る.

$\varepsilon \rightarrow 0$  とすると  $N = 2$  のとき  $f(\varepsilon) \rightarrow -\infty$ ,  $N \geq 3$  のとき  $f(\varepsilon) \rightarrow +\infty$  より,  $P(T_\varepsilon < S_R) \rightarrow 0$  となることからわかる.

次に a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し  $B_t \neq 0$  を示す.  $R \rightarrow \infty$  とすると  $S_R \rightarrow \infty$  となるので, 先ほどの証明と合わせて  $P(T_0 < \infty) = 0$  がわかる. したがって a.s. で  $T_0 = \inf \{t \geq 0 : |B_t| = 0\} = \infty$ , つまり  $|B_t| \neq 0$  となるので, a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し  $B_t \neq 0$ . ■

6. a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し

$$|B_t| = |x| + \beta_t + \frac{N-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{|B_s|}$$

となることを示せ.

**証明.**  $F(x) = |x|$  と定めると  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$  であり,  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) = \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3}$ . a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し  $B_t \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  より, Itô's formula から

$$\begin{aligned} |B_t| = F(B_t) &= |x| + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{|B_s|^2 - (B_s^i)^2}{|B_s|^3} ds \\ &= |x| + \beta_t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{N|B_s|^2 - \sum_{i=1}^N (B_s^i)^2}{|B_s|^3} ds \\ &= |x| + \beta_t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{(N-1)|B_s|^2}{|B_s|^3} ds \\ &= |x| + \beta_t + \frac{N-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{|B_s|}. \end{aligned}$$

■

7.  $N \geq 3$  を仮定する. a.s. で  $t \rightarrow \infty$  としたとき  $|B_t| \rightarrow \infty$  となることを示せ (ヒント:  $|B_t|^{2-N}$  が非負 supermartingale であることを確かめよ).

**証明.**  $F(x) = |x|^{2-N}$  と定めると  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$  であり,  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{(2-N)x_i}{|x|^N}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) = \frac{2-N}{|x|^N} \left(1 - \frac{Nx_i^2}{|x|^2}\right)$ . a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し  $B_t \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  より, Itô's formula と 4. の証明から

$$\begin{aligned} |B_t|^{2-N} = F(B_t) &= |x|^{2-N} + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_s^i}{|B_s|^N} dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{2-N}{|B_s|^N} \left(1 - \frac{N(B_s^i)^2}{|B_s|^2}\right) ds \\ &= |x|^{2-N} + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_s^i}{|B_s|^N} dB_s^i. \end{aligned}$$

4. の結果より  $|B|^{2-N}$  は非負 CLM なので, Prop. 4.7(i) より  $|B|^{2-N}$  は非負 supermartingale. ゆえに任意の  $t \geq 0$  に対し

$$E[|B_t|^{2-N}] \leq E[|B_0|^{2-N}] = |x|^{2-N}$$

が成り立つので,  $\sup_{t \geq 0} E[|B_t|^{2-N}] < \infty$  より  $|B|^{2-N}$  は  $L^1$ -bdd. よって Thm. 3.19 より  $|B_\infty|^{2-N}$  が a.s. で存在し 0 の値をとる (0 にならないと仮定すると  $\{B_t : t \geq 0\}$  が有限集合となり矛盾). よって a.s. で  $\lim_{t \rightarrow \infty} |B_t| = \infty$ . ■

8.  $N = 3$  を仮定する. Gaussian density の形式を用いて, r.v. の族  $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$  が  $L^2$ -bdd. であることを確かめよ. また  $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$  が CLM であり, かつ true martingale でないことを示せ.

証明. まず  $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$  が  $L^1$ -bdd.であることを示す.  $\delta := \frac{|x|}{2} (> 0)$  と定める. このとき  $B$  の density を  $p$  とすると

$$\begin{aligned} E[|B_t|^{-2}] &= \int_{\mathbb{R}^3} |y|^{-2} p(y) dy = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|^2 (2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) dy \\ &= \int_{|y| < \delta} \frac{1}{|y|^2 (2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) dy + \int_{|y| \geq \delta} \frac{1}{|y|^2 (2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) dy \\ &=: I_1(t) + I_2(t). \end{aligned}$$

任意の  $t > 0$  に対し

$$I_2(t) \leq \frac{1}{\delta^2} \int_{|y| \geq \delta} \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) dy \leq \frac{1}{\delta^2}$$

と評価できることから  $I_2$  は有界. あとは  $I_1(t)$  が任意の  $t > 0$  において有界であることを示せば十分.  $|y| < \delta = \frac{|x|}{2} \implies |y-x| \geq |x| - |y| > \frac{|x|}{2}$  であることより

$$I_1(t) \leq \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{8t}\right) \int_{|y| < \delta} \frac{1}{|y|^2} dy = \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{8t}\right) \cdot 4\pi\delta$$

が成り立つ.

$$\varphi(t) = \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{8t}\right)$$

で定めると  $\varphi$  は  $(0, \infty)$  上連続かつ  $\lim_{t \downarrow 0} \varphi(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ . よって  $\varphi$  は有界なのである  $M > 0$  が存在し,  $\sup_{t > 0} |\varphi(t)| \leq M < \infty$ . よって  $\sup_{t > 0} I_1(t) \leq 4\pi M \delta$  と評価できるので  $I_1$  も有界. ゆえに  $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$  は  $L^2$ -bdd.

次に  $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$  が CLM であるが true martingale でないことを示す. 7. の証明より CLM であることが言えるので  $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$  が true martingale であると仮定すると  $L^2$ -bdd. martingale. a.s. で  $|B_\infty|^{-1} = 0$  と Thm. 4.13 を合わせて

$$0 = E[|B_\infty|^{-2}] = E[|B_0|^{-2}] + E[\langle |B|^{-1}, |B|^{-1} \rangle_\infty] > 0$$

がわかるが, これは矛盾. よって  $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$  は CLM であるが true martingale でない. ■