

**Exercise 5.33 (Study of multidimensional Brownian motion)**  $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^N)$  を  $x = (x_1, \dots, x_N) (\in \mathbb{R}^N)$  スタートの  $N$  次元  $(\mathcal{F}_t)$ -BM とする. ここで  $N$  は 2 以上の整数とする.

1.  $|B_t|^2$  は連続 semimartingale であり,  $|B_t|^2$  の martingale part が true martingale であることを示せ.

**証明.** (途中)  $B_t^1, \dots, B_t^N$  は BM より連続 semimartingale なので, Itô's formula が適用できて, a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し

$$\begin{aligned} |B_t|^2 &= |B_0|^2 + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} |B_s|^2 dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} |B_s|^2 d\langle B^i, B^j \rangle_s \\ &= |x|^2 + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} |B_s|^2 dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} |B_s|^2 ds \quad (\because i \neq j \implies \langle B^i, B^j \rangle = 0) \\ &= |x|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \int_0^t B_s^i dB_s^i + Nt. \end{aligned}$$

$$\because |B|^2 = \sum_{i=1}^N (B^i)^2 \text{ より } \frac{\partial}{\partial x_i} |B|^2 = 2B^i, \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} |B|^2 = 2.$$

■

- 2.

$$\beta_t = \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i$$

と定める (ただし  $|B_s| = 0$  のとき  $\frac{B_s^i}{|B_s|} = 0$  とする).  $\beta_t$  の定義に現れる確率積分の定義を正当化し, さらに  $(\beta_t)_{t \geq 0}$  が 0 スタートの  $(\mathcal{F}_t)$ -BM であることを示せ.

**証明.** (途中) 任意の  $1 \leq i \leq N$  に対し  $\frac{B^i}{|B|} \leq 1$  より, a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し

$$\int_0^t \left( \frac{B_s^i}{|B_s|} \right)^2 d\langle B^i, B^i \rangle_s \leq \int_0^t ds = t < \infty$$

が成り立つので, 任意の  $1 \leq i \leq N$  に対し  $\frac{B^i}{|B|} \in L_{\text{loc}}^2(B^i)$ . よって Thm 5.6 より  $\int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i$  は確率積分の意味で well-defined な CLM である.

したがって  $\beta$  は  $(\mathcal{F}_t)$ -CLM である (←?). ここで

$$\begin{aligned} \langle \beta, \beta \rangle_t &= \left\langle \sum_{i=1}^N \int_0^\cdot \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i, \sum_{i=1}^N \int_0^\cdot \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i \right\rangle_t \\ &= \sum_{i=1}^N \left\langle \int_0^\cdot \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i, \int_0^\cdot \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i \right\rangle_t \\ &= \int_0^t \frac{\sum_{i=1}^N (B_s^i)^2}{|B_s|^2} ds = \int_0^t \frac{|B_s|^2}{|B_s|^2} ds = t \end{aligned}$$

が成り立つことより,  $\beta$  は 0 スタートの  $(\mathcal{F}_t)$ -BM である.

■

3.

$$|B_t|^2 = |x|^2 + 2 \int_0^t |B_s| d\beta_s + Nt$$

が成り立つことを示せ.

**証明.**

$$\frac{d\beta_t}{dB_t^i} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dB_t^i} \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i = \sum_{i=1}^N \frac{B_t^i}{|B_t|}$$

より  $d\beta_t = \sum_{i=1}^N \frac{B_t^i}{|B_t|} dB_t^i$  となるので

$$\begin{aligned} |B_t|^2 &= |x|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \int_0^t B_s^i dB_s^i + Nt \\ &= |x|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \int_0^t |B_s| \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i + Nt \\ &= |x|^2 + 2 \int_0^t |B_s| \sum_{i=1}^N \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i + Nt \\ &= |x|^2 + 2 \int_0^t |B_s| d\beta_s + Nt. \end{aligned}$$

■

4. 以降,  $x \neq 0$  を仮定する.  $\varepsilon \in (0, |x|)$ ,  $T_\varepsilon = \inf \{t \geq 0 : |B_t| \leq \varepsilon\}$  とする. ここで任意の  $a > 0$  に対し

$$f(a) = \begin{cases} \log a & (N = 2), \\ a^{2-N} & (N \geq 3) \end{cases}$$

と定める.  $f(|B_{t \wedge T_\varepsilon}|)$  が CLM となることを示せ.

**証明.**  $F(x) = f(|x|)$  と定めると  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$  であり,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \frac{x_i}{|x|^2} & N = 2, \\ \frac{(2-N)x_i}{|x|^N} & N \geq 3, \end{cases} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^2} \left(1 - \frac{2x_i^2}{|x|^2}\right) & N = 2, \\ \frac{2-N}{|x|^N} \left(1 - \frac{Nx_i^2}{|x|^2}\right) & N \geq 3. \end{cases}$$

ここで, 任意の  $t \geq 0, \omega \in \Omega$  に対し  $|B_{t \wedge T_\varepsilon}(\omega)| \geq \varepsilon$  が成り立つので,  $B_{t \wedge T_\varepsilon} \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ . Itô's formula より

$$\begin{aligned} f(|B_{t \wedge T_\varepsilon}|) &= F(B_{t \wedge T_\varepsilon}) \\ &= \begin{cases} f(|x|) + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2} dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{1}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2} \left(1 - \frac{2(B_{s \wedge T_\varepsilon}^i)^2}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2}\right) ds & N = 2, \\ f(|x|) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{2-N}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} \left(1 - \frac{N(B_{s \wedge T_\varepsilon}^i)^2}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2}\right) ds & N \geq 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(|x|) + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2} dB_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2} \left(2 - 2 \sum_{i=1}^2 \frac{(B_{s \wedge T_\varepsilon}^i)^2}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2}\right) ds & N = 2, \\ f(|x|) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{2-N}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} \left(N - N \sum_{i=1}^N \frac{(B_{s \wedge T_\varepsilon}^i)^2}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2}\right) ds & N \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} f(|x|) + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{B_s^i \wedge T_\varepsilon}{|B_s \wedge T_\varepsilon|^2} dB_s^i & N = 2, \\ f(|x|) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_s^i \wedge T_\varepsilon}{|B_s \wedge T_\varepsilon|^N} dB_s^i & N \geq 3 \end{cases}$$

が成り立ち、任意の  $N \geq 2$  と  $1 \leq i \leq N$  に対し  $\frac{B_{t \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{t \wedge T_\varepsilon}|^N} \in L_{\text{loc}}^2(B_t^i)$  であるので  $\int_0^t \frac{B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} dB_s^i$  は CLM. したがって  $f(|B_{t \wedge T_\varepsilon}|)$  は CLM. ■

5.  $R > |x|, S_R = \inf \{t \geq 0 : |B_t| \geq R\}$  とする.

$$P(T_\varepsilon < S_R) = \frac{f(R) - f(|x|)}{f(R) - f(\varepsilon)}$$

となることを示せ. また  $\varepsilon \rightarrow 0$  としたとき  $P(T_\varepsilon < S_R) \rightarrow 0$  となることを確かめ, a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し  $B_t \neq 0$  となることを示せ.

**証明.**  $T := T_\varepsilon \wedge S_R$  とすると a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し  $f(|B_t^T|) \leq R$ .  $f(|B_{t \wedge T_\varepsilon}|)$  が CLM であることから  $f(|B_t^T|)$  は有界な CLM なので, Prop. 4.7(ii) より UIM. ゆえに optional stopping theorem より

$$\begin{aligned} f(|x|) &= E[f(|B_0^T|)] = E[f(|B_T|)] \\ &= E[f(\varepsilon \mathbf{1}_{\{T_\varepsilon < S_R\}} + R \mathbf{1}_{\{T_\varepsilon \geq S_R\}})] \\ &= E[f(\varepsilon) \mathbf{1}_{\{T_\varepsilon < S_R\}} + f(R) \mathbf{1}_{\{T_\varepsilon \geq S_R\}}] \\ &= f(\varepsilon) P(T_\varepsilon < S_R) + f(R) P(T_\varepsilon \geq S_R). \end{aligned}$$

$P(T_\varepsilon < S_R) + P(T_\varepsilon \geq S_R) = 1$  より  $P(T_\varepsilon < S_R) = \frac{f(R) - f(|x|)}{f(R) - f(\varepsilon)}$  を得る.

$\varepsilon \rightarrow 0$  とすると  $N = 2$  のとき  $f(\varepsilon) \rightarrow -\infty$ ,  $N \geq 3$  のとき  $f(\varepsilon) \rightarrow +\infty$  より,  $P(T_\varepsilon < S_R) \rightarrow 0$  となることがわかる.

次に a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し  $B_t \neq 0$  を示す.  $\varepsilon_n \downarrow 0$  かつ  $\sum_{n=1}^\infty P(T_{\varepsilon_n} < S_n) < \infty$  を満たす正の実数列  $\{\varepsilon_n\}$  を選ぶと, Borel-Cantelli の補題より  $A := \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{T_{\varepsilon_n} < S_n\}$  に対し  $P(A) = 0$ . このとき任意の  $\omega \in A^c, t \geq 0$  に対し  $B_t(\omega) \neq 0$ .

$\therefore \omega \in A^c$  に対し  $B_t(\omega) = 0$  を満たす  $t > 0$  が存在すると仮定すると, 任意の  $n \geq 1$  に対し  $T_{\varepsilon_n}(\omega) < t$  であり,  $A^c$  の定め方からある  $m \geq 1$  が存在して, 任意の  $n \geq m$  に対し  $S_n(\omega) < t$ . stopping time の列  $(S_n(\omega))_{n \geq 1}$  は nondecreasing なので,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) (\leq t)$  が存在する. これを  $s$  とすると  $B_s(\omega) = \infty$  となるが,  $B$  の連続性より矛盾.

以上より a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し  $B_t \neq 0$ . ■

6. a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し

$$|B_t| = |x| + \beta_t + \frac{N-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{|B_s|}$$

となることを示せ.

**証明.**  $F(x) = |x|$  と定めると  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$  であり,  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) = \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3}$ . a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し  $B_t \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  より, Itô's formula から

$$|B_t| = F(B_t) = |x| + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{|B_s|^2 - (B_s^i)^2}{|B_s|^3} ds$$

$$\begin{aligned}
&= |x| + \beta_t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{N|B_s|^2 - \sum_{i=1}^N (B_s^i)^2}{|B_s|^3} ds \\
&= |x| + \beta_t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{(N-1)|B_s|^2}{|B_s|^3} ds \\
&= |x| + \beta_t + \frac{N-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{|B_s|}.
\end{aligned}$$

■

7.  $N \geq 3$  を仮定する. a.s. で  $t \rightarrow \infty$  としたとき  $|B_t| \rightarrow \infty$  となることを示せ (ヒント:  $|B_t|^{2-N}$  が非負 supermartingale であることを確かめよ).

**証明.** (途中)  $F(x) = |x|^{2-N}$  と定めると  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$  であり,  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{(2-N)x_i}{|x|^N}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) = \frac{2-N}{|x|^N} \left(1 - \frac{Nx_i^2}{|x|^2}\right)$ . a.s. で任意の  $t \geq 0$  に対し  $B_t \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  より, Itô's formula と 4. の証明から

$$\begin{aligned}
|B_t|^{2-N} = F(B_t) &= |x|^{2-N} + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_s^i}{|B_s|^N} dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{2-N}{|B_s|^N} \left(1 - \frac{N(B_s^i)^2}{|B_s|^2}\right) ds \\
&= |x|^{2-N} + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_s^i}{|B_s|^N} dB_s^i.
\end{aligned}$$

4. の結果より  $|B|^{2-N}$  は非負 CLM なので, Prop. 4.7(i) より  $|B|^{2-N}$  は非負 supermartingale. ゆえに任意の  $t \geq 0$  に対し

$$E[|B_t|^{2-N}] \leq E[|B_0|^{2-N}] = |x|^{2-N}$$

が成り立つので,  $|B|^{2-N}$  は  $L^1$ -bdd. よって Thm. 3.19 より  $|B_\infty|^{2-N}$  が a.s. で存在する. ■

8.  $N = 3$  を仮定する. Gaussian density の形式を用いて, r.v. の族  $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$  が  $L^2$ -bdd. であることを確かめよ. また  $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$  が CLM であり, かつ true martingale でないことを示せ.

**証明.** (途中)

■