Exercise 5.33 (Study of multidimensional Brownian motion) $B_t = (B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^N)$ を $x = (x_1, \cdots, x_N)(\in \mathbb{R}^N)$ スタートの N 次元 $(\mathcal{F}_t)$-BM とする．ここで N は 2 以上の整数とする．

1. $|B_t|^2$ は連続 semimartingale であり，$|B_t|^2$ の martingale part が true martingale であることを示せ．

証明. （途中）$B_t^1, \cdots, B_t^N$ は BM より連続 semimartingale なので，伊藤の公式が適用できて，a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し

$$
\begin{aligned}
|B_t|^2 &= |B_0|^2 + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i}|B_s|^2 dB_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}|B_s|^2 d\left\langle B^i, B^j\right\rangle_s \\
&= |x|^2 + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i}|B_s|^2 dB_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}|B_s|^2 ds \quad (i \neq j \implies \left\langle B^i, B^j\right\rangle = 0) \\
&= |x|^2 + 2\sum_{i=1}^N \int_0^t B_s^i dB_s^i + Nt.
\end{aligned}
$$

∵) $|B|^2 = (B^1)^2 + \cdots + (B^N)^2$ より $\frac{\partial}{\partial x_i}|B|^2 = 2B^i$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}|B|^2 = 2$.

■

2.

$$
\beta_t = \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i
$$

と定める（ただし $|B_s| = 0$ のとき $\frac{B_s^i}{|B_s|} = 0$ とする）．β_t の定義に現れる確率積分の定義を正当化し，さらに $(\beta_t)_{t\geq 0}$ が 0 スタートの $(\mathcal{F}_t)$-BM であることを示せ．

証明. （途中）任意の $1 \leq i \leq N$ に対し $\frac{B^i}{|B|} \leq 1$ より，a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し

$$
\int_0^t \left(\frac{B_s^i}{|B_s|}\right)^2 d\left\langle B^i, B^i\right\rangle_s \leq \int_0^t ds = t < \infty
$$

が成り立つので，任意の $1 \leq i \leq N$ に対し $\frac{B^i}{|B|} \in L^2_{\mathrm{loc}}(B^i)$. よって $\int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i$ は確率積分の意味で well-defined な CLM である．
したがって β は $(\mathcal{F}_t)$-CLM である (←?)．ここで

$$
\begin{aligned}
\langle \beta, \beta \rangle_t &= \left\langle \sum_{i=1}^N \int_0^{\cdot} \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i, \sum_{i=1}^N \int_0^{\cdot} \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i \right\rangle_t \\
&= \sum_{i=1}^N \left\langle \int_0^{\cdot} \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i, \int_0^{\cdot} \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i \right\rangle_t \\
&= \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(B_s^i)^2}{|B_s|^2} ds = \int_0^t \frac{|B_s|^2}{|B_s|^2} ds = t
\end{aligned}
$$

が成り立つことより，β は 0 スタートの $(\mathcal{F}_t)$-BM である． ■

3.

$$|B_t|^2 = |x|^2 + 2\int_0^t |B_s| d\beta_s + Nt$$

が成り立つことを示せ.

証明.

$$\frac{d\beta_t}{dB_t^i} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dB_t^i} \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i = \sum_{i=1}^N \frac{B_t^i}{|B_t|}$$

より $d\beta_t = \sum_{i=1}^N \frac{B_t^i}{|B_t|} dB_t^i$ となるので

$$\begin{aligned}
|B_t|^2 &= |x|^2 + 2\sum_{i=1}^N \int_0^t B_s^i dB_s^i + Nt \\
&= |x|^2 + 2\sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} |B_s| dB_s^i + Nt \\
&= |x|^2 + 2\int_0^t |B_s| \sum_{i=1}^N \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i + Nt \\
&= |x|^2 + 2\int_0^t |B_s| d\beta_s + Nt.
\end{aligned}$$

■

4. 以降，$x \neq 0$ を仮定する．$\varepsilon \in (0, |x|), T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \leq \varepsilon\}$ とする．ここで任意の $a > 0$ に対し

$$f(a) = \begin{cases} \log a & (N = 2), \\ a^{2-N} & (N \geq 3) \end{cases}$$

と定める．$f(|B_{t \wedge T_\varepsilon}|)$ が CLM となることを示せ.

証明. （途中）

■

5. $R > |x|, S_R = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq R\}$ とする.

$$P(T_\varepsilon < S_R) = \frac{f(R) - f(|x|)}{f(R) - f(\varepsilon)}$$

となることを示せ．また $\varepsilon \to 0$ としたとき $P(T_\varepsilon < S_R) \to 0$ となることを確かめ，a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し $B_t \neq 0$ となることを示せ.

証明. （途中）

■

6. a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し

$$|B_t| = |x| + \beta_t + \frac{N-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{|B_s|}$$

となることを示せ.

証明. （途中）

■

7. $N \geq 3$ を仮定する．a.s. で $t \to \infty$ としたとき $|B_t| \to \infty$ となることを示せ（ヒント：$|B_t|^{2-N}$ が非負 supermartingale であることを確かめよ）.

証明. （途中）

■

8. $N = 3$ を仮定する．Gaussian density の形式を用いて，r.v. の族 $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$ が L^2-bdd. であることを確かめよ．また $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$ が CLM であり，かつ true martingale でないことを示せ.

証明. （途中）

■