Exercise 5.33 (Study of multidimensional Brownian motion) $B_t = (B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^N)$ を $x = (x_1, \cdots, x_N)(\in \mathbb{R}^N)$ スタートの N 次元 $(\mathcal{F}_t)$-BM とする．ここで N は 2 以上の整数とする．

1. $|B_t|^2$ は連続 semimartingale であり，$|B_t|^2$ の martingale part が true martingale であることを示せ．

証明．（途中）$B_t^1, \cdots, B_t^N$ は BM より連続 semimartingale なので，Itô's formula が適用できて，a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し

$$
\begin{aligned}
|B_t|^2 &= |B_0|^2 + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i}|B_s|^2 dB_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}|B_s|^2 d\left\langle B^i, B^j \right\rangle_s \\
&= |x|^2 + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i}|B_s|^2 dB_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}|B_s|^2 ds \quad (\because i \neq j \implies \left\langle B^i, B^j \right\rangle = 0) \\
&= |x|^2 + 2\sum_{i=1}^N \int_0^t B_s^i dB_s^i + Nt.
\end{aligned}
$$

$\because$) $|B|^2 = \sum_{i=1}^N (B^i)^2$ より $\frac{\partial}{\partial x_i}|B|^2 = 2B^i$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}|B|^2 = 2$.

■

2.

$$
\beta_t = \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i
$$

と定める（ただし $|B_s| = 0$ のとき $\frac{B_s^i}{|B_s|} = 0$ とする）．β_t の定義に現れる確率積分の定義を正当化し，さらに $(\beta_t)_{t\geq 0}$ が 0 スタートの $(\mathcal{F}_t)$-BM であることを示せ．

証明．（途中）任意の $1 \leq i \leq N$ に対し $\frac{B^i}{|B|} \leq 1$ より，a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し

$$
\int_0^t \left(\frac{B_s^i}{|B_s|}\right)^2 d\left\langle B^i, B^i \right\rangle_s \leq \int_0^t ds = t < \infty
$$

が成り立つので，任意の $1 \leq i \leq N$ に対し $\frac{B^i}{|B|} \in L^2_{\mathrm{loc}}(B^i)$. よって Thm 5.6 より $\int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i$ は確率積分の意味で well-defined な CLM である．
したがって β は $(\mathcal{F}_t)$-CLM である (←?)．ここで

$$
\begin{aligned}
\langle \beta, \beta \rangle_t &= \left\langle \sum_{i=1}^N \int_0^\cdot \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i, \sum_{i=1}^N \int_0^\cdot \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i \right\rangle_t \\
&= \sum_{i=1}^N \left\langle \int_0^\cdot \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i, \int_0^\cdot \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i \right\rangle_t \\
&= \int_0^t \frac{\sum_{i=1}^N (B_s^i)^2}{|B_s|^2} ds = \int_0^t \frac{|B_s|^2}{|B_s|^2} ds = t
\end{aligned}
$$

が成り立つことより，β は 0 スタートの $(\mathcal{F}_t)$-BM である． ■

3.
$$|B_t|^2 = |x|^2 + 2\int_0^t |B_s| d\beta_s + Nt$$

が成り立つことを示せ.

証明.
$$\frac{d\beta_t}{dB_t^i} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dB_t^i}\int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i = \sum_{i=1}^N \frac{B_t^i}{|B_t|}$$

より $d\beta_t = \sum_{i=1}^N \frac{B_t^i}{|B_t|} dB_t^i$ となるので

$$\begin{aligned}
|B_t|^2 &= |x|^2 + 2\sum_{i=1}^N \int_0^t B_s^i dB_s^i + Nt \\
&= |x|^2 + 2\sum_{i=1}^N \int_0^t |B_s| \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i + Nt \\
&= |x|^2 + 2\int_0^t |B_s| \sum_{i=1}^N \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i + Nt \\
&= |x|^2 + 2\int_0^t |B_s| d\beta_s + Nt.
\end{aligned}$$

■

4. 以降，$x \neq 0$ を仮定する．$\varepsilon \in (0, |x|), T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \leq \varepsilon\}$ とする．ここで任意の $a > 0$ に対し

$$f(a) = \begin{cases} \log a & (N = 2), \\ a^{2-N} & (N \geq 3) \end{cases}$$

と定める．$f(|B_{t\wedge T_\varepsilon}|)$ が CLM となることを示せ.

証明. $F(x) = f(|x|)$ と定めると $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ であり，

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \frac{x_i}{|x|^2} & N = 2, \\ \frac{(2-N)x_i}{|x|^N} & N \geq 3, \end{cases} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^2}\left(1 - \frac{2x_i^2}{|x|^2}\right) & N = 2, \\ \frac{2-N}{|x|^N}\left(1 - \frac{Nx_i^2}{|x|^2}\right) & N \geq 3. \end{cases}$$

ここで，任意の $t \geq 0, \omega \in \Omega$ に対し $|B_{t\wedge T_\varepsilon}(\omega)| \geq \varepsilon$ が成り立つので，$B_{t\wedge T_\varepsilon} \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Itô's formula より

$$\begin{aligned}
&f(|B_{t\wedge T_\varepsilon}|) = F(B_{t\wedge T_\varepsilon}) \\
&= \begin{cases} f(|x|) + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{B_{s\wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s\wedge T_\varepsilon}|^2} dB_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{1}{|B_{s\wedge T_\varepsilon}|^2}\left(1 - \frac{2(B_{s\wedge T_\varepsilon}^i)^2}{|B_{s\wedge T_\varepsilon}|^2}\right) ds & N = 2, \\ f(|x|) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_{s\wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s\wedge T_\varepsilon}|^N} dB_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{2-N}{|B_{s\wedge T_\varepsilon}|^N}\left(1 - \frac{N(B_{s\wedge T_\varepsilon}^i)^2}{|B_{s\wedge T_\varepsilon}|^2}\right) ds & N \geq 3 \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(|x|) + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{B_{s\wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s\wedge T_\varepsilon}|^2} dB_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{|B_{s\wedge T_\varepsilon}|^2}\left(2 - 2\sum_{i=1}^2 \frac{(B_{s\wedge T_\varepsilon}^i)^2}{|B_{s\wedge T_\varepsilon}|^2}\right) ds & N = 2, \\ f(|x|) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_{s\wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s\wedge T_\varepsilon}|^N} dB_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{2-N}{|B_{s\wedge T_\varepsilon}|^N}\left(N - N\sum_{i=1}^N \frac{(B_{s\wedge T_\varepsilon}^i)^2}{|B_{s\wedge T_\varepsilon}|^2}\right) ds & N \geq 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} f(|x|) + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{B^i_{s\wedge T_\varepsilon}}{|B_{s\wedge T_\varepsilon}|^2} dB^i_s & N=2, \\ f(|x|) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B^i_{s\wedge T_\varepsilon}}{|B_{s\wedge T_\varepsilon}|^N} dB^i_s & N \geq 3 \end{cases}$$

が成り立ち，任意の $N \geq 2$ と $1 \leq i \leq N$ に対し $\frac{B^i_{t\wedge T_\varepsilon}}{|B_{t\wedge T_\varepsilon}|^N} \in L^2_{\mathrm{loc}}(B^i_t)$ であるので $\int_0^t \frac{B^i_{s\wedge T_\varepsilon}}{|B_{s\wedge T_\varepsilon}|^N} dB^i_s$ は CLM. したがって $f(|B_{t\wedge T_\varepsilon}|)$ は CLM. ■

5. $R > |x|, S_R = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq R\}$ とする．

$$P(T_\varepsilon < S_R) = \frac{f(R) - f(|x|)}{f(R) - f(\varepsilon)}$$

となることを示せ．また $\varepsilon \to 0$ としたとき $P(T_\varepsilon < S_R) \to 0$ となることを確かめ，a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し $B_t \neq 0$ となることを示せ．

証明. $T := T_\varepsilon \wedge S_R$ とすると a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し $f(|B^T_t|) \leq R$. $f(|B_{t\wedge T_\varepsilon}|)$ が CLM であることから $f(|B^T_t|)$ は有界な CLM なので，Prop. 4.7(ii) より UIM. ゆえに optional stopping theorem より

$$\begin{aligned} f(|x|) &= E[f(|B^T_0|)] = E[f(|B_T|)] \\ &= E[f(\varepsilon \mathbf{1}_{\{T_\varepsilon < S_R\}} + R\mathbf{1}_{\{T_\varepsilon \geq S_R\}})] \\ &= E[f(\varepsilon)\mathbf{1}_{\{T_\varepsilon < S_R\}} + f(R)\mathbf{1}_{\{T_\varepsilon \geq S_R\}}] \\ &= f(\varepsilon)P(T_\varepsilon < S_R) + f(R)P(T_\varepsilon \geq S_R). \end{aligned}$$

$P(T_\varepsilon < S_R) + P(T_\varepsilon \geq S_R) = 1$ より $P(T_\varepsilon < S_R) = \frac{f(R)-f(|x|)}{f(R)-f(\varepsilon)}$ を得る．
$\varepsilon \to 0$ とすると $N=2$ のとき $f(\varepsilon) \to -\infty, N \geq 3$ のとき $f(\varepsilon) \to +\infty$ より，$P(T_\varepsilon < S_R) \to 0$ となることがわかる．
次に a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し $B_t \neq 0$ を示す．$\varepsilon_n \downarrow 0$ かつ $\sum_{n=1}^\infty P(T_{\varepsilon_n} < S_n) < \infty$ を満たす正の実数列 $\{\varepsilon_n\}$ を選ぶと，Borel-Cantelli の補題より $A := \bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m}\{T_{\varepsilon_n} < S_n\}$ に対し $P(A) = 0$. このとき任意の $\omega \in A^c, t \geq 0$ に対し $B_t(\omega) \neq 0$.

$\because$) $\omega \in A^c$ に対し $B_t(\omega) = 0$ を満たす $t > 0$ が存在すると仮定すると，任意の $n \geq 1$ に対し $T_{\varepsilon_n}(\omega) < t$ であり，A^c の定め方からある $m \geq 1$ が存在して，任意の $n \geq m$ に対し $S_n(\omega) < t$. stopping time の列 $(S_n(\omega))_{n\geq 1}$ は nondecreasing なので，$\lim_{n\to\infty} S_n(\omega) (\leq t)$ が存在する．これを s とすると $B_s(\omega) = \infty$ となるが，B の連続性より矛盾．

以上より a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し $B_t \neq 0$. ■

6. a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し

$$|B_t| = |x| + \beta_t + \frac{N-1}{2}\int_0^t \frac{ds}{|B_s|}$$

となることを示せ．

証明. $F(x) = |x|$ と定めると $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ であり，$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|}, \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) = \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3}$. a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し $B_t \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ より，Itô's formula から

$$|B_t| = F(B_t) = |x| + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{B^i_s}{|B_s|} dB^i_s + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{|B_s|^2 - (B^i_s)^2}{|B_s|^3} ds$$

$$
\begin{aligned}
&= |x| + \beta_t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{N|B_s|^2 - \sum_{i=1}^N (B_s^i)^2}{|B_s|^3} ds \\
&= |x| + \beta_t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{(N-1)|B_s|^2}{|B_s|^3} ds \\
&= |x| + \beta_t + \frac{N-1}{2}\int_0^t \frac{ds}{|B_s|}.
\end{aligned}
$$

■

7. $N \geq 3$ を仮定する．a.s. で $t \to \infty$ としたとき $|B_t| \to \infty$ となることを示せ（ヒント：$|B_t|^{2-N}$ が非負 supermartingale であることを確かめよ).

証明. $F(x) = |x|^{2-N}$ と定めると $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ であり，$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{(2-N)x_i}{|x|^N}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) = \frac{2-N}{|x|^N}\left(1 - \frac{Nx_i^2}{|x|^2}\right)$. a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し $B_t \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ より，Itô's formula と 4. の証明から

$$
\begin{aligned}
|B_t|^{2-N} = F(B_t) &= |x|^{2-N} + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_s^i}{|B_s|^N} dB_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{2-N}{|B_s|^N}\left(1 - \frac{N(B_s^i)^2}{|B_s|^2}\right) ds \\
&= |x|^{2-N} + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_s^i}{|B_s|^N} dB_s^i.
\end{aligned}
$$

4. の結果より $|B|^{2-N}$ は非負 CLM なので，Prop. 4.7(i) より $|B|^{2-N}$ は非負 supermartingale. ゆえに任意の $t \geq 0$ に対し

$$
E[|B_t|^{2-N}] \leq E[|B_0|^{2-N}] = |x|^{2-N}
$$

が成り立つので，$\sup_{t\geq 0} E[|B_t|^{2-N}] < \infty$ より $|B|^{2-N}$ は L^1-bdd. よって Thm. 3.19 より $|B_\infty|^{2-N}$ が a.s. で存在するので，$\lim_{t\to\infty}|B_t|$ が a.s. で存在する．a.s. で $\limsup_{t\to\infty} B_t^1 = \infty$ となるので，a.s. で $\lim_{t\to\infty}|B_t| = \infty$. ■

8. $N = 3$ を仮定する．Gaussian density の形式を用いて，r.v. の族 $(|B_t|^{-1})_{t\geq 0}$ が L^2-bdd. であることを確かめよ．また $(|B_t|^{-1})_{t\geq 0}$ が CLM であり，かつ true martingale でないことを示せ.

証明. まず $(|B_t|^{-1})_{t\geq 0}$ が L^1-bdd. であることを示す．$\delta := \frac{|x|}{2} (> 0)$ と定める．このとき

$$
\begin{aligned}
E[|B_t|^{-2}] &= \int_{\mathbb{R}^3} |y|^{-2} p(y) dy = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|^2(2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) dy \\
&= \int_{|y|<\delta} \frac{1}{|y|^2(2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) dy + \int_{|y|\geq\delta} \frac{1}{|y|^2(2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) dy \\
&=: I_1(t) + I_2(t).
\end{aligned}
$$

任意の $t > 0$ に対し

$$
I_2(t) \leq \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) dy \leq \frac{1}{\delta^2}
$$

と評価できることから I_2 は有界．あとは $I_1(t)$ が任意の $t > 0$ において有界であることを示せば十分. $|y| < \delta = \frac{|x|}{2} \implies |y-x| \geq |x| - |y| > \frac{|x|}{2}$ であることより

$$
I_1(t) \leq \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{8t}\right) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|^2} dy = \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{8t}\right) \cdot 4\pi\delta
$$

が成り立つ．

$$\varphi(t)=\frac{1}{(2\pi t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{8t}\right)$$

で定めると φ は $(0,\infty)$ 上連続かつ $\lim_{t\downarrow 0+}\varphi(t)=0,\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0$. よって φ は有界なのである $M>0$ が存在し，$\sup_{t>0}|\varphi(t)|\le M<\infty$. よって $\sup_{t>0}I_1(t)\le 4\pi M\delta$ と評価できるので I_1 も有界．ゆえに $(|B_t|^{-1})_{t\ge 0}$ は L^2-bdd.
次に $(|B_t|^{-1})_{t\ge 0}$ が CLM であるが true martingale でないことを示す．7. の証明より CLM であることが言えるので $(|B_t|^{-1})_{t\ge 0}$ が true martingale であると仮定すると L^2-bdd. martingale. a.s. で $\lim_{t\to\infty}|B_t|=\infty(\implies |B_\infty|^{-1}=0)$ と Thm. 4.13 を合わせて

$$0=E[|B_\infty|^{-2}]=E[|B_0|^{-2}]+E[\left\langle |B|^{-1},|B|^{-1}\right\rangle_\infty]>0$$

がわかるが，これは矛盾．よって $(|B_t|^{-1})_{t\ge 0}$ は CLM であるが true martingale でない． ■