

Exercise 5.33 (Study of multidimensional Brownian motion) $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^N)$ を $x = (x_1, \dots, x_N) (\in \mathbb{R}^N)$ スタートの N 次元 (\mathcal{F}_t) -BM とする. ここで N は 2 以上の整数とする.

1. $|B_t|^2$ は連続 semimartingale であり, $|B_t|^2$ の martingale part が true martingale であることを示せ.

証明. B_t^1, \dots, B_t^N は BM より連続 semimartingale なので, Itô's formula が適用できて, a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned} |B_t|^2 &= |B_0|^2 + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} |B_s|^2 dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} |B_s|^2 d\langle B^i, B^j \rangle_s \\ &= |x|^2 + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} |B_s|^2 dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} |B_s|^2 ds \quad (\because i \neq j \implies \langle B^i, B^j \rangle = 0) \\ &= |x|^2 + \sum_{i=1}^N \int_0^t 2B_s^i dB_s^i + Nt. \end{aligned}$$

$$\therefore |B|^2 = \sum_{i=1}^N (B^i)^2 \text{ より } \frac{\partial}{\partial x_i} |B|^2 = 2B^i, \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} |B|^2 = 2.$$

a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し

$$\int_0^t (2B_s^i)^2 ds \leq 4t \sup_{0 \leq s \leq t} (B_s^i)^2 < \infty$$

が成り立つので, 任意の $1 \leq i \leq N$ に対し $2B^i \in L_{\text{loc}}^2(B^i)$. したがって $(\sum_{i=1}^N \int_0^t 2B_s^i dB_s^i)_{t \geq 0}$ は CLM. また $(|x|^2 + Nt)_{t \geq 0}$ は FV なので, $|B|^2$ は連続 semimartingale である.

次に $(\sum_{i=1}^N \int_0^t 2B_s^i dB_s^i)_{t \geq 0}$ が true martingale であることを示す. Doob's ineq. in L^2 より任意の $1 \leq i \leq N$ に対し

$$\begin{aligned} E\left[\left\langle \sum_{i=1}^N \int_0^t 2B_s^i dB_s^i, \sum_{i=1}^N \int_0^t 2B_s^i dB_s^i \right\rangle_t\right] &= E\left[\sum_{i=1}^N \int_0^t (2B_s^i)^2 ds\right] \\ &\leq 4t \sum_{i=1}^N E\left[\sup_{0 \leq s \leq t} (B_s^i)^2\right] \\ &\leq 4t2^2 \sum_{i=1}^N E[(B_s^i)^2] \\ &= 16t(|x|^2 + Nt). \end{aligned}$$

\therefore 任意の $1 \leq i \leq N$ に対し

$$\begin{aligned} t &= E[(B_t^i - x_i)^2] \\ &= E[(B_t^i)^2] - 2x_i E[B_t^i] + E[x_i^2] \\ &= E[(B_t^i)^2] - x_i^2 \end{aligned}$$

$$\text{より } E[(B_t^i)^2] = x_i^2 + t.$$

よって Thm. 4.13(ii) より $(\sum_{i=1}^N \int_0^t 2B_s^i dB_s^i)_{t \geq 0}$ は true martingale. ■

2.

$$\beta_t = \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i$$

と定める (ただし $|B_s| = 0$ のとき $\frac{B_s^i}{|B_s|} = 0$ とする). β_t の定義に現れる確率積分の定義を正当化し, さらに $(\beta_t)_{t \geq 0}$ が 0 スタートの (\mathcal{F}_t) -BM であることを示せ.

証明. (途中) 任意の $1 \leq i \leq N$ に対し $\frac{B_s^i}{|B_s|} \leq 1$ より, a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し

$$\int_0^t \left(\frac{B_s^i}{|B_s|} \right)^2 ds \leq \int_0^t ds = t < \infty$$

が成り立つので, 任意の $1 \leq i \leq N$ に対し $\frac{B_s^i}{|B_s|} \in L_{\text{loc}}^2(B^i)$. よって Thm 5.6 より $\int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i$ は確率積分の意味で well-defined な CLM である.

したがって β は (\mathcal{F}_t) -CLM である (←?). ここで

$$\begin{aligned} \langle \beta, \beta \rangle_t &= \left\langle \sum_{i=1}^N \int_0^\cdot \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i, \sum_{i=1}^N \int_0^\cdot \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i \right\rangle_t \\ &= \sum_{i=1}^N \left\langle \int_0^\cdot \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i, \int_0^\cdot \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i \right\rangle_t \\ &= \int_0^t \frac{\sum_{i=1}^N (B_s^i)^2}{|B_s|^2} ds = \int_0^t \frac{|B_s|^2}{|B_s|^2} ds = t \end{aligned}$$

が成り立つことより, β は 0 スタートの (\mathcal{F}_t) -BM である. ■

3.

$$|B_t|^2 = |x|^2 + 2 \int_0^t |B_s| d\beta_s + Nt$$

が成り立つことを示せ.

証明.

$$\frac{d\beta_t}{dB_t^i} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dB_t^i} \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i = \sum_{i=1}^N \frac{B_t^i}{|B_t|}$$

より $d\beta_t = \sum_{i=1}^N \frac{B_t^i}{|B_t|} dB_t^i$ となるので

$$\begin{aligned} |B_t|^2 &= |x|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \int_0^t B_s^i dB_s^i + Nt \\ &= |x|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \int_0^t |B_s| \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i + Nt \\ &= |x|^2 + 2 \int_0^t |B_s| \sum_{i=1}^N \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i + Nt \\ &= |x|^2 + 2 \int_0^t |B_s| d\beta_s + Nt. \end{aligned}$$
■

4. 以降, $x \neq 0$ を仮定する. $\varepsilon \in (0, |x|)$, $T_\varepsilon = \inf \{t \geq 0 : |B_t| \leq \varepsilon\}$ とする. ここで任意の $a > 0$ に対し

$$f(a) = \begin{cases} \log a & (N = 2), \\ a^{2-N} & (N \geq 3) \end{cases}$$

と定める. $f(|B_{t \wedge T_\varepsilon}|)$ が CLM となることを示せ.

証明. $F(x) = f(|x|)$ と定めると $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ であり,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \frac{x_i}{|x|^2} & N = 2, \\ \frac{(2-N)x_i}{|x|^N} & N \geq 3, \end{cases} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^2} \left(1 - \frac{2x_i^2}{|x|^2}\right) & N = 2, \\ \frac{2-N}{|x|^N} \left(1 - \frac{Nx_i^2}{|x|^2}\right) & N \geq 3. \end{cases}$$

ここで, 任意の $t \geq 0, \omega \in \Omega$ に対し $|B_{t \wedge T_\varepsilon}(\omega)| \geq \varepsilon$ が成り立つので, $B_{t \wedge T_\varepsilon} \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Itô's formula より

$$\begin{aligned} f(|B_{t \wedge T_\varepsilon}|) &= F(B_{t \wedge T_\varepsilon}) \\ &= \begin{cases} f(|x|) + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2} dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{1}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2} \left(1 - \frac{2(B_{s \wedge T_\varepsilon}^i)^2}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2}\right) ds & N = 2, \\ f(|x|) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{2-N}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} \left(1 - \frac{N(B_{s \wedge T_\varepsilon}^i)^2}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2}\right) ds & N \geq 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(|x|) + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2} dB_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2} \left(2 - 2 \sum_{i=1}^2 \frac{(B_{s \wedge T_\varepsilon}^i)^2}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2}\right) ds & N = 2, \\ f(|x|) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{2-N}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} \left(N - N \sum_{i=1}^N \frac{(B_{s \wedge T_\varepsilon}^i)^2}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2}\right) ds & N \geq 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(|x|) + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \frac{B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^2} dB_s^i & N = 2, \\ f(|x|) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} dB_s^i & N \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立ち, 任意の $N \geq 2$ と $1 \leq i \leq N$ に対し $\frac{B_{t \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{t \wedge T_\varepsilon}|^N} \in L_{\text{loc}}^2(B_t^i)$ であるので $\int_0^t \frac{B_{s \wedge T_\varepsilon}^i}{|B_{s \wedge T_\varepsilon}|^N} dB_s^i$ は CLM. したがって $f(|B_{t \wedge T_\varepsilon}|)$ は CLM. \blacksquare

5. $R > |x|$, $S_R = \inf \{t \geq 0 : |B_t| \geq R\}$ とする.

$$P(T_\varepsilon < S_R) = \frac{f(R) - f(|x|)}{f(R) - f(\varepsilon)}$$

となることを示せ. また $\varepsilon \rightarrow 0$ としたとき $P(T_\varepsilon < S_R) \rightarrow 0$ となることを確かめ, a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し $B_t \neq 0$ となることを示せ.

証明. $T := T_\varepsilon \wedge S_R$ とすると a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し $f(|B_t^T|) \leq R$. $f(|B_{t \wedge T_\varepsilon}|)$ が CLM であることから $f(|B_t^T|)$ は有界な CLM なので, Prop. 4.7(ii) より UIM. ゆえに optional stopping theorem より

$$\begin{aligned} f(|x|) &= E[f(|B_0^T|)] = E[f(|B_T|)] \\ &= E[f(\varepsilon \mathbf{1}_{\{T_\varepsilon < S_R\}} + R \mathbf{1}_{\{T_\varepsilon \geq S_R\}})] \\ &= E[f(\varepsilon) \mathbf{1}_{\{T_\varepsilon < S_R\}} + f(R) \mathbf{1}_{\{T_\varepsilon \geq S_R\}}] \\ &= f(\varepsilon) P(T_\varepsilon < S_R) + f(R) P(T_\varepsilon \geq S_R). \end{aligned}$$

$P(T_\varepsilon < S_R) + P(T_\varepsilon \geq S_R) = 1$ より $P(T_\varepsilon < S_R) = \frac{f(R) - f(|x|)}{f(R) - f(\varepsilon)}$ を得る.

$\varepsilon \rightarrow 0$ とすると $N = 2$ のとき $f(\varepsilon) \rightarrow -\infty$, $N \geq 3$ のとき $f(\varepsilon) \rightarrow +\infty$ より, $P(T_\varepsilon < S_R) \rightarrow 0$ となることからわかる.

次に a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し $B_t \neq 0$ を示す. $\varepsilon_n \downarrow 0$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} P(T_{\varepsilon_n} < S_n) < \infty$ を満たす正の実数列 $\{\varepsilon_n\}$ を選ぶと, Borel-Cantelli の補題より $A := \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{T_{\varepsilon_n} < S_n\}$ に対し $P(A) = 0$. このとき任意の $\omega \in A^c, t \geq 0$ に対し $B_t(\omega) \neq 0$.

$\therefore \omega \in A^c$ に対し $B_t(\omega) = 0$ を満たす $t > 0$ が存在すると仮定すると, 任意の $n \geq 1$ に対し $T_{\varepsilon_n}(\omega) < t$ であり, A^c の定め方からある $m \geq 1$ が存在して, 任意の $n \geq m$ に対し $S_n(\omega) < t$. stopping time の列 $(S_n(\omega))_{n \geq 1}$ は nondecreasing なので, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) (\leq t)$ が存在する. これを s とすると $B_s(\omega) = \infty$ となるが, B の連続性より矛盾.

以上より a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し $B_t \neq 0$. ■

6. a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し

$$|B_t| = |x| + \beta_t + \frac{N-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{|B_s|}$$

となることを示せ.

証明. $F(x) = |x|$ と定めると $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ であり, $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) = \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3}$. a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し $B_t \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ より, Itô's formula から

$$\begin{aligned} |B_t| = F(B_t) &= |x| + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{|B_s|^2 - (B_s^i)^2}{|B_s|^3} ds \\ &= |x| + \beta_t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{N|B_s|^2 - \sum_{i=1}^N (B_s^i)^2}{|B_s|^3} ds \\ &= |x| + \beta_t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{(N-1)|B_s|^2}{|B_s|^3} ds \\ &= |x| + \beta_t + \frac{N-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{|B_s|}. \end{aligned}$$

■

7. $N \geq 3$ を仮定する. a.s. で $t \rightarrow \infty$ としたとき $|B_t| \rightarrow \infty$ となることを示せ (ヒント: $|B_t|^{2-N}$ が非負 supermartingale であることを確かめよ).

証明. $F(x) = |x|^{2-N}$ と定めると $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ であり, $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{(2-N)x_i}{|x|^N}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) = \frac{2-N}{|x|^N} \left(1 - \frac{Nx_i^2}{|x|^2}\right)$. a.s. で任意の $t \geq 0$ に対し $B_t \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ より, Itô's formula と 4. の証明から

$$\begin{aligned} |B_t|^{2-N} = F(B_t) &= |x|^{2-N} + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_s^i}{|B_s|^N} dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{2-N}{|B_s|^N} \left(1 - \frac{N(B_s^i)^2}{|B_s|^2}\right) ds \\ &= |x|^{2-N} + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{(2-N)B_s^i}{|B_s|^N} dB_s^i. \end{aligned}$$

4. の結果より $|B|^{2-N}$ は非負 CLM なので, Prop. 4.7(i) より $|B|^{2-N}$ は非負 supermartingale. ゆえ

に任意の $t \geq 0$ に対し

$$E[|B_t|^{2-N}] \leq E[|B_0|^{2-N}] = |x|^{2-N}$$

が成り立つので, $\sup_{t \geq 0} E[|B_t|^{2-N}] < \infty$ より $|B|^{2-N}$ は L^1 -bdd. よって Thm. 3.19 より $|B_\infty|^{2-N}$ が a.s. で存在するので, $\lim_{t \rightarrow \infty} |B_t|$ が a.s. で存在する. a.s. で $\limsup_{t \rightarrow \infty} B_t^1 = \infty$ となるので, a.s. で $\lim_{t \rightarrow \infty} |B_t| = \infty$. ■

8. $N = 3$ を仮定する. Gaussian density の形式を用いて, r.v. の族 $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$ が L^2 -bdd. であることを確かめよ. また $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$ が CLM であり, かつ true martingale でないことを示せ.

証明. まず $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$ が L^1 -bdd. であることを示す. $\delta := \frac{|x|}{2} (> 0)$ と定める. このとき

$$\begin{aligned} E[|B_t|^{-2}] &= \int_{\mathbb{R}^3} |y|^{-2} p(y) dy = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|^2 (2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) dy \\ &= \int_{|y| < \delta} \frac{1}{|y|^2 (2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) dy + \int_{|y| \geq \delta} \frac{1}{|y|^2 (2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) dy \\ &=: I_1(t) + I_2(t). \end{aligned}$$

任意の $t > 0$ に対し

$$I_2(t) \leq \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) dy \leq \frac{1}{\delta^2}$$

と評価できることから I_2 は有界. あとは $I_1(t)$ が任意の $t > 0$ において有界であることを示せば十分.

$|y| < \delta = \frac{|x|}{2} \implies |y-x| \geq |x| - |y| > \frac{|x|}{2}$ であることより

$$I_1(t) \leq \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{8t}\right) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|^2} dy = \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{8t}\right) \cdot 4\pi\delta$$

が成り立つ.

$$\varphi(t) = \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{8t}\right)$$

で定めると φ は $(0, \infty)$ 上連続かつ $\lim_{t \downarrow 0+} \varphi(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$. よって φ は有界なのである $M > 0$ が存在し, $\sup_{t > 0} |\varphi(t)| \leq M < \infty$. よって $\sup_{t > 0} I_1(t) \leq 4\pi M \delta$ と評価できるので I_1 も有界. ゆえに $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$ は L^2 -bdd.

次に $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$ が CLM であるか true martingale でないことを示す. 7. の証明より CLM であることが言えるので $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$ が true martingale であると仮定すると L^2 -bdd. martingale. a.s. で $\lim_{t \rightarrow \infty} |B_t| = \infty (\implies |B_\infty|^{-1} = 0)$ と Thm. 4.13 を合わせて

$$0 = E[|B_\infty|^{-2}] = E[|B_0|^{-2}] + E[\langle |B|^{-1}, |B|^{-1} \rangle_\infty] > 0$$

がわかるが, これは矛盾. よって $(|B_t|^{-1})_{t \geq 0}$ は CLM であるが true martingale でない. ■