数理逻辑读书笔记：归纳与递归

211250171　　　　胡书毓

在数理逻辑教材的第一章中，递归法则与归纳定理就作为重要的内容出现在教材中，被多次提到并在 1.4 节中给出了详细的证明，然而就如同这本书的大部分内容一样，会在先前的章节中引入或者证明一些定理，在之后的章节中才被真正用到。归纳与递归作为数学领域中重要的概念，经常被运用在数学的各个领域中，所以我也希望能够整理出本书所学部分中涉及到这部分的相关内容，以加深理解。

1　归纳法则

1.1　归纳法则的证明

在本书的归纳法则证明中，为了方面理解只给出了包含两个函数 f 和 g 的函数类 $\mathcal{F}$，而实际上 $\mathcal{F}$ 可以是 U 上任意关系的集合，而下面的证明也是基于这一点的。首先给出归纳法则中需要用到的相关符号与定义，以便于我们的证明：

1. 定义 U 是一个表达式的集合，它的初始元素是命题符号，相关运算是 $\varepsilon_\neg, \varepsilon_\wedge$ 等，这样构造出来的就是合式公式的集合，令初始集合为 $B \subseteq U$，$\mathcal{F}$ 为 U 上任意关系的集合。
2. **封闭的**：我们称 U 的子集 S 在 $\mathcal{F}$ 中的函数的作用下是封闭的，当且仅当只要对于任意的 $R \in \mathcal{F}$，只要 $\forall x_i \in S, i = 0, 1, ..., k$，那么 $R(x_0, x_1, ..., x_k) \in S$。
3. **归纳的**：我们称 S 是归纳的，当且仅当 $B \subseteq S$，且 S 在 $\mathcal{F}$ 中的关系的作用下是封闭的。

下面我们就可以给出归纳法则的定义：

归纳法则　假设 C 是由 B 中的元素通过 $\mathcal{F}$ 中的函数生成的，若 S 是 C 的子集，S 包含 B 并且在 $\mathcal{F}$ 中的运算作用下是封闭的，那么 $S = C$.

证明　首先给出 C^* 的定义，设 C^* 是 U 的所有归纳子集 S 的交集，那么有 $B \subseteq S$，若 $x_0, x_1, ..., x_{n-1} \in S$ 且对于 $R \in \mathcal{F}$ 有 $\langle x_0, x_1, ..., x_n \rangle \in R$，那么有 $x_n \in S$; 再给出 C_* 的定义，设 C_* 是由 B 中的元素有限次使用 $\mathcal{F}$ 中的关系得到的所有元素的集合，对于每个 $i \le n$，我们有 $x_i \in B$ 或者对某个 $R \in \mathcal{F}$ 以及小于 i 的数 $j_1, j_2, ..., j_k$ 有 $\langle x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_k}, x_i \rangle \in R$，那么我们说 $\langle x_0, x_1, ..., x_n \rangle$ 是一个构造序列。

首先验证 $C^* \subseteq C_*$，只需证明 C_* 是归纳的，由定义可得 $B = C_1 \subseteq C_*$，若 $x_0, x_1, ..., x_k \in C_*$，那么对于 $\forall R \in \mathcal{F}$，可得到新元素 $R(x_0, x_1, ..., x_k)$，并被添加到 C_* 中，因此关系类 $\mathcal{F}$ 在 C_* 上的运算是封闭的，故 C_* 是归纳的，即有 $C^* \subseteq C_*$.

再验证 $C^* \subseteq C_*$，对 C_* 中的一个元素 x_n，及它的构造序列 $\langle x_0, x_1, ..., x_n \rangle$，$x_0 \in B \subseteq C^*$，对于 $\forall i \le n$，由于 C^* 中的元素在该类运算下封闭 $x_i \in C^*$，故 $C_* \subseteq C^*$.

综上可得 $C_* = C^*$，由于 S 是归纳的，因此 $C = C^* \subseteq S$，且由归纳定理的假设可得，S 是 C 的子集，故可得到 $S = C$.

现在我们就得到了归纳法则，通过对本书的进一步学习，我也逐渐意识到归纳法则的重要性，它给了我们一个便利的切入点，使一些定理从抽象的概念变成可以描述的每一种情况，而通过课本中的几道题目可以更加便于我们理解归纳法则的作用。

1. $\alpha_1, \alpha_2, ...$ 是一个合式公式的序列，对每个合式公式 φ，令 φ^* 是用 α_n 置换 A_n（对所有 n）后得到的结果。设 v 是所有命题符号的真值指派，定义 u 为满足 $u(A_n) = \bar{v}(\alpha_n)$ 的真值指派，证明 $\bar{u}(\varphi) = \bar{v}(\varphi^*)$.

证明 令 $B = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$，令 $S = \{\alpha | \bar{u}(\alpha) = \bar{u}(\alpha^*)\}$，对于 $\forall A_i \in B$，有 $\bar{u}(A_i) = u(A_i) = \bar{v}(\alpha_i) = \bar{v}({A_i}^*)$，故有 $B \subseteq S$.

对于 $\forall \beta, \gamma \in S$，有 $\bar{u}(\beta) = \bar{v}(\beta^*), \bar{u}(\gamma) = \bar{v}(\gamma^*)$，故有

$$\bar{u}((\neg\beta)) = \neg\bar{u}(\beta) = \neg\bar{v}(\beta^*) = \bar{v}((\neg\beta^*)) = \bar{v}(\neg(\beta^*))$$

$$\bar{u}((\beta \circ \gamma)) = \bar{u}(\beta) \circ \bar{u}(\gamma) = \bar{v}(\beta^*) \circ \bar{v}(\gamma^*) = \bar{v}((\beta^* \circ \gamma^*)) = \bar{v}((\beta \circ \gamma)^*)$$

即有 $(\neg\beta), (\beta \circ \gamma) \in S$，由归纳法则可以得到 $S = \bar{B}$，由于 $\varphi \in \bar{B}$，即 $\varphi \in S$，综上可得 $\bar{u}(\varphi) = \bar{v}(\varphi^*)$.

2. 设 α 是一个合式公式，其连接符号为 $\wedge, \vee, \neg$. 设 α^* 是将 α 中 $\wedge$ 与 $\vee$ 对换，同时将每个命题符号用其否定代替. 证明 α^* 重言等价于 $(\neg\alpha)$. 使用归纳法.

证明 假设 B 是命题符号的集合, 令 $S = \{\alpha | \alpha^* = (\neg\alpha)\}$, 对于不含任何连接词的合式公式即命题符号 A_i, $\alpha^* = (\neg A_i) = (\neg\alpha)$, 即有 $B \subseteq S$; 而对于含有 $\neg$ 的合式公式 $\neg\beta$, $\alpha^* = (\neg(\neg\beta)) = (\neg\alpha)$, 也是显然的; 对于含有连接符 $\wedge, \vee$ 的合式公式 $\beta\Box\gamma$, 其中 $\wedge^* = \vee, \vee^* = \wedge$, 即有 $\alpha^* = (\beta\Box\gamma)* = (\neg\beta)\Box^*(\neg\gamma)$，由德摩根定律我们可以得到 $(\neg\beta)\Box^*(\neg\gamma) = \neg(\beta\Box\gamma)$，故 $\alpha^* = (\neg\alpha)$. 由归纳法则我们可以得到 $S = \bar{B}$，即有 α^* 重言等价于 $(\neg\alpha)$.

从以上两个简单的例子，我们可以看出归纳法则的作用，当我们希望得到某个整体的性质时，可以自底向上的通过归纳，验证每一种基础的情况，最终得到希望的结果。

1.2 归纳法则的应用

在本书的大部分章节中，都或多或少用到了归纳法则作为定理证明的基础，而在这一节中，我希望能够回顾一下**可靠性定理**，在学习数理逻辑之前这一部分是我不会去思考的问题，一个结论如果能被正确的一步步证明出来，那从直觉上说公式集与逻辑公理本就应该是逻辑蕴含这一结论的，但可靠性定理同样是需要被证明的;而从另一个视角来说，演绎计算得到的结果如果都是公式集与公理所逻辑蕴含的，那演绎计算似乎又是没有意义的。从最初的单纯的符号之间的推演，到一阶逻辑部分的可靠性与完备性，数理逻辑的内容也逐渐从抽象的符号变得更加有意义，而下面的部分就是可靠性定理的证明过程，而想要证明该定理还需要证明另一个重要的引理：“逻辑公理都是恒真的”，而在这之后我们就可以从演绎计算的每一种情况出发，对可靠性定理加以完整的证明。

可靠性定理 如果 $\Gamma \vdash \varphi$，那么 $\Gamma \models \varphi$

想要证明可靠性定理首先需要证明如下引理：逻辑公理都是恒真的.

证明 由于任何恒真公式的概化都是恒真的，因此我们只需考虑逻辑公理，而无需考虑其它的，现在我们只需分别考察各组公理。

第 1 组公理 重言式：如果 $\emptyset$ 重言蕴含 α，那么 $\emptyset \models \alpha$

第 2 组公理 $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中 t 是 x 在 α 中的替换：证明 $\forall xPx \to Pt$ 是恒真的，设 $\models_{\mathfrak{A}} \forall xPx[s]$，那么对 $|\mathfrak{A}|$ 中任意的 d，$\models_{\mathfrak{A}} Px[s(x|d)]$，特别地取 $d = \bar{s}(t)$：$\models_{\mathfrak{A}} Px[s(x|\bar{s}(t))]$，由原子公式的可满足性的定义，这等价于 $\bar{s}(t) \in P^{\mathfrak{A}}$，而这又等价于 $\models_{\mathfrak{A}} Pt[s]$；由替换引理我们可以得到对于非原子公式这样一个转换也是成立的，只要 t 对 φ 中的 x 是可替换的，那么有 $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x|\bar{s}(t))]$ iff $\models_{\mathfrak{A}} \varphi_t^x[s]$.

第 3 组公理 $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$：显然第三组公理等价于 $\{\forall x(\alpha \to \beta), \forall x\alpha\} \models \forall x\beta$，而对于每一个结构 $\mathfrak{A}$ 与 $s : V \to |\mathfrak{A}|$，若 $\models_{\mathfrak{A}} \forall x(\alpha \to \beta)[s]$ *and* $\models_{\mathfrak{A}} \forall x\alpha[s]$，那么对于所有的 $d \in |\mathfrak{A}|$，有 $\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x|d)]$ *and* $\models_{\mathfrak{A}} (\alpha \to \beta)[s(x|d)]$ 即 $\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x|d)]$ *and* ($\not\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x|d)]$ *or* $\models_{\mathfrak{A}} \beta[s(x|d)]$) 即有 $\models_{\mathfrak{A}} \beta[s(x|d)]$ 故 $\models_{\mathfrak{A}} \forall x\beta$

第 4 组公理 $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 在 α 中不是自由出现的：对于每一个结构 $\mathfrak{A}$ 与 $s : V \to |\mathfrak{A}|$，对于所有的 $d \in |\mathfrak{A}|$，s 和 $s(x|d)$ 在 α 中的所有自由变量上一致，根据定理 22A，对于所有的 $d \in |\mathfrak{A}|$，$\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x|d)]$，即 $\models_{\mathfrak{A}} \forall x\alpha[s]$

第 5 组公理 $x = x$：显然的，$\mathfrak{A}$ 以 s 满足 $x = x$ 当且仅当 $s(x) = s(x)$，这自然是正确的.

第 6 组公理 $x = y \to (\alpha \to \alpha')$：设 α 是原子的，且 α' 可以由 α 在某个地方通过将 x 替换为 y 得到. 这足以证明 $\{x = y, \alpha\} \models \alpha'$. 因此，取任意的 $\mathfrak{A}, s$ 使得 $\models_{\mathfrak{A}} x = y[s]$，即 $s(x) = s(y)$. 那么，任何项 t 具有属性：如果 t' 可以由 t 通过将某些位置的 x 替换为 y 得到，那么 $\bar{s}(t) = \bar{s}(t')$.

这样我们便可以对可靠性定理进行证明了

证明 使用归纳法，任何由 Γ 演绎得到的公式 φ 都是 Γ 逻辑蕴含的

情形 1：φ 就是逻辑公理，由于逻辑公理都是恒真的即 $\models \varphi$，因此 $\Gamma \models \varphi$

情形 2：$\varphi \in \Gamma$，显然 $\Gamma \models \varphi$

情形 3：φ 可以由 ψ，$\psi \to \varphi$ 通过假言推理得到，由归纳假设，这里 $\Gamma \models \psi$ 且 $\Gamma \models (\psi \to \varphi)$. 于是，$\Gamma \models \varphi$

2 递归定理

2.1 递归定理的证明

相比于归纳法则来说，递归定理更加复杂，描述的也是更为抽象的情景，而想要定义递归定理，首先需要说明自由生成这一概念。

自由生成 称 C 是由 B 在 f 和 g 的作用下自由生成的，当且仅当除了满足生成（即不封闭）的要求外，f 和 g 在 C 上的限制 f_C 和 g_C 必须满足以下条件：

1. f_C 和 g_C 是一对一的
2. f_C 的值域，g_C 的值域和集合 B 是两两不交的

递归定理 设 U 的子集 C 是由 B 在 f 和 g 的作用下自由生成的，其中

$$f: U \times U \to U$$

$$g: U \to U$$

设 V 是集合，函数 F, G 和 h 满足：

$$h: B \to V$$

$$F: V \times V \to V$$

$$G: V \to V$$

那么，存在唯一的函数

$$\bar{h}: C \to V$$

使得

(i) 对 B 中的 x，$\bar{h}(x) = h(x)$；

(ii) 对 C 中的 x, y，

$$\bar{h}(f(x,y)) = F(\bar{h}(x), \bar{h}(y))$$

$$\bar{h}(g(x)) = G(\bar{h}(x))$$

正如课本中所说，递归定理的内容并不是显而易见的，无论是对于自由生成的要求还是函数 $\bar{h}$ 的具体意义，而通过涂色问题我们可以尝试在具体的场景下，阐明递归定理。

令函数 $\bar{h}$ 为给 C 中每个元素涂上某种颜色，而函数 f, g 则是通过已知的点生成新的点的函数且满足自由生成，首先，我们已知

1. h，给定 B 的初始元素的涂色方案
2. F，根据 x 与 y 的颜色得到 $f(x,y)$ 的颜色（即给出关于 $\bar{h}(x), \bar{h}(y)$ 的 $\bar{h}(f(x,y))$）
3. G，类似的给出从 x 的颜色得到 $g(x)$ 的颜色的方法

显然的，这些颜色的给定可能会产生冲突，比如 F 要给某个点涂绿色，而 G 却要求涂红色，但在自由生成的条件下，f_C 的值域、g_C 的值域和集合 B 是两两不交的，这就保证了一致性。

下面就来对递归定理进行证明，我们遵循与书中相同的证明思路，令 $\bar{h}$ 为多个逼近函数的并。如果一个函数 v 的定义域是 C 的子集，值域是 V 的子集，并且对于 C 中的 x 和 y 满足如下两个条件，那么我们称 v 是可接受的.

(i') 如果 x 属于 B 且属于 v 的定义域，那么 $v(x) = h(x)$

(ii') 如果 $f(x,y)$ 属于 v 的定义域，那么 x, y 也属于 v 的定义域并且 $v(f(x,y)) = F(v(x), v(y))$，如果 $g(x)$ 属于 v 的值域，那么 x 也属于 v 的值域，并且 $v(g(x)) = G(v(x))$.

设 K 是所有可接受的函数的集合，令 $\bar{h} = \bigcup K$，那么，

$$\begin{aligned} \langle x, z \rangle \in \bar{h} \quad &\text{iff} \quad \langle x, z \rangle \text{属于某个可接受的} v \\ &\text{iff} \quad \text{对某个可接受的} v, v(x) = z \end{aligned}$$

我们说该 $\bar{h}$ 满足我们的要求.

证明 递归定理的主要证明思路为：1）证明 $\bar{h}$ 是一个函数；2）证明 $\bar{h}$ 本身是一个可接受的函数；3）证明 $\bar{h}$ 是定义在整个 C 上的；4）证明 $\bar{h}$ 是唯一的。下面我们按照这 4 个步骤分布进行证明。

(1) 证明 $\bar{h}$ 是一个函数. 首先，设 $S = \{x \in C \mid \text{最多存在一个} z \text{，使得} \langle x, z \rangle \in \bar{h}\}$，即所有定义在

x 上的可接受函数在 x 点的取值是相同的，为了证明 S 是归纳的首先考虑 B 中的某个假设是在 x 上定义的可接受函数，我们要证明 $v_1(x) = v_2(x)$ 根据条件 (i') $v_1(x)$ 与 $v_2(x)$ 必须等于 $h(x)$，因此 $v_1(x) = v_2(x)$，这说明 $x \in S$，还因为 x 是 B 的任意元素，所以有 $B \subseteq S$.

其次，验证 S 在 f 和 g 的作用下是封闭的. 设 x 和 y 是 S 中的元素，我们要判断的是 $f(x, y)$ 是否在 S 中. 假定 v_1 和 v_2 是定义在 $f(x, y)$ 上的可接受函数，也要证明这两个函数在这一点上取值相等. 然而，条件 (ii') 表明 $v_1(f(x, y)) = F(v_1(x), v_1(y))$ 且 $v_2(f(x, y)) = F(v_2(x), v_2(y))$. 由于 x 和 y 在 S 中，因此有 $v_1(x) = v_2(x)$ 和 $v_1(y) = v_2(y)$ 这样就得到 $v_1(f(x, y)) = v_2(f(x, y))$ 这就证明了 $f(x, y) \in S$，因此 S 在 f 下是封闭的. 类似地，可以证明 S 在 g 的作用下也是封闭的.

因而 S 是归纳的，且 $S = C$. 这就证明了 $\bar{h}$ 是单值的，即是一个函数，而又因为 $\bar{h}$ 包含了每个可接受的函数作为其子集，因此我们说：$\bar{h}(x) = v(x)$，其中 v 是可接受的函数且 $x \in \mathrm{dom}\, v$.

(2) 证明 $\bar{h}$ 是可接受的. 显然 $\mathrm{dom}\, \bar{h} \subseteq C$ 且 $\mathrm{ran}\, \bar{h} \subseteq V$，由 (1) 我们得到 $\bar{h}$ 是一个函数，而对于可接受的还需要满足条件 (i') 与 (ii').

首先验证 (i')，设 $x \in B$ 且 $x \in \mathrm{dom}\, \bar{h}$ 即 $\langle x, \bar{h}(x) \rangle \in \bar{h}$，那么必定存在某个可接受的函数 v 使得 $v(x) = \bar{h}(x)$. 由 (i') 可得 $v(x) = h(x)$，即有 $\bar{h}(x) = h(x)$. 因此 $\bar{h}$ 满足条件 (i')

再验证 (ii')，设 $f(x, y) \in \mathrm{dom}\, \bar{h}$，必定存在某个可接受的函数 v 使得 $v(f(x, y)) = \bar{h}(f(x, y))$. 同样的，由 (ii') 可得 $v(f(x, y)) = F(v(x), v(y))$. 由于 $\bar{h}(x) = h(x)$ 且 $\bar{h}(y) = h(y)$，因此 $\bar{h}(f(x, y)) = v(f(x, y)) = F(v(x), v(y)) = F(\bar{h}(x), \bar{h}(y))$. 同样的，只要有 $g(x) \in \mathrm{dom}\, \bar{h}$，就有 $\bar{h}(g(x)) = G(\bar{h}(x))$. 这样 $\bar{h}$ 满足条件 (ii')，因此 $\bar{h}$ 是可接受的.

(3) 证明 $\bar{h}$ 的定义域是归纳的. 首先，考虑 $x \in B$，对于集合 $\{\langle x, h(x) \rangle\}$，显然是一个可接受函数，所以也是包含在 $\bar{h}$ 中，更进一步的 $B \subseteq \mathrm{dom}\, \bar{h}$.

要证明 $\mathrm{dom}\, \bar{h}$ 是归纳的，还需要证明 $\mathrm{dom}\, \bar{h}$ 在 f 与 g 的作用下是封闭的. 对于 $\forall s, t \in \mathrm{dom}\, \bar{h}$，我们希望 $f(s, t) \in \mathrm{dom}\, \bar{h}$，否则，令

$$v = \bar{h} \cup \{\langle f(s, t), F(\bar{h}(s), \bar{h}(t)) \rangle\}$$

即 v 是 $\bar{h}$ 并上这个附加的有序对的结果，显然 v 是函数，$\mathrm{dom}\, v \subseteq C$，且 $\mathrm{ran}\, v \subseteq V$，接下来证明 v 是满足 (i') 与 (ii') 的.

对于 (i')，如果 $x \in B \cap \mathrm{dom}\, \bar{h}$，由自由生成可知 $x \neq f(s, t)$，因此，$x \in \mathrm{dom}\, \bar{h}$ 且 $v(x) = \bar{h}(x) = h(x)$.

对于 (ii')，假定对 C 中的某个 x, y，有 $f(x, y) \in \mathrm{dom}\, v$. 如果 $f(x, y) \in \bar{h}$，由于 $\bar{h}$ 是可接受的，则有 $v(f(x, y)) = \bar{h}(f(x, y)) = F(\bar{h}(x), \bar{h}(y)) = F(v(x), v(y))$. 而在另一种情况下，$f(x, y) = f(s, t)$，由自由生成可知 $x = s, y = t$，而这些点都是在 $\mathrm{dom}\, \bar{h} \subseteq \mathrm{dom}\, v$ 中的，由构造过程我们可以得到 $v(f(s, t)) = F(\bar{h}(s), \bar{h}(t)) = F(v(s), v(t))$. 最后，假设对于 C 中的 x，有 $g(x) \in \mathrm{dom}\, v$，根据自由生成可以得到 $g(x) \neq f(s, t)$，故 $g(x) \in \mathrm{dom}\, \bar{h}, v(g(x)) = \bar{h}(g(x)) = G(\bar{h}(x)) = G(v(x))$

于是，v 就是一个可接受的函数，这也就意味着 $v \subseteq \bar{h}$，即有 $f(s, t) \in \mathrm{dom}\, \bar{h}$

类似的，可以证明 $\mathrm{dom}\, \bar{h}$ 在 g 的作用下也是封闭的. 综上可得 $\mathrm{dom}\, \bar{h}$ 是归纳的，且 $C = \mathrm{dom}\, \bar{h}$.

(4) 证明 $\bar{h}$ 是唯一的，假定存在两个函数 $\bar{h}_1$ 和 $\bar{h}_2$ 都满足定理的结论，利用归纳法则可以设它们在集合 S 上取值相等，即 $S = \{x \in C \mid \bar{h}_1(x) = \bar{h}_2(x)\}$，由之前的证明不难看出 S 是归纳的，

因此 $S=C, \bar{h}_1=\bar{h}_2$.

以上便是递归定理的全部证明过程，而这个证明的有趣之处在于，从实际作用上来说，步骤 *(1)* 的证明实际上也完成了对于步骤 *(3)* 的证明，即集合 S 是归纳的，那同时也就确定了 $\bar{h}$ 的定义域也是归纳的，这一点由 C 的定义是可以得到的，而在步骤 *(3)* 中更加具体且复杂的证明，也许更像是一种直观上的证明，即假设 $\bar{h}$ 的定义域在函数作用下是不封闭的，我们同样能够导出 $\bar{h}$ 的定义域一定是封闭的这一点，更进一步的就确定了 $\bar{h}$ 的定义域是归纳的。而对于步骤 *(4)*，实际上在步骤 *(1)* 中只要通过符号的替换便可以得到这一结果，因为 $\bar{h}$ 也是一个可接受的函数，而作者分为这四步证明可能是为方便第一次接触该结论的读者理解这样一个过程，从而对递归定理产生更清晰的认知。

2.2 递归定理的应用

在这一部分，我希望总结两个通过递归定理定义的重要概念，即自由变量与模型，以加深对一阶逻辑部分的理解。

2.2.1 自由变量

我们以课本上的例子进行说明，对于合式公式 $\forall v_2 \in v_2 v_1$，此时我们无法知道关于 v_1 符号本身的具体含义，在这种情况下我们称 v_1 在该合式公式中自由出现.

下面我们使用递归定理，对自由变量的定义进行描述，首先从定义在原子公式上的函数 h 开始:

$$h(\alpha)=\text{所有变量的集合，如果有的话也包括原子公式}\alpha$$

而由合式公式的唯一可分解性可以得到满足自由生成这一条件，因此我们将 h 进一步扩展到所有合式公式上的函数 $\bar{h}$:

$$\begin{aligned}\bar{h}\left(\varepsilon_{\neg}(\alpha)\right)&=\bar{h}(\alpha)\\ \bar{h}\left(\varepsilon_{\rightarrow}(\alpha,\beta)\right)&=\bar{h}(\alpha)\cup\bar{h}(\beta)\\ \bar{h}\left(\mathcal{Q}_i(\alpha)\right)&=\bar{h}(\alpha)\text{如果可以，除去}v_i\text{后}\end{aligned}$$

这样，我们就说 x 是 α 的一个自由变量当且仅当 $x \in \bar{h}$.

2.2.2 模型

在 2.2 节给出初步的定义后，本书在 2.6 节又进一步的对模型进行了探讨，简单来说，满足某个句子的结构便是模型，可表示为:

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$$

其中，φ 是语言中的合式公式，$\mathfrak{A}$ 是语言的结构，$s: V \rightarrow \mathfrak{A}$ 是从集合 V 中的所有变量到 $\mathfrak{A}$ 的论域 $|\mathfrak{A}|$ 的函数，也就是说结构 $\mathfrak{A}$ 以 s 满足 φ. 下面我们使用递归定理给出这一定义，即递归定义函数 $\bar{h}$，使得 $\mathfrak{A}$ 以 s 满足 φ 当且仅当 $s \in \bar{h}(\varphi)$.

为了方便表述, 我们引入书中所定义的 $\bar{s}$, 即对于每一个变量 x, 有 $\bar{s}(x)=s(x)$; 每一个常量 c，有 $\bar{s}(c)=c^{\mathfrak{A}}$；对于原子公式 $\varphi=Pt_1t_2...t_n$，我们令 $h(\varphi)=\{s|\langle\bar{s}(t_1),\bar{s}(t_2),...,\bar{s}(t_n)\rangle \in P^{\mathfrak{A}}\}$，此时有 $s \in \varphi$ iff $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$

类似的我们将 h 进一步扩展到所有合式公式上的函数 $\bar{h}$,当合式公式的形式为 $\neg\varphi$ 时,$\bar{h}((\neg\varphi)) = \{s|s \notin \bar{h}(\varphi)\}$，此时有 $s \in \bar{h}((\neg\varphi))$ iff $s \notin \bar{h}(\varphi)$ iff $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$ iff $\models_{\mathfrak{A}} \neg\varphi[s]$；当合式公式的形式为 $\varphi \to \psi$ 时,$\bar{h}((\varphi \to \psi)) = \bar{h}(\neg\varphi) \cup \bar{h}(\psi)$，此时有 $s \in \bar{h}((\varphi \to \psi))$ iff $s \in \bar{h}(\neg\varphi)$ *or* $s \in \bar{h}(\psi)$ iff $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$ *or* $\models_{\mathfrak{A}} \psi[s]$ iff $\models_{\mathfrak{A}} (\varphi \to \psi)[s]$；当合式公式的形式为 $\forall\varphi$ 时，$\bar{h}(\forall\varphi) = \{s|$对每一个$d \in |\mathfrak{A}|, s(x|d) \in \bar{h}(\varphi)\}$，此时有 $s \in \bar{h}(\forall\varphi)$ iff 对每一个$d \in |\mathfrak{A}|, s(x|d) \in \bar{h}(\varphi)$ iff 对每一个$d \in |\mathfrak{A}|, \models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x|d)]$ iff $\models_{\mathfrak{A}} \forall x\varphi[s]$.

这样我们便完整的定义出了函数 $\bar{h}$

3 总结

本篇读书笔记是针对归纳法则与递归定理的证明与应用做出的，并总结了一阶逻辑这一章与这两个定理关系密切的部分，其中大部分的内容仍沿用课本中的思路，但对课本中未完全说明的部分做了一定的证明。无论是归纳法则还是递归定理，这种自底向上逐步归纳每一种情况的思想，也与本书的大多数定理的证明思路是一致的，通过对这一部分知识的回顾与整理，也使我对逻辑学本身有了更加深刻的理解。