学校：__________ 姓名：__________ 班级：__________ 考号：__________

外……装……订……线……内……装……订……线

2023-2024 学年上学期期末模拟考试 02

高二数学

（考试时间：120分钟　试卷满分：150分）

注意事项：

1．本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答第Ⅰ卷时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3．回答第Ⅱ卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

4．测试范围：空间向量与立体几何、直线与圆的方程、圆锥曲线、数列。

5．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知向量 $\vec{a}=(1,-3,-2),\vec{b}=(3,2,-5)$，则下列结论正确的是（　）

A．$\vec{a}//\vec{b}$　　B．$\vec{a}\perp\vec{b}$　　C．$\vec{a}-\vec{b}=(-2,-5,-3)$　　D．$|\vec{a}|=\sqrt{14}$

2．抛物线 $x^2=16y$ 的焦点到点 $(2,5)$ 的距离为（　）

A．2　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{7}$　　D．4

3．2023 年 10 月 17～18 日，第三届“一带一路”高峰论坛在北京举行，有 150 个国家、92 个国际组织的外宾参与论坛．从 2013 年到 2022 年，中国与共建“一带一路”国家的进出口累计总额年均增长率为 6.4%．现已知 2013 年进出口累计总额为 10.9 万亿美元，则 2022 年进出口累计总额（保留 1 位小数）约为（　）．

参考数据：$1.064^8\approx1.64,1.064^9\approx1.75,1.064^{10}\approx1.86,1.064^{11}\approx1.98$

A．17.9 万亿　　B．19.1 万亿　　C．20.3 万亿　　D．21.6 万亿

4．给出下列命题：

①直线 $x=1$ 的倾斜角不存在；

②若直线 l 的方向向量 $\vec{a}=(0,1,-1)$，平面 α 的法向量 $\vec{n}=(1,-1,-1)$，则 $l//\alpha$；

③已知 O 为空间直角坐标的原点，且 $A(1,1,1)$，则点 $P(1,2,3)$ 到直线 OA 的距离是 $\sqrt{2}$；

④如果向量 $\vec{a},\vec{b}$ 与任何向量不能构成空间向量的一个基底，那么 $\vec{a},\vec{b}$ 一定共线．

其中真命题的个数是（　）

A．3　　B．2　　C．1　　D．0

5．古希腊数学家阿波罗尼奥斯（约公元前 262~公元前 190 年）的著作《圆锥曲线论》是古代数学的重要成果.其中有这样一个结论：平面内与两点距离的比为常数 λ（$\lambda\neq1$）的点的轨迹是圆，后人称这个圆为阿波罗尼斯圆.已知点 $O(0,0),A(3,0)$，动点 $P(x,y)$ 满足 $\frac{|PO|}{|PA|}=\frac{1}{2}$，则点 P 的轨迹与圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$ 的公切线的条数为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若棱长为1，E，F 分别为线段 B_1D_1，BC_1 上的动点，则下列结论错误的是（　）

A．$DB_1\perp$ 平面 ACD_1　　B．直线 AE 与平面 BB_1D_1D 所成角的正弦值为定值 $\frac{1}{3}$

C．平面 $A_1C_1B//$ 平面 ACD_1　　D．点 F 到平面 ACD_1 的距离为定值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

7．已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，过 E 的右焦点 F 作其渐近线的垂线，垂足为 P，若 $\triangle OPF$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}ac$，则 E 的离心率为（　）

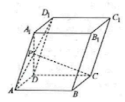
A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{2}$

8．定义“等方差数列”：如果一个数列的各项都是实数，且从第二项起，每一项与它前一项的平方差是相同的常数，那么这个数列就叫做等方差数列，这个常数叫做该数列的公方差．已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 是等方差数列，且公方差为3，$a_1=1$，则数列 $\left\{\frac{1}{a_n+a_{n+1}}\right\}$ 的前 33 项的和为（　）

A．3　　B．6　　C．2　　D．4

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9.如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以顶点 A 为端点的三条棱长都是 2，且它们彼此的夹角都是 $60°$，P 为 A_1D 与 AD_1 的交点，若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则下列正确的是（　）



A．$\overrightarrow{CP}=-\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　B．$\overrightarrow{AC_1}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

C．$\cos\left\langle\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AC_1}\right\rangle=\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D．BD_1 的长为 $2\sqrt{3}$

10.已知直线 l：$kx-y+2k+1=0$ 和圆 O：$x^2+y^2=8$，则（　）

A．直线 l 恒过定点 $(2,1)$

B．存在 k 使得直线 l 与直线 l_0：$x-2y+2=0$ 垂直

C．直线 l 与圆 O 相交

D．直线 l 被圆 O 截得的最短弦长为 $2\sqrt{2}$

11.已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\cdots+3^{n-1}a_n=n\cdot 3^{n+1}\ (n\in\mathbf{N}^*)$，设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则下列结论正确的是（　　）

A．数列 $\{a_n\}$ 为等差数列　　B．$S_n=3n^2+6n$

C．数列 $\{(-1)^n a_n\}$ 的前100项和为300　　D．数列 $\{|a_n-20|\}$ 的前20 项和为284

12.已知 F_1，F_2 分别为椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 的左、右焦点，P 为椭圆上任意一点（不在 x 轴上），$\triangle PF_1F_2$ 外接圆的圆心为 H，半径为 R，$\triangle PF_1F_2$ 内切圆的圆心为 I，半径为 r，直线 PI 交 x 轴于点 M，O 为坐标原点，则（　）

A．$S_{\triangle PF_1F_2}$ 最大时，$r=\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PO}$ 的最小值为8

C．$\frac{|PI|}{|PM|}=\frac{2}{3}$　　D．$R\cdot r$ 的取值范围为 $\left(2,\frac{8}{3}\right]$

第II卷

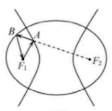
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13.已知 $A(1,1,0),B(0,3,0),C(2,2,2)$，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量的坐标是______.

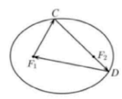
14.已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$，若 $S_3=13$，$a_1=1$，则 $\frac{a_3+a_4}{a_1+a_2}=$__________

15.已知两点 $M(-2,0)$，$N(2,0)$，若直线 $y=k(x-3)$ 上存在四个点 $P(i=1,2,3,4)$，使得 ΔMNP 是直角三角形，则实数 k 的取值范围是__________

16.从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点；从双曲线的一个焦点发出的光线，经过双曲线反射后，反射光线的反向延长线经过双曲线的另一个焦点．如图①，一个光学装置由有公共焦点 F_1，F_2 的椭圆 C 与双曲线 S 构成，现一光线从左焦点 F_1 发出，依次经 S 与 C 反射，又回到了点 F_1，历时 t_1 秒；若将装置中的 S 去掉，如图②，此光线从点 F_1 发出，经 C 两次反射后又回到了点 F_1，历时 t_2 秒．若 C 与 S 的离心率之比为 $2:3$，则 $\frac{t_2}{t_1}=$______.



图①



图②

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．第 17 题 10 分，其他每题 12 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（10 分）已知直线 $m:3x+4y+12=0$ 和圆 $C:x^2+y^2+2x-4y-4=0$．

(1)求与直线 m 垂直且经过圆心 C 的直线的方程；

(2)求与直线 m 平行且与圆 C 相切的直线的方程．

18.（12 分）S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.已知 $a_n>0$，$a_n^2+2a_n=4S_n+3$．

（I）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

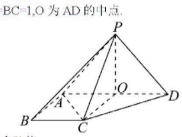
（II）设 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

19.（12 分）已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 经过点 $M\left(2,-2\sqrt{2}\right)$，直线 l 与抛物线相交于不同的 A、B 两点．

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)如果 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$，直线 l 是否过一定点，若过一定点，求出该定点；若不过一定点，试说明理由．

20.（12 分）如图,在四棱锥 P-ABCD 中,侧面 PAD⊥底面 ABCD,侧棱 PA=PD=$\sqrt{2}$,PA⊥PD,底面 ABCD 为直角梯形,其中 BC∥AD,AB⊥AD,AB=BC=1,O 为 AD 的中点.



(1)求直线 PB 与平面 POC 所成角的余弦值.

(2)线段 PD 上是否存在一点 Q,使得二面角 Q-AC-D 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$?若存在,求出 $\frac{PQ}{QD}$ 的值;若不存在,请说明理由.

21.（12 分）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公差 $d\neq 0$，且 $S_3+S_5=50$，a_1，a_4，a_{13} 成等比数列.

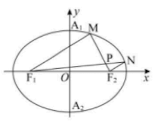
(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ 是首项为 1，公比为 3 的等比数列，

①求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n；

②若不等式 $\lambda T_n-S_n+2n^2\leq 0$ 对一切 $n\in\mathrm{N}^*$ 恒成立，求实数 λ 的最大值．

22.（12 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，上、下顶点分别为 A_1，A_2，且四边形 $A_1F_1A_2F_2$ 是面积为 8 的正方形．



(1)求 C 的标准方程；

(2)M，N 为 C 上且在 x 轴上方的两点，$MF_1//NF_2$，MF_2 与 NF_1 的交点为 P，试问 $|PF_1|+|PF_2|$ 是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由．