圆锥曲线部分二级定理的证明

以下均以焦点在x轴为例

弦长公式

$$
\begin{aligned}
|AB| &= \sqrt{1+k_{AB}^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} \\
&= \sqrt{1+\frac{1}{k_{AB}^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}
\end{aligned}
$$

证明：只证第一个

$$
\begin{aligned}
|AB| &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\
&= (x_1-x_2)\sqrt{1+\frac{(y_1-y_2)^2}{(x_1-x_2)^2}} \\
&= \sqrt{(x_1-x_2)^2}\sqrt{1+k_{AB}^2} \\
&= \sqrt{1+k_{AB}^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}
\end{aligned}
$$

$Q.E.D$

椭圆

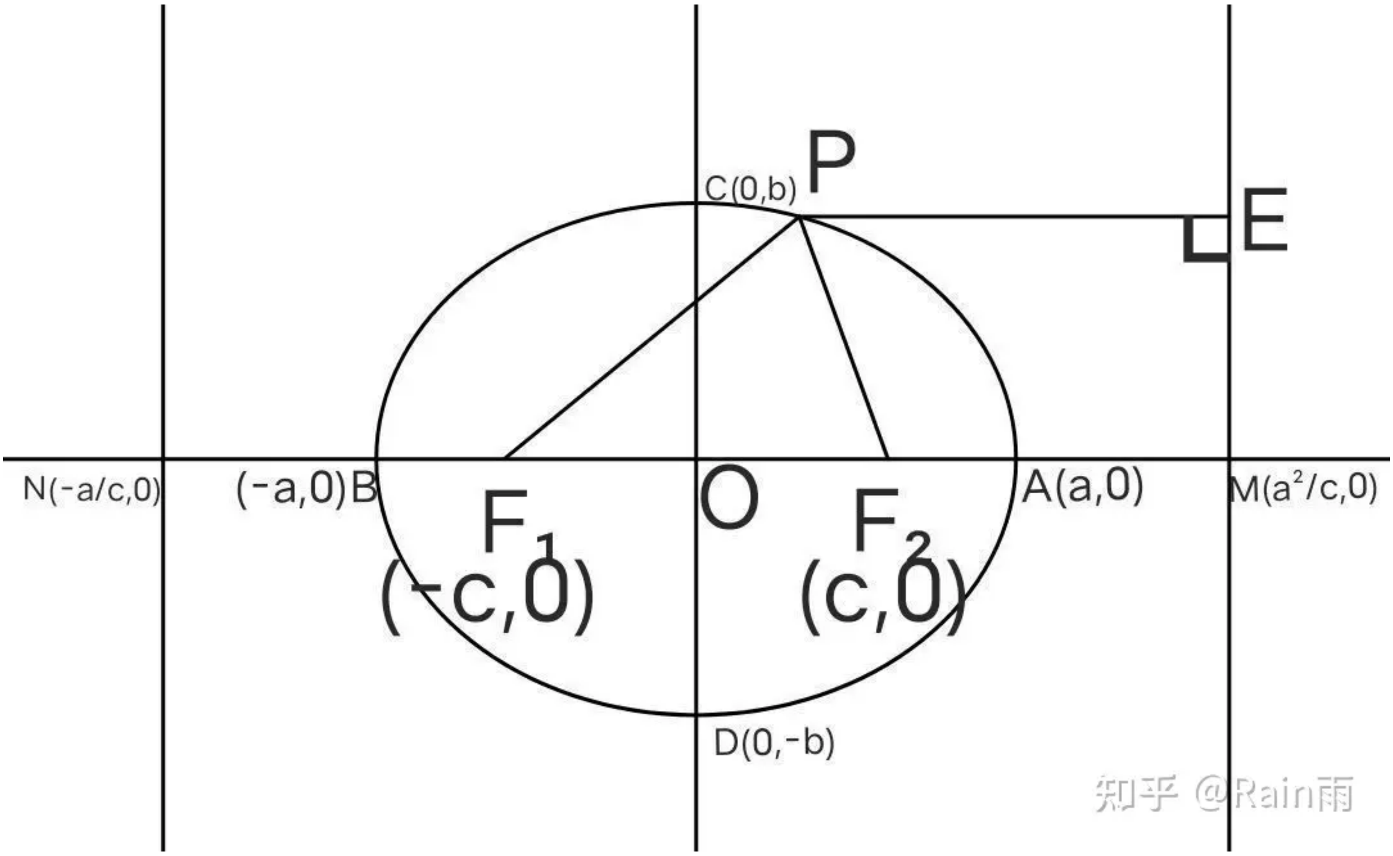


图1

第一定义：动点到两定点距离和为常数(2a)且大于两定点距离所有点集所成图形，即

$|PF_1|+|PF_2|=2a>2c$

第二定义：到定点距离与到定直线间距离之比为一个小于1的常值e(离心率)的点之轨迹，即（只用一边为例

$$\frac{|PF_2|}{|PE|}=e=\frac{c}{a}$$

第三定义：平面内的动点到两定点A,B的斜率乘积等于常数(e^2- 1)<0的点的轨迹，即

$$k_{PB}\cdot k_{PA}=e^2-1$$

标准方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$$

长轴：2a

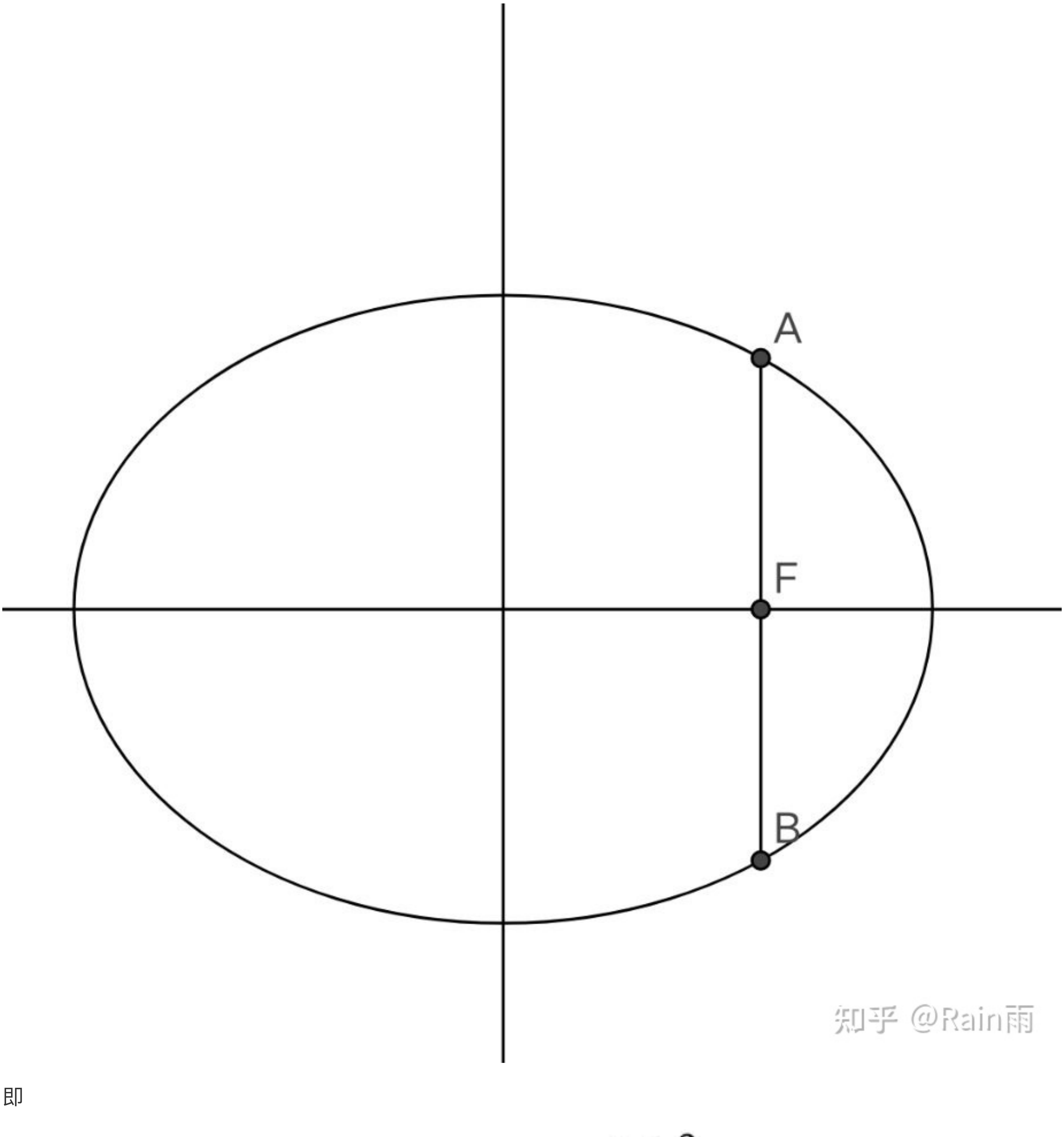
短轴：2b

焦距：2c

a,b,c关系：**$a^2=b^2+c^2$**

性质：

1.通经：过焦点且垂直于x轴的直线交椭圆于A,B点，|AB|即为通经



即

$$|AB|=\frac{2b^2}{a}$$

证明：

将x=c带入椭圆一般方程，求出y即可.

2.焦点三角形

①定义：两焦点与椭圆上一点所成三角形，如图1中△PF_1F_2

②周长：

C=$|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c$

③面积：

$$S=b^2\tan\frac{\alpha}{2}$$

证明：设$|PF_1|=m,|PF_2|=n$

$$(2c)^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha$$

$$4c^2 = (m+n)^2 - 2mn(1+\cos\alpha)$$

$$mn = \frac{(m+n)^2 - 4c^2}{2(1+\cos\alpha)} = \frac{2b^2}{1+\cos\alpha}$$

$$S = \frac{1}{2}mn\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2b^2}{1+\cos\alpha}\sin\alpha$$

$$= \frac{2b^2}{1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$= b^2\tan\frac{\alpha}{2}$$

$Q.E.D$

3.|AF|与|BF|数量关系

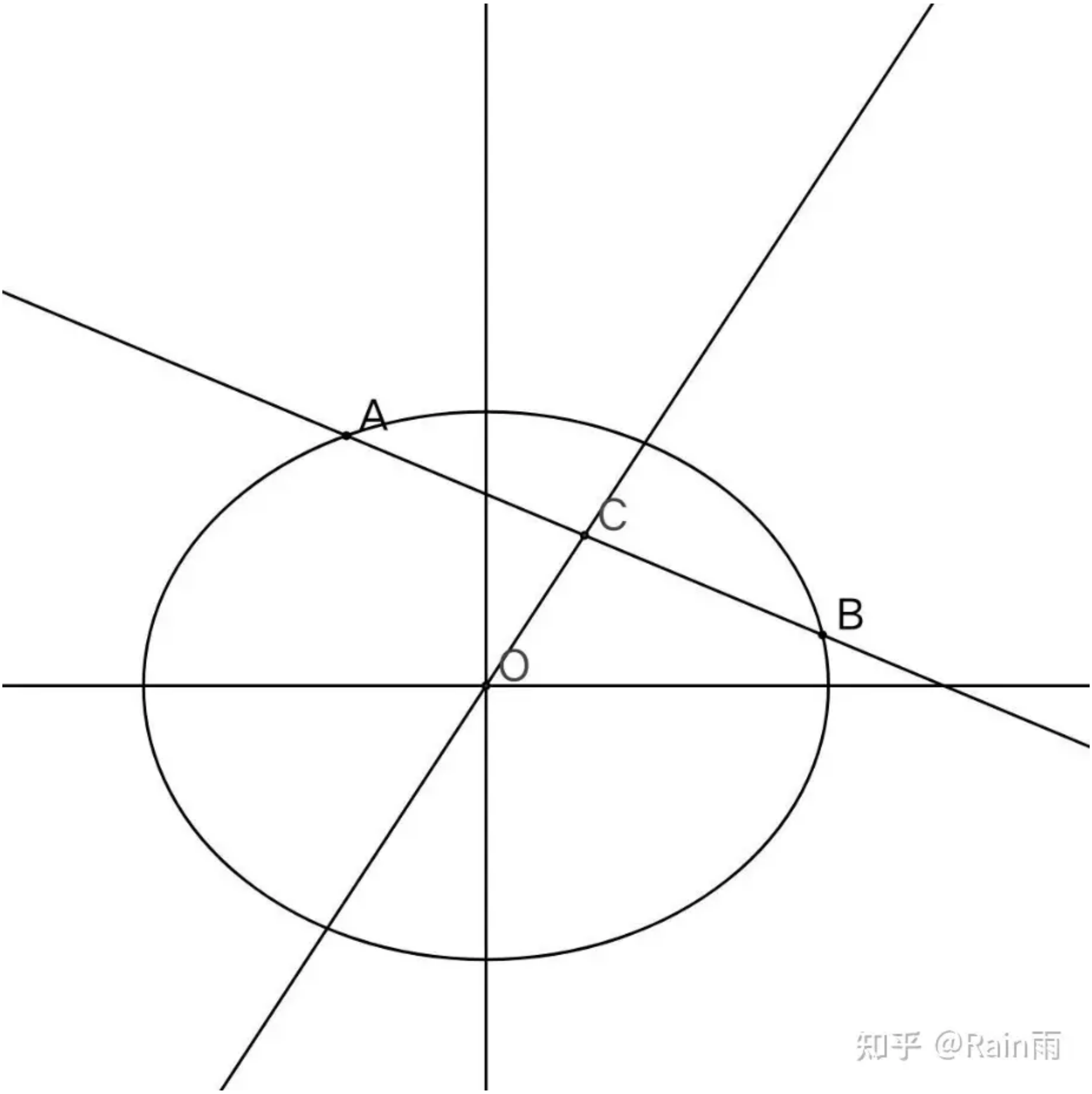
直线l过F点交椭圆于A,B两点，有

$$\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2a}{b^2}$$

4.焦半径r

r∈[a-c，a+c]

5.中点弦



记直线l交椭圆于A,B两点，C为线段AB中点，有

$$k_{AB} \cdot k_{OC} = e^2 - 1$$

证明：设C,A,B三点坐标分别为$(x_n,y_n)(n=0,1,2)$

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\ldots\ldots\boxed{1}$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\ldots\ldots\boxed{2}$$

$$\boxed{1}-\boxed{2}$$

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{k_{AB}\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}}{b^2}=0$$

$$\because x_0=\frac{x_1+x_2}{2},y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$$

$$\therefore k_{OC}=\frac{y_0}{x_0}$$

$$\therefore k_{AB}\cdot k_{OC}=-\frac{b^2}{a^2}=e^2-1$$

$$Q.E.D$$

点差法

6.若A,B在椭圆上，且A,B两点关于坐标原点对称，则异于A,B两点且在椭圆上的点P，有

$$k_{PA}\cdot k_{PB}=e^2-1$$

当A,B分别在椭圆长轴端点上时，为椭圆第三定义

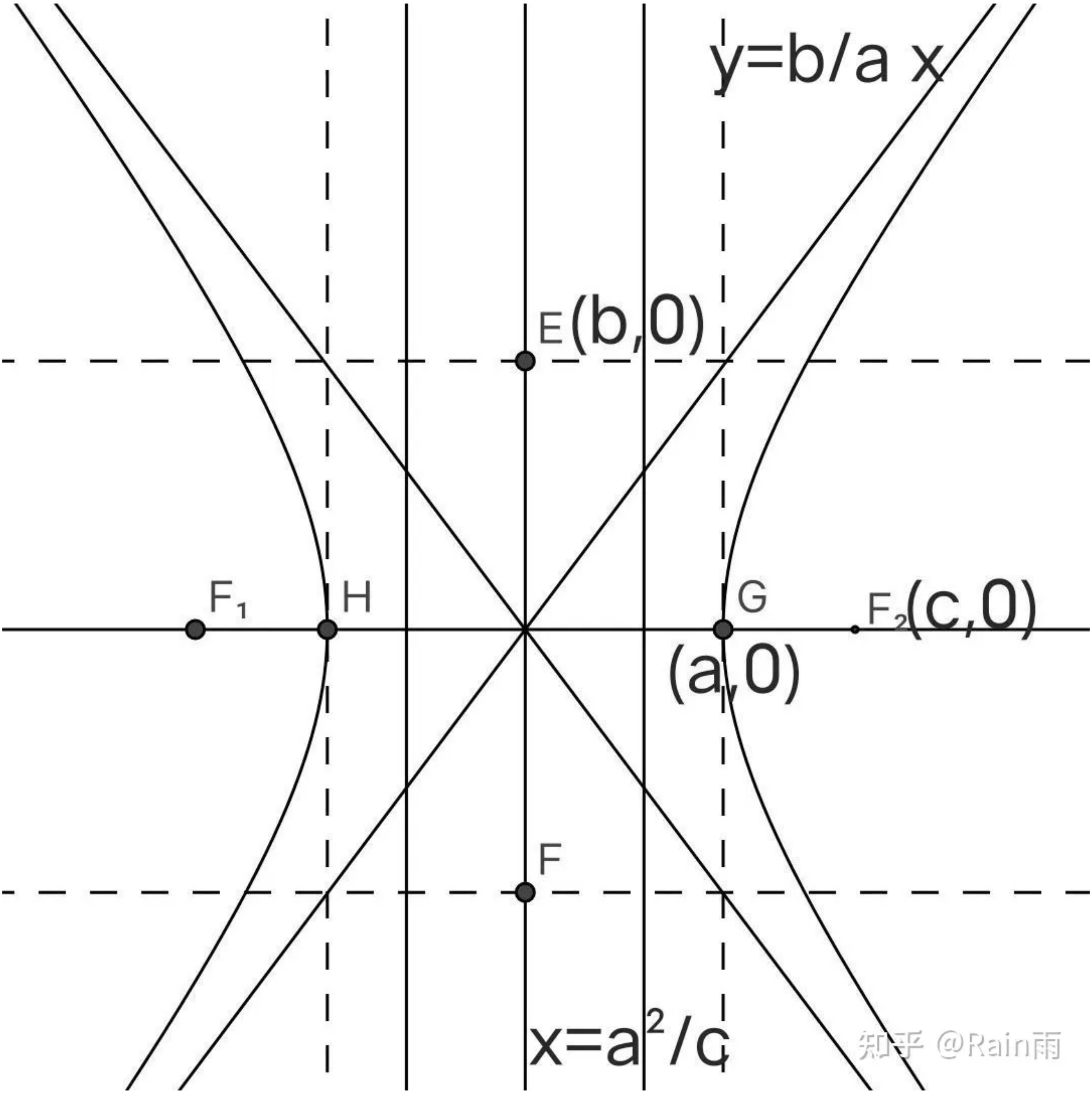
证明同第5点（点差法

7.切线方程

(x_0,y_0)在方程上

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

双曲线



第一定义：动点到两定点距离差的绝对值为常数(2a)且小于两定点距离所有点集所成图形，即

$||PF_1|-|PF_2||=2a<2c$

第二定义：到定点距离与到定直线间距离之比为一个大于1的常值e(离心率)的点之轨迹，即（同椭圆

$$\frac{|PF_1|}{|PE|}=e=\frac{c}{a}$$

第三定义：平面内的动点到两定点A,B的斜率乘积等于常数(e^2-1)>0的点的轨迹，即（同椭圆

标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$$

实轴：2a

虚轴：2b

焦距：2c

a,b,c关系：**$a^2+b^2=c^2$**

渐近线：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

性质：

1.通经

$$|AB|=\frac{2b^2}{a}$$

2.焦点三角形

①定义：两焦点与椭圆上一点所成三角形

②面积：（α同椭圆位置

$$S=b^2\cot\alpha$$

证明方法类似于椭圆.

3.共轭双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$
$$(a,b>0)$$

两双曲线互为共轭双曲线

性质：

①两个双曲线四个焦点共圆

②两双曲线离心率分别为e_1,e_2

$$\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=1$$

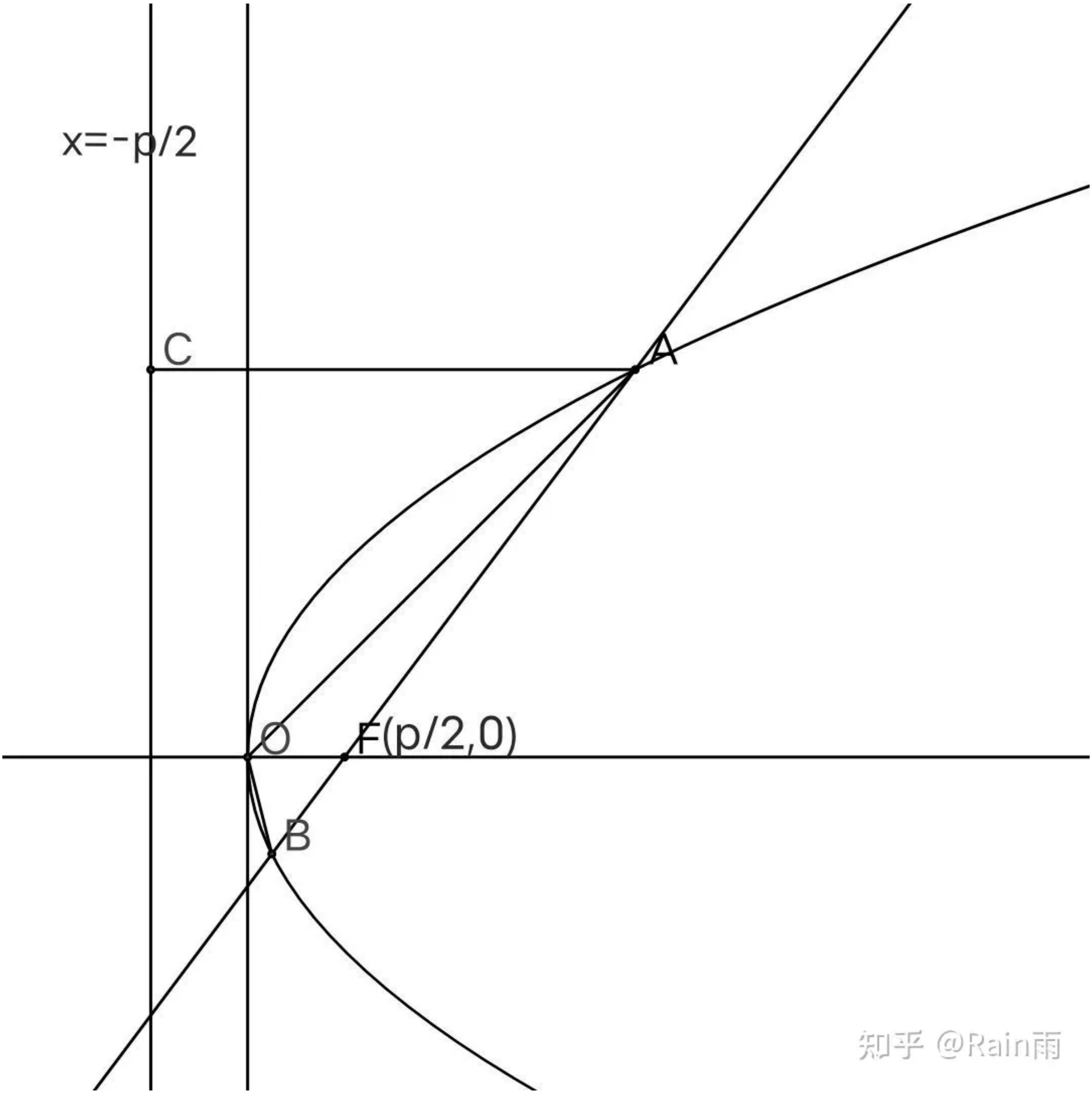
4.与渐近线平行的直线与双曲线仅有1个焦点.

5.切线方程

(x_0,y_0)在方程上

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$$

抛物线



定义：到定点距离与到定直线间距离之比为一个=1的常值的点之轨迹

离心率：e=1

标准方程：

$$y^2 = 2px(p > 0)$$

通经：**2p**

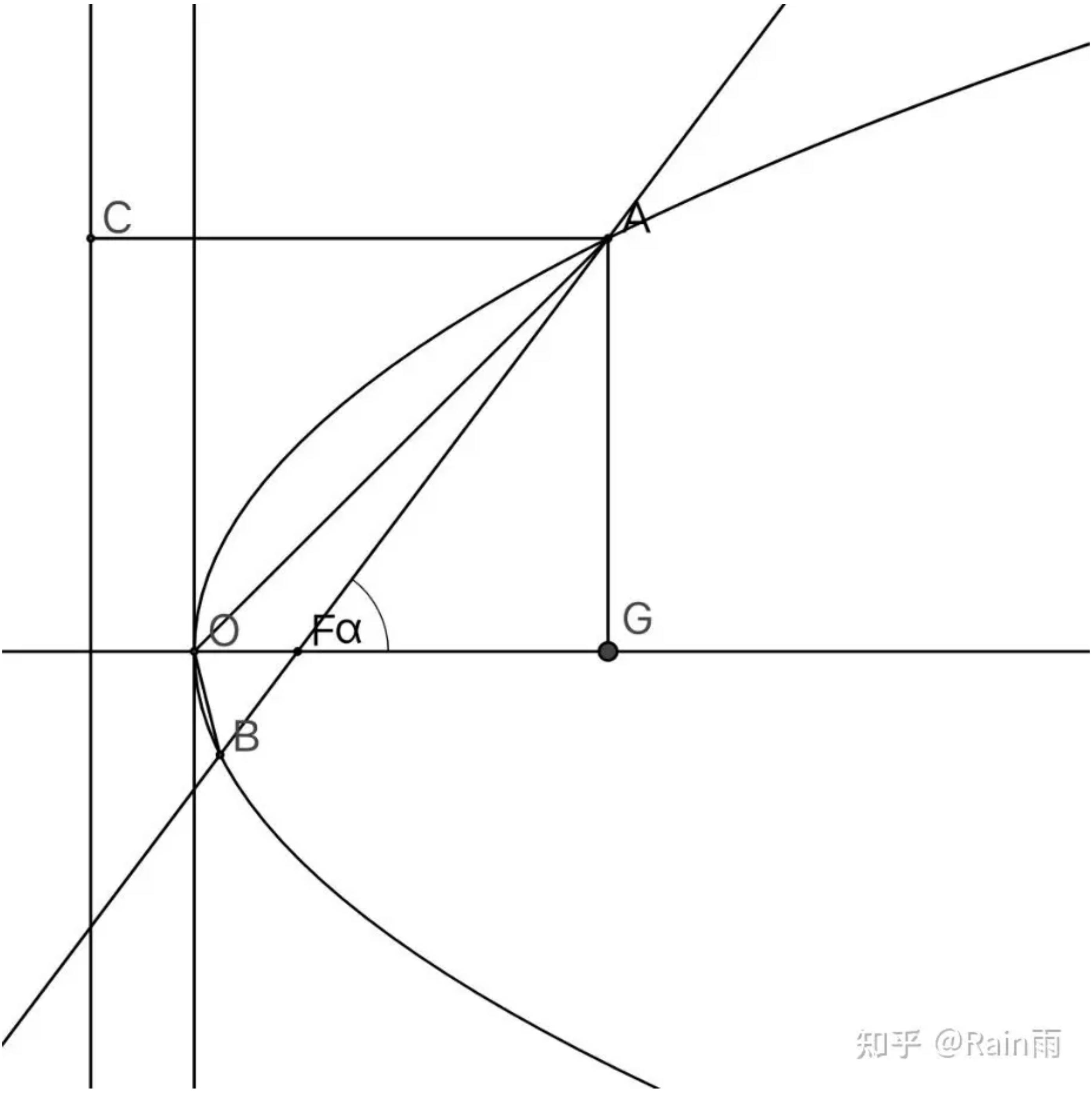
性质：

1.焦半径（α为直线AB倾斜角

$$|AF|=\frac{p}{1-\cos\alpha}$$

$$|BF|=\frac{p}{1+\cos\alpha}$$

证明：



$$\cos\alpha=\frac{|FG|}{|AF|}$$

$$|AF|=\frac{|FG|}{\cos\alpha}=|AC|=|GF|+p$$

$$\therefore |AF|=|AF|\cos\alpha+p$$

$$|AF|=\frac{p}{1-\cos\alpha}$$

|BF|同理可证

2.

$$|AB|=|AF|+|BF|=\frac{p}{1-\cos\alpha}+\frac{p}{1+\cos\alpha}=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$$

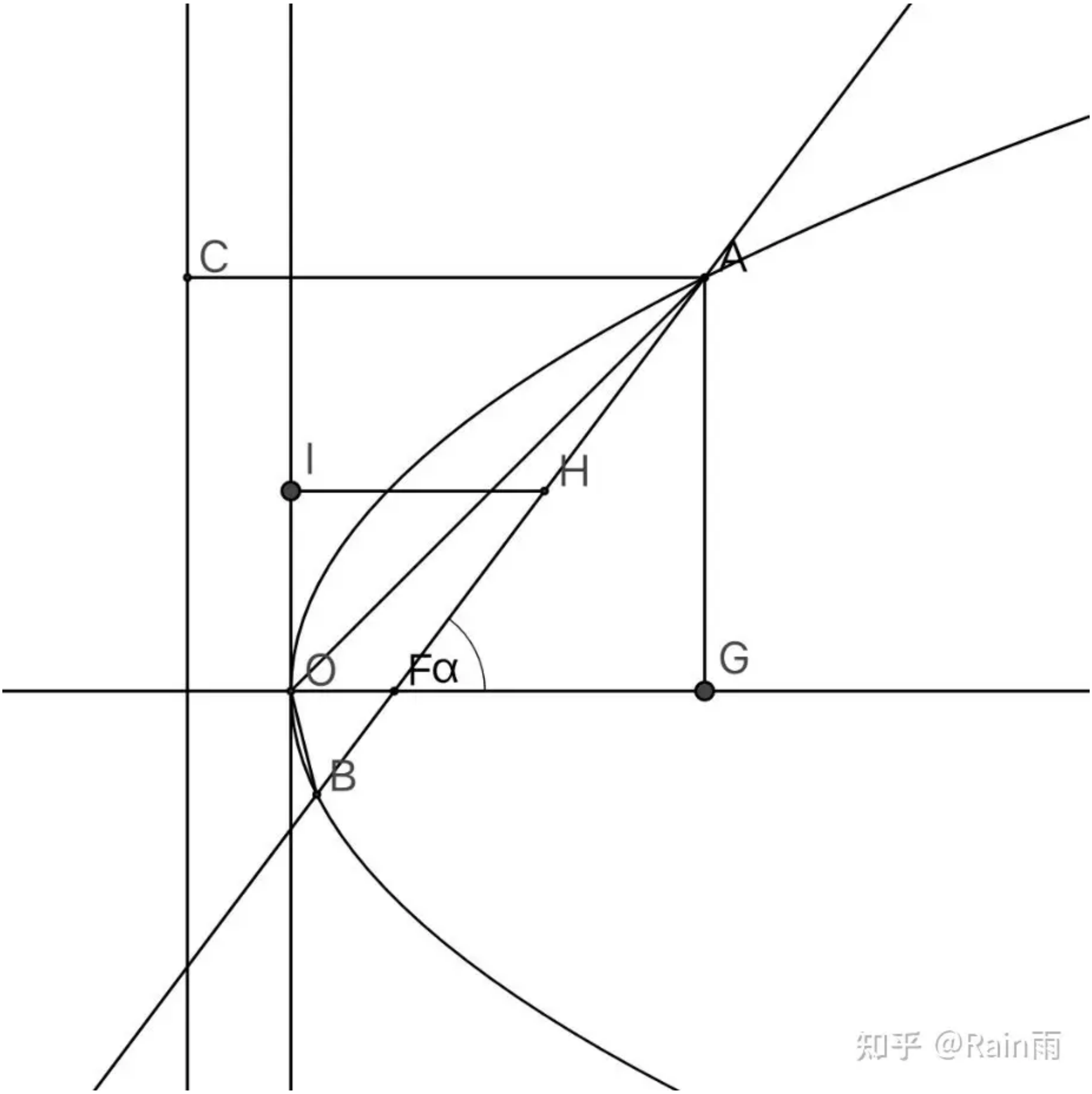
3.

$$S_{\triangle AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$$

懒得证明（doge）

4.

以AF为直径的圆与y轴相切



证明：设A($y_0^2/2p,y_0$)，H为AF中点，做HI⊥y

$$H\left(\frac{\frac{p}{2}+\frac{y_0^2}{2p}}{2},\frac{y_0}{2}\right)$$

$$H\left(\frac{y_0^2+p^2}{4p},\frac{y_0}{2}\right)$$

$$|HI|=\frac{y_0^2+p^2}{4p}$$

$$|AH|=|BH|=\frac{1}{2}|AC|=\frac{1}{2}\left(\frac{y_0^2+p^2}{2p}\right)=\frac{y_0^2+p^2}{4p}$$

$$Q.E.D$$

5.

过焦点的两条相互垂直的弦，其倒数和为

$$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{1}{2p}$$

证明：

$$\because AB \perp CD, |AB| = \frac{2p}{\sin^2\alpha}$$

$$\therefore |CD| = \frac{2p}{\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2p}{\cos^2\alpha}$$

$$\therefore \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|} = \frac{1}{2p}$$

6.

以焦点弦为直径的圆与准线相切

证明：

由梯形中位线显然.

二次曲线的一般方程

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

$$\triangle = B^2 - 4AC$$

如果判别式小于 0，则是椭圆或圆（A=B；如果大于 0，则是双曲线。

证明：

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

$$\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ 0 & C-\frac{B^2}{4A} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C-\frac{B^2}{4A} \\ 1 & -\frac{B}{2A} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ax^2+\left(C-\frac{B^2}{4A}\right)y^2+Dx+Ey+F=0$$

$$if\ C-\frac{B^2}{4A}=G$$

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2-\frac{D^2}{4A}+G\left(x+\frac{E}{2G}\right)^2-\frac{E^2}{4G}+F=0$$

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E^2}{4AG}-\frac{F}{A}}+\frac{\left(y+\frac{E}{2G}\right)^2}{\frac{D^2}{4AG}+\frac{E^2}{4G^2}-\frac{F}{G}}=1$$

$$\triangle=\left(\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E^2}{4AG}-\frac{F}{A}\right)\times\left(\frac{E^2}{4G^2}+\frac{D^2}{4AG}-\frac{F}{G}\right)=\frac{(AE-4AFG+D^2G)^2}{16A^3G^3}$$

$$\triangle>0$$

$$AG>0$$

$$AC-\frac{B^2}{4}>0$$

$$B^2-4AC<0$$

$$\triangle<0$$

$$B^2-4AC>0$$

焦半径通式

$$r=\frac{ep}{1\pm e\cos\alpha}$$

其中，e是离心率，α是倾斜角，p是焦准距

证明类似抛物线

蒙日圆

椭圆或双曲线上两条相互垂直的切线的交点的轨迹

椭圆的蒙日圆方程：$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

双曲线的蒙日圆方程：$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

特别地，抛物线的蒙日圆方程为准线

证明

（只证明椭圆）

$$x' = \frac{x}{a}, y' = \frac{y}{b}$$

$$\therefore C' = x'^2 + y'^2 = 1$$

$$\because k_1 k_2 = -1, k'_1 = \frac{a}{b} k_1, k_2 = \frac{a}{b} k_2$$

$$\therefore k'_1 k'_2 = -\frac{a^2}{b^2}$$

$$if\ P'(x_0, y_0)$$

$$l': y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$d = \frac{|kx_0 - y_0|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$$

$$(kx_0 - y_0)^2 = k^2 + 1$$

$$(x_0^2-1)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-1=0$$

$$k'_1k'_2=-\frac{a^2}{b^2}=\frac{y_0^2-1}{x_0^2-1}$$

$$\begin{cases}x=ax_0\\ y=by_0\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=a^2+b^2$$

一些些性质

蒙日圆上的点，到切点弦的距离为 d_1 ，原点到切点弦的距离为d_2,则两距离值之积为定值，即

$d_1d_2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

证明：算 算 算！

2.

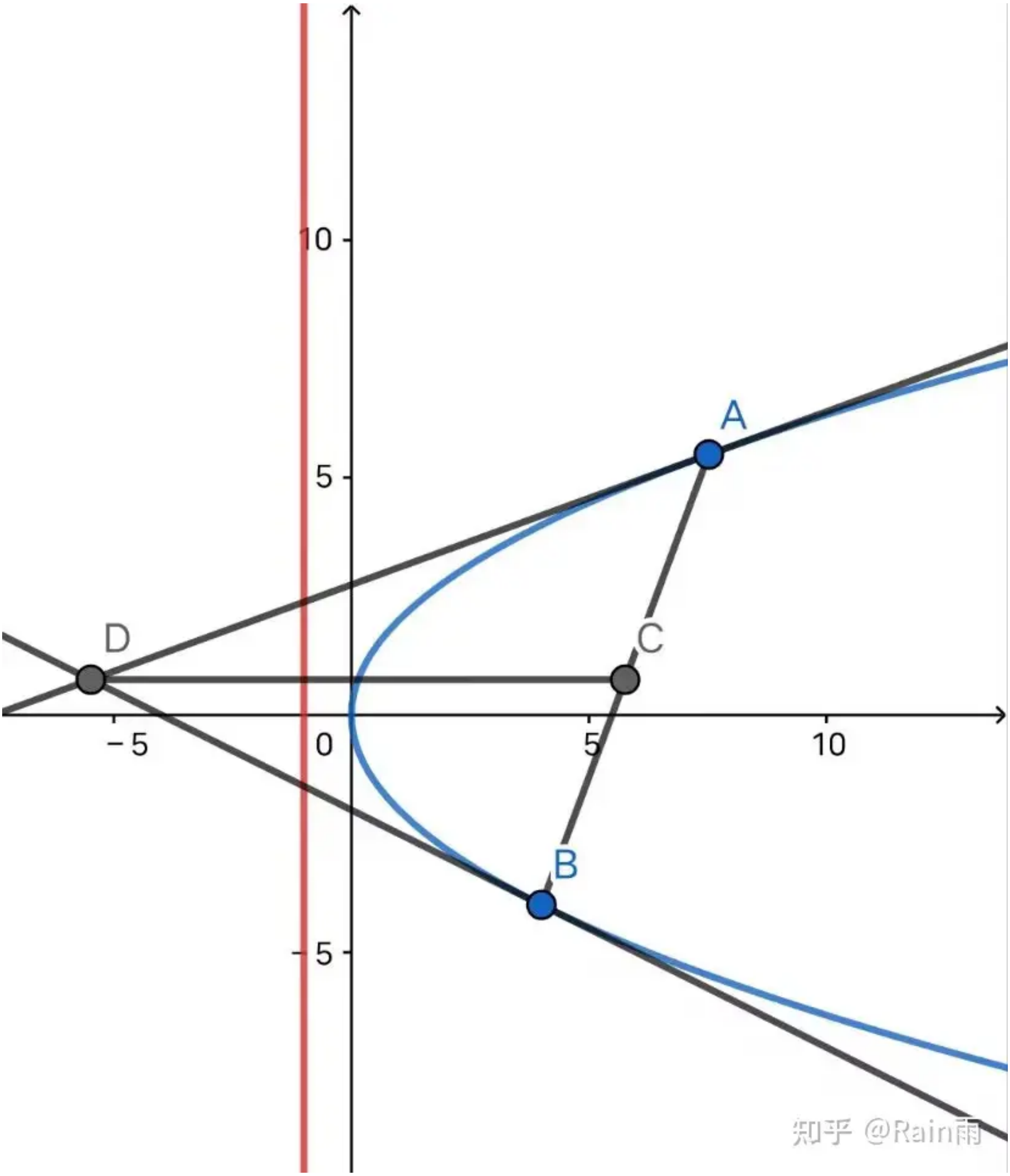
椭圆的任一切线交蒙日圆于A,B，则有

$k_{OA}\cdot k_{OB}=e^2-1$

阿基米德三角形

圆锥曲线的弦（底边）与过弦的端点的两条切线所围成的三角形叫阿基米德三角形

（下列只以焦点在x正半轴轴的抛物线为例子）



性质1

阿基米德三角形底边上的中线与抛物线对称轴平行

证明：

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D(x_3,y_3)$，$C(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1，y_2}{2})$

切线方程：$l_i:yy_i=p(x_i+x)$

当$i=1,2$联立得$y_3=\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}p$

点差法可得 $(y_1+y_2)(x_1+x_2)=2p(x_1-x_2)$

所以$y_3=\frac{y_1+y_2}{2}$

性质2

若阿基米德三角形的底边焦点，则其顶点在准线上

证明

由极线显然

性质3

若底边过焦点，则两切线垂直

证明

由蒙日圆显然

光学性质

椭圆的光学性质：从椭圆一个焦点发出的光线，经椭圆反射后，反射光都汇聚于椭圆的另一焦点上

双曲线的光学性质：从双曲线一个焦点发出的光线，经双曲线反射后，反射光的反向延长线都汇聚于双曲线的另一焦点上

抛物线的光学性质：从抛物线焦点发出的光线，经抛物线反射后，反射光都平行于抛物线的对称轴

参数方程与极坐标方程

参数方程

椭圆的参数方程 （为参数）$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}\quad(\theta\text{为参数})$

双曲线的参数方程 （为参数 $\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\tan\theta\end{cases}\quad(\theta\text{为参数})$

抛物线的参数方程 （为参数）$\begin{cases}x=2pt^2\\y=2pt\end{cases}\quad(t\text{为参数})$

极坐标方程

$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$,其中 e 是离心率， p 是焦准距

当 0<e<1 时，方程表示椭圆，此时 p 表示左焦点与左准线的距离

当 e=1 时，方程表示开口向右的抛物线

当 e>1 时，方程表示双曲线的右支，此时 p 表示右焦点与右准线的距离，若允许 $\rho < 0$，此时方程表示整个双曲线

圆锥曲线的由来

从几何观点来讲，用一个平面去割圆锥面得到的交线就称为圆锥曲线。

- 当平面与圆锥的母线平行，且不过圆锥顶点，结果为抛物线
- 当平面与圆锥的母线平行，且经过圆锥的顶点，结果为一条直线
- 当平面只与圆锥面的一侧相交，且不经过圆锥的顶点，结果为椭圆
- 当平面只与圆锥面一侧相交，且不经过圆锥的顶点，并与圆锥面的对称轴垂直结果为圆
- 当平面与圆锥两侧都相交，且经过圆锥的顶点，结果为一个点。
- 当平面与圆锥面两侧相交，且不过圆锥的顶点，结果为双曲线的一支（另一只为此圆锥面对顶圆锥面与平面的交线
- 当平面与圆锥面两侧都相交且过圆锥的顶点，结果为两条相交直线