

Бакалавры ИТ — 4 семестр
Вычислительная математика
Общее задание

Тема1. Решение нелинейных алгебраических уравнений

Реализуйте решение методом Ньютона и модифицированным методом Ньютона скалярного нелинейного алгебраического уравнения и системы нелинейных алгебраических уравнений.

1. Выполните задание из методического пособия [1].

2. Решите следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(x_1 x_2) - e^{-3x_3} + x_4 x_5^2 - x_6 - \sinh(2x_8) x_9 + 2x_{10} = -2.0004339741653854440, \\ \sin(x_1 x_2) + x_3 x_9 x_7 - e^{-x_{10} + x_6} + 3x_5^2 - x_6(x_8 + 1) = -10.886272036407019994, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 + x_9 - x_{10} = 3.1361904761904761904, \\ 2 \cos(-x_9 + x_4) + \frac{x_5}{x_3 + x_1} - \sin(x_2^2) + \cos^2(x_7 x_{10}) - x_8 = 0.1707472705022304757, \\ \sin(x_5) + 2x_8(x_3 + x_1) - e^{-x_7(-x_{10} + x_6)} + 2 \cos(x_2) - \frac{1}{x_4 - x_9} = 0.3685896273101277862, \\ e^{x_1 - x_4 - x_9} + \frac{x_5^2}{x_8} + \frac{1}{2} \cos(3x_{10} x_2) - x_6 x_3 = -2.0491086016771875115, \\ x_2^3 x_7 - \sin\left(\frac{x_{10}}{x_5} + x_8\right) + (x_1 - x_6) \cos(x_4) + x_3 = 0.7380430076202798014, \\ x_5(x_1 - 2x_6)^2 - 2 \sin(-x_9 + x_3) + 1.5x_4 - e^{x_2 x_7 + x_{10}} = -3.5668321989693809040, \\ \frac{7}{x_6} + e^{x_5 + x_4} - 2x_2 x_8 x_{10} x_7 + 3x_9 - 3x_1 = 8.4394734508383257499, \\ x_{10} x_1 + x_9 x_2 - x_8 x_3 + \sin(x_4 + x_5 + x_6) x_7 = 0.78238095238095238096. \end{array} \right.$$

Начальное приближение: $x^{(0)} = (0.5, 0.5, 1.5, -1.0, -0.5, 1.5, 0.5, -0.5, 1.5, -1.5)^T$.

- а) Решите методом Ньютона; посчитайте количество итераций и арифметических операций, затрачиваемых на решение линейных систем; засекийте время расчёта.
- б) Решите модифицированным методом Ньютона с матрицей Якоби, посчитанной в начальной точке (используйте LU разложение для решения СЛАУ!); посчитайте количество итераций и арифметических операций, затрачиваемых на решение линейных систем; засекийте время расчёта.

- с) Реализуйте возможность перехода к модифицированному методу Ньютона после k итераций полным методом; поэкспериментируйте, найдите оптимальное с точки зрения времени счёта количество итераций полным методом; подумайте, можно ли как-то автоматизировать переход на модифицированный метод Ньютона.
- д) Реализуйте «гибридный» вариант, при котором матрица Якоби пересчитывается не каждый раз, а каждые k итераций; посмотрите, как меняется общее число итераций и затраты.
- е) Возьмите $x_5^{(0)} = -0.2$. Посмотрите на результаты работы методов (обратите дополнительное внимание на случай из пункта с) при $k < 8$, $k = 8$ и $k > 8$).

Литература:

1. Иванов А. П. Методические указания к вычислительному практикуму. Тема 4: Метод Ньютона решения нелинейных уравнений и систем уравнений.
// <http://www.apmath.spbu.ru/ru/structure/depts/is/>
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. 1978 г. 512 с.
3. Вержбицкий В. М. Основы численных методов: Учебник для вузов — М.: Высш. шк., 2002.

Приложение. Матрица Якоби системы

$$\begin{aligned}
J_{11} &= -\sin(x_1 x_2) x_2, J_{12} = -\sin(x_1 x_2) x_1, J_{13} = 3e^{-3x_3}, J_{14} = x_5^2, J_{15} = 2x_4 x_5, J_{16} = -1, \\
J_{17} &= 0, J_{18} = -2 \cosh(2x_8) x_9, J_{19} = -\sinh(2x_8), J_{1,10} = 2, \\
J_{21} &= \cos(x_1 x_2) x_2, J_{22} = \cos(x_1 x_2) x_1, J_{23} = x_9 x_7, J_{24} = 0, J_{25} = 6x_5, J_{26} = -e^{-x_{10}+x_6} - \\
&x_8 - 1, J_{27} = x_3 x_9, J_{28} = -x_6, J_{29} = x_3 x_7, J_{2,10} = e^{-x_{10}+x_6}, \\
J_{31} &= 1, J_{32} = -1, J_{33} = 1, J_{34} = -1, J_{35} = 1, J_{36} = -1, J_{37} = 1, J_{38} = -1, J_{39} = 1, \\
J_{3,10} &= -1, \\
J_{41} &= -\frac{x_5}{(x_3+x_1)^2}, J_{42} = -2 \cos(x_2^2) x_2, J_{43} = -\frac{x_5}{(x_3+x_1)^2}, J_{44} = -2 \sin(-x_9 + x_4), J_{45} = \\
&(x_3 + x_1)^{-1}, J_{46} = 0, J_{47} = -2 \cos(x_7 x_{10}) \sin(x_7 x_{10}) x_{10}, J_{48} = -1, J_{49} = 2 \sin(-x_9 + x_4), \\
J_{4,10} &= -2 \cos(x_7 x_{10}) \sin(x_7 x_{10}) x_7, \\
J_{51} &= 2x_8, J_{52} = -2 \sin(x_2), J_{53} = 2x_8, J_{54} = (-x_9 + x_4)^{-2}, J_{55} = \cos(x_5), J_{56} = \\
&x_7 e^{-x_7(-x_{10}+x_6)}, J_{57} = -(x_{10} - x_6) e^{-x_7(-x_{10}+x_6)}, J_{58} = 2x_3 + 2x_1, J_{59} = -(-x_9 + x_4)^{-2}, J_{5,10} = \\
&-x_7 e^{-x_7(-x_{10}+x_6)}, \\
J_{61} &= e^{x_1-x_4-x_9}, J_{62} = -3/2 \sin(3x_{10}x_2) x_{10}, J_{63} = -x_6, J_{64} = -e^{x_1-x_4-x_9}, J_{65} = 2\frac{x_5}{x_8}, \\
J_{66} &= -x_3, J_{67} = 0, J_{68} = -\frac{x_5^2}{x_8^2}, J_{69} = -e^{x_1-x_4-x_9}, J_{6,10} = -3/2 \sin(3x_{10}x_2) x_2, \\
J_{71} &= \cos(x_4), J_{72} = 3x_2^2 x_7, J_{73} = 1, J_{74} = -(x_1 - x_6) \sin(x_4), J_{75} = \cos\left(\frac{x_{10}}{x_5} + x_8\right) x_{10} x_5^{-2}, \\
J_{76} &= -\cos(x_4), J_{77} = x_2^3, J_{78} = -\cos\left(\frac{x_{10}}{x_5} + x_8\right), J_{79} = 0, J_{7,10} = -\cos\left(\frac{x_{10}}{x_5} + x_8\right) x_5^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{81} &= 2x_5(x_1 - 2x_6), \quad J_{82} = -x_7 e^{x_2 x_7 + x_{10}}, \quad J_{83} = -2 \cos(-x_9 + x_3), \quad J_{84} = 1.5, \quad J_{85} = \\
&(x_1 - 2x_6)^2, \quad J_{86} = -4x_5(x_1 - 2x_6), \quad J_{87} = -x_2 e^{x_2 x_7 + x_{10}}, \quad J_{88} = 0, \quad J_{89} = 2 \cos(-x_9 + x_3), \\
J_{8,10} &= -e^{x_2 x_7 + x_{10}}, \\
J_{91} &= -3, \quad J_{92} = -2x_8 x_{10} x_7, \quad J_{93} = 0, \quad J_{94} = e^{x_5 + x_4}, \quad J_{95} = e^{x_5 + x_4}, \quad J_{96} = -7x_6^{-2}, \quad J_{97} = \\
&-2x_2 x_8 x_{10}, \quad J_{98} = -2x_2 x_{10} x_7, \quad J_{99} = 3, \quad J_{9,10} = -2x_2 x_8 x_7, \\
J_{10,1} &= x_{10}, \quad J_{10,2} = x_9, \quad J_{10,3} = -x_8, \quad J_{10,4} = \cos(x_4 + x_5 + x_6) x_7, \quad J_{10,5} = \cos(x_4 + x_5 + x_6) x_7, \\
J_{10,6} &= \cos(x_4 + x_5 + x_6) x_7, \quad J_{10,7} = \sin(x_4 + x_5 + x_6), \quad J_{10,8} = -x_3, \quad J_{10,9} = x_2, \quad J_{10,10} = x_1.
\end{aligned}$$