(「有理ホモトピー論入門」の続き)

§5. Calculations

§5.1 Main theorem

Def 5.1.1

X, Y: 0-conn. top. sp. $f: X \to Y$

$m: (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(X)$

$n: (\Lambda W, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(Y)$: Sullivan models

に対し、下図の φ を

Sullivan representative for f (w.r.t. m, n)

という。

$$\begin{tikzcd} A_{PL}(Y) \arrow[r, "f^*"] & A_{PL}(X) \\ \Lambda W \arrow[u, "\simeq", "n"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[ur, phantom, "\curvearrowleft h"] & \Lambda V \arrow[u, "\simeq", "m"'] \end{tikzcd}$$

(Cor 4.3.7 より存在, unique up to homotopy)

Thm 5.1.2

$F \to E \xrightarrow{\pi} B$: fibration

with
- $H^*(F;\mathbb{k})$: fin. type$/\mathbb{k}$
- B: 1-conn., E: 0-conn.

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

$f: X \to B$ with X: 0-conn.

とし、右図の pullback を考える

さらに、下図(*)のような Sullivan models と Sullivan representatives が given とする:

$$(*)\quad \begin{tikzcd} A_{PL}(X) & A_{PL}(B) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[r, "\pi^*"] & A_{PL}(E) \\ (\Lambda V_X, d) \arrow[u, "\simeq", "m_X"'] & (\Lambda V_B, d) \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[u, "\simeq", "m_B"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[ul, phantom, "\curvearrowleft h"] \arrow[ur, phantom, "\curvearrowleft h"] & (\Lambda V_E, d) \arrow[u, "\simeq", "m_E"'] \end{tikzcd}$$

Then

$\exists \theta: (\Lambda V_X, d) \otimes_{\Lambda V_B} (\Lambda V_B \otimes \Lambda W, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(f^*E)$: quasi-isom of cdga

(where $n: (\Lambda V_B \otimes \Lambda W, d) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda V_E, d)$: rel. Sullivan model for ψ)

proof

Prop 4.4.5 より、

n: semifree resol$/(\Lambda V_B, d)$ of $(\Lambda V_E, d)$

なので、

$$H((\Lambda V_X, d) \otimes_{\Lambda V_B} (\Lambda V_B \otimes \Lambda W, d)) = \mathrm{Tor}_{\Lambda V_B}((\Lambda V_X, d), (\Lambda V_E, d))$$

である。

ここで、簡単のため(*)が strict に commutative であると仮定すると、Prop 3.3.3 より、

$\mathrm{Tor}_{m_B}(m_X, m_E)$: $\mathrm{Tor}_{\Lambda V_B}(\Lambda V_X, \Lambda V_E) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Tor}_{A_{PL}(B)}(A_{PL}(X), A_{PL}(E))$: isom

さらに、Cor 3.4.3 (Eilenberg-Moore) より、

$$\mathrm{Tor}_{A_{PL}(B)}(A_{PL}(X), A_{PL}(E)) \xrightarrow{\cong} H^*(f^*E)$$

よって

$$\mathrm{Tor}_{\Lambda V_B}(\Lambda V_X, \Lambda V_E) \xrightarrow{\cong} H^*(f^*E)$$

(本当は、これが cdga hom が induce するものであることを check する必要がある)

//

Exercise 5.1.3

(*)が homotopy commutative のときに Thm 5.1.2 を示せ。

Hint $\varphi_0 \simeq \varphi_1 : (B, d) \to (C, d)$: cdga hom

$m_i: (B \otimes \Lambda V_i, d) \xrightarrow{\simeq} (C, d)$: rel. Sullivan model for φ_i

$\Rightarrow (B \otimes \Lambda V_0, d) \simeq (B \otimes \Lambda V_1, d)$: homotopy equiv. rel. B

Rmk 5.1.4

- Thm 5.1.2 において、ψ の代わりに (or と同時に) φ の rel. Sullivan model をとってもよい。
- Thm 5.1.2 を使って f, π の Sullivan representative の情報だけで、$H^*(f^*E)$ が計算できる。

§5.2 Example

Prop 5.2.1

$n = 1, 2, 4$ に対し、

$p_n : S^{4n-1} \longrightarrow S^{2n}$: Hopf fibration

とすると、p_n の Sullivan representative として

$$\varphi_n : (\Lambda(v, w), d) \longrightarrow (\Lambda(u), 0)$$
$$v \longmapsto 0$$
$$w \longmapsto u$$

where

- $(\Lambda(v, w), d)$: Sullivan model for S^{2n}
  $\begin{cases} |v| = 2n, & |w| = 4n-1, \\ dv = 0, & dw = v^2 \end{cases}$
- $(\Lambda(u), d)$: Sullivan model for S^{4n-1}
  $|u| = 4n-1, \ du = 0.$

がとれる.

proof Cor 4.3.7 より Sullivan representative φ' が存在。このとき、degree reason より

$$\varphi' : v \longmapsto 0$$
$$w \longmapsto \lambda u \quad (\exists \lambda \in \mathbb{K})$$

ここで、Thm 4.3.11 より下図が書ける：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}w & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_{4n-1} S^{2n}, \mathbb{K}) \\ \downarrow Q\varphi' & \circlearrowleft & \downarrow (\pi_{4n-1} p_n)^* \\ \mathbb{K}u & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_{4n-1} S^{4n-1}, \mathbb{K}) \end{array}$$

さらに、

$(\pi_{4n-1} p_n)^*$: isom

($\because$ p_n のとり方より)

なので、

$Q\varphi'$: isom

よって

$\lambda \neq 0$

$\rightsquigarrow$ u のとり方をかえれば、$\lambda = 1$ にできる.

//

Rmk 5.2.2

一般の $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対しても、

$[p_n] \in \pi_{4n-1}(S^{2n})$: generator of free part

とすれば同様のことが言える

Prop 5.2.3

Prop 5.2.1 の φ_n の rel. Sullivan model は

$$m_n : (\Lambda(v, w) \otimes \Lambda(y), d) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda(u), 0)$$
$$v, y \longmapsto 0.$$
$$w \longmapsto u$$

(where
$|y| = 2n-1, \ dy = v$)

proof

- rel. Sullivan alg. であることと
- $\Lambda(v, w)$ 上で φ_n に一致すること

は明らか.

m_n : quasi-isom なのは

$$(E(a), d) \otimes (\Lambda(b), 0) \xrightarrow{\cong} (\Lambda(v, w) \otimes \Lambda(y), d) \quad : \text{isom}$$
$$a \longmapsto y$$
$$da \longmapsto v$$
$$b \longmapsto w - vy$$

where

- $(E(a), d) = (\Lambda(a, da), d)$: contractible alg
  $|a| = 2n-1$
- $|b| = 4n-1$

から分かる.

Rmk 5.2.4

気持ちとしては、$v = dy$ によって v と y が対になって消えている感じ

//

Prop 5.2.5

$f : S^2 \times S^2 \longrightarrow S^2 \wedge S^2 = S^4$ とし、右図の pullback により X を定める。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & S^7 \arrow[d, "p_2"] \\ S^2 \times S^2 \arrow[r, "f"] & S^4 \end{tikzcd}$$

Then

X の min. Sullivan model は

$(\Lambda(a, b, x, y, z), d)$

(where
- $|a| = |b| = 2$, $|x| = |y| = |z| = 3$
- $da = db = 0$, $dx = a^2$, $dy = ab$, $dz = b^2$)

proof

$S^2 \times S^2$ の Sullivan model として

$(\Lambda(a, b, x, z), d) = (\Lambda(a, x), d) \otimes (\Lambda(b, z), d)$

(where $|a| = |b| = 2$, $|x| = |z| = 3$, $dx = a^2$, $dz = b^2$.)

がとれる。

これについての f の Sullivan representative は、

$$\begin{aligned} \varphi : (\Lambda(v, w), d) &\longrightarrow (\Lambda(a, b, x, z), d) \\ v &\longmapsto ab \\ w &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

(∵ f は基本類を保つので、

$\varphi(v) = ab$.

(本当は modulo $\overset{dx}{a^2}, \overset{dz}{b^2}$ だから、もう少し議論が要るけど…)

degree reason より

$\varphi(w) = 0$.)

よって、Thm 5.1.2 と Prop 5.2.1, Prop 5.2.3 より

X の Sullivan model として

$(\Lambda(a, b, x, z), d) \otimes_{\Lambda(v, w)} (\Lambda(v, w) \otimes \Lambda(y), d)$

$\cong (\Lambda(a, b, x, z, y), d)$

がとれる。このとき、tensor のとり方から、

$dy = \varphi(v) = ab$

である。

//

↪ Example 4.1.8 の幾何的実現

§5.3 Loop spaces

以下,

X : 1-conn. top. sp. with $H^*(X;\mathbb{K})$: fin. type$/\mathbb{K}$

とする

Def 5.3.1

- $X^I := \{\gamma : I \to X : \text{conti.}\}$ cpt-open top. により top. sp.
- $LX := \{\gamma : I \to X \mid \gamma(0)=\gamma(1)\} \underset{\text{subsp.}}{<} X^I$: free loop space
- $\Omega X = \Omega(X,x_0) = \{\gamma : I \to X \mid \gamma(0)=\gamma(1)=x_0\} < X^I$ (where $x_0 \in X$: fix) : (based) loop space

Prop 5.3.2

(1) 右図のような fibration の pullback がある.

$$\begin{tikzcd} LX \arrow[r] \arrow[d, "ev_0"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X^I \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "\Delta"] & X\times X \end{tikzcd}$$

(where
$p : X^I \to X\times X$, $\gamma \mapsto (\gamma(0),\gamma(1))$
$\Delta : X \to X\times X$, $x \mapsto (x,x)$)

(2) $c : X \xrightarrow{\simeq} X^I$, $x \mapsto$ (const. path at x) : homotopy equiv.

さらに, 右図は可換

$$\begin{tikzcd} X^I \arrow[d, "p"'] & X \arrow[l, "\simeq"', "c"] \arrow[dl, "\Delta"] \\ X\times X & \end{tikzcd}$$

proof 明らか. //

この pullback に Thm5.1.2 を適用したい.

$m : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(X)$: min. Sullivan model for X

とする

Prop 5.3.3

(1) $\exists m' : (\Lambda V, d)^{\otimes 2} \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(X\times X)$: min. Sullivan model

(2) $\mu : (\Lambda V, d)^{\otimes 2} \longrightarrow (\Lambda V, d)$: multiplication は Δ, p 両方の Sullivan representative になっている

proof (1) Künneth thm.

(2) Δ の Sullivan rep. になっているのは, $A_{PL}(X)$ における積が

$$A_{PL}(X)^{\otimes 2} \xrightarrow[\simeq]{\times} A_{PL}(X\times X) \xrightarrow{\Delta^*} A_{PL}(X)$$
$$a\otimes b \longmapsto pr_1^* a \otimes pr_2^* b$$

と書けることから分かる.

p は up to homotopy で Δ と思えるので, p についても ok. //

Prop 5.3.4

$(\Lambda V^{\otimes 2}\otimes \Lambda W, d) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda V, d)$: rel. Sullivan model for μ

とすると,

$(\Lambda V, d) \otimes_{\Lambda V^{\otimes 2}} (\Lambda V^{\otimes 2}\otimes \Lambda W, d) \xrightarrow[\exists]{\simeq} A_{PL}(LX)$: quasi-isom of cdga

proof Prop5.3.2 (1) の pullback に Thm5.1.2 を適用すればよい. //

よって, μ の rel. Sullivan model さえ記述できれば $H^*(LX)$ が計算できる.

以下の議論は詳細までやろうとすると結構大変なので, 概略のみ記す.

Def & Prop 5.3.5

$(\Lambda V^{\otimes 2}\otimes\Lambda\bar V, d)$: rel. Sullivan alg $/(\Lambda V,d)^{\otimes 2}$ を

- $\bar V^n := V^{n+1}$, $\bar v \longleftrightarrow v$
- $\bar v\in\bar V$ に対し、

各vに対し有限和になる

$$d\bar v := 1\otimes v - v\otimes 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s'd)^n}{n!}(v\otimes 1)$$

where $s' : \Lambda V^{\otimes 2}\otimes\Lambda\bar V \longrightarrow \Lambda V^{\otimes 2}\otimes\Lambda\bar V$: derivation of deg(−1)

$v\otimes 1 \longmapsto \bar v$

$1\otimes v \longmapsto \bar v$

$\bar v \longmapsto 0$

により定める(ことができる)

($\Lambda V^{\otimes 2}\otimes\Lambda\bar V = \Lambda V\otimes\Lambda V\otimes\Lambda\bar V$ の元 $v\otimes 1\otimes 1$, $1\otimes v\otimes 1$, $1\otimes 1\otimes\bar v$ をそれぞれ $v\otimes 1$, $1\otimes v$, $\bar v$ と略記した)

Prop 5.3.6

$\mu : (\Lambda V^{\otimes 2}\otimes\Lambda\bar V, d) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda V, d)$

$v\otimes 1 \longmapsto v$

$1\otimes v \longmapsto v$

$\bar v \longmapsto 0$

: rel. Sullivan model for μ

Prop 5.3.7

$(\Lambda V\otimes\Lambda\bar V, d) := (\Lambda V, d)\otimes_{\Lambda V^{\otimes 2}}(\Lambda V^{\otimes 2}\otimes\Lambda\bar V, d)$

の differential は、次のようにして記述できる:

$s : \Lambda V\otimes\Lambda\bar V \longrightarrow \Lambda V\otimes\Lambda\bar V$: derivation of deg (−1)

$v \longmapsto \bar v$

$\bar v \longmapsto 0$

について、

$$ds = -sd$$

が成立。

(とくに、$d\bar v = dsv = -sdv$)

以上のまとめとして次を得る:

Thm 5.3.8

X : 1-conn. top. sp. with $H^*(X;\mathbb{K})$: fin. type$/\mathbb{K}$

$(\Lambda V, d)$: min. Sullivan model for X

に対し、

$(\Lambda V\otimes\Lambda\bar V, d)$: rel. Sullivan alg$/(\Lambda V, d)$

を

$d\bar v := -s\,dv$ (where s : Prop 5.3.7 のもの)

と定めると、

$(\Lambda V\otimes\Lambda\bar V, d)$: min. Sullivan model for LX

である

Cor 5.3.9

Thm 5.3.8 の状況で、

$(\Lambda\bar V, 0)$: min. Sullivan model for ΩX

proof

右の pullback に Thm 5.1.2, Thm 5.3.8 を使えばよい。

$$\begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & LX \arrow[d] \\ pt \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

//

Example 5.3.10

$H^*(LS^k)$ を計算する。

(1) $k = 2n+1$: odd のとき

$(\Lambda V, d) = (\Lambda x, 0)$ $(|x| = 2n+1)$

$(\Lambda V\otimes\Lambda\bar V, d) = (\Lambda(x,\bar x), d)$ $(|\bar x| = 2n)$

$dx = 0$, $d\bar x = -s\,dx = 0$

よって、

$$H^*(LS^{2n+1}) \cong H(\Lambda(x,\bar x), 0) \cong \Lambda(x,\bar x)$$

$$\cong H^*(S^{2n+1})\otimes H^*(\Omega S^{2n+1})$$

(2) $k = 2n$: even のとき

$(\Lambda V, d) = (\Lambda(x,y), d)$ $\left(\begin{array}{l}|x| = 2n,\ |y| = 4n-1,\\ dx = 0,\ dy = x^2\end{array}\right)$

$(\Lambda V\otimes\Lambda\bar V, d) = (\Lambda(x,y,\bar x,\bar y), d)$

$$\begin{cases} dx = 0,\ dy = x^2,\ d\bar x = -s\,dx = 0 \\ d\bar y = -s\,dy = -s(x^2) = -2x\bar x \end{cases}$$

よって、$\mathbb{K}$-vect. sp. として

$$H^*(LS^{2n}) \cong \mathbb{K}\{1, [x], [\bar x\bar y^q], [x\bar y^{q+1} + 2(q+1)y\bar x\bar y^q]\}$$

(degree 0, $2n$, $2n-1+q(4n-2)$, $2n+(q+1)(4n-2)$)

$$\not\cong H^*(S^{2n})\otimes H^*(\Omega S^{2n})$$

特に、$H^*(LS^{2n})$ において

- 積は自明である。
- Massey 積はたくさん生きている

ことが分かる

§6. Elliptic Sullivan algebras

§6.0 Introduction

Def 6.0.1

X : 1-conn top. sp. with $H^*(X;\mathbb{K})$: fin. dim について.

- X : (rationally) elliptic $\overset{\Leftrightarrow}{\text{def}}$ $\pi_*(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{K}$: fin. dim.
- X : (rationally) hyperbolic $\overset{\Leftrightarrow}{\text{def}}$ $\pi_*(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{K}$: infin. dim.

Example 6.0.2

(1) sphere S^k ($k\geq 2$) は elliptic

(2) 1-conn. Lie grp や 1-conn. homogeneous space は elliptic.

(∵ G : Lie grp に対し, Hopf alg. の str. thm より
$H^*(G;\mathbb{K}) \cong \Lambda(x_1,\cdots,x_n)$ with $|x_i|$: odd
なので,
$\pi_*(G)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{K} \cong \mathbb{K}\{x_1,\cdots,x_n\}$: fin dim.
homogeneous space については
$H \to G \to G/H$
に対する homotopy 群の long exact seq. より OK)

(3) $S^n\vee S^n$ (for $n\geq 3$: odd) は hyperbolic
(∵ Example 4.3.13)

Question 6.0.3

$\#\mathbb{C}P^2$ は elliptic か?
(i.e. $\pi_*(\#\mathbb{C}P^2)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{K}$: fin. dim. ?)

§6.1 の Thm を使って分かる

今回は elliptic spaces の性質を色々紹介するが,
その前に hyperbolic spaces の性質を1つだけ.

Thm 6.0.4 (Félix-Halperin-Thomas, 2009) ← ann. of math.

X : hyperbolic finite CW cpx
$n := \dim X$
$\alpha := \limsup_i \left(\frac{1}{i}\log(\operatorname{rank}\pi_i(X))\right)$

Then
- $0<\alpha<\infty$
- $\forall\varepsilon>0$, $\exists K\in\mathbb{N}$, $\forall k\geq K$
$$e^{(\alpha-\varepsilon)k}\leq \sum_{i=k+2}^{k+n}\operatorname{rank}\pi_i(X)\leq e^{(\alpha+\varepsilon)k}$$

§6.1 Properties of elliptic Sullivan algebras

§4 より, spaces の代わりに minimal Sullivan algs を調べればよい.

Def 6.1.1

$(\Lambda V, d)$: minimal Sullivan alg に対し,
$(\Lambda V, d)$: elliptic $\overset{\Leftrightarrow}{\text{def}}$ V, $H^*(\Lambda V,d)$: fin. dim.

Def 6.1.2

$(\Lambda V, d)$: Sullivan alg with V : fin. dim. に対し basis をとって
$$\begin{cases} V^{\text{even}} = \mathbb{K}\{x_1,\cdots,x_p\} \\ V^{\text{odd}} = \mathbb{K}\{y_1,\cdots,y_q\}\end{cases}$$
と書き,
$|x_i| = 2a_i$, $|y_j| = 2b_j - 1$
とおく. このとき,
$a_1,\cdots,a_p$: <u>even exponent</u>
$b_1,\cdots,b_q$: <u>odd exponent</u>
という.

Def 6.1.3

(A,d) : dga に対し, formal dimension
$$\operatorname{fdim}(A,d) := \max\{n \mid H^n(A,d)\neq 0\}\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$$

Thm 6.1.4 (Friedlander–Halperin, 1979)

> $(\Lambda V, d)$: 1-conn. elliptic Sullivan alg.
> $\{a_i\}, \{b_j\}$: exponents
> $n := \mathrm{fdim}(\Lambda V, d)\ (<\infty)$
>
> Then
> (1) $n = \sum_{j=1}^{q}(2b_j - 1) - \sum_{i=1}^{p}(2a_i - 1)$
> (2) $\sum_{i=1}^{p} 2a_i \leq n$
> (3) $\sum_{j=1}^{q}(2b_j - 1) \leq 2n - 1$
> (4) $p \leq q$ (i.e. $\dim V^{\mathrm{even}} \leq \dim V^{\mathrm{odd}}$)

証明の idea を述べるために、pure Sullivan alg というものを導入する。

Def 6.1.5

> $(\Lambda V, d)$: Sullivan alg with V : fin.dim. について、
> $(\Lambda V, d)$: pure
> $\overset{\Longleftrightarrow}{\mathrm{def}}$ $d(V^{\mathrm{even}}) = 0,\ d(V^{\mathrm{odd}}) \subset \Lambda(V^{\mathrm{even}})$

Def 6.1.6

> $(\Lambda V, d)$: Sullivan alg with V : fin. dim に対し、その微分を修正した
> $(\Lambda V, d_\sigma)$: pure Sullivan alg associated with $(\Lambda V, d)$
> を、次により def:
> - $d_\sigma(V^{\mathrm{even}}) = 0$
> - $d_\sigma(V^{\mathrm{odd}}) \subset \Lambda(V^{\mathrm{even}})$
>
> $(d - d_\sigma)(V^{\mathrm{odd}}) \subset \Lambda(V^{\mathrm{even}}) \otimes \Lambda^{+}(V^{\mathrm{odd}})$

Prop 6.1.7

> $(\Lambda V, d)$: 1-conn. min. Sullivan alg with V : fin dim. に対し、
> $H(\Lambda V, d)$: fin. dim $\Leftrightarrow$ $H(\Lambda V, d_\sigma)$: fin. dim
> が成立。さらに、このとき
> $\mathrm{fdim}(\Lambda V, d) = \mathrm{fdim}(\Lambda V, d_\sigma)\ (<\infty)$
> が成立。

proof

V^{odd} に関する length で $(\Lambda V, d)$ に filtration を入れると、

$$(E_0, d_0) = (\Lambda V, d_\sigma) \Longrightarrow H(\Lambda V, d)$$

なる形の収束する spectral seq. が得られる。
(1st quadrant ではないが bounded)
これによって前半の ($\Leftarrow$) は分かる
($\Rightarrow$) は、L.S cat. とか、その "mapping theorem" とかを使うので、結構難しい。
(ちなみに、minimal が本質的に必要)
後半は induction on $\dim V$ で頑張る。 //

idea of proof of Thm 6.1.4

$(\Lambda V, d)$ と $(\Lambda V, d_\sigma)$ で exponents が変わらないことに注意すると、Prop 6.1.7 より、$(\Lambda V, d)$ が pure の場合に帰着される
pure Sullivan alg は、非常に特殊な形をしていて扱い易く、頑張って調べれば Thm 6.1.4 が示せる。 //

pure Sullivan alg の重要な性質として、次がある:

Prop 6.1.8

> $(\Lambda V, d)$: pure Sullivan alg.
> $V^{\mathrm{even}} = \mathbb{K}\{x_1, \cdots, x_p\}$
> Then
> $H(\Lambda V, d)$: fin. dim.
> $\Longleftrightarrow \left[\ 1 \leq \forall i \leq p,\ \exists N_i \in \mathbb{N}\ \text{s.t.}\ [x_i]^{N_i} = 0 \in H(\Lambda V, d)\right.$

§6.2 Criterions

2種類の状況

- (1) $H^*(X;\mathbb{K}) \cong H(\Lambda V, d)$ がknownのとき
- (2) $\pi_*X \otimes \mathbb{K} \cong V$ がknownのとき

で、ellipticかどうかの判定法を与える。
両方とも有限時間で判定できる

Thm 6.2.1

(A,d): cdga with $\begin{cases} H^1(A,d)=0 \\ H^*(A,d): \text{fin.dim.} \end{cases}$ に対し、

$(\Lambda V,d)$: min. Sullivan model for (A,d)

を、Example 4.2.5の方法によってinductiveに構成する。
このとき、この構成の途中(有限step)で次のいずれか一方が起こる:

(a) inductionが有限回で終わる。
$\left(\text{i.e. } \exists k.\ (\Lambda(V^{\leq k}),d) \xrightarrow{\simeq} (A,d)\right)$
このとき、$(\Lambda V,d)$: elliptic

(b) $\begin{cases} \cdot \text{ even deg の生成元の deg の総和が } n \text{ を超える} \\ \text{or} \\ \cdot \text{ odd deg ——〃—— } 2n-1 \text{ ——〃} \end{cases}$
(where $n := \mathrm{fdim}(A,d) < \infty$)
このとき、$(\Lambda V,d)$: not elliptic
(i.e. $\dim V=\infty$) (hyperbolic)

Thm 6.2.2

$(\Lambda V,d)$: 1-conn. min. Sullivan alg with V: fin.dim.
$V^{even} = \mathbb{K}\{x_1, \cdots, x_q\}$
$a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots, b_q$: exponents
$n := \sum_{j=1}^{q}(2b_j-1) - \sum_{i=1}^{p}(2a_i-1)$ (と def.)
各 i に対し $N_i \in \mathbb{N}$ を
$2N_i a_i > n$
となるように(任意に)とって fix する。
Then
$(\Lambda V,d)$: elliptic (i.e. $H(\Lambda V,d)$: fin.dim)
$\iff 1 \leq \forall i \leq p.\ [x_i]^{N_i} = 0 \in H^{2N_i a_i}(\Lambda V, d_\sigma)$
さらに、このとき $n = \mathrm{fdim}(\Lambda V,d)$ である。

いずれも、§6.1のThm, Propからすぐに分かる。

§6.3 Examples

Example 6.3.1

Example 4.1.8のSullivan algのcohomologyを計算する。

$(\Lambda V,d) := (\Lambda(a,b,x,y,z), d)$

where $\begin{cases} |a|=|b|=2,\ |x|=|y|=|z|=3 \\ da=db=0,\ dx=a^2,\ dy=ab,\ dz=b^2 \end{cases}$

$(\Lambda V,d)$: pure で、
$\begin{cases} \cdot\ V^{even} = \mathbb{K}\{a,b\} \\ \cdot\ [a]^2=[dx]=0,\ [b]^2=[dz]=0 \end{cases}$
なので、Prop 6.1.8 (or Thm 6.2.2) より、
$H(\Lambda V,d)$: fin dim. (i.e. $(\Lambda V,d)$: elliptic)
よって、Thm 6.1.4(1) (or Thm 6.2.2) より、
$\mathrm{fdim}(\Lambda V,d) = 3+3+3-(2-1)-(2-1) = 7.$
なので、
$H^*(\Lambda V,d) = H^{\leq 7}(\Lambda V,d)$

deg	2	3	4	5	6	7	(8)
	a	$x \mapsto a^2$		$bx-ay$		a^2z-aby	
	b	$y \mapsto ab$		$az-by$		$aby \mapsto a^2b^2$	
		$z \mapsto b^2$		$bx \mapsto a^2b$		$a^2y \mapsto a^3b$	
				$az \mapsto ab^2$		$b^2y \mapsto ab^3$	
				$ax \mapsto a^3$		$a^2x \mapsto a^4$	
				$bz \mapsto b^3$		$b^2z \mapsto b^4$	
					$xy \mapsto a^2y-abx$		
					$zy \mapsto b^2y-abz$		
					$xz \mapsto a^2z-b^2y$		

上図より、

$H^*(\Lambda V,d) = \mathbb{K}\{1, [a], [b], [bx-ay], [az-by], [a^2z-aby]\}$

となることが分かる。

Question 6.0.3 に解答を与えたい.

Prop 6.3.2

$$\boxed{\begin{array}{l}(\#^{k}\mathbb{C}P^2)\#(\#^{l}\overline{\mathbb{C}P^2}) : \text{elliptic} \\ \Leftrightarrow\ k+l\leq 2\end{array}}$$

proof

$k+l=1$ のとき

$$(\Lambda(x,y), dx=0, dy=x^3) \xrightarrow{\simeq^{\mathbb{R}}} A_{PL}(\mathbb{C}P^2)$$

deg 2 5 $\qquad A_{PL}(\overline{\mathbb{C}P^2})$

なので, elliptic.

$k+l=2$ のとき

$(\Lambda V,d) := (\Lambda(x_1,x_2,z,w),d)$

$\left(\begin{array}{l}\text{where } |x_1|=|x_2|=2,\ |z|=|w|=3 \\ dx_1=dx_2=0,\ dz=x_1x_2,\ dw=x_1^2+x_2^2\end{array}\right)$

と定めると, これは pure で

$$\begin{cases} x_1^3 = d(x_1w-x_2z) \\ x_2^3 = d(x_2w-x_1z)\end{cases}$$

なので, Prop 6.1.8 より,

$H(\Lambda V,d)$: fin. dim

$\therefore (\Lambda V,d)$: elliptic

よって Thm 6.1.4 より,

$$\text{fdim}(\Lambda V,d) = 3+3-(2-1)-(2-1)=4$$

deg	2	3	4
	x_1	$z \longmapsto$	x_1x_2
	x_2	$w \longmapsto$	$x_1^2+x_2^2$
			x_1^2

上図より,

$$H^*(\Lambda V,d) = \mathbb{K}\{1,[x_1],[x_2],[x_1^2]\}$$

ゆえに,

$$(\Lambda V,d) \xrightarrow[\exists]{\simeq^{\mathbb{R}}} A_{PL}(\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2})$$

なので, elliptic.

($\#^{2}\mathbb{C}P^2$ や $\#^{2}\overline{\mathbb{C}P^2}$ でも同様)

$k+l\geq 3$ のとき

Example 4.2.5 の方法で

$$(\Lambda V,d) \xrightarrow{\simeq^{\mathbb{R}}} A_{PL}((\#^{k}\mathbb{C}P^2)\#(\#^{l}\overline{\mathbb{C}P^2}))$$

: min Sullivan model

を計算する.

$$\dim_{\mathbb{K}} H^2((\#^{k}\mathbb{C}P^2)\#(\#^{l}\overline{\mathbb{C}P^2})) = k+l$$

なので,

$$\dim_{\mathbb{K}} V^2 = k+l \geq 3$$

よって,

$$(\text{even deg の生成元の deg の総和}) \geq 3\cdot 2 > 4 = \text{fdim}(\Lambda V,d)$$

ゆえに Thm 6.2.1 より,

$(\Lambda V,d)$: not elliptic