§4. Sullivan algebras

§4.0 Intro.

§2 で $A_{PL}(X)$ (for X: top. sp.) を構成したが、
これは非常に複雑であった。
そこで、これと quasi-isom で「簡単な」cdga
にとりかえることを考えたい。

ここで一般に (A,d): cdga が「複雑」に
なる理由として、以下の2つが挙げられる:

(a) A の積が複雑
(b) d が複雑。

(A,d) を quasi-isom の範囲でとりかえて
(a) を解消したものが Sullivan model である。

(**Rmk**
$d=0$
(b) は一般には解消できない
← formality.)

§4.1 Definition & examples of Sullivan algebras

Def 4.1.1

Sullivan algebra とは、
$(\Lambda V, d)$: dga
であって、

- $V = V^{\geq 1}$ (i.e. $\forall i \leq 0$, $V^i = 0$)
- $\exists$ $0 = V(-1) \subset V(0) \subset V(1) \subset \cdots \subset V$
  : increasing seq. of graded subsp's
  s.t.
  - $V = \bigcup_k V(k)$
  - $d(V(k)) \subset \Lambda V(k-1)$ ($\forall k \geq 0$)

をみたすもの。

Rmk 4.1.2

- V の filtration $\{V(k)\}$ は "equipped with" では
  なく、"exists" である
- $d(V(0)) \subset (\Lambda V(-1))^{\geq 2} = (\mathbb{K})^{\geq 2} = 0$.
- 「積は非常に簡単だが、微分が複雑かもしれない cdga」
  と言える。

Example 4.1.3

V: graded $\mathbb{K}$-mod with $V = V^{\geq 1}$
に対し、
$(\Lambda V, 0)$: Sullivan alg.
(i.e. ΛV に $d=0$ で微分を定めたもの)
である
(∵ $V(0) = V$ とすれば ok)

Example 4.1.4 (spheres)

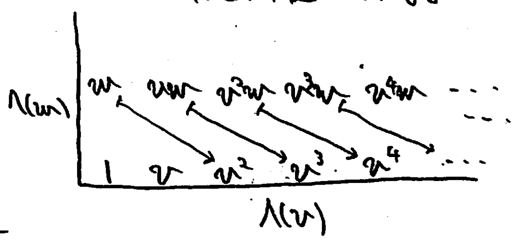
$n \in \mathbb{N}_{>0}$ とする。

(1) $(\Lambda(v), 0)$ ($|v| = 2n+1$)
は、Example 4.1.3 より Sullivan algebra で、
$$H(\Lambda(v), 0) \cong H^*(S^{2n+1}) \quad \text{as graded alg.}$$
となる。

(2) $(\Lambda(v,w), d)$: dga を

- $|v| = 2n$, $|w| = 4n-1$
- $dv = 0$, $dw = v^2$

により定めると、filtration
$$0 \subset \mathbb{K}\{v\} \subset \mathbb{K}\{v,w\}$$
により、これは Sullivan alg. となる。
このとき、
$$H(\Lambda(v,w), d) \cong H^*(S^{2n}) \quad \text{as graded alg.}$$
(∵ $\Lambda(v,w) = \Lambda(v) \otimes \Lambda(w)$ により
微分を図示すると、下図のようになる:



)

Example 4.1.5 (counterexample)

$(\Lambda(v_1, v_2, v_3), d)$: dga を

- $|v_1| = |v_2| = |v_3| = 1$
- $dv_1 = v_2 v_3$, $dv_2 = v_3 v_1$, $dv_3 = v_1 v_2$

により def すると、これは Sullivan algebra では無い。

Example 4.1.6 (not minimal)

$n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対し、

$(\Lambda(v, w), d)$: dga

を

$$\begin{cases} \cdot\ |v| = n,\ |w| = n+1 \\ \cdot\ dv = w,\ dw = 0 \end{cases}$$

によって定めるとこれは Sullivan alg. である

以下、これを

$(\Lambda(v, dv), d)$

と書くことにする。

ここで augmentation

$$\varepsilon : (\Lambda(v, dv), d) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K} : \text{dga hom}$$
$$v \longmapsto 0$$
$$dv \longmapsto 0$$

を考えると、これは quasi-isom である。

また、より一般に

V : graded $\mathbb{K}$-mod with $V = V^{\geq 1}$

に対して

(EV, d) : Sullivan alg ← "contractible"

を

- dV : graded $\mathbb{K}$-mod defined by $(dV)^n := V^{n-1}$
  $dv \longleftarrow v$
- $EV := \Lambda(V \oplus dV)$
- $d : EV \longrightarrow EV$
  $v \in V \longmapsto dv \in dV$
  $dv \in dV \longmapsto 0$

により定めると

$$\varepsilon : (EV, d) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K} : \text{quasi-isom of dga}$$
$$v \longmapsto 0$$
$$dv \longmapsto 0$$

となる

つまり

「$\mathbb{K}$ $(= (\Lambda(0), 0)$: Sullivan alg$)$ と quasi-isom な Sullivan alg がたくさんある」

ということが分かった

これらの中から「一番簡単な」$\mathbb{K}$ のみをとり出したい

$\leadsto$ 次の def

Def 4.1.7

$(\Lambda V, d)$: Sullivan alg が **minimal**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $dV \subset \Lambda^{\geq 2} V$

$\leadsto$ Example 4.1.3, Example 4.1.4 (1)(2) の Sullivan alg はいずれも minimal であるが、
Example 4.1.6 の Sullivan alg. は $\mathbb{K}$ を除いて minimal ではない。

Example 4.1.8 (色々と教育的な例)

$(\Lambda V, d) := (\Lambda(a, b, x, y, z), d)$: Sullivan algebra を

$$\begin{cases} \cdot\ |a| = |b| = 2,\ |x| = |y| = |z| = 3 \\ \cdot\ da = db = 0,\ dx = a^2,\ dy = ab,\ dz = b^2 \end{cases}$$

により定める。

これについて、次のような問題が考えられる:

① $H(\Lambda V, d) = \bigoplus_i H^i(\Lambda V, d)$ は fin dim か?
さらに、$H(\Lambda V, d)$ を計算する

② $(\Lambda V, d)$ は formal か?
(i.e. $(\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} (H(\Lambda V, d), 0)$: quasi-isom であるか?)

③ 幾何的に実現されるか?

補足:

① explicit に Sullivan alg が与えられているので「原理的には」$H(\Lambda V, d)$ が計算できる。
しかし、直接計算はかなり大変

解決策

(a) spectral sequence を使う。
例えば、a のべきで filtration を入れる。

(b) elliptic Sullivan algebra の一般論を用いる
$\leadsto$ $H(\Lambda V, d) = H^{\leq 7}(\Lambda V, d)$ が「一瞬で」分かる

ちなみに

$H(\Lambda V, d) = \mathbb{K}\{1, [a], [b], [ay - bx], [by - az], [aby - b^2 x]\}$
as graded $\mathbb{K}$-mod

② $\begin{cases} \cdot \text{ minimal Sullivan model of } (H(\Lambda V, d), 0) \text{ を途中まで計算する} \\ \cdot \text{ Massey 積を計算する} \end{cases}$ or

$\leadsto$ formal でないことが分かる。

③ §5 で扱う

§4.2 Sullivan models "cofibrant replacement"

Def 4.2.1

・(A,d): cdga に対し、その <u>Sullivan model</u> とは

$$m: (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} (A,d): \text{quasi-isom}$$

s.t. $(\Lambda V, d)$: Sullivan alg.

のこと。

・とくに

$(\Lambda V, d)$: minimal Sullivan alg.

のとき、<u>minimal Sullivan model</u> という

・X: 0-conn. top. sp の (minimal) Sullivan model とは、$A_{PL}(X)$ の (minimal) Sullivan model のこと

Example 4.2.2

Example 4.1.4 (1)(2) は、それぞれ $A_{PL}(S^{2n+1})$, $A_{PL}(S^{2n})$ の min. Sullivan model になっている

Prop 4.2.3

$\forall (A,d)$: cdga with $H^0(A) = \mathbb{K}$

$\exists m: (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} (A,d)$: Sullivan model

<u>proof</u> semifree resol のときと同様に、

$H(A,d)$ の generator をとって、Ker をつぶして、

Ker をつぶして、Ker をつぶして、....

とすればよい

(ただし、$V = V^{\geq 1}$ をみたすようにするために、$\mathbb{K}$: field を使って丁寧にやる必要がある)

Thm 4.2.4

$\forall (A,d)$: cdga with $H^0(A) = \mathbb{K}$

$\exists m: (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} (A,d)$: minimal Sullivan model

<u>proof</u>

・$H^1(A) = 0$ のときは、Prop 4.2.3 のときと同様の構成を V の degree について inductive に行うことで、min. Sullivan model がつくれる

(詳細は Example 4.2.5 で) "killing homotopy" みたいな感じ

・$H^1(A) \neq 0$ のときは、Prop 4.2.3 を経由して示す

$$\Big((\Lambda V, d) \underset{\text{isom}}{\cong} \underbrace{(\Lambda W, d)}_{\text{minimal}} \otimes \underbrace{(\Lambda U, d)}_{\text{contractible}} \Big)$$

ちゃんとやるのは結構大変

Example 4.2.5

$S^3 \vee S^3 \vee S^5$ の minimal Sullivan model を (途中まで) 計算してみる。

方針は以下の通り:

$m_k: (\Lambda V^{\leq k}, d) \to A_{PL}(S^3 \vee S^3 \vee S^5)$

を k について inductive に作っていく。

V^k の元は次の2通り:

① $H^k(m_{k-1}): H^k(\Lambda V^{\leq k-1}) \to H^k(S^3 \vee S^3 \vee S^5)$ で「足りない分」を V^k で補う。

(i.e. $H^k(S^3 \vee S^3 \vee S^5) = \mathrm{Im}(H^k(m_{k-1})) \oplus \underbrace{(\text{残り})}_{\text{ここの分}}$)

② $\mathrm{Ker}\, H^{k+1}(m_{k-1})$ をつぶす。

$\rightsquigarrow H^{k+1}(m_k)$: injective となる

(∵ $H^1 = 0$)

$H^*(S^3 \vee S^3 \vee S^5)$ の generator$/\mathbb{K}$ を表す cocycle を

$1, \alpha, \beta, \gamma$ $(|\alpha| = |\beta| = 3,\ |\gamma| = 5)$

と書くことにする。

・$V^{\leq 2} = 0$.

・$V^3 = \mathbb{K}\{a, b\}$ ← $H^3(S^3 \vee S^3 \vee S^5)$ の生成元に対応

$m_3: (\Lambda(a,b), 0) \to A_{PL}(S^3 \vee S^3 \vee S^5)$

$a \longmapsto \alpha$

$b \longmapsto \beta$

$\rightsquigarrow H^{\leq 4}(m_3)$: isom., $H^5(m_3)$: inj

・$V^4 = 0$

・$V^5 = \mathbb{K}\{c, x\}$, $dc = 0$, $dx = ab$

$m_5: (\Lambda(a,b,c,x), d) \longmapsto A_{PL}(S^3 \vee S^3 \vee S^5)$

$c \longmapsto \gamma$

$x \longmapsto \exists \omega$, $\omega \overset{d}{\longmapsto} \alpha\beta$ (∵ $[\alpha\beta] = 0$)

$\rightsquigarrow H^{\leq 7}(m_5)$: isom., $H^8(m_5)$: not inj.

・$V^6 = 0$

・$V^7 \neq 0$ ← $\mathrm{Ker}\, H^8(m_7)$ をつぶす。

⋮

これを(無限回)くり返すことで、$S^3 \vee S^3 \vee S^5$ の min. Sullivan model がつくれる

ちなみに、この例ではこの計算は有限回では終わらない

(i.e. $\dim V = \infty$) (by Hopf alg の構造定理)

Example 4.2.6

fin. type H-space の min. Sullivan model は $(\Lambda V, 0)$ の形。

§4.3 Lifting properties & uniqueness of models

Def 4.3.1

- $(\Lambda(t,dt),d)$: cdga を $|t|=0$, $|dt|=1$ により定める
- $(A,d),(B,d)$: cdga
  $\varphi_0,\varphi_1 : (A,d)\to(B,d)$: hom of dga に対し.
  $\varphi_0 \simeq \varphi_1$: homotopic

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists\Phi : (A,d)\to(B,d)\otimes(\Lambda(t,dt),d)$: dga hom s.t.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & B\otimes\Lambda(t,dt) \arrow[d, "id\cdot\varepsilon_i"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & B \end{tikzcd} \quad (\text{for } i=0,1)$$

where
$$\varepsilon_i : (\Lambda(t,dt),d)\to \Bbbk \quad (i=0,1)$$
$$t \mapsto i$$
$$dt \mapsto 0$$

Rmk 4.3.2

- 何となく conti. map の homotopy の "dual" っぽい ($\Lambda(t,dt)$ が $[0,1]$ に対応?)
- $(B,d)\otimes(\Lambda(t,dt),d)$ が (B,d) の path object.
- 上の意味で homotopic なら chain map としても homotopic

Prop 4.3.3

- 上で def した $\simeq$ は
  反射律 $(\varphi\simeq\varphi)$, 対称律 $(\varphi\simeq\psi \Rightarrow \psi\simeq\varphi)$ をみたす.
- $(A,d)=(\Lambda V,d)$: Sullivan alg. なら
  推移律 $(\varphi\simeq\psi,\ \psi\simeq\chi \Rightarrow \varphi\simeq\chi)$ もみたし, $\simeq$ は equiv. rel になる.

Proof 前半は容易.
後半は, Sullivan alg の surj. quasi-isom に対する strict な lifting property を使って頑張る (Prop 4.3.5) //

Rmk 4.3.4

model cat の一般論 での homotopy もこんな感じだった
Sullivan alg. は cofibrant っぽい.

Prop 4.3.5 (lifting property)

$(\Lambda V,d)$: Sullivan alg. $(A,d),(B,d)$: cdga
$\eta : (A,d)\xrightarrow{\simeq q}(B,d)$: quasi-isom of dga
$\varphi : (\Lambda V,d)\to(B,d)$: dga hom.

Then

$\exists\psi : (\Lambda V,d)\to(A,d)$: dga hom s.t. $\eta\circ\psi\simeq\varphi$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\eta"', "\simeq q"] \\ \Lambda V \arrow[ur, dashed, "\exists\psi"] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft_h", shift right=3] & B \end{tikzcd}$$

さらに,

- このような ψ は unique up to homotopy
  $\left(\leftrightarrow [\Lambda V, A]\xrightarrow[\eta_*]{\cong}[\Lambda V, B]\right)$ ← homotopy set
- η が surjective quasi-isom なら, (strict に) $\eta\circ\psi=\varphi$ となる ψ がとれる.

proof existence のみ示す.

Case 1 η : surj のとき
Sullivan alg. の filtration $\{V(k)\}$ について inductive にとれば良い.

(η : surj. quasi-isom より
[$\forall b\in B$: cocycle, $\exists a\in A$: cocycle s.t. $\eta a=b$]
などが成り立つことが鍵となっている)

Case 2 一般のとき

$$\bar\eta : (A,d)\otimes(EB,\delta)\xrightarrow{\simeq q}(B,d) : \text{surj. quasi-isom}$$
$$a\otimes 1 \longmapsto \eta a$$
$$1\otimes b \longmapsto b$$
$$1\otimes\delta b \longmapsto db$$

(where
$(EB,\delta)=(\Lambda(B\oplus\delta B),\delta)$: "contractible"
Bの微分と紛らわしいから, EBの微分はδで書いた)

このとき

- Case 1 より $\bar\eta$ については lift できる.
- $(EB,\delta)\simeq\Bbbk$: homotopy equiv. なので
  η と $\bar\eta$ は up to homotopy で同じ.

なので, η についても up to homotopy で lift できる. //

Rmk 4.3.6

cofibrant obj と trivial fibration についての lifting property と思える.

__Cor 4.3.7__

> X, Y : 0-conn. top. sp. , $f: X \to Y$: conti.
> $m: (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(X)$
> $n: (\Lambda W, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(Y)$: Sullivan models
> __Then__
> $$\begin{tikzcd} A_{PL}(Y) \arrow[r, "f^*"] & A_{PL}(X) \\ \Lambda W \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r, dashed, "\exists \varphi"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft_h"] & \Lambda V \arrow[u, "\simeq"'] \end{tikzcd}$$
> : homotopy commutative

$\rightsquigarrow$ f^* の代わりに φ を扱えばよい.

__Cor 4.3.8__ (uniqueness)

> (A, d) : cdga with $H^0(A) = \mathbb{K}$
> に対し. その Sullivan model は
> unique up to homotopy である
> また. quasi-isom な2つの cdga の Sullivan model は homotopy 同値である.

minimal も仮定すると. かなり強いことが言える.

__Thm 4.3.9__ (uniqueness)

> (A, d) : cdga with $H^0(A) = \mathbb{K}$
> に対し. その minimal Sullivan model は
> unique up to isom である
> また. quasi-isom な2つの cdga の minimal Sullivan model は isom である.

Thm 4.3.9 の系より,
「minimal Sullivan model は quasi-isom invariant である」
と言える.

一般は.
$(A, d), (B, d)$: cdga with $H(A, d) \cong H(B, d)$ as alg.
が与えられたときに
$(A, d) \not\simeq (B, d)$: NOT quasi-isom
であることは難しいが. min. Sullivan model を計算するだけでこれができるのである.

__Example 4.3.10__

> Example 4.1.8 の Sullivan alg. $\underbrace{}_{(\Lambda V, d)}$ が formal でないことを.
> minimal Sullivan model of $(\Lambda V, d)$, $(H(\Lambda V, d), 0)$
> を計算することで示せ.
> ($\deg = 4$ で違いが現れる)
> ←こっちは元々 min Sullivan alg だけど

Thm 4.3.9 より. X : 0-conn. top. sp. に対して
その min. Sullivan model $(\Lambda V, d)$ が up to isom で定まる.
とくに. V : graded $\mathbb{K}$-mod が定まるが. これには
次のような幾何的意味がある:

__Thm 4.3.11__

> X : 1-conn. top. sp. with $H_*(X; \mathbb{K})$: fin type
> $(\Lambda V, d)$: minimal Sullivan model of X.
> __Then__
> $$V \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_*(X), \mathbb{K})$$

つまり. rational には homotopy 群が $A_{PL}(X)$ から
計算できてしまう

__Example 4.3.13__ ←(下のやつを先にやるべき)

$n \geq 3$: odd に対し.

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \pi_k(S^n \vee S^n) = \begin{cases} a_p & (k = (n-1)p + 1,\ p \geq 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(fin type/$\mathbb{Z}$)

$\Big($ __where__
$$a_p = \frac{1}{p} \sum_{d \mid p} \mu\left(\frac{p}{d}\right) 2^d$$
↖ Möbius function $\Big)$

これ free Lie alg の次元 などと一致している.

$\Big($ ☺ $\pi_k(S^n \vee S^n) = \pi_{k-1}(\Omega(S^n \vee S^n))$
$\Omega(S^n \vee S^n) \to P(S^n \vee S^n) \to S^n \vee S^n$: fibration
に Serre s.s. を使って $H^*(\Omega(S^n \vee S^n))$ を求め.
それより $\underbrace{\Omega(S^n \vee S^n)}_{\text{H-space}}$ の min Sullivan model を求める $\Big)$

__Example 4.3.12__

$m \geq 1$ に対し.

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \pi_k(S^{2m+1}) = \begin{cases} 1 & (k = 2m+1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(fin. type/$\mathbb{Z}$)

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \pi_k(S^{2m}) = \begin{cases} 1 & (k = 2m, 4m-1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(☺ Example 4.1.4 と Thm 4.3.11)

ちなみに. torsion part は上の方にも たくさん
出てくる.

§4.4 relative Sullivan algebras

Def 4.4.1

・<u>relative Sullivan algebra</u> とは

$(B\otimes\Lambda V, d)$: cdga

であって

- $(B,d) = (B\otimes\Bbbk, d) \subset (B\otimes\Lambda V, d)$: sub cdga
- $H^0(B,d) = \Bbbk$
- $V = V^{\geq 1}$
- $\exists\ 0 = V(-1) \subset V(0) \subset \cdots \subset V$

  s.t. $\begin{cases} V = \bigcup V(k) \\ d(V(k)) \subset B\otimes\Lambda V(k-1) \ (\forall k) \end{cases}$

をみたすもの.

・上に加えて

$d(V) \subset B^{+}\otimes\Lambda V + B\otimes\Lambda^{\geq 2}V$

をみたすとき, <u>minimal</u> という

Def 4.4.2

・$\varphi : (B,d) \longrightarrow (C,d)$: hom between cdga

に対し, その <u>(relative) Sullivan model</u> とは

$m : \underbrace{(B\otimes\Lambda V, d)}_{\text{relative Sullivan alg}} \xrightarrow{\simeq} (C,d)$: quasi-isom

であって, 下図が可換なもの:

$$\begin{tikzcd} B\otimes\Lambda V \arrow[r, "m"] & C \\ B \arrow[u] \arrow[ur, "\varphi"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", near start] & \end{tikzcd}$$

・<u>minimal relative Sullivan model</u> (同様に def)

・cofib. map に対する <u>relative Sullivan model</u>

Thm 4.4.3

$\varphi : (B,d) \longrightarrow (C,d)$: hom between cdga

with $H^0B = H^0C = \Bbbk$, $H^1\varphi$: inj

<u>Then</u>

φ は minimal relative Sullivan model をもつ.

<u>proof</u> Thm 4.2.4 と同様.

(inductive な構成は, 次の状況でできる:
$B^0 = C^0 = \Bbbk$, $B^1 = C^1 = 0$, $H^2\varphi$: inj.)

Rmk 4.4.4

relative Sullivan algebra についても,
(minimal) rel. Sullivan model の uniqueness や lifting property が (適切な修正の下で) 成り立つ.

Prop 4.4.5

$(B\otimes\Lambda V, d)$: rel. Sullivan alg.
とすると,
$(B\otimes\Lambda V, d)$: semifree (B,d)-mod
である.

<u>proof</u>

ΛV に ($\Bbbk$-mod として) filtration を

$\begin{cases} \text{・} V \text{ に入っている rel. Sullivan alg としての filtration} \\ \text{・length } (\Lambda^k V \text{ の } k) \end{cases}$

を合わせる形で入れればよい
(explicit には書きにくい)

<u>まとめ</u>

cdga hom によって module str. を入れている場合は, relative Sullivan model が semifree resolution になっている.
しかも, Thm 4.4.3 の proof より rel. Sullivan model は Example 4.2.5 と同様にして計算できる
$\rightsquigarrow$ Tor が計算できる!!

rel. Sullivan alg の具体例は §5 で.