有理ホモトピー論入門

2015.7

§0. Introduction
§1. Basic definitions
§2. Polynomial differential forms
§3. Semifree modules & Tor
§4. Sullivan algebras
§5. Calculations
(§6. Appendix)

Reference

[FHT] Félix-Halperin-Thomas,
Rational Homotopy Theory, Springer GTM205

§0. Introduction

有理 homotopy 論とは
「空間の"有理 homotopy 型"を調べる分野/道具」
である。

Def 0.1

X, Y : 1-conn. top. space
$f : X \longrightarrow Y$: conti.
に対し、
f : rational homotopy equivalence
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\pi_*(f) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$: isom.
また、これによる空間の"同値類"を
rational homotopy type (有理 homotopy 型)
という。

Thm 0.2 (Whitehead-Serre)

X, Y : 1-conn top. sp. , $f : X \to Y$
TFAE:
- $\pi_*(f) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$: isom
- $H_*(f; \mathbb{Q})$: isom
- $H^*(f; \mathbb{Q})$: isom

⇝ X の rational homotopy type を調べると、
$\pi_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ や $H^*(X; \mathbb{Q})$ が分かる。

Rmk 0.3

上の def の正当性は、例えば次の Thm により保証される

Thm (Whitehead)

X, Y : CW cpx , $f : X \to Y$
について、
f : homotopy equivalence
$\Leftrightarrow$ $\pi_*(f)$: isom

rational homotopy theory の優れている点は、
「ある意味で空間と代数が1対1に対応する」という点である

Thm 0.4 (Sullivan)

$$\left\{\begin{array}{l}\text{rational homotopy types of} \\ \text{1-conn. fin. type top. sp's}\end{array}\right\}$$
$$\underset{\text{bij.}}{\overset{\cong}{\longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{l}\text{quasi-isom. classes of} \\ \text{1-conn. fin. type Sullivan algebras}\end{array}\right\}$$
$$\underset{\text{bij}}{\overset{\cong}{\longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{l}\text{isom. classes of} \\ \text{1-conn. fin. type Sullivan algebras}\end{array}\right\}$$

Rmk 0.5

- rational homotopy theory は、
  - dga (differential graded algebra)
  - dgla (diff. graded Lie algebra)

  のいずれを使うかによって、大きく2つに分けられる。
  上の Sullivan のものは dga を使う方
  dgla を使う方は Quillen によってつくられた
- Thm 0.4 の proof はしない。

更に、この"Sullivan algebra"は具体的計算において非常に扱い易い

☺ 直積、一点和、fibration の pullback
などの「空間の操作」を、「代数の操作」
に翻訳することができる。

今回の seminar では、Sullivan algebra の言葉を用いて fibration を取り扱うことを目標にする。

⇝ 応用として、free loop space の cohomology などを計算する。

§1. Basic definitions

以下、このseminarでは、

$\mathbb{K}$: field of char. 0

とし、

$\begin{cases} \cdot\, H_*(-) := H_*(-;\mathbb{K}),\ H^*(-) := H^*(-;\mathbb{K}) \\ \cdot\, \otimes := \otimes_{\mathbb{K}},\ \mathrm{Hom} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}} \end{cases}$

と書く。

Notation

$\boxed{|x| := (\text{"degree" of } x)}$

Rmk 1.1

char p でも良かったり、そもそも field じゃなくても良かったりする部分もあるが、面倒なので最初から field of char 0 を仮定しておこう。

Def 1.2 (graded module)

- graded module とは
  $M = \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ with M^i : $\mathbb{K}$-mod.
  のこと。
- graded module の submodule, quotient, direct sum, product は degreewise に def.

以下 M, N : graded mod. とする。

- $M\otimes N$: graded mod. を
  $(M\otimes N)^k := \bigoplus_{i+j=k} (M^i \otimes N^j)$
  により def
- $f : M \to N$: $\mathbb{K}$-linear map of deg n とは、
  $f = \{f^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ with $f^i : M^i \to M^{i+n}$: $\mathbb{K}$-linear
  のこと。
- $\mathrm{Hom}(M,N)$: graded mod. を
  $\mathrm{Hom}(M,N)^n := \{f : M\to N : \mathbb{K}\text{-lin. map of deg } n\}$
  $= \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(M^i, N^{i+n})$

Def 1.3 (complex)

- complex とは (M,d) の pair で
  $\begin{cases} \cdot\, M : \text{graded mod.} \\ \cdot\, d : M \to M : \mathbb{K}\text{-lin. map of deg } (+1) \\ \quad \text{s.t. } d\circ d = 0 \end{cases}$
  なるもの
  $\rightsquigarrow H(M,d) = \mathrm{Ker}\, d / \mathrm{Im}\, d$: graded mod.

以下 $(M,d), (N,d)$: complex とする。

- $f : (M,d) \to (N,d)$: chain map of deg n とは
  $f : M \to N$: $\mathbb{K}$-lin. map of deg n
  s.t. $f\circ d = (-1)^n d\circ f$
  のこと。
  $\rightsquigarrow H(f) : H(M,d) \to H(N,d)$ が定まる。
- $f : (M,d) \to (N,d)$: $\mathbb{K}$-lin. map of deg 0 について
  f : quasi-isom
  $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} H(f)$: isom
- $(M\otimes N, d)$: complex を
  $d : M\otimes N \to M\otimes N$
  $m\otimes n \mapsto dm\otimes n + (-1)^{|m|} m\otimes dn$
  により def.
- $(\mathrm{Hom}(M,N), d)$: complex を
  $d : \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(M,N)$
  $f \mapsto d\circ f - (-1)^{|f|} f\circ d$
  により def.

Rmk 1.4

graded mod, complex には "bounded" 的な条件は課さない

Def 1.5 (graded algebra)

・<u>graded algebra</u> とは

- ・R: graded mod.
- ・$R\otimes R \longrightarrow R$: $\mathbb{K}$-lin. map of deg 0, $x\otimes y \longmapsto xy$
- ・$1\in R^0$

の組であって.

- ・$(xy)z = x(yz)$ $(\forall x,y,z\in R)$
- ・$x1 = x = 1x$ $(\forall x\in R)$
- ・$R^n = 0$ for $\forall n<0$. "bounded"

をみたすもの.

・R: graded algebra が <u>(graded) commutative</u>

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x,y\in R$. $xy = (-1)^{|x||y|}yx$

Rmk 1.6 graded algebra には「下にbounded」を課す.

Def 1.7 (R-module)

・R: graded alg. に対し <u>(left) R-mod</u> とは.

- ・M: graded mod
- ・$R\otimes M \longrightarrow M$: lin. map of deg 0, $r\otimes m \longmapsto rm$

の組であって

- ・$r(r'm) = (rr')m$ $(\forall r,r'\in R, \forall m\in M)$
- ・$1m = m$ $(\forall m\in M)$

をみたすもの

・R: graded alg, M: right R-mod, N: left R-mod に対し.

$$M\otimes_R N := M\otimes N \Big/ \underset{\text{generate}/\mathbb{K}}{\left\langle mr\otimes n - m\otimes rn \,\middle|\, \begin{smallmatrix} m\in M, n\in N \\ r\in R\end{smallmatrix}\right\rangle}$$

以下 R: graded alg, M,N: left R-mod とする.

・$f: M\to N$: <u>R-linear map</u> of deg k とは.

$f: M\to N$: $\mathbb{K}$-linear map of deg k s.t. $\forall m\in M$, $\forall r\in R$. $f(rm) = (-1)^{k|r|}rf(m)$ のこと

・$\mathrm{Hom}_R(M,N) := \{f\in \mathrm{Hom}(M,N) \mid f: R\text{-linear}\} \subset \mathrm{Hom}(M,N)$

Def 1.8 (dga)

・<u>differential graded algebra</u> (dga) とは.

- ・R: graded algebra
- ・$d: R\to R$: $\mathbb{K}$-lin. map. of deg $+1$

の組 (R,d) であって,

- ・(R,d): complex (i.e. $d\circ d = 0$)
- ・$\forall r,r'\in R$ $d(rr') = (dr)\cdot r' + (-1)^{|r|}r\cdot(dr')$

をみたすもの $\rightsquigarrow$ $H(R,d)$: graded alg.

・$(R,d),(S,d)$: dga に対し.

$f: (R,d)\to(S,d)$: <u>dga hom</u> とは.

$f: (R,d)\to(S,d)$: chain map of deg 0 s.t. 積と1を保つ. のこと

・<u>cdga</u> := commutative dga

Def 1.9 ((R,d)-module)

・(R,d): dga に対し. <u>(left) (R,d)-module</u> とは.

(M,d): complex であって.

- ・M: R-mod
- ・$\forall r\in R$, $\forall m\in M$. $d(rm) = (dr)\cdot m + (-1)^{|r|}r\cdot dm$

をみたすもの $\longrightarrow$ $H(M,d)$: $H(R,d)$-mod.

・(R,d): dga, $(M,d),(N,d)$: (R,d)-mod に対し.

$f: (M,d)\longrightarrow(N,d)$: <u>(R,d)-linear</u> of deg k とは

R-linear かつ chain map of deg k なるもののこと.

Rmk 1.10

$d: M\to M$: $\mathbb{K}$-linear but NOT R-linear

$\rightsquigarrow$ homological algebra$/R = \oplus R^i$ は使えない

Lem 1.11

(R,d): dga

(1) (M,d): right (R,d)-mod, (N,d): left (R,d)-mod に対し.

$(M\otimes_R N, d)$: quotient complex of $(M\otimes N, d)$

(2) $(M,d),(N,d)$: left (R,d)-mod に対し.

$(\mathrm{Hom}_R(M,N),d) \subset (\mathrm{Hom}(M,N),d)$: subcomplex

Def 1.12 (simplicial set)

simplicial set とは

$$\begin{cases} \cdot\ K_n : \text{set} & (n \in \mathbb{N}) \\ \cdot\ d_i^{(n)} : K_n \longrightarrow K_{n-1} : \text{map} \\ \quad\ \ d_i & (n \geq 1,\ 0 \leq i \leq n) \\ \cdot\ s_j^{(n)} : K_n \longrightarrow K_{n+1} : \text{map} \\ \quad\ \ s_j & (n \geq 0,\ 0 \leq i \leq n) \end{cases}$$

の組であって

$$\begin{cases} \cdot\ d_i d_j = d_{j-1} d_i & (i<j) \\ \cdot\ s_i s_j = s_{j+1} s_i & (i \leq j) \\ \cdot\ d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & (i<j) \\ \mathrm{id} & (i=j, j+1) \\ s_j d_{i-1} & (i>j+1) \end{cases} \end{cases}$$

をみたすもののこと.

・K, L : simplicial set に対して

$f : K \longrightarrow L$: simplicial map

とは, 組

$f = \{f_n : K_n \longrightarrow L_n : \text{map}\}_{n \in \mathbb{N}}$

であって, d_i, s_j と可換なもののこと.

Example 1.13

X : top. sp. に対し

$S_*(X)$: singular simplicial set

を

$$\begin{cases} \cdot\ S_n(X) = X^{\Delta^n} \\ \cdot\ d_i : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X) \\ \qquad\quad \sigma \longmapsto \sigma \circ \lambda^i \\ \cdot\ s_j : S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(X) \\ \qquad\quad \sigma \longmapsto \sigma \circ \rho^j \end{cases}$$

where
- $\Delta^n = \{(t_0, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$
- $\lambda^i : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n \quad (0 \leq i \leq n)$
  $(t_0, \cdots, t_{n-1}) \longmapsto (t_0, \cdots, t_{i-1}, 0, t_i, \cdots, t_{n-1})$
- $\rho^j : \Delta^{n+1} \longrightarrow \Delta^n \quad (0 \leq i \leq n)$
  $(t_0, \cdots, t_{n+1}) \longmapsto (t_0, \cdots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \cdots, t_{n+1})$

により def.

Def 1.14

K : simp. set に対し $(C^*(K), d)$: dga を

$$\begin{cases} \cdot\ C^p(K) := \left\{ f : K_p \longrightarrow \mathbb{K} : \text{map} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma \in K_p : \text{degenerate} \\ \Rightarrow f(\sigma) = 0 \end{array} \right\} \\ \cdot\ d : C^p(K) \longrightarrow C^{p+1}(K) \\ \qquad f \longmapsto \left(\sigma \mapsto \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^{p+i+1} f(d_i \sigma)\right) \\ \cdot\ C^p(K) \otimes C^q(K) \longrightarrow C^{p+q}(K) \\ \qquad f \otimes g \longmapsto \left(\sigma \mapsto f(d_{p+1} \cdots d_{p+q}\sigma) \cdot g(d \cdots d_{p-1}\sigma)\right) \end{cases}$$

← 気にしなくて良い.

により def.

とくに $K = S_*(X)$ (X : top. sp.) のときは

$C^*(X) := C^*(S_*(X))$ と書く.

Rmk 1.15

$C^*(K)$ を "normalize" したものとして定めたが, これは "normalize" しないものと quasi-isom である.

Def 1.16 (free commutative graded alg.)

V : graded $\mathbb{K}$-mod s.t. $V^i = 0$ for ${}^\forall i < 0$ に対し

$\Lambda V := TV/I$: commutative graded alg.

where
- TV : tensor alg. on V
- $I := (v \otimes w - (-1)^{|v||w|} w \otimes v \mid v, w \in V) \subset TV$: two-sided ideal

と def.

Lem 1.17

ΛV : as above について次が成立:

(1) A : commutative graded alg, $f : V \longrightarrow A$: $\mathbb{K}$-lin. map of deg 0 に対し

$\exists! \tilde{f} : \Lambda V \longrightarrow A$: graded alg. hom. s.t. $\tilde{f}|_V = f$

(2) $g : V \longrightarrow \Lambda V$: $\mathbb{K}$-lin. map of deg k に対し

$\exists \tilde{g} : \Lambda V \longrightarrow \Lambda V$: derivation of deg k s.t. $\tilde{g}|_V = g$.

とくに, g : $\mathbb{K}$-lin map of deg $+1$ with $\tilde{g} g = 0$ なら $(\Lambda V, d)$: cdga が $d = \tilde{g}$ により定まる.

§2. Polynomial differential forms

§2.0 Intro.

X: top. sp. に対する $C^*(X)$ を調べるのが目標である。
この際、一般には $C^*(X)$ が非可換であることが一つの障害になっている

ところが、係数が field of char. 0 なので、
$C^*(X)$ を可換なものにとりかえることができる：

Thm 正確には $A_{PL}(X) \simeq$ ● $\xleftarrow{\simeq} C^*(X)$

$\exists A_{PL}(X)$: cdga
s.t. $A_{PL}(X) \xleftarrow{\simeq} C^*(X)$

この $A_{PL}(X)$ を構成し、上の Thm の証明の概略を説明するのが §2 の内容である

まずは $A_{PL}(X)$ の構成の idea を説明しよう。

Recall (diff. form on mfd) $\mathring{D}^n \hookrightarrow M$

M: n-mfd, $M = \bigcup_\lambda U_\lambda$: open cov s.t. $U_\lambda \cong \mathring{D}^n$

M 上の p 次 diff. form ω とは

$$\omega_\lambda = \sum_{i_1 \cdots i_p} f_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

with $f_{i_1 \cdots i_p} \in C^\infty(\mathring{D}^n)$ ← C^∞-function

の族 $\{\omega_\lambda\}$ であって、適切な「貼り合わせ条件」をみたすもの
であった

Idea (poly diff. form on top. sp.) $\Delta^n \to X$

X: top. sp. $S_*(X)$: sing simp set ← "covering"

X 上の p 次 poly. diff. form Φ とは

$$\Phi_\sigma = \sum_{i_1 \cdots i_p} f_{i_1 \cdots i_p} dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_p}$$

with $f_{i_1 \cdots i_p} \in \mathbb{K}[t_1, \cdots, t_{|\sigma|}]$ ← polynomial

の族 $\{\Phi_\sigma\}_{\sigma \in S_*(X)}$ であって
適切な「貼り合わせ条件」をみたすもの
"simplicial map"

§2.1 The construction $A(K)$

Def 2.1.1 (simp. dga)

simplicial dga とは Def 1.12 において set を dga に、map を dga hom におきかえたもののこと

i.e.
族 $A = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ であって
- $A_n = (A_n, d)$: dga
- $d_i : (A_n, d) \to (A_{n-1}, d)$: dga hom
- $s_j : (A_n, d) \to (A_{n+1}, d)$: dga hom

が適切な条件をみたすもの

Def 2.1.2

A: simp. dga, K: simp. set に対し、
$A(K) = (A(K), d)$: dga を次で def:

- $A^p(K) := \{\Phi : K \to A^p : \text{simp. map}\}$, $\sigma \mapsto \Phi_\sigma$
  (where $A^p = \{A^p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$: simp. mod set)
- 和, scalar倍, 積, differential は値で入れる：
  $(\Phi + \Psi)_\sigma := \Phi_\sigma + \Psi_\sigma$, $(\lambda \cdot \Phi)_\sigma := \lambda \cdot \Phi_\sigma$
  $(\Phi \cdot \Psi)_\sigma := \Phi_\sigma \cdot \Psi_\sigma$, $(d\Phi)_\sigma := d(\Phi_\sigma)$
  (where $\Phi, \Psi \in A^p(K)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\sigma \in K$)

また、X: top. sp. に対して
$A(X) := A(S_*(X))$ と def.

Rmk 2.1.3

$A(K)$ は A について covariant
K について contravariant である。

Def 2.1.4

A: simp. dga について、
A: extendable
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ [Given $n \geq 1$, $I \subset \{0, 1, \cdots, n\}$: subset
$\Phi_i \in A_{n-1}$ for $i \in I$
s.t. $d_i \Phi_j = d_{j-1} \Phi_i$ for $i < j \in I$
Then
$\exists \Phi \in A_n$ s.t. $\forall i \in I$, $d_i \Phi = \Phi_i$]

acyclic っぽい？

Prop 2.1.5

> A : extendable simp. dga
> K : simp. set, $L \subset K$: simp. subset
> **Then**
> $\mathrm{incl}^* : A(K) \longrightarrow A(L)$: surj.
> よって、
> $A(K,L) := \mathrm{Ker}(\mathrm{incl}^* : A(K) \to A(L))$
> $\subset A(K)$: differential ideal
> と定めれば　　　　($\Rightarrow$ complex)
> $0 \to A(K,L) \to A(K) \to A(L) \to 0$
> : exact seq. of complexes

proof

$K(n) \subset K$: simp. subset を

$K(n) := \bigcup_{k \le n} K_k \cup$ (その degeneracy たち)

で def　　　　<u>n-skeleton</u> of K

$\forall \varphi \in A(L)$ をとる。

これに対し、

$\Phi(n) : K(n) \longrightarrow A$: simp. map

s.t. $\begin{cases} \cdot\ \Phi(n)|_{K(n-1)} = \Phi(n-1) \\ \cdot\ \Phi(n)|_{K(n) \cap L} = \varphi|_{K(n) \cap L} \end{cases}$

を n についての induction でつくる。

$\Phi(n-1)$ までつくれたとして、$\Phi(n)$ をつくるには、

$\sigma \in K_n$ に対する $\Phi(n)_\sigma$ を定めればよい

$d_i\sigma \in K_{n-1}$ に対する値 $\Phi(n-1)_{d_i\sigma}$ は既に定まっているので、extendable の条件を用いることで、$\Phi(n)_\sigma$ を定めることができる。

(well-defd とか、simp. map になっているかとか はcheck する必要があるが 省略)

//

Thm 2.1.6

> A, B : simp. dga
> $\theta : A \longrightarrow B$: hom of simp. dga
> **Assume**
> - A, B : extendable
> - θ : quasi-isom of simp. dga
>
> ($\underline{\text{i.e.}}$ $\forall n$. $\theta_n : A_n \xrightarrow{\simeq} B_n$: quasi-isom of dga)
> **Then**
> $\forall K$: simp. set に対し、
> $\theta_* : A(K) \xrightarrow{\simeq} B(K)$: quasi-isom of dga

proof $\forall n$ に対して

$\theta_* : A(K(n)) \xrightarrow{\simeq} B(K(n))$: quasi-isom

が成り立つことを示せばよい

(Rmk $K = \varinjlim K(n)$ だが
$H(A(K)) = H(A(\varinjlim K(n))) = H(\varprojlim A(K(n)))$
なので、少し議論が要る　　$\neq \varprojlim H(A(K(n)))$)

Prop 2.1.5 より

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & A(K(n), K(n-1)) & \to & A(K(n)) & \longrightarrow & A(K(n-1)) & \to 0 & : \text{exact} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \to & B(K(n), K(n-1)) & \to & B(K(n)) & \longrightarrow & B(K(n-1)) & \to 0 & : \text{exact} \end{array}$$

なので

$\theta_* : A(K(n), K(n-1)) \xrightarrow{\simeq} B(K(n), K(n-1))$

を示せば良い。($\Rightarrow$ induction)　　: quasi-isom.

ここで、

$\Delta[n]$: simp. set を "n-simplex"
$\cup$
$\partial\Delta[n]$: simp. subset を その boundary

と定めると、

$A(K(n), K(n-1)) \cong \prod_{\substack{\sigma \in K_n \\ \text{non-degenerate}}} A(\Delta[n], \partial\Delta[n])$　　(Bも同様)

なので、

$\theta_* : A(\Delta[n], \partial\Delta[n]) \xrightarrow{\simeq} B(\Delta[n], \partial\Delta[n])$

を示せばよい　　: quasi-isom

これの proof は 略

($\cdot\ \partial\Delta[n] = \Delta[n](n-1)$ に着目して、ind. hyp. を使う
$\cdot\ A(\Delta[n]) = A_n$
$\cdot\ 0 \to A(\Delta[n], \partial\Delta[n]) \to A(\Delta[n]) \to A(\partial\Delta[n]) \to 0$: exact)

//

§2.2 Definition of A_{PL}

A_{PL} : simp. dga を def したい.

まず. $n \in \mathbb{N}$ に対し

$(\Lambda V_n, d)$: dga

を

$$\left[\begin{array}{l} V_n := \mathbb{K}\{t_0, \cdots, t_n, y_0, \cdots, y_n\} : \text{graded mod} \\ \quad (\underline{\text{where}}\ |t_i| = 0,\ |y_i| = 1) \\ d : \Lambda V_n \longrightarrow \Lambda V_n \\ \quad t_i \longmapsto y_i \quad \rightsquigarrow y_i = dt_i \\ \quad y_i \longmapsto 0 \end{array}\right.$$

により def. これにより,

(poly. diff. forms on Δ^n)

$$(A_{PL})_n := (\Lambda V_n / I_n, d) \quad : \text{dga}$$

$$\left(\underline{\text{where}}\quad I_n := \left(1 - \sum_{i=0}^{n} t_i,\ \sum_{i=0}^{n} y_i\right) \underset{\text{ideal}}{\subset} \Lambda V_n\right)$$

と def.

Lem 2.2.1

$\boxed{\begin{array}{l} (1)\ (A_{PL})_n \cong (\Lambda(t_1, \cdots, t_n, y_1, \cdots, y_n), d) : \text{dga isom} \\ \qquad\qquad\qquad \text{defined by } dt_i = y_i,\ dy_i = 0 \\ (2)\ H^*((A_{PL})_n) \cong \mathbb{K}\cdot 1 \end{array}}$

proof (1) 明らか.

(2) $(A_{PL})_n \cong (\Lambda(t_1, \cdots, t_n, y_1, \cdots, y_n), d)$

$\qquad \cong \bigotimes_{i=1}^{n} (\Lambda(t_i, y_i), d)$

よって. Künneth thm より.

$H^*(\Lambda(t, y), d) \cong \mathbb{K}\cdot 1 \quad \left(\underline{\text{where}}\ dt = y\right)$

を示せばよいが

$$\Lambda(t, y) = \mathbb{K}\left\{\begin{array}{l} 1, t, t^2, t^3, \cdots \\ y, ty, t^2y, t^3y, \cdots \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} d(t^k) = k\, t^{k-1} y \\ d(t^k y) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{char}\,\mathbb{K} = 0 \text{ が}$$

本質的に必要.

より ok. //

simp. dga にしたいので. d_i, s_j を次で def:

$$d_i : (A_{PL})_n \longrightarrow (A_{PL})_{n-1} \quad : \text{dga hom}$$

$$t_k \longmapsto \begin{cases} t_k & (k < i) \\ 0 & (k = i) \\ t_{k-1} & (k > i) \end{cases}$$

$$y_k \longmapsto \begin{cases} y_k & (k < i) \\ 0 & (k = i) \\ y_{k-1} & (k > i) \end{cases}$$

$$s_j : (A_{PL})_n \longrightarrow (A_{PL})_{n+1} \quad : \text{dga hom}$$

$$t_k \longmapsto \begin{cases} t_k & (k < j) \\ t_k + t_{k+1} & (k = j) \\ t_{k+1} & (k > j) \end{cases}$$

$$y_k \longmapsto \begin{cases} y_k & (k < j) \\ y_k + y_{k+1} & (k = j) \\ y_{k+1} & (k > j) \end{cases}$$

これにより,

$A_{PL} = \{(A_{PL})_n\}_{n \in \mathbb{N}}$: simp. dga

が定まる.

($y_i = dt_i$ なので. $(A_{PL})_n^p$ の元は

$$\sum_{i_1, \cdots, i_p} f_{i_1 \cdots i_p}\, dt_{i_1} \cdots dt_{i_p}$$

$$(f_{i_1 \cdots i_p} \in \mathbb{K}[t_0, \cdots, t_q])$$

の形に書ける.

$\rightsquigarrow$ "poly. diff. form")

Lem 2.2.2

$\boxed{A_{PL} : \text{extendable.}}$

proof 頑張ってつくる. (略) //

§2.3 Proof of quasi-isom $A_{PL}(X) \simeq C^*(X)$

$\Delta[n]$: simp. set "n-simplex"

Def 2.3.1

C_{PL} : simp. dga を次で def:

$(C_{PL})_n := C^*(\Delta[n])$

(d_i, s_j は適切に)

Lem 2.3.2

K: simp. set に対し

$C_{PL}(K) \cong C^*(K)$: isom of dga

~~proof~~ $\Delta[n]$ が "universal" なものだから //

C_{PL} と A_{PL} により,

$C_{PL}\otimes A_{PL}$: simp. dga

with $C_{PL} \longrightarrow C_{PL}\otimes A_{PL}$, $x \longmapsto x\otimes 1$, $A_{PL} \longrightarrow C_{PL}\otimes A_{PL}$, $y \longmapsto 1\otimes y$

が自然に定まる.

Lem 2.3.3

(1) $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し

$H((C_{PL})_n) \cong H((C_{PL}\otimes A_{PL})_n) \cong \mathbb{k}\cdot 1$

(2) C_{PL}, $C_{PL}\otimes A_{PL}$: extendable

~~proof~~ 略 //

Thm 2.3.4

K: simp. set に対し,

$C^*(K) \xrightarrow{\simeq} (C_{PL}\otimes A_{PL})(K) \xleftarrow{\simeq} A_{PL}(K)$: quasi-isom's of dga

とくに X: top. sp. に対し,

$C^*(X) \xrightarrow{\simeq} (C_{PL}\otimes A_{PL})(X) \xleftarrow{\simeq} A_{PL}(X)$

~~proof~~

Thm 2.1.6, Lem 2.2.1, Lem 2.2.2, Lem 2.3.2, Lem 2.3.3 より明. //

まとめ

係数が field of char 0 なら, $C^*(X)$ の代わりに $A_{PL}(X)$: commutative dga を考えれば良い

§3 Semifree modules & Tor

§3.0 Intro.

目標は次の Thm を紹介すること:

Thm (Eilenberg-Moore)

$F \to E \xrightarrow{\pi} B$: fibration

with { ・$H^*(F)$: fin type/$\mathbb{k}$ ・B : 1-conn.

$f: X \to B$ with X: 0-conn.

として, 右図の pullback を考える.

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Then

$\mathrm{Tor}_{C^*(B)}(C^*(X), C^*(E)) \xrightarrow{\cong} H^*(f^*E)$: isom

この Thm は 標語的には 次のように言える:

「空間の homotopy pullback の cohomology と 代数の homotopy pushout の cohomology が同型だ

Rmk

・π が fibration だから, 上の pullback は homotopy pullback にもなっている.

・Tor は $\otimes$ (= pushout of algebras) を quasi-isom 不変にしたものなので homotopy pushout のようなもの と言える

説明するべきこと:

(a) Tor の def

(係数環 ($C^*(B)$) も微分を持っているので, 「普通の」Tor を修正する必要がある)

(b) Tor の計算方法

ここでは (a) を扱い, (b) は §4, §5 で扱う

dga 上の Tor を def する前に 「普通の」Tor を復習しよう.

§3.1 Recall from classical homological algebra

$\begin{cases} R : \text{ring without grading, differential} \\ M : R\text{-mod}, \quad N : \text{right } R\text{-mod} \end{cases}$

とする.

このとき, M の <u>projective resolution</u> とは

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

: exact seq of R-mod's

s.t. $\forall n$. P_n : projective$/R$

これを用いて,

$$\mathrm{Tor}_n^R(N,M) := H_n(N \otimes_R P)$$

$\left(\begin{array}{l} \underline{\text{where}} \\ N \otimes_R P = (\cdots \to N \otimes_R P_2 \to N \otimes_R P_1 \to N \otimes_R P_0 \to 0) \\ \qquad : \text{complex} \end{array} \right)$

と def するのであった.

これらは次のように言い換えられる

- M の projective resolution とは
  $P \xrightarrow{\simeq} M$: quasi-isom
  $\left(\begin{array}{ll} \underline{\text{where}} & M = (\cdots \to 0 \to M \to 0 \to \cdots) \\ & P = (\cdots \to P_1 \to P_0 \to 0 \to \cdots) \\ & \quad \text{with } P_n : \text{projective}/R \end{array} \right)$
- $\mathrm{Tor}^R(N,M) := H(N \otimes_R P)$
  $\left(\begin{array}{l} \underline{\text{where}} \\ N = (\cdots \to 0 \to N \to 0 \to \cdots) : \text{complex} \end{array} \right)$

上のような P が持つ重要な性質として, 次がある:

<u>Prop 3.1.1</u>

> P : as above
> $f : C \xrightarrow{\simeq} C'$: quasi-isom of complex$/R$
> <u>Then</u>
> $f \otimes_R 1 : C \otimes_R P \xrightarrow{\simeq} C' \otimes_R P$: quasi-isom

<u>proof</u>

$P(k) := (\cdots \to 0 \to 0 \to P_k \to P_{k-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0 \to \cdots)$

$\subset P$: sub complex

$0 \to P(k-1) \to P(k) \to \underset{\text{flat}}{P_k} \to 0$: split exact

flat $\Rightarrow \otimes_R P_k$ は quasi-isom を保つ.

↪ induction と $\varinjlim$ より $\otimes_R P$ も quasi-isom を保つ. //

§3.2 Definition & Properties of Semifree modules

以下

(R,d) : dga

とする.

<u>Def 3.2.1</u>

> (P,d) : <u>semifree</u> (R,d)-mod とは.
> (R,d)-module であって
> $\exists\ 0 = P(-1) \subset P(0) \subset P(1) \subset \cdots \subset P$
> : increasing sequence of (R,d)-submodules
> s.t. $\begin{cases} \cdot\ P = \bigcup_k P(k) \\ \cdot\ \forall k.\ P(k)/P(k-1) : (R,d)\text{-free} \end{cases}$
> $\left(\begin{array}{l} \text{i.e. } \cong \bigoplus_\lambda (R,d)[n_\lambda] \\ \underline{\text{where}}\ [n_\lambda] \text{ means shift} \end{array} \right)$

<u>Prop 3.2.2</u>

> $\forall (M,d)$: (R,d)-mod
> $\exists f : \exists (P,d) \xrightarrow{\simeq} (M,d)$: quasi-isom
> s.t. (P,d) : (R,d)-semifree

<u>proof</u>

$f(k) : (P(k),d) \longrightarrow (M,d)$: (R,d)-linear of deg 0

を inductive に構成していく.

<u>k=0</u> $H(M,d)$ の generator$/\mathbb{K}$ $\{[m_\lambda]\}_{\lambda \in \Lambda_0}$ をとる.

これにより,

$\begin{cases} \cdot\ (P(0),d) := (R,d) \otimes \mathbb{K}\{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_0} \\ \qquad (\underline{\text{where}}\ |v_\lambda| = |m_\lambda|) \\ \cdot\ f(0) : (P(0),d) \longrightarrow (M,d) \\ \qquad v_\lambda \longmapsto m_\lambda \end{cases}$

と定める.

$\longrightarrow H(f(0))$: surj.

<u>k=1</u> $\mathrm{Ker}\,H(f(0))$ の generator$/\mathbb{K}$ $\{[p_\lambda]\}_{\lambda \in \Lambda_1}$ をとる.

これにより,

- $P(1) := P(0) \oplus (R \otimes \mathbb{K}\{v'_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_1})$ $\left(\begin{array}{l} \underline{\text{where}} \\ |v'_\lambda| = |p_\lambda| - 1 \end{array} \right)$
- $dv'_\lambda := p_\lambda$
- $f(1) : (P(1),d) \longrightarrow (M,d)$
  $v'_\lambda \longmapsto m'_\lambda$ $\left(\begin{array}{l} \underline{\text{where}} \\ dm'_\lambda = f p_\lambda \end{array} \right)$

と定める.

$\rightsquigarrow H(f(1))$: surj.

<u>k=2</u> $\mathrm{Ker}\,H(f(1))$ の generator$/\mathbb{K}$ $\{[p'_\lambda]\}_{\lambda \in \Lambda_2}$ をとる.

これにより $\cdots$

これをくり返して, $(P,d) := \varinjlim (P(k),d)$, $f := \varinjlim f(k)$

とすれば ok. //

Def 3.2.3

Prop 3.2.2 の f (又は単に (P,d)) を <u>semifree resolution</u> of (M,d) という.

Prop 3.2.4 (lifting property)

(P,d): semifree (R,d)-mod

$(M,d), (N,d)$: (R,d)-mod

$\psi : (P,d) \longrightarrow (N,d)$: (R,d)-linear of deg 0

$\eta : (M,d) \xrightarrow{\simeq} (N,d)$: quasi-isom $/(R,d)$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\eta"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\exists\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] & N \end{tikzcd}$$

<u>Then</u>

$\exists\varphi : (P,d) \longrightarrow (M,d)$: (R,d)-linear of deg 0

s.t. $\eta\circ\varphi \underset{R}{\simeq} \psi$

(<u>i.e.</u> $\exists h : P \longrightarrow N$: R-linear of deg(-1)
s.t. $\eta\circ\varphi - \psi = d\circ h + h\circ d$)

しかも、このような φ は unique up to homotopy

← "cofibrant"

<u>proof</u>

$\varphi(k) : (P(k),d) \longrightarrow (M,d)$

を k について inductive につくっていく. //

Cor 3.2.5

$\forall (M,d)$: (R,d)-mod に対し、semifree resol of (M,d) は unique up to homotopy.

Prop 3.2.6

(P,d) : semifree (R,d)-mod

$f : (M,d) \xrightarrow{\simeq} (N,d)$: quasi-isom. of (R,d)-mod's

<u>Then</u> (「左右」を適切に補って)

(1) $f \otimes_R 1 : (P \otimes_R M, d) \xrightarrow{\simeq} (P \otimes_R N, d)$: quasi-isom

(2) $\mathrm{Hom}_R(f,1) : (\mathrm{Hom}_R(P,M),d) \xrightarrow{\simeq} (\mathrm{Hom}_R(P,N),d)$: quasi-isom

<u>proof</u> (1) $P(k)/P(k-1)$: (R,d)-free に注意して Prop 3.1.1 と同様にやれば ok

(2) Prop 3.2.4 (+ degree shift) に他ならない //

§3.3 Definition & Properties of Tor

Def 3.3.1

(R,d) : dga

(M,d) : right (R,d)-mod, (N,d) : left (R,d)-mod に対し.

$$\mathrm{Tor}_R(M,N) := H((M,d) \otimes_R (P,d))$$

(<u>where</u> $(P,d) \xrightarrow{\simeq} (N,d)$: semifree resol.)

Rmk 3.3.2

- Cor 3.2.5 より well-def'd
- Prop 3.2.6 (1) より, (N,d) の代わりに (M,d) の semifree resol をとったものが, $(M,d),(N,d)$ 両方の semifree resol をとったものとも同型である.
- R : without grading, differential のとき

$$\mathrm{Tor}^R_n(M,N) = \mathrm{Tor}^{-n}_R(M,N)$$

「普通の」　　　Def 3.3.1 のもの

Prop 3.3.3

(1) Tor は (R,d), (M,d), (N,d) について functorial

<u>i.e.</u> $\varphi : (R,d) \longrightarrow (R',d)$: dga hom

$f : (M,d) \longrightarrow (M',d)$: right (R,d)-linear

$g : (N,d) \longrightarrow (N',d)$: left (R,d)-linear

に対し.

$\mathrm{Tor}_\varphi(f,g) : \mathrm{Tor}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{R'}(M',N')$

が定まる

(2) (1) において.

φ, f, g : quasi-isom $\Rightarrow$ $\mathrm{Tor}_\varphi(f,g)$: isom

が成立

<u>proof</u>

(1) Prop 3.2.4 より ok

(2) Prop 3.2.6 を使って ちょっと頑張ればできる. //

Def 3.3.4

$\mathrm{Tor}_R(M,N) \longrightarrow H(M \otimes_R N)$: hom of graded mod

が 次により (canonical に) 定まる:

$$\mathrm{Tor}_R(M,N) = H(M \otimes_R P) \xrightarrow{H(1\otimes f)} H(M \otimes_R N)$$

(<u>where</u> $f : (P,d) \xrightarrow{\simeq} (N,d)$: semifree resol $/(R,d)$)

§3.4 Eilenberg-Moore theorem

statement を再掲しよう　$\mathbb{K}$: field of $\forall$char でok.

Thm 3.4.1 (Eilenberg-Moore)

$F \to E \xrightarrow{\pi} B$: fibration

with $\begin{cases} \cdot\ H^*(F) : \text{fin. type}/\mathbb{K} \\ \cdot\ B : 1\text{-conn.} \end{cases}$

$f : X \to B$ with X: 0-conn.

とし, 右図の pullback を考える.

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Then

$$\theta : \mathrm{Tor}_{C^*(B)}(C^*(X), C^*(E)) \xrightarrow{\cong} H^*(f^*E)$$

proof θ は次により def:

$$\mathrm{Tor}_{C^*(B)}(C^*(X), C^*(E)) \xrightarrow{\text{Def 3.3.4}} H(C^*(X) \otimes_{C^*(B)} C^*(E)) \xrightarrow{H(\varphi)} H(f^*(E))$$

(where

$$\varphi : C^*(X) \otimes_{C^*(B)} C^*(E) \longrightarrow C^*(f^*E)$$
$$x \otimes y \longmapsto \pi'^*(x) \cdot f'^*(y)$$

: chain map)

これが isom であることは 2段階に分けて示す.

Step.1 $X = pt$ のとき

このとき, $f^*E = F$

つまり,

$$\theta : \mathrm{Tor}_{C^*(B)}(\mathbb{K}, C^*(E)) \to H^*(F)$$

となっている.

$F \to E \to B$: fibration

に対する Serre s.s. を詳しく調べると θ: isom が示される.

Step.2 X: 一般のとき

$P \to C^*(E)$: semifree resol$/C^*(B)$ とすると

$\theta = H(\tilde{\theta})$ where $\tilde{\theta} : C^*(X) \otimes_{C^*(B)} P \to C^*(f^*E)$

と書ける. ここで, $\tilde{\theta}$ の両辺に filtration を

$\begin{cases} \cdot\ C^*(X) \otimes_{C^*(B)} P \text{ には } C^*(X) \text{ における degree で} \\ \cdot\ C^*(f^*E) \text{ には Serre s.s. の filtration で} \end{cases}$

入れて, それらの s.s. を比較すると E_1 では

$$E_1\theta : C^*(X) \otimes H(\mathbb{K} \otimes_{C^*(B)} P) \to C^*(X) \otimes H^*(F)$$

となる. Step.1 より, これは isom. //

Rmk 3.4.2

$\mathrm{Tor}_{C^*(B)}(C^*(X), C^*(E))$ に適切に積を定めると, θ は graded alg の isom になる.

(non-commutative なので「積」が定まることは非自明)

Cor 3.4.3

$\mathbb{K}$: field of char 0

Thm 3.4.1 の状況で

$$\mathrm{Tor}_{A_{PL}(B)}(A_{PL}(X), A_{PL}(E)) \xrightarrow{\cong} H^*(f^*E)$$

proof A_{PL}, Tor, θ の naturality よりok. //

具体例を計算するためには左辺の Tor を計算する必要があるが, 次の理由からこれは難しい.

$\begin{cases} \text{① そもそも } C^*(-) \text{ や } A_{PL}(-) \text{ が難しい} \\ \text{② semifree resol が分からない} \end{cases}$

解決策

① $A_{PL}(-)$ を Sullivan model でおきかえる

② relative Sullivan model を使って semifree resol が (比較的) 容易につくれる

⟶ §4 で詳しく扱う

ちなみに, ① の解決策として次も有名:

Thm 3.4.4 (Eilenberg-Moore)

$\mathbb{K}$: field (of $\forall$char)

(R, d) : dga with $\begin{cases} H^0(R,d) \cong \mathbb{K} \\ H^1(R,d) = 0 \end{cases}$

(M, d) : non-negative right (R,d)-mod

(N, d) : 〃 left 〃

Then

$\exists \{E_r^{p,q}, d_r\}$: spectral sequence s.t.

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Tor}^{p,q}_{H(R)}(H(M), H(N)) \Rightarrow \mathrm{Tor}^{p+q}_R(M, N)$$

Rmk 3.4.5

(R, d) に対する 1-conn の仮定は s.s. の収束性において必要. (なくても頑張ればできるかもしれないけど…)