ಕರ್ನಾಟಕ ಸರ್ಕಾರ

ಗಣಿತ

9

ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿ

ಭಾಗ – ೨

विद्यया ऽमृतमश्नुते
एन सी ई आर टी
NCERT

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಮಂಡಳಿ
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ (ರಿ)
100 ಅಡಿ ವರ್ತುಲ ರಸ್ತೆ, ಬನಶಂಕರಿ 3ನೇ ಹಂತ,
ಬೆಂಗಳೂರು – 560 005

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the national Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognize that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

This aims imply considerable change is school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather then a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organizations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, *Chairman,* Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P. Sinclair, Director, NCERT and *Professor of Mathematics* , IGNOU, New Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT

Members

A.K. Wazalwar, *Professor and Head*, DESM, NCERT

Anjali Lal, *PGT*, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

Anju Nirula, *PGT*, DAV Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Department of Mathematics & Astronomy, Lucknow University, Lucknow

K.A.S.S.V. Kameswara Rao, *Associate Professor*, Regional Institute of Education, Bhubaneswar

Mahendra R. Gajare, *TGT,* Atul Vidyalya, Atul, Dist. Valsad

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, ST. John's Road, Bangalore

Sanjay Mudgal, *Lecturer*, CIET, NCERT

Shashidhar Jagadeeshan, *Teacher and Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S. Venkataraman, *Lecturer*, School of Sciences, IGNOU, New Delhi

Uaday Singh, *Lecturer*, DESM, NCERT

Ved Dudeja, *Vice-Principal* (Retd.), Govt. Girls Sec. School, Sainik Vihar, Delhi

Member-Coordinator

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT (till December 2005)
R.P. Maurya, *Professor*, DESM, NCERT (Since January 2006)

ACKNOWLEDGEMENTS

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: A.K. Saxena, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, *HOD*, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, *PGT,* Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, *TGT,* S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, *TGT,* Kendriya Vidyalya, Sambalpur; D.R. Khandave, *TGT,* JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, *Assistant Master,* Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, *TGT,* K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, *TGT,* K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, *TGT,* JNV, Neriyamangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, *TGT,* CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, *TGT,* D.M. School, RIE, Bhopal; V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, *TGT*, A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor* and *Head* (Retd.), DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of *Computer Incharge,* Deepak Kapoor; *D.T.P. Operator,* Naresh Kumar; *Copy Editor,* Pragati Bhardwaj; and *Proof Reader,* Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

ಪರಿವಿಡಿ

ಭಾಗ – ೨

3HSEHU

ಪುಟಸಂಖ್ಯೆ

3I2APH

ಅಧ್ಯಾಯ – 8

ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರ

8.1 ಪೀಠಿಕೆ

ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಕಾರದ ಆಕೃತಿಗಳಾದ ಚೌಕಗಳು, ಆಯತಗಳು, ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. ಆಯತ, ಚೌಕ ಮುಂತಾದ ಆಕೃತಿಗಳ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಸಹ ನೀವು ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ನೆಲದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಈಗ ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ನಾವು ತರಗತಿಯ ನೆಲದ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಬಾಹುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ನಡೆಯುತ್ತಾ ಒಂದು ಸುತ್ತು ಹಾಕೋಣ. ನಾವು ನಡೆದ ದೂರವು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗಿದೆ. ತರಗತಿಯ ನೆಲವು ಆವರಿಸಿರುವ ಭಾಗವೇ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ವೇಳೆ ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯು ಆಯತಾಕಾರದಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದರ ಉದ್ದವು 10 m ಮತ್ತು ಅಗಲ 8 m ಆಗಿದ್ದರೆ. ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು $2(10\text{ m} + 8\text{ m}) = 36\text{ m}$ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $10\text{ m} \times 8\text{ m} = 80\text{ m}^2$ ಆಗುತ್ತದೆ.

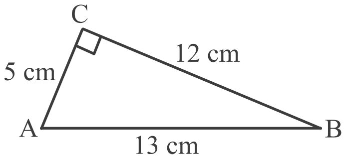
ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಏಕಮಾನವನ್ನು ಮೀಟರ್ (m) ಅಥವಾ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ (cm) ಇತ್ಯಾದಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಯಾವುದೇ ಸಮತಲಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಏಕಮಾನವನ್ನು ಚದರ ಮೀಟರ್ (m^2) ಅಥವಾ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ (cm^2) ಇತ್ಯಾದಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ವೇಳೆ ನೀವು ತ್ರಿಭುಜಾಕೃತಿಯ ಉದ್ಯಾನವನದಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿದ್ದೀರಿ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನೀವು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೀರಿ? ನಿಮ್ಮ ಈ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿರುವಂತೆ.

$$\boxed{\text{ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times \text{ಪಾದ} \times \text{ಎತ್ತರ}} \qquad \text{(I)}$$

ನಾವು ಗಮನಿಸಿದಂತೆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದ್ದರೆ, ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಪಾದವಾಗಿ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಎತ್ತರವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೇರವಾಗಿ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ ಬಾಹುಗಳು 5 cm, 12 cm, 13 cm ಆಗಿರಲಿ. ನಾವು 12 cm ಬಾಹುವನ್ನು ಪಾದವಾಗಿ 5 cm ಬಾಹುವನ್ನು ಎತ್ತರವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. (ಚಿತ್ರ 8.1 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 8.1

ನಂತರದಲ್ಲಿ, Δ ABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

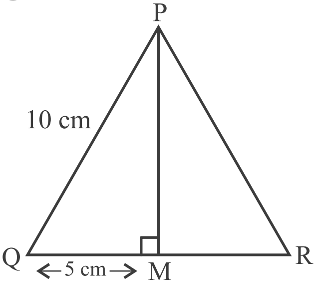
$$= \frac{1}{2} \times \text{ಪಾದ} \times \text{ಎತ್ತರ}$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 5 \text{ cm}^2$$

$$= 30 \text{ cm}^2$$

ನಾವು 5cm ಬಾಹುವನ್ನು ಪಾದವಾಗಿ ಮತ್ತು 12cm ಬಾಹುವನ್ನು ಎತ್ತರವಾಗಿಯೂ ಸಹ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 10 cm ಇರುವ ಒಂದು **ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ** PQRನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 8.2 ಗಮನಿಸಿ). ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಮಗೆ ಅದರ ಎತ್ತರ ಬೇಕಾಗಿದೆ. ನೀವು ಈ ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವೆ ?



ಚಿತ್ರ 8.2

ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ಗೊತ್ತಿದ್ದಾಗ, ಅದರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದು ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. M ಬಿಂದುವನ್ನು QR ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು P ಗೆ ಸೇರಿಸಿ. PMQ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, PM ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$PQ^2 = PM^2 + QM^2$$

ಅಂದರೆ, $(10)^2 = PM^2 + 5^2 \ (\because QM = MR)$

ಆದ್ದರಿಂದ $PM^2 = 75$

ಅಂದರೆ, $PM = \sqrt{75}$ cm

$$= 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

ನಂತರ Δ PQR ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times$ ಪಾದ $\times$ ಎತ್ತರ

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

$$= 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

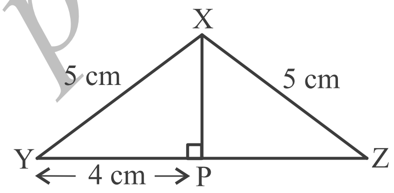
ಈಗ **ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ** ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸಹ ಈ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ನಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವೇ ? ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ತ್ರಿಭುಜ XYZ ನಲ್ಲಿ XY ಮತ್ತು XZ ಅಳತೆ 5 cm ಇರುವಂತೆ ಮತ್ತು ಅಸಮಬಾಹು YZ ನ ಅಳತೆ 8 cm ಇರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. [ಚಿತ್ರ 8.3 ಗಮನಿಸಿ].

ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ, ನಾವು ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು YZ ಬಾಹುವಿಗೆ X ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ XP ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ. XP ಲಂಬರೇಖೆಯು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ YZ ಅನ್ನು ಎರಡು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $YP = PZ = \frac{1}{2} YZ = 4$ cm

ನಂತರ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ

$$XP^2 = XY^2 - YP^2$$
$$= 5^2 - 4^2$$
$$= 25 - 16$$
$$= 9$$



ಚಿತ್ರ 8.3

$\therefore$ $XP = 3$ cm

ಈಗ Δ XYZನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times$ ಪಾದ YZ $\times$ ಎತ್ತರ XP

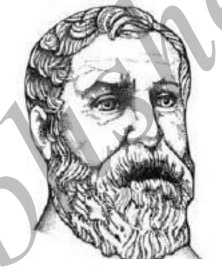
$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 3\ \text{cm}^2$$

$$= 12\ \text{cm}^2.$$

ಈಗ, ಒಂದು ವೇಳೆ ನಮಗೆ ಅಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ತಿಳಿದಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಎತ್ತರದ ಅಳತೆಯು ತಿಳಿದಿಲ್ಲ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನೀವು ಈಗಲೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಿಮ್ಮ ಹತ್ತಿರ 40 m , 32 m ಮತ್ತು 24 m ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನವಿದೆ. ನೀವು ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವಿರಿ. ನೀವು ತ್ರಿಭುಜದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಅದರ ಎತ್ತರವನ್ನು ನೀವು ಮೊದಲು ಲೆಕ್ಕಿಸಲೇಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ನಮಗೆ ಅದರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಯಾವುದೇ ಸುಳಿವು ಇಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. ಒಂದು ವೇಳೆ ನಿಮಗೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿದ್ದಲ್ಲಿ, ನೀವು ಮುಂದಿನ ವಿಭಾಗಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ.

8.2 ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ– ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರ

ಹೆರಾನ್ ಸುಮಾರು ಕ್ರಿ.ಶ.10ರಲ್ಲಿ ಈಜಿಪ್ಟ್ ದೇಶದ ಅಲೇಕ್ಸಾಂಡ್ರಿಯಾದಲ್ಲಿ ಜನಿಸಿದರು. ಅವರು ಅನ್ವಯಿಕ ಗಣಿತದ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ. ಗಣಿತೀಯ ಮತ್ತು ಭೌತಿಕ ವಿಷಯದ ಮೇಲೆ ಅವರು ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರದ ಬಹಳಷ್ಟು ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂದಿನ ದಿನದಲ್ಲಿ ಅವರನ್ನು ಈ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಎನ್ಸೈಕ್ಲೋಪಿಡಿಯಾ ಎನ್ನುತ್ತಿದ್ದರು ಎಂದು ತಿಳಿಯಲಾಗಿದೆ. ಅವರ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಕೆಲಸಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ಇದ್ದು ಅದನ್ನು ಮೂರು ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಮೊದಲ ಪುಸ್ತಕವು ಚೌಕಗಳ, ಆಯತಗಳ, ತ್ರಿಭುಜಗಳ, ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ (Trapezia) ಗಳ, ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಶಿಷ್ಟ ರೂಪದ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ, ನಿಯಮಿತ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳ, ವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹಾಗೂ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ಗಳ, ಶಂಕುಗಳ, ಗೋಳಗಳ ಮುಂತಾದವುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಹೆರಾನ್‌ರವರು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಅದರ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದಾರೆ.



ಹೆರಾನ್
(ಕ್ರಿ.ಶ.10 – ಕ್ರಿ.ಶ.75)
ಚಿತ್ರ 8.4

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಸೂತ್ರವನ್ನು **ಹೆರಾನ್** ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹೆರೋಸ್ (Hero's) ಸೂತ್ರ ಎಂದೂ ಸಹ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಅದರ ಹೇಳಿಕೆಯು $\boxed{\text{ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}$ (II)

ಇಲ್ಲಿ a, b ಮತ್ತು c ಗಳು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳಾಗಿವೆ. ಮತ್ತು s = ಅರ್ಧ ಸುತ್ತಳತೆ, ಅಂದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಅರ್ಧ ಸುತ್ತಳತೆ = $\dfrac{a+b+c}{2}$.

ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಸರಳವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿರದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಈ ಸೂತ್ರವು ತುಂಬಾ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ನಾವು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನ ABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 8.5 ಗಮನಿಸಿ.)

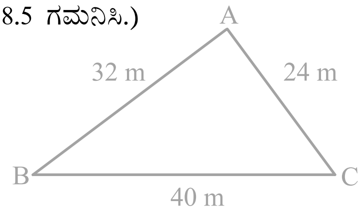
a = 40 m, b = 24 m, c = 32 m ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಆಗ $s = \dfrac{40+24+32}{2}$ m

$= 48$ m

$(s - a) = (48 - 40) = 8$ m,

$(s - b) = (48 - 24) = 24$ m,



ಚಿತ್ರ 8.5

$(s - c) = (48 - 32) = 16$ m

ಆದ್ದರಿಂದ, ಉದ್ಯಾನವನ ABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

$$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16}$$

$$= 384 \text{ m}^2$$

ಇಲ್ಲಿ, $32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ ಎಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಉದ್ಯಾನವನದ ಬಾಹುಗಳು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ. ದೊಡ್ಡ ಬಾಹು ಅಂದರೆ BC ಯು 40 m ಇದ್ದು ಅದು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಕರ್ಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು AB ಹಾಗೂ AC ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು $90°$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮೊದಲನೆಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ನಾವು ಉದ್ಯಾನವನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times 32 \times 24 \text{ m}^2 = 384 \text{ m}^2$

ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಮತ್ತು ನಾವು ಮೊದಲನೆಯ ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪಡೆದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿ ಇರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಈಗ ನೀವು ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಈ ಮೊದಲು ಚರ್ಚಿಸಿದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಸೂತ್ರದ ಸತ್ಯಾಂಶವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ,

(i) ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 10 cm ಇರುವ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ

(ii) ಪ್ರತಿ ಸಮಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ 5 cm ಮತ್ತು ಅಸಮ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ 8 cm ಇರುವ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ.

ನೀವು ಇವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

(i) ರಿಂದ, ನಮಗೆ $s = \frac{10 + 10 + 10}{2} = 15$ cm

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \sqrt{15(15-10)\,(15-10)\,(15-10)}$ cm^2

$$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5} \text{ cm}^2$$

$$= 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

(ii) ರಿಂದ, ನಮಗೆ $s = \frac{8 + 5 + 5}{2} = 9$ cm

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \sqrt{9\,(9-8)\,(9-5)\,(9-5)}$ cm^2

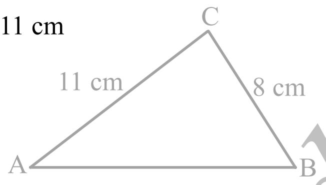
$$= \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4} \text{ cm}^2$$

$$= 12 \text{ cm}^2$$

ಈಗ ನಾವು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು 8 cm ಹಾಗೂ 11 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು $32cm$ ಇರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. [ಚಿತ್ರ 8.6 ಗಮನಿಸಿ]

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ = 32 cm, a = 8 cm ಮತ್ತು b = 11 cm



ಚಿತ್ರ 8.6

ಮೂರನೇ ಬಾಹು c = 32 cm – (8 + 11) cm = 13 cm

2s = 32 cm ಅಂದರೆ $s = \frac{32}{2} = 16$ cm

$(s - a) = (16 - 8)$ cm = 8 cm

$(s - b) = (16 - 11)$ cm = 5 cm

$(s - c) = (16 - 13)$ cm = 3 cm

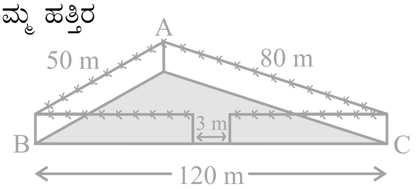
ಆದ್ದರಿಂದ, ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}\ \text{cm}^2$

$= 8\sqrt{30}\ \text{cm}^2$

ಉದಾಹರಣೆ 2: ತ್ರಿಭುಜಾಕೃತಿಯ ಉದ್ಯಾನವನ ABC ಯ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು 120 m, 80 m ಮತ್ತು 50 m ಆಗಿವೆ [ಚಿತ್ರ 8.7 ಗಮನಿಸಿ]. ಉದ್ಯಾನವನದ ಮಾಲಿ **ಧಾನಿಯಾ** ಅದರ ಸುತ್ತಲೂ ಬೇಲಿ ಹಾಕಲು ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿ ಹುಲ್ಲು ಬೆಳೆಸಲು ಇಚ್ಛಿಸಿದ್ದಾಳೆ. ಅವಳು ಹುಲ್ಲು ಬೆಳೆಸಬೇಕಾದ ಕ್ಷೇತ್ರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು? ಒಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಬಾಗಿಲಿಗಾಗಿ 3 m ಅಗಲದ ಜಾಗಬಿಟ್ಟು, ಪ್ರತಿ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 20 ರಂತೆ ಮುಳ್ಳುತಂತಿಯಿಂದ ಬೇಲಿ ಹಾಕಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಉದ್ಯಾನವನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ನಮ್ಮ ಹತ್ತಿರ



ಚಿತ್ರ 8.7

$2s = 50$ m + 80 m + 120 m = 250 m

ಅಂದರೆ $s = 125$ m

ಈಗ, $(s - a) = (125 - 120)$ m = 5 m

$(s - b) = (125 - 80)$ m = 45 m

$(s - c) = (125 - 50)$ m = 75 m

ಆದ್ದರಿಂದ, ಉದ್ಯಾನವನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}\ \text{m}^2$

$= 375\sqrt{15}\ \text{m}^2$

ಉದ್ಯಾನವನದ ಸುತ್ತಳತೆ = AB + BC + CA = 250 m

ಆದ್ದರಿಂದ ಉದ್ಯಾನವನದ ಸುತ್ತಲೂ ಬೇಲಿ ಹಾಕಲು ಬೇಕಾದ ತಂತಿಯ ಉದ್ದ = 250 m – 3 m (ಬಾಗಿಲಿಗೆ 3 m ಜಾಗವನ್ನು ಬಿಟ್ಟಿದೆ) = 247 m

ಮತ್ತು ಬೇಲಿ ಹಾಕಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ = ₹ 20 × 247

= ₹ 4,940

ಉದಾಹರಣೆ 3: ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಜಾಗದ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತವು 3 : 5 : 7 ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು 300 m. ಆದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಜಾಗದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದಗಳು $3x$, $5x$, $7x$ ಮೀಟರ್‌ಗಳಾಗಿರಲಿ [ಚಿತ್ರ 8.8 ಗಮನಿಸಿ].

ಈಗ, ಜಾಗದ ಸುತ್ತಳತೆ = $3x + 5x + 7x = 300$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $15x = 300$

$x = 20$

ಚಿತ್ರ 8.8

ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಜಾಗದ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು 3 × 20 m, 5 × 20 m, 7 × 20 m

ಅಂದರೆ, 60 m, 100 m, ಮತ್ತು 140 m.

ಈಗ ನೀವು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ, $s = \frac{60 + 100 + 140}{2}$ m = 150 m

ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \sqrt{150(150-60)(150-100)(150-140)}\ \text{m}^2$

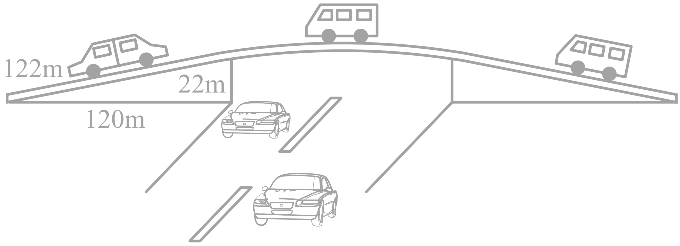
$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10}\ \text{m}^2$

$= 1500\sqrt{3}\ \text{m}^2$

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

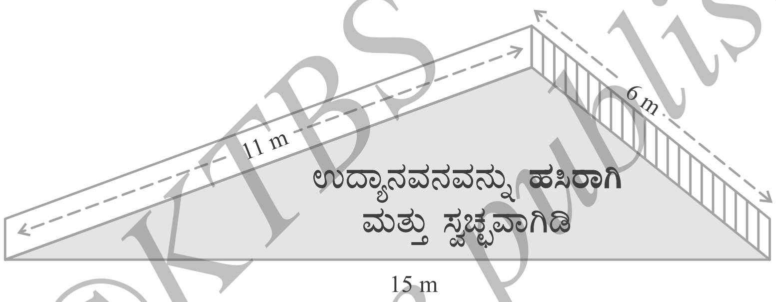
1. "ಮುಂದೆ ಶಾಲೆ ಇದೆ" ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಚಾರ ಸಂಜ್ಞಾಫಲಕವು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದಲ್ಲಿದ್ದು ಅದರ ಬಾಹು 'a' ಆಗಿದೆ. ಸಂಜ್ಞಾಫಲಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸಂಜ್ಞಾಫಲಕದ ಸುತ್ತಳತೆ 180 cm ಆದರೆ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ?

2. ಒಂದು ಮೇಲುಸೇತುವೆಯ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಬದಿಯ ಗೋಡೆಗಳನ್ನು ಜಾಹಿರಾತು ಬರೆಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ. ಗೋಡೆಯ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವು 122 m, 22 m ಮತ್ತು 120 m ಇವೆ [ಚಿತ್ರ 8.9 ಗಮನಿಸಿ]. ಜಾಹಿರಾತು ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿ m^2 ಗೆ ₹ 5000 ದಂತೆ ಆದಾಯಗಳಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಕಂಪನಿಯು ಈ ಗೋಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಮೂರು ತಿಂಗಳಿಗಾಗಿ ಬಾಡಿಗೆಗೆ ಪಡೆದರೆ, ಅದು ನೀಡುವ ಬಾಡಿಗೆ ಎಷ್ಟು?



ಚಿತ್ರ 8.9

3. ಒಂದು ಉದ್ಯಾನವನದಲ್ಲಿ ಜಾರುಬಂಡೆಯಿದೆ. ಅದರ ಒಂದು ಬದಿಯ ಗೋಡೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಬಣ್ಣದಿಂದ "**ಈ ಉದ್ಯಾನವನವನ್ನು ಹಸಿರಾಗಿ ಮತ್ತು ಸ್ವಚ್ಛವಾಗಿಡಿ**" ಎಂದು ಬರೆದಿದೆ [ಚಿತ್ರ 8.10 ಗಮನಿಸಿ]. ಗೋಡೆಯ ಬಾಹುಗಳು 15m, 11m ಮತ್ತು 6m ಇದ್ದರೆ ಬಣ್ಣ ಬಳಿದ ಜಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 8.10

4. ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು 18cm ಮತ್ತು 10cm ಇದೆ. ಮತ್ತು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು 42cm ಇರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತವು 12 : 17 : 25 ಮತ್ತು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು 540cm ಆಗಿದೆ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆಯು 30cm ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದ 12cm ಆಗಿದೆ. ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8.3 ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರದ ಅನ್ವಯ

ಒಬ್ಬ ಕೃಷಿಕಳು ತನ್ನ ಜಮೀನನ್ನು ಕೃಷಿ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಆ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಅವಳು ಕೆಲವು ಕೆಲಸಗಾರರನ್ನು ಅವರ ವೇತನವು ಅವರು ಕೃಷಿ ಮಾಡಿದ ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್ ಭೂಮಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಲಾಗುವ ಷರತ್ತಿನೊಂದಿಗೆ ನೇಮಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾಳೆ. ಅವಳು ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡುತ್ತಾಳೆ? ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಜಮೀನುಗಳು ಚತುರ್ಭುಜದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ನಾವು ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು, ನಂತರ ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕು. ನಾವು ಈಗ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಕಮಲಳು ತನ್ನ ಬಳಿ ಇರುವ 240m, 200m, 360m ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಜಮೀನಿನಲ್ಲಿ ಗೋಧಿಯನ್ನು ಬೆಳೆದಿದ್ದಾಳೆ. ಈ ಜಮೀನಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಂತೆ ಇರುವ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಜಮೀನಿನಲ್ಲಿ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವು 240m, 320m, 400m ಇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಅವಳು ಆಲೂಗಡ್ಡೆ ಮತ್ತು ಈರುಳ್ಳಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಯಲು ಇಚ್ಛಿಸಿದ್ದಾಳೆ [ಚಿತ್ರ 8.11 ಗಮನಿಸಿ]. ಅವಳು ಅದರ ಅತಿ ಉದ್ದದ ಬಾಹುವಿನ

ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಅಭಿಮುಖದ ಶೃಂಗಬಿಂದುವಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ ಹೊಲವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದ್ದಾಳೆ. ಮತ್ತು ಅದರ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಆಲೂಗಡ್ಡೆ, ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಈರುಳ್ಳಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಯುತ್ತಾಳೆ. ಗೋಧಿ, ಆಲೂಗಡ್ಡೆ ಮತ್ತು ಈರುಳ್ಳಿ ಬೆಳೆದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೆಕ್ಟೇರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ [1 ಹೆಕ್ಟೇರ್= 10,000 m^2]

ಪರಿಹಾರ : ABC ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಜಮೀನಿನಲ್ಲಿ ಗೋಧಿಯನ್ನು ಬೆಳೆದಿದ್ದಾಳೆ. ACD ಜಮೀನನ್ನು AD ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು E ಯನ್ನು C ಗೆ ಸೇರಿಸುವ ಮೂಲಕ ಎರಡು ವಿಭಾಗ ಮಾಡಿದೆ. ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ

$a = 200\text{m}, \quad b = 240\text{m}, \quad c = 360\text{m}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $s = \dfrac{200+240+360}{2}\text{ m} = 400\text{ m}$

ಗೋಧಿಯನ್ನು ಬೆಳೆದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

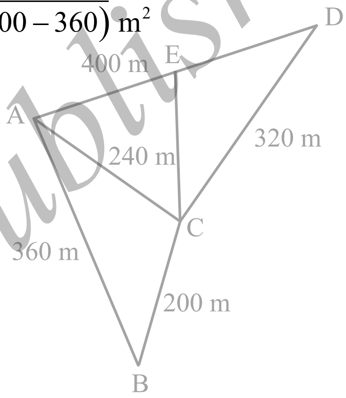
$$= \sqrt{400(400-200)(400-240)(400-360)}\ \text{m}^2$$

$$= = \sqrt{400\times 200\times 160\times 40}\ \text{m}^2$$

$$= 16000\sqrt{2}\ \text{m}^2$$

$= 1.6\sqrt{2}$ ಹೆಕ್ಟೇರ್‌ಗಳು

$= 2.26$ ಹೆಕ್ಟೇರ್‌ಗಳು (ಸರಿಸುಮಾರು)



ಈಗ ACD ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಇಲ್ಲಿ, $s = \dfrac{240+320+400}{2}\text{ m} = 480\text{ m}$

ಚಿತ್ರ 8.11

Δ ACD ದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \sqrt{480(480-240)(480-320)(480-400)}\ \text{m}^2$

$$= \sqrt{480\times 240\times 160\times 80}\ \text{m}^2$$

$$= 38400\ \text{m}^2$$

$= 3.84$ ಹೆಕ್ಟೇರ್‌ಗಳು

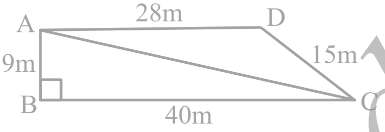
AD ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು E ಯನ್ನು C ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು ACD ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ನೀವು ಕಾರಣವನ್ನು ನೀಡುವಿರಾ? ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಅವುಗಳು AE ಮತ್ತು ED ಸಮ ಪಾದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಎತ್ತರವು ಸಹ ಸಮವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಆಲೂಗಡ್ಡೆಯನ್ನು ಬೆಳೆದ ಜಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಈರುಳ್ಳಿ ಬೆಳೆದ ಜಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

$= (3.84 \div 2)$ ಹೆಕ್ಟೇರ್‌ಗಳು $= 1.92$ ಹೆಕ್ಟೇರ್‌ಗಳು

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಒಂದು ಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸ್ವಚ್ಛತಾ ಆಂದೋಲನದ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಆಯೋಜಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಅವರು ಓಣಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ನಡೆಯುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ಗುಂಪು AB, BC ಮತ್ತು CA ಓಣಿಯಲ್ಲಿ ನಡೆದುಕೊಂಡು ಹೋದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ಗುಂಪು AC, CD ಮತ್ತು DA ಓಣಿಯಲ್ಲಿ ನಡೆದುಕೊಂಡು ಹೋಗುತ್ತಾರೆ

[ಚಿತ್ರ 8.12 ನೋಡಿ]. ನಂತರ ಅವರು ನಡೆದ ಓಣಿಯಿಂದ ಆವೃತವಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸ್ವಚ್ಛಗೊಳಿಸುತ್ತಾರೆ. AB = 9m, BC = 40m, CD = 15m, DA = 28m ಮತ್ತು $\angle B = 90°$ ಆದರೆ ಯಾವ ಗುಂಪು ಹೆಚ್ಚು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸ್ವಚ್ಛಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದು ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ ? ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸ್ವಚ್ಛಗೊಳಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಓಣಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳದೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: AB = 9 m ಮತ್ತು BC = 40 m, $\angle B = 90°$



ಚಿತ್ರ 8.12

$$AC = \sqrt{9^2 + 40^2}\ \text{m}$$

$$= \sqrt{81 + 1600}\ \text{m}$$

$$= \sqrt{1681}\ \text{m}$$

$$= 41\ \text{m}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲನೆಯ ಗುಂಪು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸ್ವಚ್ಛಗೊಳಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

Δ ABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{2}$ × ಪಾದ × ಎತ್ತರ = $\frac{1}{2} \times 40 \times 9 = 180\ \text{m}^2$

ಎರಡನೆಯ ಗುಂಪು 41m, 15m ಮತ್ತು 28m ಹೊಂದಿರುವ ಅಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ACD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸ್ವಚ್ಛಗೊಳಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $s = \frac{41 + 15 + 28}{2}\ \text{m} = 42\ \text{m}$

ಆದ್ದರಿಂದ Δ ACD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{42(42-41)(42-15)(42-28)}\ \text{m}^2$$

$$= \sqrt{42 \times 1 \times 27 \times 14}\ \text{m}^2$$

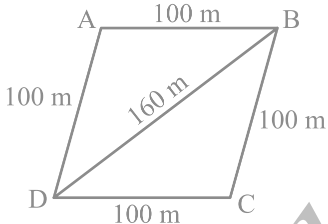
$$= 126\ \text{m}^2$$

ಮೊದಲನೆಯ ಗುಂಪು ಸ್ವಚ್ಛಗೊಳಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 180 m^2. ಇದು ಎರಡನೆಯ ಗುಂಪು ಸ್ವಚ್ಛಗೊಳಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕಿಂತ (180 – 126) m^2 = 54 m^2 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ.

ಎಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಸ್ವಚ್ಛಗೊಳಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು = (180 + 126) m^2 = 306 m^2

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಸಾನ್ಯಳ ಬಳಿಯಿರುವ ಒಂದು ತುಂಡು ಜಮೀನು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿದೆ. [ಚಿತ್ರ 8.13 ಗಮನಿಸಿ]. ಅವಳು ತನ್ನ ಒಬ್ಬ ಮಗಳು ಮತ್ತು ಒಬ್ಬ ಮಗನು ಜಮೀನಿನಲ್ಲಿ ಸಾಗುವಳಿ ಮಾಡಿ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಧಾನ್ಯಗಳನ್ನು ಅವರು ಬೆಳೆಯಬೇಕು ಎಂದುಕೊಂಡಿದ್ದಾಳೆ. ಅವಳು ಜಮೀನನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ವಿಭಾಗವಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತಾಳೆ. ಜಮೀನಿನ ಸುತ್ತಳತೆಯು 400 m ಮತ್ತು ಅದರ ಒಂದು ಕರ್ಣವು 160 m ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೂ ಅವರ ಬೆಳೆ ಬೆಳೆಯಲು ಸಿಗುವ ಜಮೀನಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ : ABCD ಯು ಜಮೀನು ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 8.13

ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ = 400 m

ಹಾಗಾದರೆ, ಅದರ ಪ್ರತಿ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ = $\frac{400}{4}$ m $= 100$ m

ಅಂದರೆ, AB = AD = 100 m

ಅದರ ಕರ್ಣ BD = 160 m

Δ ABD ಯ ಅರ್ಧ ಸುತ್ತಳತೆಯು, $s = \frac{100+100+160}{2}$ m $= 180$ m

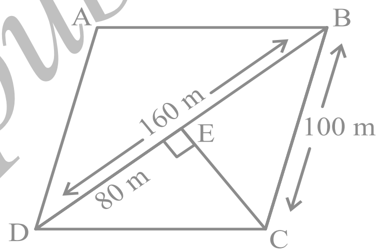
ಆದ್ದರಿಂದ, Δ ABD ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \sqrt{180(180-100)(180-100)(180-160)}\ m^2$

$= \sqrt{180 \times 80 \times 80 \times 20}\ m^2$

$= 4800\ m^2$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಜಮೀನಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 4800 m^2 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ:



ಚಿತ್ರ 8.14

CE $\perp$ BD ಎಳೆಯಿರಿ [ಚಿತ್ರ 8.14 ಗಮನಿಸಿ]

BD = 160 m

DE = 160 m ÷ 2 = 80 m

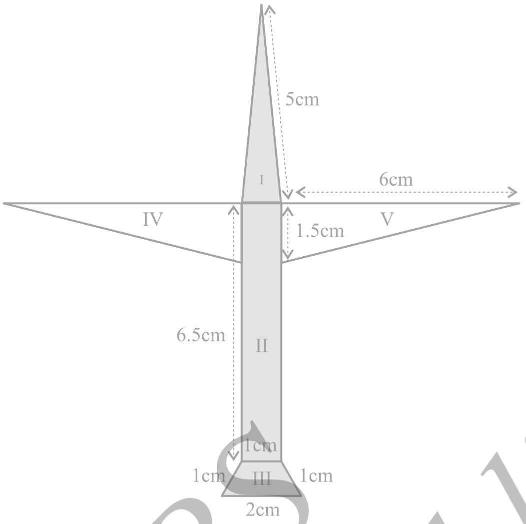
ಮತ್ತು $DE^2 + CE^2 = DC^2$, ಇದರಿಂದ

$$CE = \sqrt{DC^2 - DE^2} = \sqrt{100^2 - 80^2}\ m = 60\ m$$

ಆದ್ದರಿಂದ Δ BCD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times 160 \times 60\ m^2 = 4800\ m^2$

ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

1. ಒಂದು ಉದ್ಯಾನವನವು ABCD ಚತುರ್ಭುಜಾಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ $\underline{|C} = 90°$, AB = 9 m, BC = 12 m, CD = 5 m ಮತ್ತು AD = 8 m. ಅದು ಆಕ್ರಮಿಸುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. AB = 3 cm, BC = 4cm, CD = 4 cm, DA = 5 cm ಮತ್ತು AC = 5 cm ಇರುವ ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಚಿತ್ರ 8.15 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ಒಂದು ವಿಮಾನದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಾಧಾಳು ಬಣ್ಣದ ಕಾಗದದಿಂದ ಮಾಡಿದಳು. ಅವಳು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಕಾಗದದ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



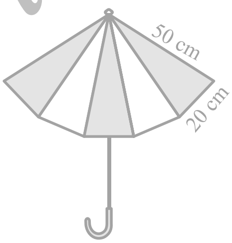
ಚಿತ್ರ 8.15

4. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ಹಾಗೂ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಒಂದೇ ಪಾದವನ್ನು ಮತ್ತು ಸಮನಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು 26 cm, 28 cm ಮತ್ತು 30 cm ಹಾಗೂ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು 28 cm ಪಾದದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದ್ದರೆ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

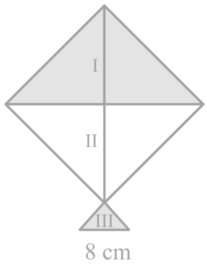
5. ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಜಮೀನು 18 ಹಸುಗಳು ಮೇಯಲು ಹಸಿರು ಹುಲ್ಲನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಪ್ರತಿ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವು 30m ಮತ್ತು ಅದರ ದೊಡ್ಡದಾದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು 48m ಆದರೆ, ಪ್ರತಿ ಆಕಳಿಗೆ ಸಿಗುವ ಹುಲ್ಲಿನ ಜಮೀನಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

6. ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಣ್ಣಗಳಿಂದ ಮಾಡಿದ ಹತ್ತು ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಬಟ್ಟೆಯನ್ನು ಹೊಲೆದು ಒಂದು ಛತ್ರಿ ಮಾಡಿದೆ [ಚಿತ್ರ 8.16 ಗಮನಿಸಿ]. ಪ್ರತಿ ತುಂಡು ಬಟ್ಟೆಯ ಅಳತೆಯು 20 cm, 50 cm ಮತ್ತು 48 cm ಆಗಿದೆ. ಛತ್ರಿಗೆ ಪ್ರತಿ ಬಣ್ಣದ ಎಷ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಬಟ್ಟೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ?

7. ಕರ್ಣ 32cm ಇರುವ ಚೌಕವನ್ನು ಹಾಗೂ 8 cm ಪಾದವನ್ನು ಮತ್ತು ಪ್ರತೀ ಬಾಹು 6 cm ಇರುವ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಗಾಳಿಪಟವು ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಛಾಯೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ 8.17 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಹೊಂದಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಪ್ರತೀ ಛಾಯೆಯ ಕಾಗದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?



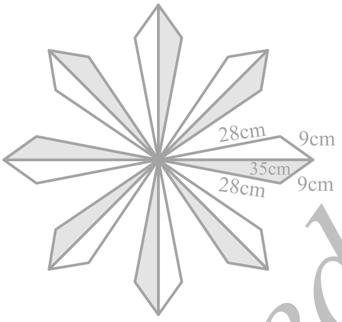
ಚಿತ್ರ 8.16



ಚಿತ್ರ 8.17

8. ನೆಲದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಹೂವಿನ ವಿನ್ಯಾಸವು 16 ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಹಾಸುಗಲ್ಲುಗಳಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಈ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು 9cm, 28cm ಮತ್ತು 35cm ಆಗಿವೆ. [ಚಿತ್ರ 8.18 ಗಮನಿಸಿ]. ಈ ಹಾಸುಗಲ್ಲುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ cm^2 ಗೆ 50 ಪೈಸೆಯಂತೆ ನುಣುಪು ಮಾಡಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಒಂದು ಜಮೀನ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳು 25 m ಮತ್ತು 10 m ಹಾಗೂ ಅದರ ಸಮಾಂತರವಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳು 14 m ಮತ್ತು 13 m ಆಗಿವೆ, ಜಮೀನಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 8.18

8.4 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

1. a,b ಮತ್ತು c ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. ಸೂತ್ರದ ಹೇಳಿಕೆಯು,

$$\text{ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{ಇಲ್ಲಿ } s = \frac{a+b+c}{2} \text{ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.}$$

2. ಚತುರ್ಭುಜದ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕರ್ಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ, ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

3IB6R5

ಅಧ್ಯಾಯ – 9

ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತ

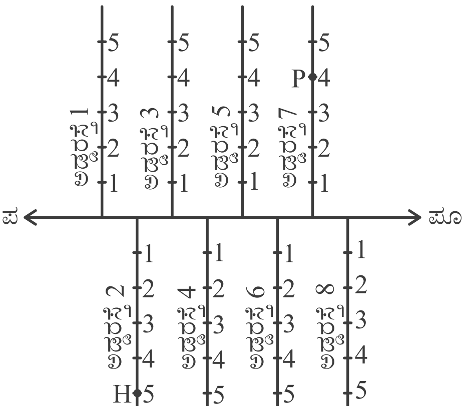
What's the good of Mercator's North Poles and Equators, Tropics, Zones and Meridian Lines?' So the Bellman would cry; and crew would reply 'They are merely conventional signs!'

LEWIS CARROLL, *The Hunting of the Snark*

"ಉತ್ತರ ಧ್ರುವದಿಂ ದಕ್ಷಿಣ ಧ್ರುವಕು ಚುಂಬಕ ಗಾಳಿಯು ಬೀಸುತಿದೆ.'
ಸಮಭಾಜಕ ಸಂಕ್ರಾಂತಿ ರೇಖೆಗಳೇ ವಿಶ್ರಾಂತ,
ಭೂಮಧ್ಯದಿಂ – ಖಮಧ್ಯಕೆ ಜಿಗಿದಿದೆಯೋ ರೇಖೆ
– ಎಂದೆಲ್ಲಾ ಏಕೆ ರೋದಿಸುವಿರೋ ಗುರುಗಳೆನ್ನುವರು,
ಅವೆಲ್ಲವೂ ಬರೀ ಸಂಕೇತ!

9.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಹೇಗೆ ವಿವರಿಸಬೇಕೆಂಬುದನ್ನೂ ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಅದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ವಿವರಿಸಬೇಕಾಗುವಂತಹ ಇತರ ಅನೇಕ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:

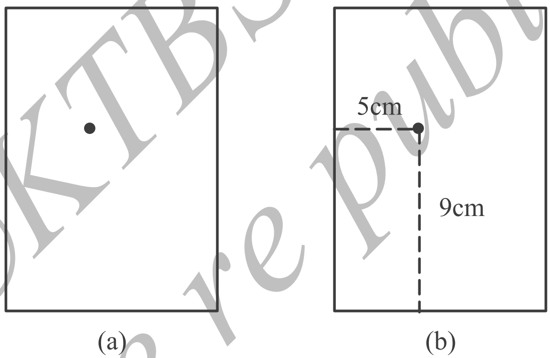


ಚಿತ್ರ 9.1

I. ಚಿತ್ರ 9.1 ರಲ್ಲಿ ಪೂರ್ವ–ಪಶ್ಚಿಮ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಾಚಿಕೊಂಡಿರುವ ಒಂದು ಮುಖ್ಯರಸ್ತೆ ಮತ್ತು ಪಶ್ಚಿಮದಿಂದ ಪೂರ್ವದೆಡೆಗೆ ಸಂಖ್ಯಾಗಣನೆ ಹೊಂದಿರುವ ಅಡ್ಡರಸ್ತೆಗಳಿವೆ. ಅಲ್ಲದೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಡ್ಡರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಮನೆಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಗೆಳತಿಯ ಮನೆಯನ್ನು ಹುಡುಕಲು ಒಂದೇ ಒಂದು ಆಧಾರ ಬಿಂದುವಿನ ಉಲ್ಲೇಖವು ಸಾಕಾಗಬಹುದೆ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಅವಳು 2ನೇ ಅಡ್ಡರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿ ವಾಸವಾಗಿದ್ದಾಳೆ ಎಂದು ಮಾತ್ರ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಅವಳ ಮನೆಯನ್ನು ನಾವು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚುವುದು ಸುಲಭವೇ? ಬದಲಾಗಿ ಮನೆ ಇರುವ ಅಡ್ಡರಸ್ತೆ ಮತ್ತು ಮನೆ ಸಂಖ್ಯೆ ಈ ಎರಡೂ ಮಾಹಿತಿಗಳೂ ಲಭ್ಯವಿದ್ದರೆ ಮನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

ಇನ್ನೂ ಸುಲಭವಲ್ಲವೇ? 2ನೆಯ ಅಡ್ಡರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿರುವ 5ನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮನೆಯನ್ನು ನಾವು ತಲುಪಬೇಕೆಂದರೆ, ಪ್ರಥಮವಾಗಿ ನಾವು 2ನೆಯ ಅಡ್ಡರಸ್ತೆಯನ್ನೂ, ಆಮೇಲೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಮನೆಸಂಖ್ಯೆ 5 ನ್ನೂ ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರ 9.1 ರಲ್ಲಿ ಈ ಮನೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು H ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ P ಯು 7ನೆಯ ಅಡ್ಡರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಮನೆಸಂಖ್ಯೆ 4ರ ಸ್ಥಾನವಾಗಿದೆ.

II. ಒಂದು ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಒಂದು ಚುಕ್ಕೆಯನ್ನು ಹಾಕಿದ್ದೀರಿ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ. [ಚಿತ್ರ 9.2(a)]. ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಆ ಚುಕ್ಕೆ ಇರುವ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ತಿಳಿಸಬೇಕೆಂದು ನಾವು ಹೇಳಿದರೆ, ನೀವದನ್ನು ಹೇಗೆ ತಿಳಿಸುವಿರಿ? "ಚುಕ್ಕೆಯು ಕಾಗದದ ಮೇಲರ್ಧದಲ್ಲಿದೆ" ಅಥವಾ "ಅದು ಕಾಗದದ ಎಡ ಅಂಚಿನ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿದೆ" ಅಥವಾ "ಅದು ಕಾಗದದ ಎಡ ಪಾರ್ಶ್ವದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ತುಂಬಾ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿದೆ". ಇಂತಹ ಹಲವು ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆ ಚುಕ್ಕೆಯ ನಿಖರವಾದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ದೃಢಪಡಿಸುತ್ತದೆಯೆ? ಇಲ್ಲ. ಆದರೆ "ಚುಕ್ಕೆಯು ಕಾಗದದ ಎಡ ಅಂಚಿನಿಂದ ಸುಮಾರು 5 cm ದೂರದಲ್ಲಿದೆ" ಎಂದು ನೀವು ಹೇಳಿದರೆ ಚುಕ್ಕೆಯ ಸ್ಥಾನದ ಬಗ್ಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಅಂದಾಜಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲ. ಇನ್ನೂ ಕೊಂಚ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದಾಗ, 'ಚುಕ್ಕೆಯು ಕಾಗದದ ಕೆಳ ಅಂಚಿನಿಂದ 9cm ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕೂಡಾ ಇದೆ' ಎಂದು ಹೇಳಲು ನಿಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗಬಹುದು. ಚುಕ್ಕೆಯು ನಿಖರವಾಗಿ ಎಲ್ಲಿದೆ ಎಂಬುದು ಈಗ ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ!



ಚಿತ್ರ 9.2

ಈ ಉದ್ದೇಶಕ್ಕಾಗಿ, 2 ನಿಗದಿತ ರೇಖೆಗಳಾದ ಕಾಗದದ ಎಡ ಅಂಚು ಮತ್ತು ಕೆಳ ಅಂಚುಗಳಿಂದ ಚುಕ್ಕೆಯು ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಪಡಿಸುವ ಮೂಲಕ ನಾವು ಅದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸ್ಥಿರಗೊಳಿಸಿದೆವು. (ಚಿತ್ರ 9.2 (b).) ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಚುಕ್ಕೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಮಗೆ ಎರಡು ಸ್ವತಂತ್ರ ಮಾಹಿತಿಗಳ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ.

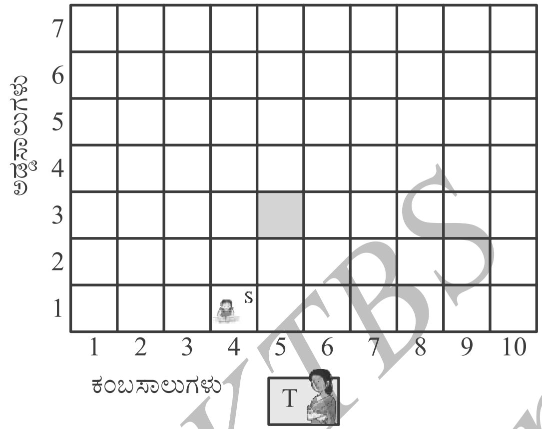
ಈಗ, "ಆಸನ ವ್ಯವಸ್ಥೆ" ಎನ್ನುವ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ವಹಿಸಿ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 1 (ಆಸನ ವ್ಯವಸ್ಥೆ) : ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಡೆಸ್ಕುಗಳನ್ನು ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ಆಸನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಡೆಸ್ಕನ್ನು ಒಂದೊಂದು ಚೌಕದಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ. ಡೆಸ್ಕನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಚೌಕದ ಒಳಗಡೆ ಆ ಡೆಸ್ಕನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಹೆಸರನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಎರಡು ಸ್ವತಂತ್ರ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ವಿವರಿಸಬಹುದು.

(i) ಅವಳು ಅಥವಾ ಅವನು ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳುವ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ.

(ii) ಅವಳು ಅಥವಾ ಅವನು ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳುವ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ.

ನೀವು 5ನೆಯ ಕಂಬಸಾಲು ಮತ್ತು 3ನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಡೆಸ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳುವಿರೆಂದಾದರೆ (ಚಿತ್ರ 9.3.ರಲ್ಲಿ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಚೌಕದಿಂದ ಸೂಚಿಸಿರುವುದು), ನಿಮ್ಮ ಸ್ಥಾನವನ್ನು (5,3) ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಕಂಬಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಳಿಕ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆಯುವುದು. (5,3) ಎಂಬುದು (3,5)ಕ್ಕೆ ಸಮಾನವೆ? ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಹೆಸರು ಮತ್ತು ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 4ನೆಯ ಕಂಬಸಾಲು ಮತ್ತು 1ನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಸೋನಿಯಾ ಕುಳಿತಿದ್ದರೆ ಇದನ್ನು S(4,1) ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ. ಶಿಕ್ಷಕರ ಡೆಸ್ಕು ನಿಮ್ಮ ಅಸನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಭಾಗ ಅಲ್ಲ. ನಾವು ಶಿಕ್ಷಕರನ್ನು ಕೇವಲ ಒಬ್ಬ ವೀಕ್ಷಕರೆಂಬಂತೆ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.



T ಯು ಶಿಕ್ಷಕರ ಡೆಸ್ಕನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.
S ಸೋನಿಯಾಳ ಡೆಸ್ಕನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರ 9.3

ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಎರಡು ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯಿಂದ ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. 'ಚುಕ್ಕೆಯ' ನಿದರ್ಶನದಲ್ಲಿ, ನಮಗೆ ಕಾಗದದ ಕೆಳ ಅಂಚು ಹಾಗೂ ಎಡ ಅಂಚುಗಳಿಂದ ಚುಕ್ಕೆಗಿರುವ ದೂರ ಗೊತ್ತಾಗಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆಸನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ನಮಗೆ ಕಂಬಸಾಲು ಮತ್ತು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಸರಳ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ಎಂತಹ ದೂರಗಾಮಿ ಪರಿಣಾಮಗಳಿವೆ ಎಂದರೆ, ಇದು "**ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತ**" ಎಂಬ ಗಣಿತದ ಒಂದು ಪ್ರಮುಖ ಶಾಖೆಯನ್ನೇ ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಕೆಲವು ಮೂಲಭೂತ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದು ನಮ್ಮ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿದೆ. ನಿಮ್ಮ ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಇವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಕಲಿಯುವಿರಿ. ಫ್ರೆಂಚ್ ತತ್ವಜ್ಞಾನಿ ಮತ್ತು ಗಣಿತಜ್ಞನಾದ ರೆನೆ ಡೆಕಾರ್ಟ್ (Rene Descartes) ಎಂಬವನಿಂದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಈ ಅಧ್ಯಯನವು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿತು.

17ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತಜ್ಞನಾದ ರೆನೆ ಡೆಕಾರ್ಟ್‌ನು, ಹಾಸಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಮಲಗಿಕೊಂಡು ಯೋಚಿಸುವುದನ್ನು ಇಷ್ಟಪಡುತ್ತಿದ್ದ! ಒಂದು ದಿನ ಹಾಸಿಗೆಯಲ್ಲಿ ವಿಶ್ರಾಂತಿಯಲ್ಲಿರುವಾಗ, ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಅವನು ಬಿಡಿಸಿದ. ಅವನ ವಿಧಾನವು. ಅಕ್ಷಾಂಶ ಮತ್ತು ರೇಖಾಂಶಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಹಳೆಯ ಮಾದರಿಯ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದ ರೂಪವಾಗಿತ್ತು. ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು, ಡೆಕಾರ್ಟ್‌ಗೆ ಗೌರವದ್ಯೋತಕವಾಗಿ, "ಕಾರ್ಟಿಷಿಯನ್ (ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್) ಪದ್ಧತಿ" ಎಂದು ಕೂಡಾ ಕರೆಯಲಾಗಿದೆ.

ರೆನೆ ಡೆಕಾರ್ಟ್ (1596 –1650)

ಚಿತ್ರ 9.4

ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

1. ನಿಮ್ಮ ಕಲಿಕಾ ಮೇಜಿನ ಮೇಲಿರುವ ಮೇಜುದೀಪ(table lamp) ದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಇನ್ನೊಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ನೀವು ಹೇಗೆ ವಿವರಿಸುವಿರಿ?
2. **ರಸ್ತೆ ಯೋಜನೆ:** ನಗರದ ಮಧ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಅಡ್ಡ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಒಂದು ನಗರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಮುಖ್ಯರಸ್ತೆಗಳಿವೆ. ಈ ಎರಡು ರಸ್ತೆಗಳೂ ಒಂದು ಉತ್ತರ – ದಕ್ಷಿಣ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲೂ ಇನ್ನೊಂದು ಪೂರ್ವ – ಪಶ್ಚಿಮ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲೂ ಇವೆ. ಪರಸ್ಪರ 200m ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ನಗರದ ಎಲ್ಲಾ ರಸ್ತೆಗಳೂ ಈ ರಸ್ತೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲೂ 5 ರಸ್ತೆಗಳಿವೆ. 200m = 1cm ಎಂಬ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ನಗರದ ಒಂದು ಮಾದರಿ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ. ರಸ್ತೆ/ಅಡ್ಡರಸ್ತೆಗಳನ್ನು ಏಕರೇಖೆಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

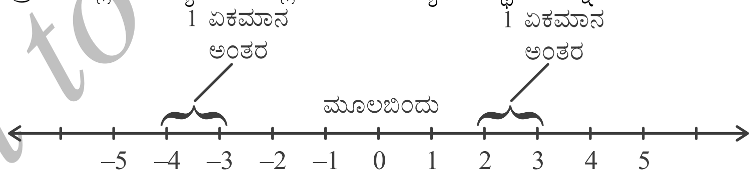
ನಿಮ್ಮ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಛೇದಿಸುವ ರಸ್ತೆಗಳಿವೆ. ಇಂತಹ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಛೇದಿಸುವ ರಸ್ತೆಗಳು, ಒಂದು ಉತ್ತರ – ದಕ್ಷಿಣ ದಿಕ್ಕು ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಪೂರ್ವ – ಪಶ್ಚಿಮ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ರಸ್ತೆಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಛೇದಿಸುವ ರಸ್ತೆಗಳನ್ನೂ ಈ ಮುಂದಿನ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಆದರಿಸಬಹುದು. ಉತ್ತರ – ದಕ್ಷಿಣ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ 2ನೆಯ ರಸ್ತೆ ಮತ್ತು ಪೂರ್ವ – ಪಶ್ಚಿಮ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ 5ನೆಯ ರಸ್ತೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸಂಧಿಸುವ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಾವು ರಸ್ತೆ ಛೇದನ (2,5) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.

(i) (4,3) ಎಂದು ಎಷ್ಟು ರಸ್ತೆ ಛೇದನಗಳನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸಬಹುದು?

(ii) (3,4) ಎಂದು ಎಷ್ಟು ರಸ್ತೆ ಛೇದನಗಳನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸಬಹುದು?–ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

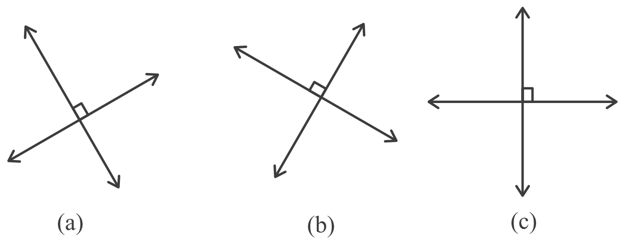
9.2 ಕಾರ್ಟೆಷಿಯನ್ ಪದ್ಧತಿ

"ಸಂಖ್ಯಾಪದ್ಧತಿ" ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು **ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ** ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿದ್ದು, ಅದರಿಂದ ಏಕಮಾನ ದೂರಗಳನ್ನು, ಒಂದು ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಇನ್ನೊಂದು ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ. ಯಾವ ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ದೂರಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆಯೋ ಅದನ್ನು **ಮೂಲಬಿಂದು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ನಿಗದಿತ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವ ಮೂಲಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ನಾವು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. '0' ಯು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿದ್ದು ಒಂದು ಏಕಮಾನ ದೂರವು "1" ನ್ನೂ 3 ಏಕಮಾನ ದೂರವು "3" ನ್ನೂ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಧನಾತ್ಮಕದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ r ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವು r ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಋಣಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ r ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವು $-r$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ 9.5ರಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



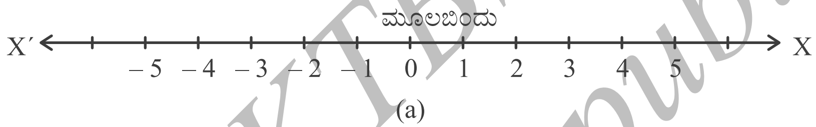
ಚಿತ್ರ 9.5

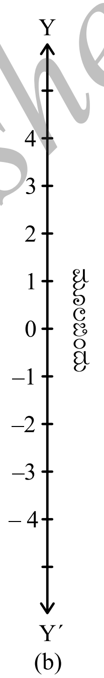
ಡೇಕಾರ್ಟೆಯು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರಿಸಿ, ಈ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳ್ನು ಗುರುತಿಸುವ ವಿಧಾನವೊಂದನ್ನು ಆವಿಷ್ಕರಿಸಿದನು. ಈ ಲಂಬರೇಖೆಗಳು ಚಿತ್ರ 9.6 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರಬಹುದು. ಆದರೆ, ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಒಂದು ರೇಖೆ ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರವಾಗಿಯೂ ಇನ್ನೊಂದು ಅದಕ್ಕೆ ಭೂಲಂಬ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲೂ ಇರುವಂತೆ ನಾವು ಈ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. [ಚಿತ್ರ. 9.6 (c) ಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ]



ಚಿತ್ರ 9.6

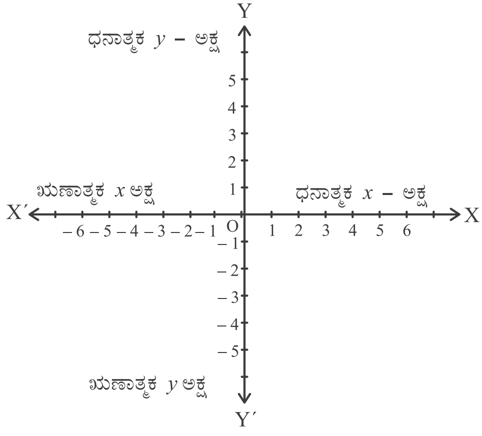
ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, ಈ ರೇಖೆಗಳು ಈ ಮುಂದಿನಂತೆ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ: ಎರಡು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಗಳ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳನ್ನು X'X ಮತ್ತು Y'Y ಎಂಬುದಾಗಿ ಕರೆಯಿರಿ. X'X ನ್ನು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರಿಸಿ [ಚಿತ್ರ 9.7 (a) ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ] ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವಂತೆ ಅದರ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. Y'Y ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರವಲ್ಲ, ಭೂಲಂಬ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ, Y'Y ಯ ಮೇಲೆಯೂ ನಾವು ಇದೇ ರೀತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. [ಚಿತ್ರ 9.7 (b)].





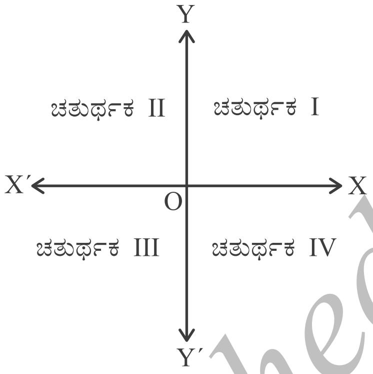
ಚಿತ್ರ 9.7

ಎರಡು ರೇಖೆಗಳೂ ಅವುಗಳ ಮೂಲಬಿಂದು ಅಥವಾ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 9.8). ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ X'X ನ್ನು x – ಅಕ್ಷವೆಂದು ಭೂಲಂಬ ರೇಖೆ Y'Y ನ್ನು y – ಅಕ್ಷವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. X'X ಮತ್ತು Y'Y ಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವು **ಮೂಲಬಿಂದು**ವಾಗಿದ್ದು ಇದನ್ನು 'O' ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. OX ಮತ್ತು OY ಗಳ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವುದರಿಂದ OX ಮತ್ತು OY ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ x – ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು y – ಅಕ್ಷಗಳ **ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕುಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅದೇ ರೀತಿ OX' ಮತ್ತು OY' ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ x – ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು y – ಅಕ್ಷಗಳ **ಋಣಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕುಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.



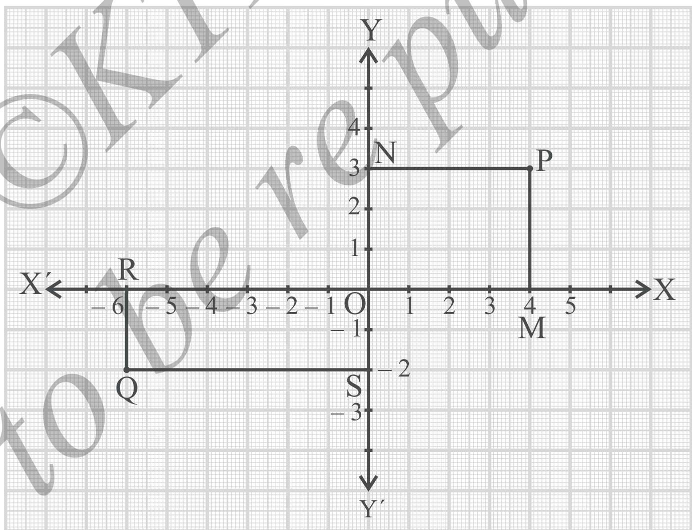
ಚಿತ್ರ 9.8

ಅಕ್ಷಗಳು ಸಮತಲವನ್ನು 4 ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಈ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳನ್ನು **ಚತುರ್ಥಕ** (4ನೇ ಒಂದು ಭಾಗ)ಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳಿಗೆ OX ನಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣಾಕಾವಾಗಿ I, II, III, IV ಎಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 9.9ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ಹೀಗೆ ಸಮತಲವು ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಈ ಚತುರ್ಥಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ನಾವು ಸಮತಲವನ್ನು **ಕಾರ್ಟಿಷಿಯನ್ ಸಮತಲ, ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲ** ಅಥವಾ ***xy* – ಸಮತಲ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು **ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 9.9

ಈಗ ನಾವು, ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಏಕೆ ಮೂಲಭೂತವಾದುದು ಮತ್ತು ಹೇಗೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾದುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿರುವ, ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಅಕ್ಷಗಳಿಂದ ಇರುವ ದೂರಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ PM ಮತ್ತು y – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ PN ಎಂಬ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ. ಅದೇ ರೀತಿ, ಚಿತ್ರ 9.10ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, QR ಮತ್ತು QS ಎಂಬ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ.



ಚಿತ್ರ 9.10

ನೀವು ಗಮನಿಸುವ ಅಂಶಗಳು–

(i) x – ಅಕ್ಷದ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅಳೆದಾಗ, y–ಅಕ್ಷದಿಂದ P ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ಲಂಬ ದೂರ PN = OM = 4 ಏಕಮಾನಗಳು.

(ii) y – ಅಕ್ಷದ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅಳೆದಾಗ, x ಅಕ್ಷದಿಂದ P ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ಲಂಬ ದೂರ PM = ON– 3 ಏಕಮಾನಗಳು.

(iii) x – ಅಕ್ಷದ ಋಣಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅಳೆದಾಗ, y ಅಕ್ಷದಿಂದ Q ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ಲಂಬ ದೂರ OR = SQ = 6 ಏಕಮಾನಗಳು.

(iv) y – ಅಕ್ಷದ ಋಣಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅಳೆದಾಗ, x ಅಕ್ಷದಿಂದ Q ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ಲಂಬದೂರ OS = RQ = 2 ಏಕಮಾನಗಳು.

ಈಗ, ಈ ದೂರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಯಾವುದೇ ಗೊಂದಲವಿಲ್ಲದೆ, ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ವಿವರಿಸಬಹುದು?

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪದ್ಧತಿಯಂತೆ ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(i) ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ***x* ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು,** y **–** ಅಕ್ಷದಿಂದ x – ಅಕ್ಷದುದ್ದಕ್ಕೂ ಅಳತೆ ಮಾಡಿದ ಅದರ ಲಂಬದೂರ (x ಅಕ್ಷದ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಧನ ಮತ್ತು x ಅಕ್ಷದ ಋಣಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಋಣ). P ಬಿಂದುವಿಗೆ ಅದು + 4 ಮತ್ತು Q ಗೆ ಅದು – 6. x–ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವನ್ನು **ಕ್ಷಿತಿಜಸೂಚಕ (Abscissa)** ಎಂದು ಕೂಡಾ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(ii) ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ***y* – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು** x–ಅಕ್ಷದಿಂದ y–ಅಕ್ಷದುದ್ದಕ್ಕೂ ಅಳತೆ ಮಾಡಿದ ಲಂಬದೂರ (y – ಅಕ್ಷದ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಧನ ಮತ್ತು y–ಅಕ್ಷದ ಋಣಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಋಣ). P ಬಿಂದುವಿಗೆ ಅದು + 3 ಮತ್ತು Q ಗೆ ಅದು –2. y–ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವನ್ನು **ಲಂಬಸೂಚಕ (Ordinate)** ಎಂದು ಕೂಡಾ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(iii) ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೇಳುವಾಗ, ಮೊದಲು x – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವೂ ಆ ಬಳಿಕ y–ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವೂ ಬರುತ್ತವೆ. ನಾವು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಆವರಣದೊಳಗಿರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ P ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (4,3) ಮತ್ತು Q ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (–6, –2).

ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು **ಅನನ್ಯವಾಗಿ** ವಿವರಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. (3, 4) ಎಂಬುದು (4, 3)ಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಲ್ಲ.

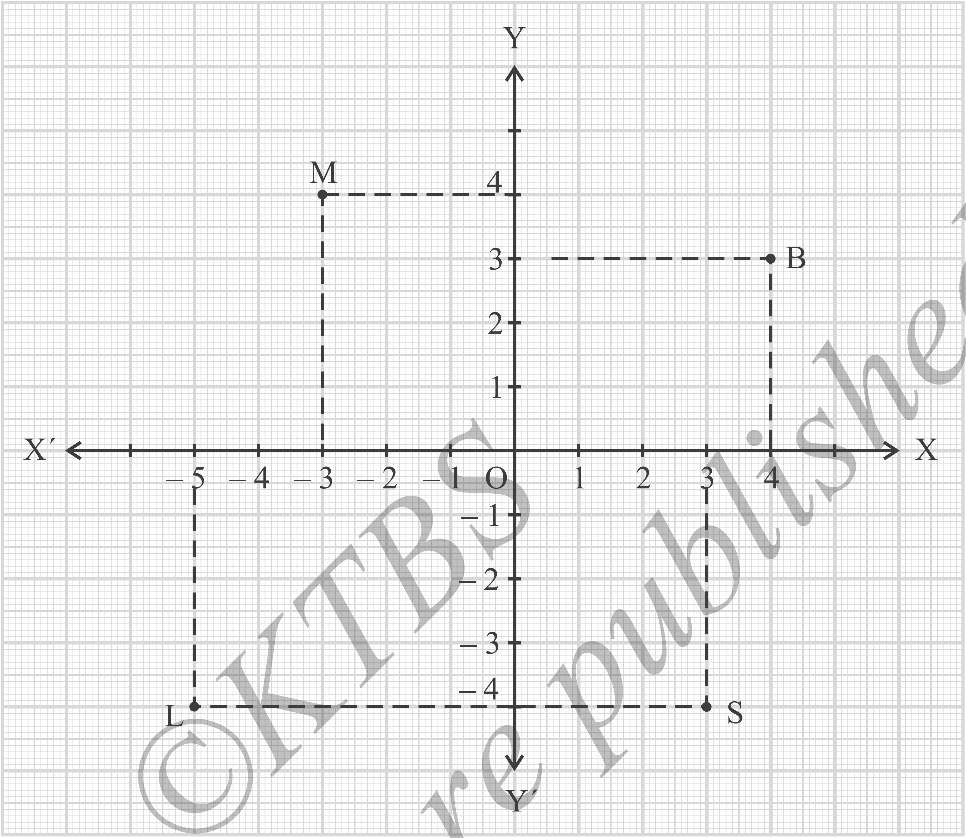
ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಚಿತ್ರ 9.11ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ

(i) B ಬಿಂದುವಿನ ಕ್ಷಿತಿಜಸೂಚಕ ಮತ್ತು ಲಂಬಸೂಚಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ________ ಮತ್ತು ________ ಆದುದರಿಂದ B ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (________ , ________)

(ii) M ಬಿಂದುವಿನ x – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಮತ್ತು y – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ________ ಮತ್ತು ________ . ಆದ್ದರಿಂದ M ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (________, ________).

(iii) L ಬಿಂದುವಿನ x – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಮತ್ತು y – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ________ ಮತ್ತು ________ . ಆದ್ದರಿಂದ L ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (________ , ________).

(iv) S ಬಿಂದುವಿನ x – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಮತ್ತು y – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ________ ಮತ್ತು ________ . ಆದ್ದರಿಂದ S ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (________ , ________).



ಚಿತ್ರ 9.11

ಪರಿಹಾರ : (i) y – ಅಕ್ಷದಿಂದ B ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ 4 ಏಕಮಾನಗಳು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, B ಬಿಂದುವಿನ x – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಥವಾ ಕ್ಷತಿಜಸೂಚಕ 4. ಅಂತೆಯೇ x ಅಕ್ಷದಿಂದ B ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ 3 ಏಕಮಾನಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ, B ಬಿಂದುವಿನ y ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ, ಅಂದರೆ ಲಂಬಸೂಚಕ 3. ಆದ್ದರಿಂದ B ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (4, 3).

ಮೇಲೆ (i) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ

(ii) M ಬಿಂದುವಿನ x–ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಮತ್ತು y–ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ –3 ಮತ್ತು 4. ಆದ್ದರಿಂದ M ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (–3, 4).

(iii) L ಬಿಂದುವಿನ x – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಮತ್ತು y – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ –5 ಮತ್ತು –4. ಆದ್ದರಿಂದ L ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (–5, – 4).

(iv) S ಬಿಂದುವಿನ x – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಮತ್ತು y – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 3 ಮತ್ತು –4. ಆದ್ದರಿಂದ S ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (3, –4).

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಚಿತ್ರ 9.12 ರಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ನೀವು ನೋಡಬಹುದೇನೆಂದರೆ :

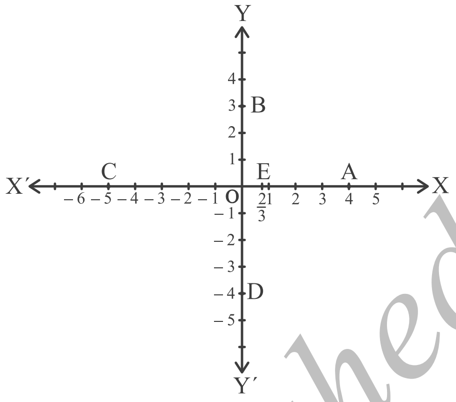
(i) A ಬಿಂದುವು y ಅಕ್ಷದಿಂದ +4 ಏಕಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿಯೂ, x ಅಕ್ಷದಿಂದ ಸೊನ್ನೆ ದೂರದಲ್ಲಿಯೂ ಇದೆ. ಆದುದರಿಂದ, A ಬಿಂದುವಿನ x – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ 4 ಮತ್ತು y- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ 0. ಹೀಗೆ A ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (4, 0).

(ii) B ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (0, 3). ಏಕೆ?

(iii) C ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (–5, 0). ಏಕೆ?

(iv) D ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (0, –4). ಏಕೆ?

(v) E ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. ಏಕೆ?



ಚಿತ್ರ 9.12

x ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವೂ, x – ಅಕ್ಷದಿಂದ ಸೊನ್ನೆ ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ (ಯಾವುದೇ ದೂರದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ) ಇಂತಹ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ y – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(x, 0)$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ x ಎಂದರೆ y – ಅಕ್ಷದಿಂದ ಆ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ. ಅದೇ ರೀತಿ y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(0, y)$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ y ಎಂದರೆ x–ಅಕ್ಷದಿಂದ ಆ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ. ಏಕೆ?

ಮೂಲಬಿಂದು '**O**' ಇದರ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಯಾವುವು? ಇದು ಎರಡೂ ಅಕ್ಷಗಳಿಂದ ಸೊನ್ನೆ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಹೀಗೆ ಅದರ ಕ್ಷಿತಿಜಸೂಚಕ ಮತ್ತು ಲಂಬಸೂಚಕಗಳೆರಡೂ ಸೊನ್ನೆ ಅಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ **ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (0, 0).**

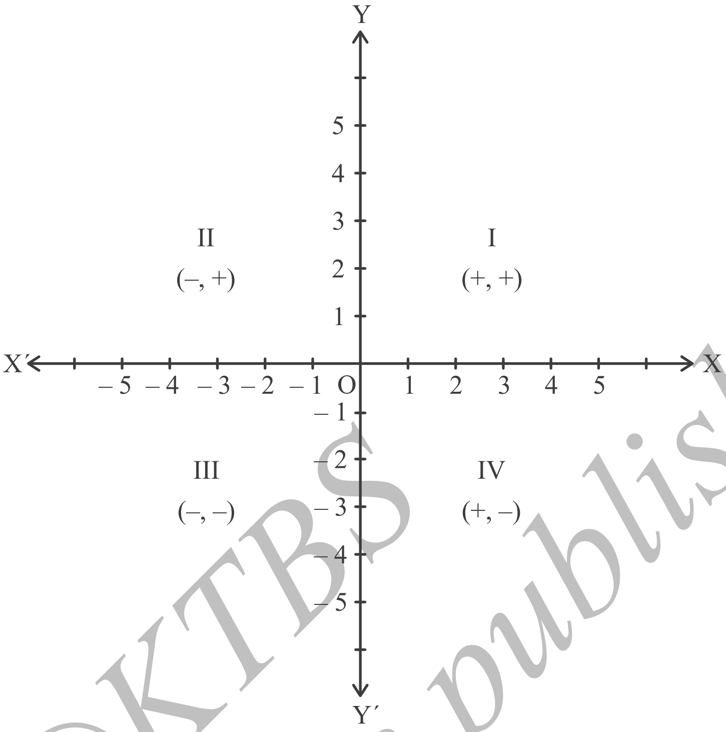
ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಮತ್ತು ಆ ಬಿಂದು ಇರುವ ಚತುರ್ಥಕಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರಬಹುದು.

(i) ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಒಂದನೆಯ ಚತುರ್ಥಕದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅದು (+, +) ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ 1ನೆಯ ಚತುರ್ಥಕವು ಧನಾತ್ಮಕ x – ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ಧನಾತ್ಮಕ y – ಅಕ್ಷಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾಗಿದೆ.

(ii) ಒಂದು ಬಿಂದುವು 2ನೆಯ ಚತುರ್ಥದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅದು (–, +) ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ 2ನೆಯ ಚತುರ್ಥಕವು ಋಣಾತ್ಮಕ x – ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ಧನಾತ್ಮಕ y – ಅಕ್ಷಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾಗಿದೆ.

(iii) ಒಂದು ಬಿಂದುವು 3ನೆಯ ಚತುರ್ಥಕದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅದು (–, –) ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ 3ನೆಯ ಚತುರ್ಥಕವು ಋಣಾತ್ಮಕ x – ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ಋಣಾತ್ಮಕ y – ಅಕ್ಷಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾಗಿದೆ.

(iv) ಒಂದು ಬಿಂದುವು 4ನೆಯ ಚತುರ್ಥಕದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅದು (+, –) ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ 4ನೆಯ ಚತುರ್ಥಕವು ಧನಾತ್ಮಕ x ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ಋಣಾತ್ಮಕ y – ಅಕ್ಷಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾಗಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 9.13ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 9.13

ಗಮನಿಸಿ: ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ನಾವು ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ವಿಧಾನವು ಜಗತ್ತಿನಾದ್ಯಂತ ಸ್ವೀಕರಿಸಿರುವ ಪದ್ಧತಿಯಾಗಿದೆ. ಲಂಬ ಸೂಚಕ ಮೊದಲು ಮತ್ತು ಕ್ಷಿತಿಜಸೂಚಕ ನಂತರ ಬರುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೂ ಇರಬಹುದಾಗಿತ್ತು. ಆದರೆ ಯಾವುದೇ ಗೊಂದಲವುಂಟಾಗಬಾರದು ಎಂಬ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಇಡೀ ವಿಶ್ವವೇ ನಾವು ಮೊದಲು ವಿವರಿಸಿದ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಅಂಟಿಕೊಂಡಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 9.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗೂ ಉತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) ಕಾರ್ಟಿಷಿಯನ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಎಳೆದ ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ಮತ್ತು ಭೂಲಂಬ ರೇಖೆಗಳ ಹೆಸರುಗಳೇನು?

(ii) ಈ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಮತಲದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗದ ಹೆಸರೇನು?

(iii) ಈ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಹೆಸರು ಬರೆಯಿರಿ.

2. ಚಿತ್ರ 9.14 ನ್ನು ನೋಡಿ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) B ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

(ii) C ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

(iii) (–3,–5) ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಿಂದ ಗುರುತಿಸುವ ಬಿಂದು.

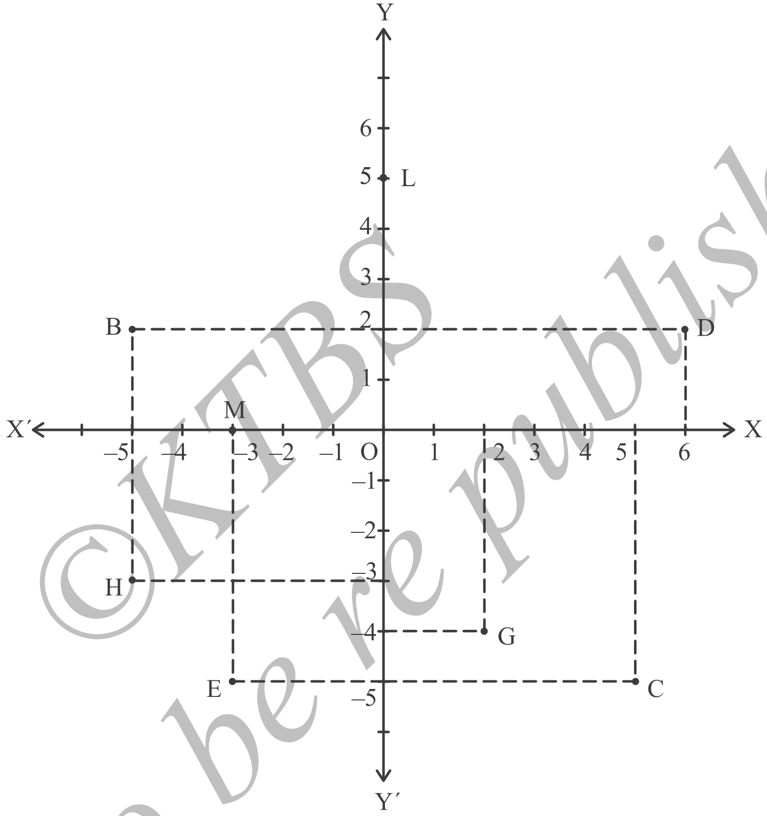
(iv) (2, –4) ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಿಂದ ಗುರುತಿಸುವ ಬಿಂದು.

(v) D ಬಿಂದುವಿನ ಕ್ಷಿತಿಜಸೂಚಕ

(vi) H ಬಿಂದುವಿನ ಲಂಬಸೂಚಕ

(vii) L ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

(viii) M ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು



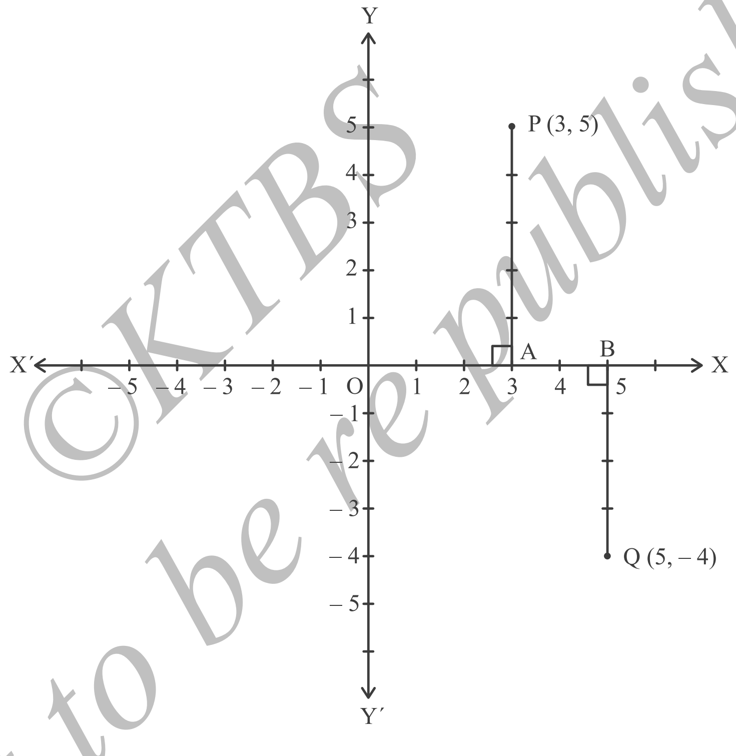
ಚಿತ್ರ 9.14

9.3 ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಆ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು.

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸಿ, ಅವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಲು ನಿಮಗೆ ಕೇಳಿದ್ದೆವು. ಈಗ, ಈ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ತಿಳಿದಿದ್ದಾಗ, ಅವುಗಳನ್ನು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನಿಮಗೆ ತೋರಿಸಿ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು **'ಬಿಂದುವನ್ನ ಗುರುತಿಸುವುದು"** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (3,5) ಆಗಿರಲಿ. ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಲು ನಾವು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ಅಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿಯೂ 1 cm = 1 ಮಾನ ಎಂಬ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡು, ನಾವು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುತ್ತೇವೆ. (3.5) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ನಮಗೆ ತಿಳಿಸುವುದೆಂದರೆ ಈ ಬಿಂದುವು x ಅಕ್ಷದ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ y – ಅಕ್ಷರದಿಂದ 3 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಮತ್ತು

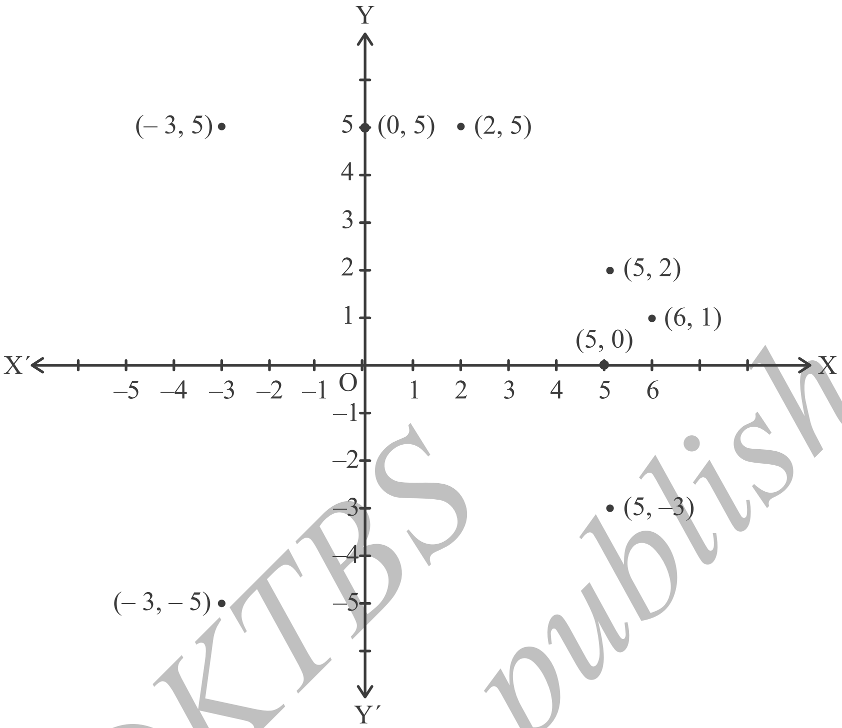
y– ಅಕ್ಷದ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ x ಅಕ್ಷದಿಂದ 5 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಮೂಲ ಬಿಂದು 'O' ದಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ, x – ಅಕ್ಷದ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ನಾವು 3 ಮಾನಗಳನ್ನು ಎಣಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪವಾದ ಬಿಂದುವನ್ನು A ಎಂದು ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈಗ A ಯಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ, y – ಅಕ್ಷದ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು 5 ಮಾನಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಿ, ಅನುರೂಪವಾದ ಬಿಂದುವನ್ನು 'P' ಎಂದು ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ. (ಚಿತ್ರ. 9.15 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.) P ಗೆ y – ಅಕ್ಷದಿಂದ ಇರುವ ದೂರ 3 ಮಾನಗಳು ಮತ್ತು x ಅಕ್ಷದಿಂದ ಇರುವ ದೂರ 5 ಮಾನಗಳು ಎಂದು ನೀವು ನೋಡುತ್ತೀರಿ. ಹೀಗೆ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವು P. ಅಲ್ಲದೆ P ಯ ಎರಡೂ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ P ಯು 1ನೇ ಚತುರ್ಥಕದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, Q (5, –4) ಬಿಂದುವನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತದಲ್ಲಿ ನಿಮಗೆ ಗುರುತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. y ಅಕ್ಷದ ಋಣಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ, x ಅಕ್ಷದಿಂದ Q ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವು 4 ಮಾನಗಳು. ಹಾಗಾಗಿ ಅದರ y – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ – 4 (ಚಿತ್ರ 9.15ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). Q ಬಿಂದುವು 4ನೇ ಚತುರ್ಥಕದಲ್ಲಿದೆ. ಏಕೆ?



ಚಿತ್ರ 9.15

ಉದಾಹರಣೆ 3: (5, 0), (0, 5), (2, 5), (5, 2), (–3, 5), (–3, –5), (5, –3) ಮತ್ತು (6, 1) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು 1cm = 1 ಮಾನ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ನಾವು ಎಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರ 9.16 ರಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಚುಕ್ಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



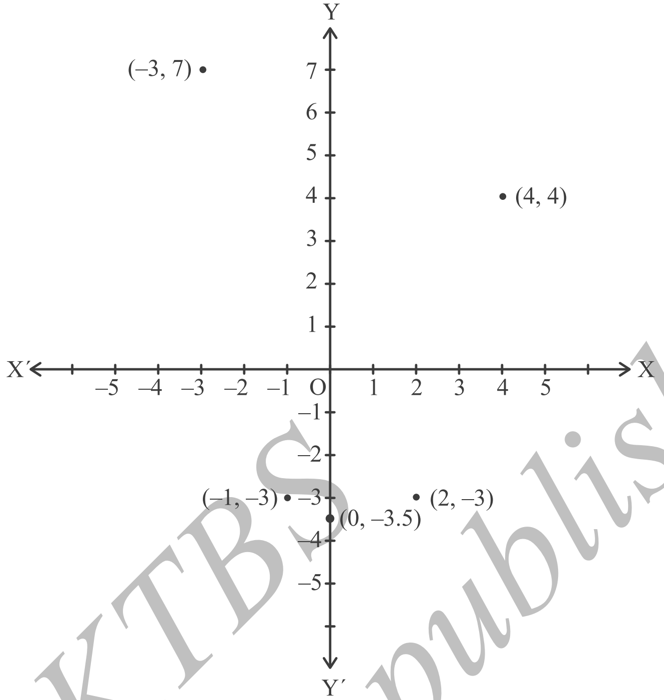
ಚಿತ್ರ 9.16

ಸೂಚನೆ: ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, (5, 0) ಮತ್ತು (0, 5) ಒಂದೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಬಹುದು. ಅದೇ ರೀತಿ, (5, 2) ಮತ್ತು (2, 5)ರ ಸ್ಥಾನಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿವೆ. (–3, 5) ಮತ್ತು (5, –3) ಕೂಡಾ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿವೆ. $x \neq y$ ಎಂದಾದರೆ, ಒಂದು ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ (x, y) ನ ಸ್ಥಾನವು (y, x)ನ ಸ್ಥಾನಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಇಂತಹ ಹಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ನೀವು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ನಾವು x ಮತ್ತು y ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ, (y, x) ನ ಸ್ಥಾನವು (x, y)ನ ಸ್ಥಾನಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು ಇದರರ್ಥವೇನೆಂದರೆ (x, y) ಯಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಕ್ರಮ ಅಥವಾ ಅಣಿಗೊಳಿಸುವಿಕೆ ಮುಖ್ಯವಾದುದು. ಆದ್ದರಿಂದ (x, y) ಯನ್ನು ಅಣಿತಯುಗ್ಮ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. $x \neq y$ ಆದಾಗ, ಅಣಿತಯುಗ್ಮ $(x, y) \neq$ ಅಣಿತಯುಗ್ಮ (y, x). ಅದೇ ರೀತಿ $x = y$ ಆದರೆ, $(x, y) = (y, x)$.

ಉದಾಹರಣೆ 4 : ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಣಿತಯುಗ್ಮಗಳನ್ನು ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿ. 1cm = 1 ಏಕಮಾನ ಎಂಬ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.

x	–3	0	–1	4	2
y	7	–3.5	–3	4	–3

ಪರಿಹಾರ : ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು (–3, 7), (0, –3.5), (–1, –3), (4, 4) ಮತ್ತು (2, –3) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು. ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಚುಕ್ಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಚಿತ್ರ 9.17 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 9.17

ಚಟುವಟಿಕೆ 2 : ಇಬ್ಬರು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಆಟ. (ಬೇಕಾದ ವಸ್ತುಗಳು: ಎರಡು ಬಿಲ್ಲೆಗಳು ಅಥವಾ ನಾಣ್ಯಗಳು, ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆ, ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಣ್ಣಗಳ – ಕೆಂಪು ಮತ್ತು ಹಸಿರು ಬಣ್ಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ದಾಳಗಳು).

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು (0, 0) ಯಲ್ಲಿರಿಸಿ. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಆಟಗಾರ್ತಿಯು 2 ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಸೆಯುತ್ತಾಳೆ. ಮೊಲದನೆಯ ಆಟಗಾರ್ತಿ ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಕೆಂಪದಾಳವು 3 ನ್ನೂ ಹಸಿರು ದಾಳವು 1 ನ್ನೂ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಅವಳು ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು (3, 1)ರಲ್ಲಿರಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಅದೇ ರೀತಿ ಎರಡನೆ ಆಟಗಾರ್ತಿಯು ಕೆಂಪು ದಾಳದಲ್ಲಿ 2ನ್ನೂ ಹಸಿರು ದಾಳದಲ್ಲಿ 4ನ್ನೂ ಎಸೆದರೆ, ಅವಳ ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು (2, 4) ರಲ್ಲಿರಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಎರಡನೆಯ ಎಸೆತದಲ್ಲಿ, ಮೊದಲನೆಗೆ ಆಟಗಾರ್ತಿಯು ಕೆಂಪುದಾಳದಲ್ಲಿ 1 ನ್ನೂ ಹಸಿರು ದಾಳದಲ್ಲಿ 4ನ್ನೂ ಎಸೆದರೆ, ಅವಳು ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು (3, 1)ರಿಂದ (3 + 1, 1 + 4) ಕ್ಕೆ ಕೊಂಡೊಯ್ಯುತ್ತಾಳೆ. ಅಂದರೆ (3, 1) ರ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಕ್ಕೆ 1 ನ್ನೂ y – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಕ್ಕೆ 4ನ್ನೂ ಸೇರಿಸುತ್ತಾಳೆ.

ಆಟದ ಉದ್ದೇಶವೇನೆಂದರೆ ಗುರಿ ಮೀರದೆ (over shoot ಮಾಡದೆ) ಮೊದಲು (10, 10)ನ್ನು ತಲುಪಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಕ್ಷಿತಿಜಸೂಚಕವಾಗಲೀ, ಲಂಬಸೂಚಕವಾಗಲೀ 10ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಬಾರದು. ಅಲ್ಲದೆ ಈಗಾಗಲೇ ಒಂದು ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಲ್ಲೆಯ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು ಇರಿಸಬಾರದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮೊದಲನೆಯ ಆಟಗಾರ್ತಿಯ ಬಿಲ್ಲೆಯು ಈಗಾಗಲೇ ಎರಡನೆಯ ಆಟಗಾರ್ತಿಯು ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು ಇರಿಸಿದ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಹೋಗಬೇಕಾದರೆ, 2ನೆಯ ಆಟಗಾರ್ತಿಯ ಬಿಲ್ಲೆಯು (0, 0) ಗೆ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಗುರಿ ಮೀರದೆ ಚಲನೆ ಅಸಾಧ್ಯ ಎಂದಾದರೆ, ಆಟಗಾರ್ತಿ ಆ ಸರದಿಯನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾಳೆ. ಅನೇಕ ಮಂದಿ ಗೆಳೆಯರ ಜೊತೆ ಆಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತೆ ನೀವು ಈ ಆಟವನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

ಗಮನಿಸಿ: ಕಾರ್ಟಿಷಿಯನ್ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದನ್ನು, ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳನ್ನು ಕಲಿತ ಕಾಲ–ದೂರ ನಕ್ಷೆ, ಬಾಹು–ಸುತ್ತಳತೆ ನಕ್ಷೆ ಇತ್ಯಾದಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಗ್ರಾಫ್ ರಚಿಸುವುದರೊಂದಿಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಹೋಲಿಸಬಹುದು. ಇಂತಹ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳ ಬದಲಾಗಿ ನಾವು t – ಅಕ್ಷ, d – ಅಕ್ಷ, s – ಅಕ್ಷ ಅಥವಾ p – ಅಕ್ಷ ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಕರೆಯಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 9.3

1. (–2, 4), (3, –1), (–1, 0), (1, 2) ಮತ್ತು (–3, –5) ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವು ಯಾವ ಚತುರ್ಥಕ ಅಥವಾ ಯಾವ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿದೆ? ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವ ಮೂಲಕ ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

2. ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ಸೂಕ್ತ ಮಾನಗಳಷ್ಟು ದೂರವನ್ನು ಆರಿಸುವ ಮೂಲಕ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ (x, y) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

x	–2	–1	0	1	3
y	8	7	–1.25	3	–1

9.4. ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ:

1. ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಸ್ತು ಅಥವಾ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ನಮಗೆ ಎರಡು ಲಂಬರೇಖೆಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರವಾಗಿಯೂ, ಇನ್ನೊಂದು ಭೂಲಂಬ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲೂ ಇರುತ್ತವೆ.
2. ಸಮತಲವನ್ನು ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಅಥವಾ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.
3. ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷವೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಭೂಲಂಬ ರೇಖೆಯು y – ಅಕ್ಷವೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
4. ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳು ಸಮತಲವನ್ನು ಚತುರ್ಥಕಗಳೆಂಬ 4 ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ.
5. ಅಕ್ಷಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವು ಮೂಲಬಿಂದು ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
6. y – ಅಕ್ಷದಿಂದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವು ಅದರ x – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಥವಾ ಕ್ಷಿತಿಜಸೂಚಕ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು x – ಅಕ್ಷದಿಂದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವು ಅದರ y – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಥವಾ ಲಂಬಸೂಚಕ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
7. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಕ್ಷಿತಿಜಸೂಚಕ x ಮತ್ತು ಲಂಬಸೂಚಕ y ಆದರೆ (x, y) ಗಳು ಆ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.
8. x ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(x, 0)$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(0, y)$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.
9. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (0,0).
10. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಒಂದನೆಯ ಚತುರ್ಥಕದಲ್ಲಿ (+, +), 2ನೆಯ ಚತುರ್ಥಕದಲ್ಲಿ (–, +), 3ನೆಯ ಚತುರ್ಥಕದಲ್ಲಿ (–, –) ಮತ್ತು 4ನೆಯ ಚತುರ್ಥಕದಲ್ಲಿ (+, –) ರೂಪಗಳಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ + ಎಂಬುದು ಧನವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ '–' ಎಂಬುದು ಋಣ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.
11. $x \neq y$ ಆದಾಗ , $(x, y) \neq (y, x)$ ಮತ್ತು $x = y$ ಆದರೆ, $(x, y) = (y, x)$.

3IK2S5

ಅಧ್ಯಾಯ – 10

ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟೂ ಅತ್ಯಂತ ಸರಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸುವುದು ವಿಶ್ಲೇಷಣಾ ಕಲೆಯ ಪ್ರಮುಖ ಉಪಯೋಗ.

– ಎಡ್ಮಂಡ್ ಹ್ಯಾಲಿ

10.1 ಪೀಠಿಕೆ

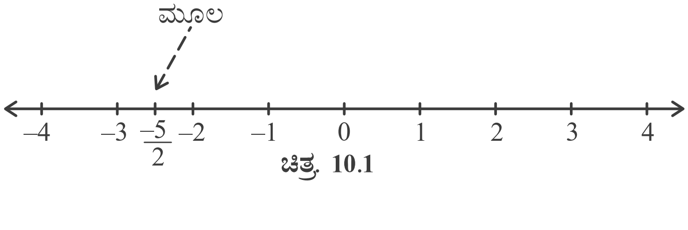
ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನೀವು ಬರೆಯಬಲ್ಲಿರಾ? $x+1=0, x+\sqrt{2}=0$ ಮತ್ತು $\sqrt{2}y+\sqrt{3}=0$ ಇವುಗಳು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದು ನೀವು ಹೇಳಬಹುದು. ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಏಕೈಕ (ಅಂದರೆ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಒಂದು) ಪರಿಹಾರ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದೂ ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡಾ ನೀವು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವುದಕ್ಕೆ ಅದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಿದೆಯೆ? ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ ಅದು ಏಕೈಕ (ಅನನ್ಯ)ವೆ? ಪರಿಹಾರವು ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಹೇಗೆ ಕಾಣಿಸಬಹುದು? ಇಂತಹ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತಿರಬಹುದು. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು, 3ನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಕಲಿತಂತಹ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಾ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

10.2 ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು:

ಮೊದಲು, ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನೀವು ಏನನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$$2x+5=0$$

ಇದರ ಪರಿಹಾರ, ಅಂದರೆ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವು $-\frac{5}{2}$. ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಇದನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ. 10.1

ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನೀವು ಯಾವಾಗಲೂ ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರದ ಮೇಲೆ ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳು ಪರಿಣಾಮ ಬೀರುವುದಿಲ್ಲ.

(i) ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದು (ಅಥವಾ ಕಳೆಯುವುದು).

(ii) ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ಗುಣಿಸುವುದು ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸುವುದು.

ಈಗ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಭಾರತ ಮತ್ತು ಶ್ರೀಲಂಕಾಗಳ ನಡುವೆ ನಾಗ್ಪುರದಲ್ಲಿ ಆಡಲಾದ ಏಕದಿನ ಅಂತಾರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಪಂದ್ಯಾವಳಿಯಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರು ಭಾರತೀಯ ಬ್ಯಾಟ್ಮನ್‌ಗಳು ಜಂಟಿಯಾಗಿ 176 ರನ್ನುಗಳನ್ನು ಬಾರಿಸಿದರು. ಈ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಒಂದು ಸಮೀಕರಣ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಯಾರೊಬ್ಬರ ಸ್ಕೋರ್‌ಗಳೂ ತಿಳಿದಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ (ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದ) ಪರಿಮಾಣಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು x ಮತ್ತು y ಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಆಗ ಒಬ್ಬ ದಾಂಡಿಗನು(ಬ್ಯಾಟ್ಸ್‌ಮನ್) ಗಳಿಸಿದ ರನ್‌ಗಳು x ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಬ್ಬ ಗಳಿಸಿದ ರನ್‌ಗಳು y. ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವುದೆಂದರೆ.

$$x + y = 176,$$

ಇದು ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ.

ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಇದು ಉದಾಹರಣೆ. ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು x ಮತ್ತು y ಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುವುದು ಒಂದು ಪದ್ಧತಿ. ಆದರೆ ಇತರೇ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಕೂಡಾ ಬಳಸಬಹುದು. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ :

$1.2s + 3t = 5,\ p + 4q = 7,\ \pi u + 5v = 9$ ಮತ್ತು $3 = \sqrt{2}x - 7y$.

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $1.2s + 3t - 5 = 0,\ p + 4q - 7 = 0,\ \pi u + 5v - 9 = 0$ ಮತ್ತು $\sqrt{2}x - 7y - 3 = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನೀವು ಬರೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ a, b ಮತ್ತು c ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ, a ಮತ್ತು b ಈ ಎರಡೂ ಸೊನ್ನೆ ಅಲ್ಲದಿರುವ $ax + by + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದ, ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ನೀವು ಇಂತಹ ಅನೇಕಾನೇಕ ಸಮೀಕಣಗಳನ್ನು ಚಿಂತಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $ax + by + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ a, b ಮತ್ತು c ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}y$

(iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$.

ಪರಿಹಾರ : (i) $2x + 3y = 4.37$ ನ್ನು $2x + 3y - 4.37 = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $a = 2,\ b = 3$ ಮತ್ತು $c = -4.37$

(ii) $x - 4 = \sqrt{3}y$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $c = -4$.

(iii) $4 = 5x - 3y$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $5x - 3y - 4 = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $a = 5, b = -3$, $c = -4$. ಇದನ್ನು $-5x + 3y + 4 = 0$ ಎಂದು ಕೂಡಾ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ನೀವು ಒಪ್ಪುವಿರಾ? ಆಗ $a = -5, b = 3$ ಮತ್ತು $c = 4$.

(iv) $2x = y$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $2x - y + 0 = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $a = 2, b = -1$ ಮತ್ತು $c = 0$

$ax + b = 0$ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣಗಳೂ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೂ ಸಹ ಉದಾಹರಣೆಗಳು. ಯಾಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

$ax + 0.\, y + \mathrm{b} = 0$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $4 - 3x = 0$ ಯನ್ನು $-3x + 0.\, y + 4 = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$

(iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

ಪರಿಹಾರ (i) $x = -5$ ನ್ನು $1.\, x + 0.y = -5$ ಅಥವಾ $1.\, x + 0.\, y + 5 = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

(ii) $y = 2$ ನ್ನು $0.\, x + 1.y = 2$ ಅಥವಾ $0.\, x + 1.y - 2 = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

(iii) $2x = 3$ ನ್ನು $2x + 0.y - 3 = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

(iv) $5y = 2$ ನ್ನು $0.\, x + 5y - 2 = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

1. ಒಂದು ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆಯು ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಯ ಎರಡರಷ್ಟಿದೆ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   (ಒಂದು ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ₹ x ಮತ್ತು ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ₹ y ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

2. ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು $ax + by + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ a, b ಮತ್ತು c ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$

   (iv) $x = 3y$ (v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$

   (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

10.3 ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ

ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರ ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ, ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರದ ಬಗ್ಗೆ ನೀವೇನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ? ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವುದರಿಂದ, ಒಂದು ಪರಿಹಾರವೆಂದರೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಬೆಲೆಗಳು. ಈ ಪರಿಹಾರದಲ್ಲಿ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ x ಗೆ ಒಂದು ಬೆಲೆ, y ಗೆ ಒಂದು ಬೆಲೆ ಇರುತ್ತದೆ. $2x + 3y = 12$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ $x = 3, y = 2$ ಎಂಬುದು ಪರಿಹಾರ. ನೀಡಿದ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $x = 3, y = 2$ ಎಂದು ಆದೇಶಿದಾಗ ನೀವು ಕಾಣುವುದೆಂದರೆ,

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$$

ಈ ಪರಿಹಾರವನ್ನು, ಮೊದಲು x ನ ಬೆಲೆ, ಬಳಿಕ y ಯ ಬೆಲೆ ಇರುವಂತೆ, ಅಣಿತಯುಗ್ಮ (3, 2) ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಅದೇ ರೀತಿ (0, 4) ಕೂಡಾ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ.

ಆದರೆ $2x + 3y = 12$ ಕ್ಕೆ (1,4) ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಲ್ಲ. ಯಾಕೆಂದರೆ, $x = 1, y = 4$ ಎಂದು ಆದೇಶಿದಾಗ $2x + 3y = 14$ ಸಿಗುತ್ತದೆ, 12 ಅಲ್ಲ. (0, 4) ಪರಿಹಾರವಾಗುತ್ತದೆ, ಆದರೆ (4, 0) ಅಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$2x + 3y = 12$ ರ ಕನಿಷ್ಟ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ (3, 2) ಮತ್ತು (0, 4). ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಾಣಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? (6, 0) ಇನ್ನೊಂದು ಪರಿಹಾರವೆಂದು ನೀವು ಒಪ್ಪುವಿರಾ? ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. ನಿಜವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ, ಈ ಮುಂದಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅನೇಕಾನೇಕ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. $2x + 3y = 12$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ x ಗೆ ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿ ($x = 2$ ಎಂದಿರಲಿ), ಈಗ ಸಮೀಕರಣವು $4 + 3y = 12$ ಎಂಬ ರೂಪಕ್ಕೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ, ನಿಮಗೆ $y = \frac{8}{3}$ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $2x + 3y = 12$ ಸಮೀಕರಣದ ಇನ್ನೊಂದು ಪರಿಹಾರ $\left(2, \frac{8}{3}\right)$. ಇದೇ ರೀತಿ, $x = -5$ ಎಂದು ಆರಿಸಿಕೊಂಡಾಗ ಸಮೀಕರಣವು $-10 + 3y = 12$ ಎಂದಾಗುವುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡುವಿರಿ. ಇದರಿಂದ $y = \frac{22}{3}$ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$ ಎಂಬುದು $2x + 3y = 12$ ಕ್ಕೆ ಇನ್ನೊಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವಿವಿಧ ಪರಿಹಾರಗಳಿಗೆ ಕೊನೆ ಎಂಬುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ **ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ.**

ಉದಾಹರಣೆ 3 : $x + 2y = 6$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ 4 ವಿಭಿನ್ನ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಪರಿಶೀಲನೆಯಿಂದ, $x = 2, y = 2$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪರಿಹಾರ. ಯಾಕೆಂದರೆ, $x = 2, y = 2$ ಆದಾಗ, $x + 2y = 2 + 4 = 6$.

ಈಗ, $x = 0$ ಎಂದು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. x ನ ಈ ಬೆಲೆಗೆ ಸಮೀಕರಣವು $2y = 6$ ಎಂದು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕಿರುವ ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರವೆಂದರೆ $y = 3$. ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 0, y = 3$ ಎಂಬುದು ಕೂಡಾ $x + 2y = 6$ ರ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, $y = 0$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು $x = 6$ ಎಂದು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $x = 6, y = 0$ ಎಂಬುದು ಕೂಡಾ $x + 2y = 6$ ರ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ. ಕೊನೆಯದಾಗಿ $y = 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ಈಗ $x + 2 = 6$ ಎಂದು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $x = 4$ ಎಂಬುದು ಇದರ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ (4, 1) ಕೂಡಾ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕಿರುವ ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರಗಳಲ್ಲಿ 4 ಪರಿಹಾರಗಳೆಂದರೆ,

(2, 2), (0, 3), (6, 0) ಮತ್ತು (4, 1)

ಗಮನಿಸಿ: ಪರಿಹಾರ ಪಡೆಯುವ ಸುಲಭ ವಿಧಾನವೆಂದರೆ, $x = 0$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅನುರೂಪವಾದ y ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು. ಅದೇ ರೀತಿ, ನಾವು $y = 0$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ ಅನುರೂಪವಾದ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 4 : ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ಎರಡೆರಡು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $4x + 3y = 12$ (ii) $2x + 5y = 0$ (iii) $3y + 4 = 0$

ಪರಿಹಾರ :

(i) $x = 0$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, $3y = 12$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $y = 4$. ಹೀಗೆ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ $(0, 4)$. ಇದೇ ರೀತಿ, $y = 0$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, $x = 3$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ $(3, 0)$ ಕೂಡಾ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ.

(ii) $x = 0$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, $5y = 0$ ಎಂದು ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $y = 0$. ಹೀಗೆ, $(0, 0)$ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ. ಈಗ ನೀವು $y = 0$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಈ ಮೊದಲೇ ದೊರೆತ $(0, 0)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ ಪುನಃ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಪರಿಹಾರ ಸಿಗಲು $x = 1$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ. ಆಗ ಅನುರೂಪವಾದ y ಯ ಬೆಲೆ $-\frac{2}{5}$ ಎಂದು ನೀವು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ ಎಂಬುದು $2x + 5y = 0$ ಯ ಇನ್ನೊಂದು ಪರಿಹಾರ.

(iii) $3y + 4 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $0 \,.\, x + 3y + 4 = 0$ ಎಂದು ಬರೆದುಕೊಂಡರೆ, x ನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೂ $y = -\frac{4}{3}$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೋಡುವಿರಿ. ಹೀಗೆ, 2 ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಕೊಡಬಹುದು $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ ಮತ್ತು $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಆಯ್ಕೆ ಸರಿಯಾದುದು ಮತ್ತು ಏಕೆ?

   $y = 3x + 5$ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ

   (i) ಒಂದು ಅನನ್ಯ (ಏಕೈಕ) ಪರಿಹಾರವಿದೆ. (ii) ಕೇವಲ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ.

   (iii) ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ.

2. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ನಾಲ್ಕು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. $x - 2y = 4$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಪರಿಹಾರವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಯಾವುದು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

   (i) $(0, 2)$ (ii) $(2, 0)$ (iii) $(4, 0)$ (iv) $\left(\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ (v) $(1, 1)$

4. $2x + 3y = k$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ $x = 2, y = 1$ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾದರೆ k ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10.4 ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆ

ನೀವು ಇದುವರೆಗೆ, ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ, ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದೀರಿ. ಈಗ ನಾವು ಅವುಗಳ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇಂತಹ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆಯೆಂದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಅವುಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ನಾವು ಹೇಗೆ ತೋರಿಸಬಹುದು? ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಬೆಲೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದೆಂಬ ಸ್ವಲ್ಪಮಟ್ಟಿಗೆ ಸುಳಿವು ನಿಮಗೆ ಬಂದಿರಲೂಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆ 3 ರಲ್ಲಿರುವ

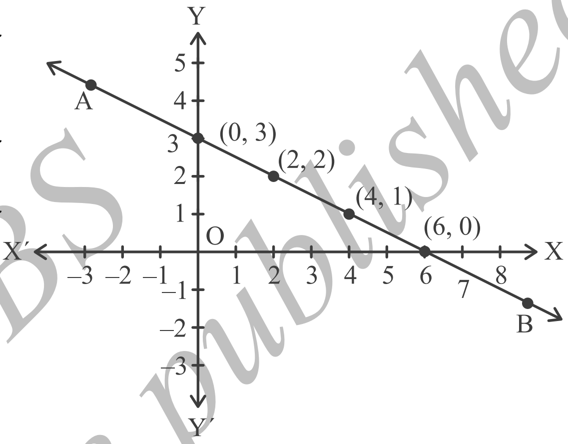
$$x + 2y = 6 \qquad .... \quad (1)$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ, x ನ ಬೆಲೆಗಳ ಕೆಳಗೆ ಅನುರೂಪವಾದ y ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬರೆದು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 1

x	0	2	4	6	...
y	3	2	1	0	...

ಒಂದು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಗುರುತಿಸಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. ನಾವು (0, 3), (2,2), (4,1) ಮತ್ತು (6,0) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸೋಣ. ಈಗ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ 2 ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದನ್ನು ಸರಳರೇಖೆ AB ಎನ್ನೋಣ. (ಚಿತ್ರ 10.2ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.)



ಚಿತ್ರ. 10.2

ಉಳಿದರೆಡು ಬಿಂದುಗಳೂ ಸರಳರೇಖೆ AB ಯ ಮೇಲಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿದಿರಾ? ಈಗ, ಈ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಾದ (8,–1) ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇದೊಂದು ಪರಿಹಾರವೇ? ನಿಜ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ, $8 + 2(-1) = 6$. ಆದ್ದರಿಂದ (8, –1) ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗುತ್ತದೆ. ಸರಳ ರೇಖೆ AB ಯ ಮೇಲಿರುವ ಇತರ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಆರಿಸಿ, ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆಯೇ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. ಈಗ AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿಲ್ಲದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾದ (2, 0) ಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಇದರ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆಯೇ? ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿ. ನಮ್ಮ ಅವಲೋಕನವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ:

(1) ಸಮೀಕರಣ (1) ಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದೆ.

(2) AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು (a, b) ಯು $x = a, y = b$ ಆಗುವಂತೆ ಸಮೀಕರಣ(1) ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗುತ್ತದೆ.

(3) AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವೂ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ (1) ಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪರಿಹಾರವೂ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೀವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೂಲಕ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದರ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರಗಳ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆ (ಗ್ರಾಫ್) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆ ಸಿಗಬೇಕೆಂದರೆ, ಅದರ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳಿಗೆ

ಅನುಗುಣವಾದ 2 ಬಿಂದುಗಳ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಹಾಗಿದ್ದರೂ, 2 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಸಲಹೆ ನೀಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಯಾಕೆಂದರೆ, ನಿಮ್ಮ ನಕ್ಷೆಯು ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ತಕ್ಷಣ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ.

ಗಮನಿಸಿ – ಒಂದನೆಯ ಘಾತದಲ್ಲಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಸಮೀಕರಣ $ax + by + c = 0$ ಯನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನಲು ಕಾರಣವೇನೆಂದರೆ ಅದರ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆಯು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿರುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 5 : $(1, 2)$ ಎಂಬ ದತ್ತ ಬಿಂದುವು ಇರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಂತಹ ಎಷ್ಟು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿವೆ?

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ $(1, 2)$ ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ಬೇಕಾದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ. ಅಂದರೆ $(1, 2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಯಾವುದೇ ರೇಖೆ ನಿಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇಂತಹ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ $x + y = 3$. ಇತರ ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ $y - x = 1$, $y = 2x$. ಯಾಕೆಂದರೆ ಇವುಗಳೂ ಕೂಡಾ $(1, 2)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, $(1, 2)$ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸರಿ ಹೊಂದುವ ಅಪರಿಮಿತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಿವೆ. ಇದನ್ನು ನೀವು ಚಿತ್ರಿಸಿಕೊಂಡು ನೋಡಬಹುದೆ?

ಉದಾಹರಣೆ 6 :

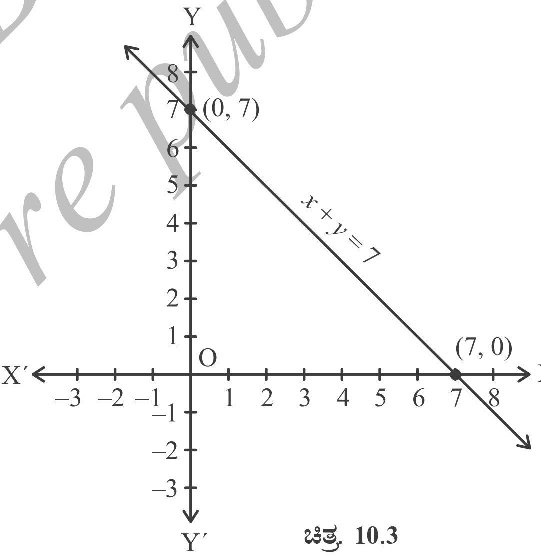
$x + y = 7$ ರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಲು ಆ ಸಮೀಕರಣದ ಕನಿಷ್ಠ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳು ನಮಗೆ ಬೇಕು. $x = 0$, $y = 7$ ಮತ್ತು $x = 7$, $y = 0$ ಇವುಗಳು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರಗಳಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ, ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಲು ನೀವು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 2

x	0	7
y	7	0

ಕೋಷ್ಟಕ 2ರ 2 ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಬಳಿಕ ಅವುಗಳನ್ನು ಸರಳ ರೇಖೆಯಿಂದ ಜೋಡಿಸುವ ಮೂಲಕ ನೀವು ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. (ಚಿತ್ರ 10.3 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.)

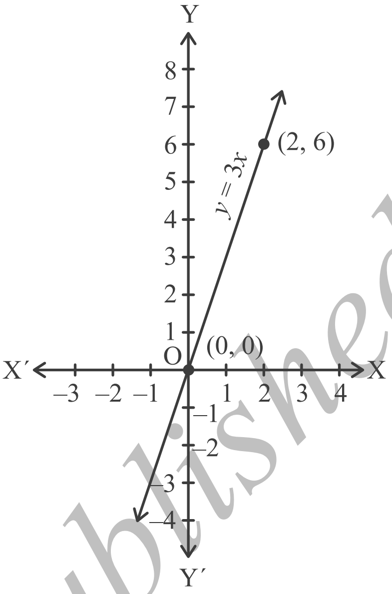


ಚಿತ್ರ. 10.3

ಉದಾಹರಣೆ 7 : ಒಂದು ಕಾಯದ ಮೇಲೆ ಉಂಟಾಗುವ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವು, ಅದರ ಮೇಲೆ ಪ್ರಯೋಗವಾಗುವ ಬಲಕ್ಕೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಈ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆದು, ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ ಬರುವ ಚರಾಂಶಗಳೆಂದರೆ ಬಲ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ. ಪ್ರಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಬಲವು y ಮಾನಗಳಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಉಂಟಾದ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವು x ಮಾನಗಳಾಗಿರಲಿ. ಅನುಪಾತ ಮತ್ತು ಸಮಾನುಪಾತಗಳ ಮೂಲಕ, ನೀವಿದನ್ನು $y = kx$ ಎಂದು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ k ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ. (ನಿಮ್ಮ ವಿಜ್ಞಾನ ಅಧ್ಯಯನದ ಮೂಲಕ, ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ k ಎಂದರೆ ವಸ್ತುವಿನ ರಾಶಿ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ.)

ಈಗ, k ಎಂದರೇನೆಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿಯದಿರುವುದರಿಂದ $y = kx$ ನ ನಿಖರವಾದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಲು ನಮ್ಮಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದಾಗ್ಯೂ, k ಗೆ ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಾವು ನೀಡಿದರೆ, ನಮಗೆ ನಕ್ಷೆ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. $k = 3$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅಂದರೆ, $y = 3x$ ನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ (0, 0) ಮತ್ತು (2, 6) ಎಂಬ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳೋಣ. (ಚಿತ್ರ 10.4ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.)



ಚಿತ್ರ. 10.4

ನಕ್ಷೆಯಿಂದ, 3 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಬಲ ಪ್ರಯೋಗ ಮಾಡಿದಾಗ, 1 ಮಾನದಷ್ಟು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಬಹುದು. ಅಲ್ಲದೆ ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ (0, 0) ಇರುವುದರಿಂದ, ಬಲಪ್ರಯೋಗವು 0 ಆದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವೂ 0 ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಗಮನಿಸಿ : $y = kx$ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆಯು ಒಂದು ರೇಖೆಯಾಗಿದ್ದು, ಅದು ಯಾವಾಗಲೂ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8 : ಚಿತ್ರ 10. 5 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಕ್ಷೆಗೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಂದ ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(a) ಚಿತ್ರ 10. 5 (i) ಕ್ಕೆ.

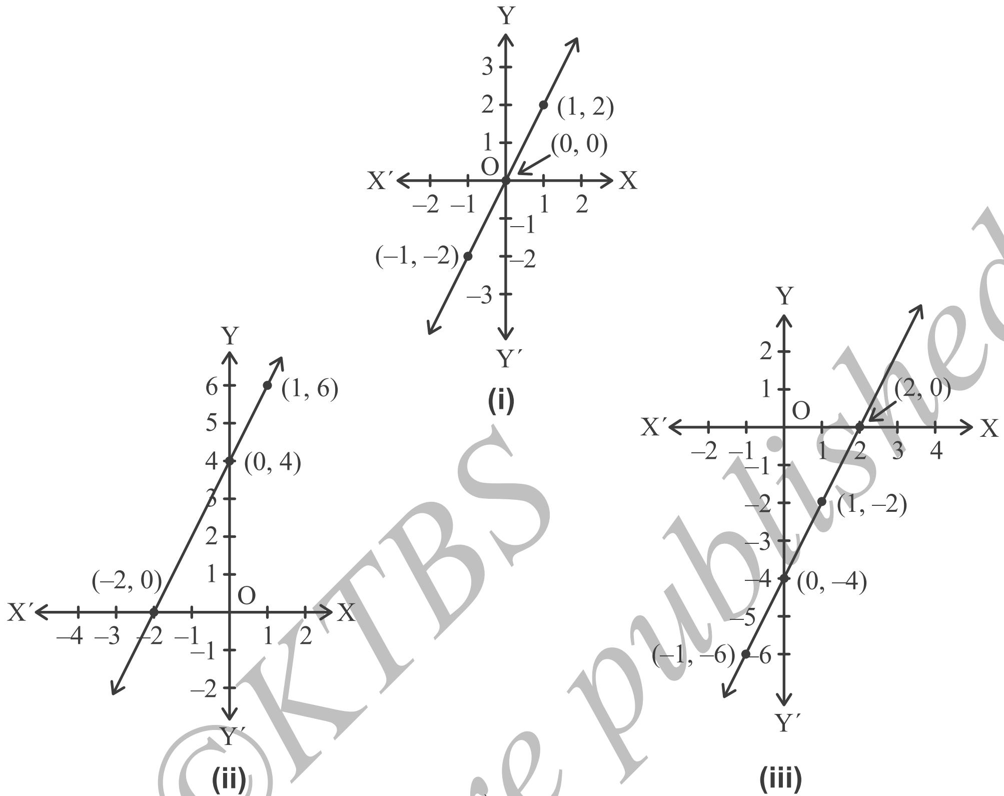
(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = x$ (iv) $y = 2x + 1$

(b) ಚಿತ್ರ 10. 5 (ii) ಕ್ಕೆ,

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 4$ (iv) $y = x – 4$

(c) ಚಿತ್ರ 10. 5 (iii) ಕ್ಕೆ,

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 1$ (iv) $y = 2x – 4$



ಚಿತ್ರ. 10.5

ಪರಿಹಾರ : ಚಿತ್ರ 10. 5 (i) ರಲ್ಲಿ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು (–1, –2), (0, 0), (1, 2). ಪರಿಶೀಲನೆಯಿಂದ, ನಕ್ಷೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಸಮೀಕರಣವೆಂದರೆ $y = 2x$. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ y – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು x – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕದ ದುಪ್ಪಟ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

(b) ಚಿತ್ರ 10.5 (ii) ರಲ್ಲಿ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು (–2, 0), (0, 4), (1, 6). ನಕ್ಷೆ (ಸರಳರೇಖೆ)ಯ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $y = 2x + 4$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಚಿತ್ರ 10.5 (ii) ನಕ್ಷೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಸಮೀಕರಣವೆಂದರೆ $y = 2x + 4$.

(c) ಚಿತ್ರ 10.5 (iii) ರಲ್ಲಿ. ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು (–1, –6), (0, –4), (1, –2), (2, 0). ಪರಿಶೀಲನೆಯಿಂದ ದತ್ತ ನಕ್ಷೆ (ಸರಳರೇಖೆ)ಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಸಮೀಕರಣವು $y = 2x – 4$ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 10. 3

1. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾದ, ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ನಕ್ಷೆ ರಚಿಸಿರಿ.

   (i) $x + y = 4$ (ii) $x – y = 2$ (iii) $y = 3x$ (iv) $3 = 2x + y$

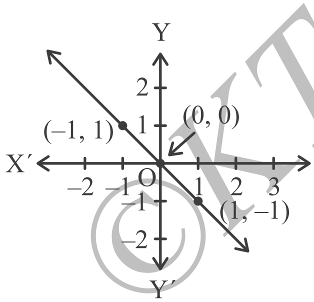
2 (2, 14) ರ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಇಂತಹ ಇನ್ನೆಷ್ಟು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿವೆ? ಏಕೆ?

3. $3y = ax + 7$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ (3, 4) ಬಿಂದುವು ಇರುವುದಾದರೆ, a ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

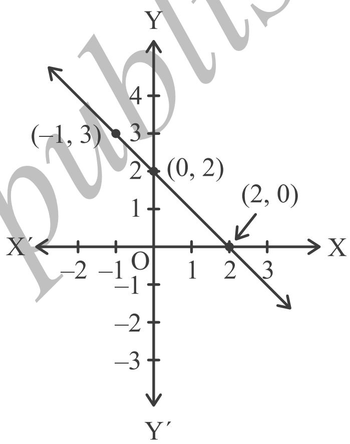
4. ಒಂದು ನಗರದಲ್ಲಿ ಟ್ಯಾಕ್ಸಿ ದರವು ಈ ರೀತಿ ಇದೆ: ಮೊದಲ ಕಿಲೋಮೀಟರ್‌ಗೆ ದರವು ₹ 8 ಮತ್ತು ಅದರ ತದನಂತರದ ಪ್ರತಿ ದೂರಕ್ಕೆ ಕಿಲೋಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 5. ಚಲಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು x *km* ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ದರವನ್ನು ₹ y ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಮಾಹಿತಿಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆದು, ಅದರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

5. ಕೆಳಗಿನ ಆಯ್ಕೆಗಳಿಂದ, ಚಿತ್ರ 10.6 ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 10.7ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ನಕ್ಷೆಗಳಿಗೆ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿರಿ.

ಚಿತ್ರ 10.6 ಕ್ಕೆ	**ಚಿತ್ರ 10.7 ಕ್ಕೆ**
(i) $y = x$	(i) $y = x + 2$
(ii) $x + y = 0$	(ii) $y = x - 2$
(iii) $y = 2x$	(iii) $y = -x + 2$
(iv) $2 + 3y = 7x$	(iv) $x + 2y = 6$



ಚಿತ್ರ. 10.6



ಚಿತ್ರ. 10.7

6. ಸ್ಥಿರವಾದ ಬಲಪ್ರಯೋಗದಿಂದ ಒಂದು ಕಾಯವು ಮಾಡುವ ಕೆಲಸವು, ಆ ಕಾಯವು ಚಲಿಸಿದ ದೂರಕ್ಕೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ. ಇದನ್ನು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ ಬಲವು 5 ಮಾನಗಳೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಇದರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಅಲ್ಲದೆ, ವಸ್ತುವು ಚಲಿಸಿದ ದೂರವು

   (i) 2 ಮಾನಗಳು (ii) 0 ಮಾನ

   ಆದಾಗ ನಡೆದ ಕೆಲಸವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಓದಿರಿ.

7. ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 9ನೆಯ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರಾದ ಯಾಮಿನಿ ಮತ್ತು ಫಾತಿಮಾ ಎಂಬವರು ಭೂಕಂಪ ಸಂತ್ರಸ್ತರಿಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡಲು ಪ್ರಧಾನ ಮಂತ್ರಿಗಳ ಪರಿಹಾರ ನಿಧಿಗೆ, ಜಂಟಿಯಾಗಿ ₹100ನ್ನು ದೇಣಿಗೆ ನೀಡಿದರು. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. (ನೀವು ಅವರ ದೇಣಿಗೆಯನ್ನು ₹x ಮತ್ತು ₹y ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.) ಇದರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

8. U.S.A. ಕೆನಡಾದಂತಹ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ತಾಪಮಾನವನ್ನು ಫ್ಯಾರನ್‌ಹೀಟ್‌ಲ್ಲಿಯೂ, ಭಾರತದಂತಹ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಅಳೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್‌ನ್ನು ಫ್ಯಾರನ್‌ಹೀಟ್‌ಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವಿದೆ.

$$F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$$

(i) x – ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್ ಮತ್ತು y – ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಫ್ಯಾರನ್‌ಹೀಟ್‌ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಮೇಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(ii) ತಾಪಮಾನವು 30°C ಆದಾಗ ಅದು ಫ್ಯಾರನ್‌ಹೀಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು?

(iii) ತಾಪಮಾನವು 95°F ಆದಾಗ ಅದು ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು?

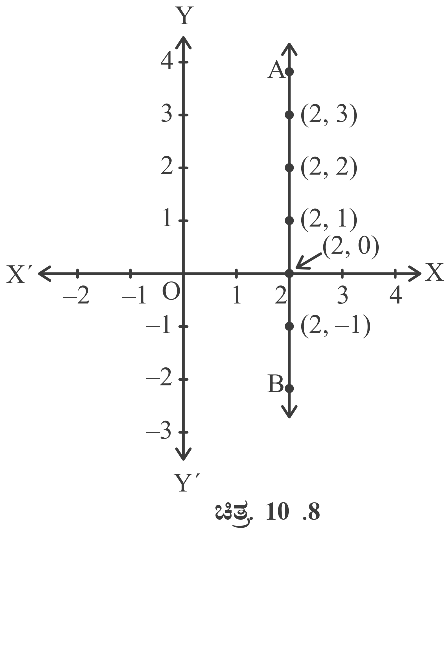
(iv) ತಾಪಮಾನವು 0°C ಆದಾಗ ಅದು ಫ್ಯಾರನ್‌ಹೀಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು? ತಾಪಮಾನವು 0°F ಆದಾಗ ಅದು ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು?

(v) ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್ ಮತ್ತು ಫ್ಯಾರನ್‌ಹೀಟ್ ಎರಡರಲ್ಲೂ ಸಾಂಖ್ಯಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ತಾಪ ಇದೆಯೇ? ಇದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10.5 x – ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು y – ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯುವುದೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. n ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ, ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ (2, 0), (– 3, 0), (4, 0) ಮತ್ತು (n, 0) ಬಿಂದುಗಳು ಎಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೆ? ಹೌದು. ಅವುಗಳೆಲ್ಲಾ x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ, ಏಕೆ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೆ? ಏಕೆಂದರೆ, x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ y – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ 0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವು (x, 0) ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ ನಿಮಗೆ x – ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಊಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೆ? ಅದು $y = 0$ ಆಗಿದೆ. $y = 0$ ಯನ್ನು $0.\,x + 1.\,y = 0$ ಎಂದು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದೆಂದು ಗಮನಿಸಿ. ಅದೇ ರೀತಿ y ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವು $x = 0$ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಗಮನಿಸಿ.

ಈಗ, $x - 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. x ಎಂಬ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ನಾವಿದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಇದಕ್ಕೆ $x = 2$ ಎಂಬ ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರವಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೂ, ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಇದನ್ನು $x + 0.y - 2 = 0$ ಎಂದು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ. ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ $(2, r)$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು r ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. $(2, r)$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಾಗುವುದನ್ನು ನೀವು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವಾಗಿ, $x - 2 = 0$ ಯು ಚಿತ್ರ 10. 8 ರಲ್ಲಿರುವ ರೇಖೆ AB ಯಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ. 10 .8

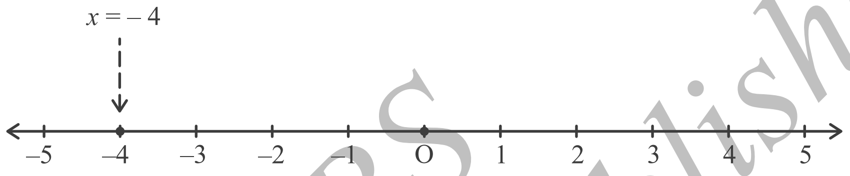
ಉದಾಹರಣೆ 9 : $2x + 1 = x - 3$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಮತ್ತು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು (i) ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ (ii) ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : $2x + 1 = x - 3$ ನ್ನು ನಾವು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವುದು,

$$2x - x = -3 - 1$$

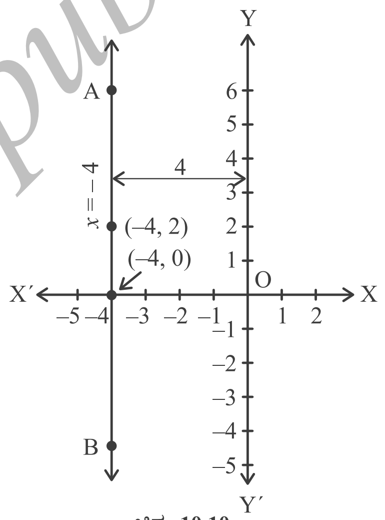
ಅಂದರೆ $x = -4$

(i) ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದನ್ನು ಚಿತ್ರ 10.9 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $x = -4$ ನ್ನು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ. 10.9

(ii) $x = -4$ನ್ನು $x + 0.\,y = -4$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಇದು x ಮತ್ತು y ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈಗ yಗೆ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಯಾಕೆಂದರೆ, $0.\,y$ ಎಂಬುದು ಯಾವಾಗಲೂ 0. ಹಾಗೆಂದು, $x = -4$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ x ನ ಬೆಲೆ ಸರಿಹೊಂದಬೇಕು. ಹೀಗೆ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳು $x = -4, y = 0$ ಮತ್ತು $x = -4, y = 2$.



ಚಿತ್ರ. 10.10

ನಕ್ಷೆ AB ಯು y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾದ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷದಿಂದ 4 ಏಕಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. (ಚಿತ್ರ 10.10ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.)

ಇದೇ ರೀತಿ $y = 3$ ಅಥವಾ $0 \,.\, x + 1.\, y = 3$ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾದ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ನೀವು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.4

1. $y = 3$ ಎಂಬ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವು

   (i) ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನೊಳಗೊಂಡಂತೆ

   (ii) ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಂತೆ – ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಿ.

2. $2x + 9 = 0$ ಎಂಬ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವು

   (i) ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನೊಳಗೊಂಡಂತೆ

   (ii) ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಂತೆ – ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಿ.

10.6 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

1. a, b ಮತ್ತು c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತು a ಹಾಗೂ b ಎರಡೂ ಸೊನ್ನೆ ಅಲ್ಲದಿರುವಂತೆ, $ax + by + c = 0$ ರೂಪದ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
2. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವು ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
3. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆಯು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.
4. $x = 0$ ಎಂಬುದು y– ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $y = 0$ ಎಂಬುದು x– ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.
5. $x = a$ ಯ ನಕ್ಷೆಯು y– ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.
6. $y = a$ ಯ ನಕ್ಷೆಯು x– ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾದ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.
7. $y = mx$ ವಿಧದ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.
8. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ. ಇದೇ ಅಲ್ಲದೆ, ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪರಿಹಾರವು, ಅದರ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

3ITXUF

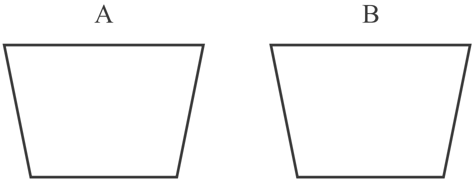
ಅಧ್ಯಾಯ – 11

ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು

11.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಭೂಮಿಯ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸಿ, ಸೂಕ್ತವಾದ ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ಅದನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವುದರ ಮುಖಾಂತರ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಅಧ್ಯಯನ ಆರಂಭವಾಯಿತು ಎಂದು ನೀವು 2ನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. ಉದಾ : ಬುಧಿಯಾ ಎಂಬ ರೈತ ಮಹಿಳೆಯೊಬ್ಬರು ತ್ರಿಕೋನಾಕಾರದ ಜಮೀನನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರು. ಅದನ್ನು ಆಕೆಯು ತನ್ನ ಇಬ್ಬರು ಹೆಣ್ಣು ಮಕ್ಕಳು ಹಾಗೂ ಒಬ್ಬ ಮಗನಿಗೆ ಸಮನಾಗಿ ಹಂಚಲು ನಿರ್ಧರಿಸಿದರು. ಆ ಜಮೀನಿನ ನಿಜವಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕದೆ, ಆಕೆಯು ಆ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಜಮೀನಿನ ಒಂದು ಬದಿಯನ್ನು ಸಮನಾದ ಮೂರು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದಾಗ ದೊರಕಿದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅದರ ಅಭಿಮುಖ ಶೃಂಗಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಿದಳು. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಆಕೆಯು ಜಮೀನನ್ನು ಮೂರು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ, ಒಂದೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ತನ್ನ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಕೊಟ್ಟಳು. ಆಕೆಯಿಂದ ಹೀಗೆ ದೊರಕಿದ ಮೂರೂ ಭಾಗಗಳು ನಿಜವಾಗಿ ಸಮನಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಎಂದು ನೀವು ಭಾವಿಸುವಿರಾ ? ಈ ರೀತಿಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಮತ್ತು ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಇತರ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವ ಸಮತಲಾಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಪುನರಾವಲೋಕನ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

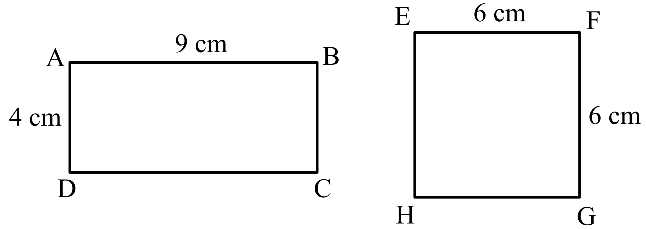
ಒಂದು ಸರಳ ಆವೃತ ಆಕೃತಿಯಿಂದ ಆವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮತಲದ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಆಕೃತಿಯ ಸಮತಲಾಕೃತಿ ಪ್ರದೇಶ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಈ ಸಮತಲಾಕೃತಿಯ ಪ್ರದೇಶದ ಪರಿಮಾಣ ಅಥವಾ ಅಳತೆಯೇ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ. ಈ ಪರಿಮಾಣ ಅಥವಾ ಅಳತೆಯನ್ನು ನಾವು ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. (ಕೆಲವು ಮೂಲಮಾನಗಳೊಂದಿಗೆ) ಉದಾ $5cm^2$, $8m^2$, 3 ಹೆಕ್ಟೇರ್‌ಗಳು ಇತ್ಯಾದಿ. ಆಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು (ಕೆಲವು ಮೂಲಮಾನಗಳೊಂದಿಗೆ), ಇದು ಆಕೃತಿಯು ಆವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮತಲದ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 11.1

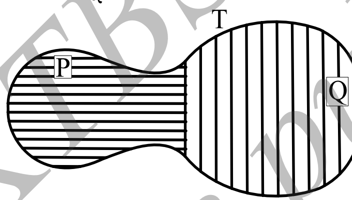
ಅಧ್ಯಾಯ 5 ಹಾಗೂ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಪರಿಚಯ ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. **ಒಂದೇ ಆಕಾರ ಮತ್ತು ಗಾತ್ರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.** ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಚಿತ್ರ 11.1 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ಆಕೃತಿ A ಮತ್ತು B ಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾದರೆ, ಅರೆ ಪಾರದರ್ಶಕ ಹಾಳೆಯ (tracing paper) ಸಹಾಯದಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಆಕೃತಿಯು ಇನ್ನೊಂದು ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಆವರಿಸುವಂತೆ, ಒಂದರ ಮೇಲೆ

ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಹೊಂದಿಕೆ ಆಗುವಂತೆ ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ **A ಮತ್ತು B ಆಕೃತಿಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾದರೆ, ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸಮವಾಗಿರಲೇಬೇಕು. ಆದರೆ ಈ ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮವು ಸತ್ಯವಲ್ಲ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.** ಉದಾ : ಚಿತ್ರ 11.2 ರಲ್ಲಿ ಆಯತ ABCD ಮತ್ತು EFGH ಗಳು ಒಂದೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ($9 \times 4 cm^2$ ಮತ್ತು $6 \times 6 cm^2$) ಹೊಂದಿದ್ದರೂ ಕೂಡಾ ಅವುಗಳು ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ (ಯಾಕೆ ?)



ಚಿತ್ರ 11.2

ಈಗ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ 11.3 ಚಿತ್ರವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ



ಚಿತ್ರ 11.3

ಆಕೃತಿ T ಯಿಂದ ಆವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮತಲಾಕೃತಿ ಭಾಗವು, ಆಕೃತಿ P ಮತ್ತು ಆಕೃತಿ Q ಗಳಿಂದ ಆವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮತಲಾಕೃತಿ ಭಾಗಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗಿವೆ ಎಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಆಕೃತಿ T ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಆಕೃತಿ P ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಆಕೃತಿ Q ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಂದು ನಾವು ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಿಂದ ಸುಲಭವಾಗಿ ಗಮನಿಸಬಹುದು.

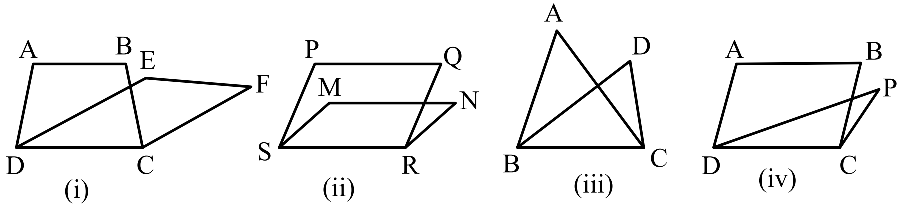
ಆಕೃತಿ A ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ವಿ(A) ಆಕೃತಿ B ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ವಿ(B) ಎಂದೂ ಆಕೃತಿ T ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ವಿ(T) ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. **ಆಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು (ಕೆಲವು ಮೂಲಮಾನವಿರುವ) ಇದು ಆಕೃತಿಯು ಆವರಿಸ್ಪಟ್ಟ ಸಮತಲದ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ್ದು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.**

1. **A ಮತ್ತು B ಗಳು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳಾದರೆ ವಿ(A)=ವಿ(B) ಮತ್ತು**
2. **ಆಕೃತಿ T ಯ ಸಮತಲಾಕೃತಿ ಪ್ರದೇಶವು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಇಲ್ಲದಂತೆ ಇರುವ ಆಕೃತಿ P ಮತ್ತು ಆಕೃತಿ Q ನ ಸಮತಲಾಕೃತಿ ಪ್ರದೇಶಗಳಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟರೆ ವಿ(T)=ವಿ(P)+ವಿ(Q)**

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಆಯತ, ವರ್ಗ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ, ತ್ರಿಭುಜ ಮುಂತಾದ ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ. ಪ್ರಸ್ತುತ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಪಾದ ಹಾಗೂ ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ, ಎರಡು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವ ಮುಖಾಂತರ, ಈ ಸೂತ್ರಗಳ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಒಗ್ಗೂಡಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡೋಣ. ಈ ಅಧ್ಯಯನವು "ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆ" ಯ ಕೆಲವು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಕೂಡಾ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಿದೆ.

11.2 : ಒಂದೇ ಪಾದ ಹಾಗೂ ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಆಕೃತಿಗಳು

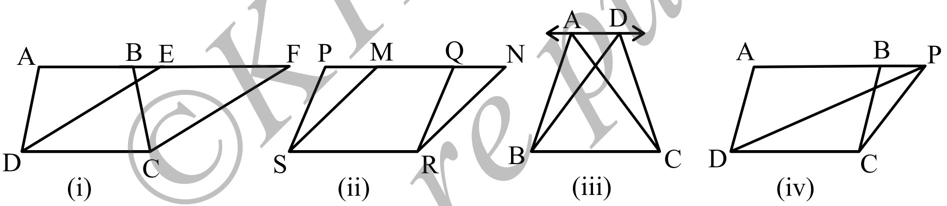
ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ



ಚಿತ್ರ 11.4

ಚಿತ್ರ 11.4 (i) ರಲ್ಲಿ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ABCD ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ EFCD ಗಳು ಒಂದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು DC ಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ABCD ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ EFCD ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ DC ಯ ಮೇಲಿವೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಚಿತ್ರ 11.4(ii) ರಲ್ಲಿ PQRS ಮತ್ತು MNRS ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ SR ನ ಮೇಲಿದೆ. ಚಿತ್ರ 11.4(iii) ರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜ DBC ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ BC ಯ ಮೇಲಿದೆ. ಚಿತ್ರ 11.4(iv) ರಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜ PDC ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ DC ಯ ಮೆಲಿದೆ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ



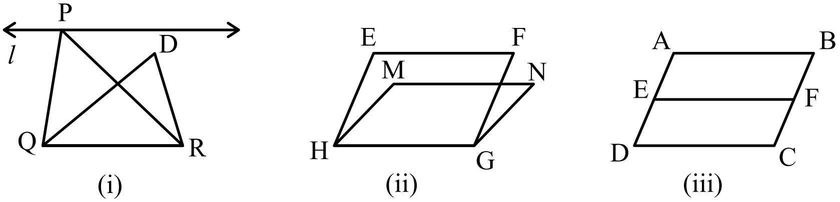
ಚಿತ್ರ 11.5

ಚಿತ್ರ 11.5(i) ರಲ್ಲಿ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ABCD ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ EFCD ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ DC ಯ ಮೇಲಿರುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. A ಮತ್ತು B ಶೃಂಗಗಳು (ABCD ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ) ಹಾಗೂ E ಮತ್ತು F ಶೃಂಗಗಳು (EFCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ) DC ಪಾದಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿದ್ದು AF ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿವೆ. ಮತ್ತು DC ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ.

ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ABCD ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ EFCD ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ DC ಯ ಮೇಲಿದ್ದು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ AF ಮತ್ತು DC ಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ. ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ PQRS ಮತ್ತು MNRS ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ SR ಮೇಲಿದ್ದು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾದ PN ಮತ್ತು SR ಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ. [ಚಿತ್ರ 11.5 (ii)] ನೋಡಿ. PQRS ನ P ಮತ್ತು Q ಶೃಂಗಗಳು MNRS ನ M ಮತ್ತು N ಶೃಂಗಗಳು PN ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿವೆ. ಅದೇ ರೀತಿ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಮತ್ತು DBC ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ BC ಯ ಮೇಲಿದ್ದು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾದ AD ಮತ್ತು BC ಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ. [ಚಿತ್ರ 11.5(iii) ಗಮನಿಸಿ] ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಹಾಗೂ ತ್ರಿಭುಜ PCD ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ DC ಯ ಮೇಲಿದ್ದು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾದ AP ಮತ್ತು DC ಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ.(ಚಿತ್ರ 11.5(iv) ಗಮನಿಸಿ).

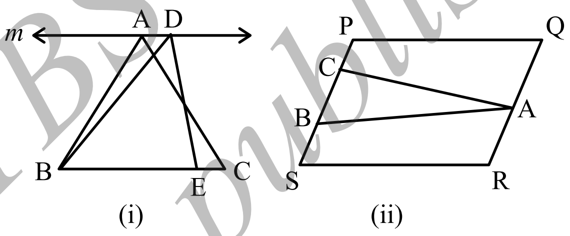
ಅದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ ಅವುಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದದ ಮೇಲಿದ್ದು ಆ ಪಾದಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಶೃಂಗಗಳು ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಪ್ರಕಾರ ΔPQR ಮತ್ತು ΔDQR (ಚಿತ್ರ 11.6(i)) ಇವುಗಳು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ l ಮತ್ತು QR ಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಸಾದ್ಯವಿಲ್ಲ.



ಚಿತ್ರ 11.6

ಹಾಗೆಯೇ ಚಿತ್ರ 11.6(ii) ರಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ EFGH ಮತ್ತು MNGH ಗಳು EF||GH ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ ಎಂದಾಗಲೀ, ಚಿತ್ರ 11.6(iii) ರಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಮತ್ತು EFCD ಗಳು AB ಮತ್ತು DC ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ ಎಂದಾಗಲೀ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. (ಅವುಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ DC ಹಾಗೂ AD||BC ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇದ್ದರೂ ಕೂಡಾ) ಎರಡು ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪಾದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ರೇಖೆಯಾಗಿರಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಚಿತ್ರ 11.7(1)ರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜ DBE ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದದ ಮೇಲಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

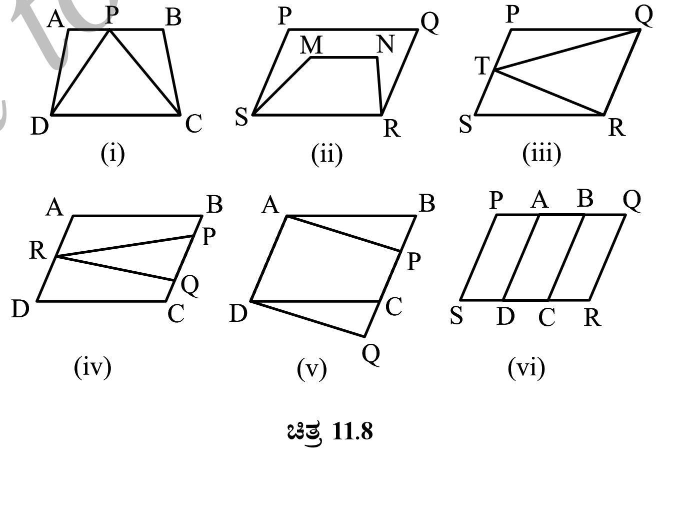


ಚಿತ್ರ 11.7

ಹಾಗೆಯೇ ಚಿತ್ರ 11.7 (ii) ರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ PQRS ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದದ ಮೇಲಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಆಕೃತಿಗಳು ಯಾವುವು? ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯಪಾದ ಮತ್ತು ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿ.

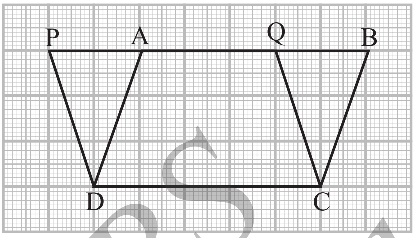


ಚಿತ್ರ 11.8

11.3 ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು:

ಈಗ ಒಂದೇ ಪಾದ ಹಾಗೂ ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳೇನು? ಎಂಬುವುದನ್ನು ತಿಳಿಯುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡೋಣ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 1 : ಒಂದು ಗ್ರಾಫ್ (ಆಲೇಖ) ಹಾಳೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಚಿತ್ರ 11.9ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ABCD ಮತ್ತು PQCD ಎಂಬ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿಸೋಣ.

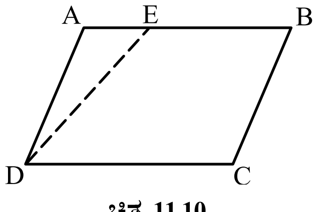


ಚಿತ್ರ 11.9

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ DC ಯ ಮೇಲಿದ್ದು PB ಮತ್ತು DC ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ. ಏಕಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಿಕೊಂಡು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಏಕಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಪೂರ್ಣಚೌಕಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವಾಗ, ಅರ್ಧಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಭಾಗವಿರುವ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಚೌಕವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬೇಕು. ಆದರೆ ಅರ್ಧಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಭಾಗವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ಬಿಟ್ಟುಬಿಡಬೇಕು. ಎರಡೂ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀಣಗಳು $15cm^2$ (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ) ಎಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಇನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಬಿಡಿಸಿ ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ* ನೀವೇನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಎರಡೂ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿವೆಯೆ? ಅಥವಾ ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿವೆಯೆ? ಅವುಗಳು ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಸಮವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ **ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮ** ಎಂಬ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ನೀವು ಬರಬಹುದು. ಹಾಗಿದ್ದರೂ ಇದು ಬರೇ ತಾಳೆನೋಡುವ ವಿಧಾನ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ.

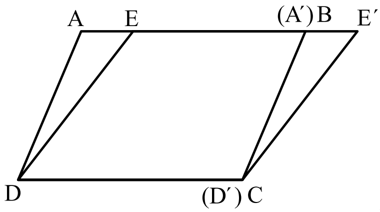
ಚಟುವಟಿಕೆ 2: ಒಂದು ರಟ್ಟು ಅಥವಾ ದಪ್ಪ ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಈಗ, ಚಿತ್ರ 11.10ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ DE ಎಂಬ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ರಚಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 11.10

* ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಜಿಯೋಬೋರ್ಡ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೂಡಾ ಮಾಡಬಹುದು.

ನಂತರ Δ ADE ಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುವಂತೆ $\Delta A^1D^1E^1$ ನ್ನು ಟ್ರೇಸಿಂಗ್ ಪೇಪರ್‌ನ ಸಹಾಯದಿಂದ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಕತ್ತರಿಸಿ ಮತ್ತು A^1D^1 ಇದು BC ಯ ಮೇಲೆ ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಚಿತ್ರ 11.11 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿ. ABCD ಮತ್ತು EE^1CD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ CD ಮತ್ತು AE^1 ಮತ್ತು DC ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ?



ಚಿತ್ರ 11.11

$$\Delta ADE \cong \Delta A^1D^1E^1$$

ಆದ್ದರಿಂದ ವಿ (ADE) = ವಿ $(A^1D^1E^1)$ (ವಿ = ವಿಸ್ತೀರ್ಣ)

ಮತ್ತು ವಿ (ABCD) = ವಿ (ADE) + ವಿ (EBCD)

= ವಿ $(A^1D^1E^1)$ + ವಿ (EBCD)

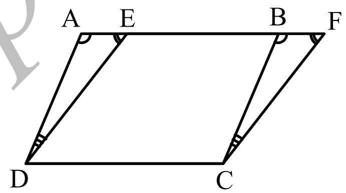
= ವಿ (EE^1CD).

ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ.

ಇಂತಹ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಾವೀಗ ಸಾಧಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ: 11.1: ಒಂದೇ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ : ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ EFCD ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ DC ಯ ಮೇಲಿದ್ದು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾದ AF ಮತ್ತು DC ಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ. (ಚಿತ್ರ 11.12 ಗಮನಿಸಿ) ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದುದು ವಿ (ABCD) = ವಿ (EFCD)



ಚಿತ್ರ 11.12

Δ ADE ಮತ್ತು Δ BCF ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle DAE = \angle CBF$ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು, $AD \parallel BC$ ಮತ್ತು AF ಛೇದಕರೇಖೆ) .... (1)

$\angle AED = \angle BFC$ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು. $ED \parallel FC$ ಮತ್ತು AF ಛೇದಕರೇಖೆ) .... (2)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle ADE = \angle BCF$ (ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣ) .... (3)

ಹಾಗೆಯೇ, AD = BC. (ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು) .... (4)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\Delta ADE \cong \Delta BCF$(ASA ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ 1 ಮತ್ತು 3 ಮತ್ತು 4ರಿಂದ)

ಆದ್ದರಿಂದ, ವಿ (ADE) = ವಿ(BCF) (ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮ) .... (5)

ಈಗ, ವಿ (ABCD) = ವಿ(ADE) + ವಿ (EDCB)

= ವಿ(BCF) + ವಿ (EDCB) [5 ರಿಂದ]

= ವಿ(EFCD)

ಆದ್ದರಿಂದ ABCD ಮತ್ತು EFCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ.

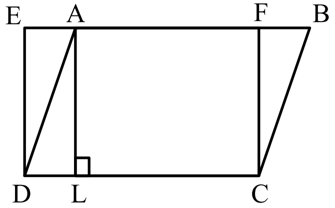
ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಚಿತ್ರ 11.13 ರಲ್ಲಿ ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು EFCD ಒಂದು ಆಯತ.

ಹಾಗೆಯೇ, $AL \perp DC$

(i) ವಿ (ABCD) = ವಿ (EFCD)

(ii) ವಿ (ABCD) = $DC \times AL$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 11.13

ಪರಿಹಾರ: (i) ಆಯತವೂ ಕೂಡಾ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ವಿ (ABCD) = ವಿ (EFCD) (ಪ್ರಮೇಯ 11.1)

(ii) ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶದಿಂದ, ವಿ (ABCD) = $DC \times FC$ (ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಉದ್ದ × ಅಗಲ) .... (1)

$AL \perp DC$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ AFCL ಕೂಡಾ ಆಯತವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ AL = FC .... (2)

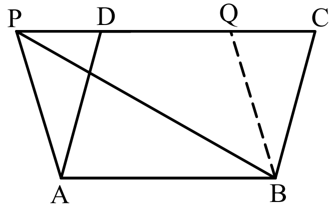
ಆದ್ದರಿಂದ, ವಿ (ABCD) = $DC \times AL$ (1 ಮತ್ತು 2 ರಿಂದ)

ಮೇಲಿನ (ii) ನೇ ಫಲಿತಾಂಶದಿಂದ **ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದರ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಾಹು ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಎತ್ತರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ?** ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು 7ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದು ನಿಮಗೆ ನೆನಪಿದೆಯೇ? ಈ ಸೂತ್ರದ ಆಧಾರದಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 11.1 ನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಒಂದೇ ಪಾದ ಅಥವಾ ಸಮಪಾದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮವನ್ನು ನೀವು ಬರೆಯಬಹುದೆ? ಅದು ಹೀಗಿದೆ "ಸಮನಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಪಾದದ ಅಥವಾ ಸಮಪಾದಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ. ಈ ವಿಲೋಮ ಹೇಳಿಕೆ ಸರಿಯೇ? ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಸೂತ್ರದಿಂದ ವಿಲೋಮ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಮುಖಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದದ ಮೇಲಿದ್ದು, ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇದ್ದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಮುಖದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 11.14

ಪರಿಹಾರ: Δ ABP ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ AB ಯ ಮೇಲಿದ್ದು AB ಮತ್ತು PC ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. (ಚಿತ್ರ 11.14 ಗಮನಿಸಿ)

ನೀವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದು,

ವಿ (PAB) = $\frac{1}{2}$ ವಿ (ABCD)

ABQP ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಪಡೆಯಲು BQ II AP ರಚಿಸಬೇಕು.

ಈಗ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABQP ಮತ್ತು ABCD ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ ABಯ ಮೇಲಿದ್ದು AB ಮತ್ತು PC ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ: ವಿ (ABQP)= ವಿ (ABCD) (ಪ್ರಮೇಯ 11.1 ರ ಪ್ರಕಾರ) .... (1)

ಆದರೆ $\Delta PAB \cong \Delta BQP$ (PB ಕರ್ಣವು ABQP ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುತ್ತದೆ).

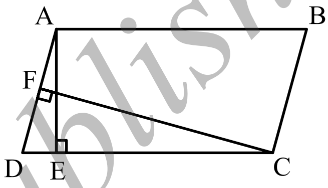
ಹಾಗಾಗಿ, ವಿ (PAB) = ವಿ (BQP) .... (2)

ಆದ್ದರಿಂದ ವಿ (PAB) = $\frac{1}{2}$ ವಿ (ABQP) – [2 ರಿಂದ] .... (3)

ಇದರಿಂದ ವಿ (PAB) = $\frac{1}{2}$ (ABCD) (1 ಮತ್ತು 3 ರಿಂದ)

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

1. ಚಿತ್ರ 11.15 ರಲ್ಲಿ ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ $AE \perp DC$ ಮತ್ತು $CF \perp AD$ ಆಗಿದೆ. AB = 16cm AE = 8cm, CF = 10cm ಆದರೆ AD ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

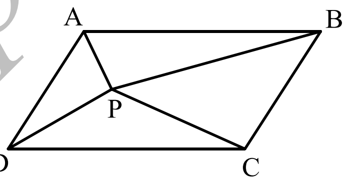


ಚಿತ್ರ 11.15

2. E,F,G ಮತ್ತು H ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾದರೆ,

   ವಿ (EFGH) = $\frac{1}{2}$ ವಿ (ABCD) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3. P ಮತ್ತು Q ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಮಾಂತರ ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ DC ಮತ್ತು AD ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು. ವಿ(APB) = ವಿ (BQC) . ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 11.16

4. ಚಿತ್ರ 11.16 ರಲ್ಲಿ P ಯು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದು ಆದರೆ,

   (i) ವಿ (ABP) + ವಿ (PCD) = $\frac{1}{2}$ ವಿ (ABCD)

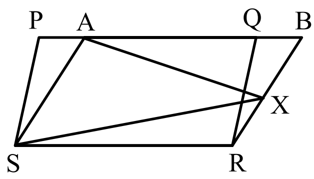
   (ii) ವಿ (APD) + ವಿ (PBC) = ವಿ (APB) + ವಿ (PCD) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

   [**ಸುಳುಹು:** P ಯ ಮುಖಾಂತರ AB ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ]

5. ಚಿತ್ರ 11.17 ರಲ್ಲಿ PQRS ಮತ್ತು ABRS ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು. X ಎಂಬುವುದು BR ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆದರೆ,

   (i) ವಿ (PQRS) = ವಿ (ABRS)ಗಳು

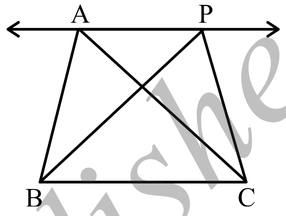
   (ii) ವಿ (AXS) = $\frac{1}{2}$ ವಿ (PQRS) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 11.17

6. ಕೃಷಿಕಳೊಬ್ಬಳ ಹೊಲವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ PQRS ನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿದೆ. ಆಕೆಯು RS ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ A ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಅದನ್ನು P ಮತ್ತು Q ಶೃಂಗಗಳಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದಳು. ಹೊಲವು ಎಷ್ಟು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಣೆಯಾಯಿತು? ಈ ಭಾಗಗಳ ಆಕಾರ ಯಾವುದು? ಆ ಕೃಷಿಕಳು ಸಮನಾದ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಗೋಧಿ ಮತ್ತು ಕಾಳುಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಬಿತ್ತಲು ಇಚ್ಛಿಸಿದರೆ ಅದನ್ನು ಆಕೆಯು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬಹುದು?

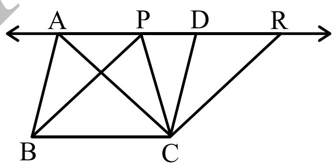
11.4 ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳು.



ಚಿತ್ರ 11.18

ಚಿತ್ರ 11.18 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಇದರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜ PBC ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ BC ಯ ಮೇಲಿದ್ದು BC ಮತ್ತು AP ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ. ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಹೇಗಿರಬಹುದು? ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸಲು, ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಹಲವು ಜೊತೆ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಒಳಗೆ ಬರುವ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ) ಎಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಜಿಯೋಬೋರ್ಡ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಕೂಡಾ ಮಾಡಬಹುದು. ಪುನಃ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುವುದನ್ನು (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ) ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ತಾರ್ಕಿಕ ಉತ್ತರ ಪಡೆಯಬೇಕಾದರೆ ನೀವು ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 11.19

ಚಿತ್ರ 11.18 ರಲ್ಲಿ D ಮತ್ತು Rಗಳು AP ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವಂತೆ $CD \parallel BA$ ಮತ್ತು $CR \parallel BP$ ರಚಿಸಬೇಕು. (ಚಿತ್ರ. 11.19 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)

ಇದರಿಂದ ಸಿಗುವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಾದ PBCR ಮತ್ತು ABCD ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ BCಯ ಮೇಲಿದ್ದು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾದ BC ಮತ್ತು ARಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ: ವಿ (ABCD) = ವಿ (PBCR) (ಯಾಕೆ?).

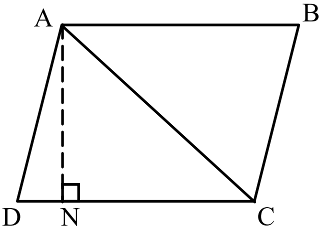
ಈಗ Δ ABC $\cong$ Δ CDA ಮತ್ತು Δ PBC $\cong$ Δ CRP (ಯಾಕೆ?)

ಹಾಗೆಯೇ ವಿ (ABC) = $\frac{1}{2}$ ವಿ (ABCD) ಮತ್ತು ವಿ (PBC) = $\frac{1}{2}$ ವಿ (PBCR) (ಯಾಕೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ ವಿ (ABC) = ವಿ (PBC)

ಹೀಗೆ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತೀರಿ.

ಪ್ರಮೇಯ 11.2 ಒಂದೇ ಪಾದ (ಸಮಪಾದ)ದ ಮೇಲಿರುವ ಹಾಗೂ ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 11.20

(ಚಿತ್ರ 11.20 ಗಮನಿಸಿ) ಈಗ ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರಲಿ AC ಅದರ ಒಂದು ಕರ್ಣ $AN \perp DC$ ಆಗಿರಲಿ.

ಚಿತ್ರವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ $\Delta\ ADC \cong \Delta\ CBA$ (ಯಾಕೆ?)

ಆಗ ವಿ (ADC) = ವಿ (CBA) (ಯಾಕೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ ವಿ (ADC) = $\frac{1}{2}$ ವಿ (ABCD)

= $\frac{1}{2}$ $(DC \times AN)$ (ಯಾಕೆ?)

ಆಗ ವಿ (ADC) = $\frac{1}{2}$ × ಪಾದ DC × ಅನುರೂಪ ಎತ್ತರ AN.

ಅಥವಾ **ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದರ ಪಾದ (ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಾಹು) ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಎತ್ತರಗಳ ಗುಣಲಬ್ದದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.** ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನೀವು 7ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದು ನೆನೆಪಿದೆಯೇ? **ಒಂದೇ ಪಾದ ಅಥವಾ ಸಮಪಾದ ಪಾದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಎತ್ತರಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ** ಎಂಬುವುದನ್ನು ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ ನೀವು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

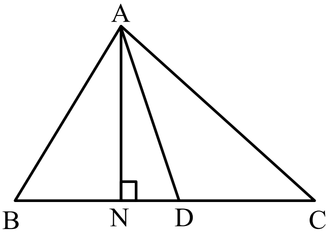
ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಎತ್ತರಗಳು ಸಮನಾಗಬೇಕಾದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರಲೇಬೇಕು. ಇದರಿಂದ ನೀವು ಪ್ರಮೇಯ 11.2 ರ ವಿಲೋಮಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 11.3: ಒಂದೇ ಪಾದ (ಸಮನಾದ ಪಾದ) ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮನಾದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತವೆ.

ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಸಾದೃಶ್ಯಪಡಿಸಲು ಈಗ ಕೆಲವು ಉಹಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3: ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸಮನಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ABC ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರಲಿ. AD ಯು ಅದರ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಮಧ್ಯರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. (ಚಿತ್ರ 11.21 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)



ಚಿತ್ರ 11.21

ನೀವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದು,

ವಿ (ABD) = ವಿ (ACD)

ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರವು ಎತ್ತರವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಕಾರಣ, $AN \perp BC$ ಯನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

ಈಗ ವಿ (ABD) = $\frac{1}{2}$ × ಪಾದ × Δ ABD ಯ ಎತ್ತರ

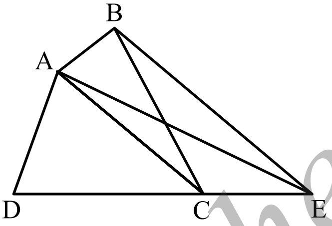
= $\frac{1}{2} \times BD \times AN$

= $\frac{1}{2} \times CD \times AN$ (BD = CD ಆಗಿರುವುದರಿಂದ)

$= \frac{1}{2} \times$ ಪಾದ $\times \Delta$ ACD ಯ ಎತ್ತರ

= ವಿ (ACD)

ಉದಾಹರಣೆ 4 : ಚಿತ್ರ 11.22 ರಲ್ಲಿ ABCD ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ BE || AC ಮತ್ತು BE ಯು DC ಯ ವೃದ್ಧಿಸಿದ ಭಾಗವನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. Δ ADE ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂದು ಸಾದಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 11.22

ಪರಿಹಾರ : ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಚ್ಚರದಿಂದ ಗಮನಿಸಿ.

Δ ABC ಮತ್ತು Δ EAC ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ AC ಮೇಲಿದ್ದು AC ಮತ್ತು BE ಎಂಬ ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆ.

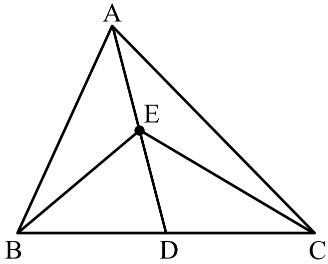
ಆದ್ದರಿಂದ ವಿ(BAC) = ವಿ(EAC) (ಪ್ರಮೇಯ 11.2 ರ ಪ್ರಕಾರ)

ಆದಕಾರಣ : ವಿ(BAC) + ವಿ(ADC) = ವಿ(EAC) + ವಿ(ADC) (ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದಾಗ)

ಅಥವಾ ವಿ(ABCD) = ವಿ(ADE)

ಅಭ್ಯಾಸ 11.3

(1) ಚಿತ್ರ 11.23 ರಲ್ಲಿ Δ ABC ಯ AD ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು E ಆದರೆ ವಿ (ABE) = ವಿ (ACE) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

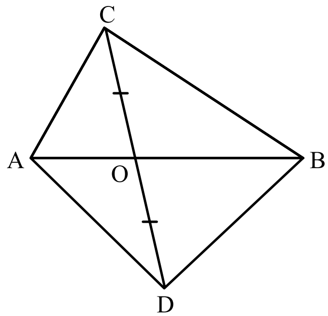


ಚಿತ್ರ 11.23

(2) Δ ABC ಯಲ್ಲಿ AD ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು E ಆದರೆ ವಿ(BED) = $\frac{1}{4}$ ವಿ(ABC) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(3) ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಅದನ್ನು ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

(4) ಚಿತ್ರ 11.24 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಮತ್ತು ΔABD ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ ABಯ ಮೇಲಿವೆ. CD ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು AB ಯು O ನಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಿಸಿದರೆ ವಿ(ABC) = ವಿ (ABD) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



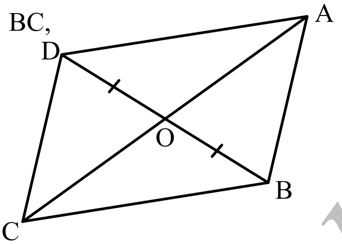
ಚಿತ್ರ 11.24

(5) D,E ಮತ್ತು F ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ Δ ABC ಯ ಬಾಹುಗಳಾದ BC, CA ಮತ್ತು AB ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾದರೆ,

(i) BDEF ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

(ii) ವಿ(DEF) = $\frac{1}{4}$ ವಿ(ABC)

(iii) ವಿ(BDEF) = $\frac{1}{2}$ ವಿ(ABC) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 11.25

(6) ಚಿತ್ರ 11.25 ರಲ್ಲಿ ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳಾದ AC ಮತ್ತು BD ಗಳು OB = OD ಆಗುವಂತೆ O ನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತವೆ. AB = CD ಆದರೆ

(i) ವಿ (DOC) = ವಿ (AOB)

(ii) ವಿ (DCB) = ವಿ (ACB)

(iii) DA || CB ಅಥವಾ ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

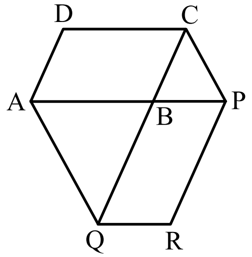
[**ಸುಳುಹು** D ಮತ್ತು B ಗಳಿಂದ AC ಗೆ ಲಂಬಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ]

(7) Δ ABC ಯ AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ D ಮತ್ತು E ಆಗಿವೆ. ವಿ(DBC) = ವಿ(EBC) ಆದರೆ DE || BC ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(8) XYಯು ΔABC ಯ BC ಬಾಹುಗೆ ಸಮಾಂತರ ವಾಗಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. BE || AC ಮತ್ತು CF || AB ಗಳು XY ಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತ್ತು F ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂದಿಸಿದರೆ ವಿ (ABE) = ವಿ (ACF) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(9) ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ AB ಬಾಹುವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು P ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಲಾಗಿದೆ. A ಮೂಲಕ CP ಗೆ ಎಳೆದ ಸಮಾಂತರವಾದ ಸರಳರೇಖೆಯು CB ಯಿಂದ ವೃದ್ಧಿಸಿದ ರೇಖೆಯನ್ನು Q ನಲ್ಲಿ ಸಂದಿಸಿದೆ. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ PBQR ನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 11.26 ಗಮನಿಸಿ) ವಿ (ABCD) = ವಿ (PBQR) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

[**ಸುಳುಹು** : AC ಮತ್ತು PQ ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. ಆಗ ವಿ (ACQ) ಮತ್ತು ವಿ (APQ) ಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ]



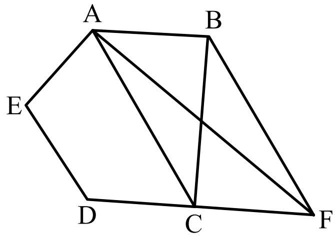
ಚಿತ್ರ 11.26

(10) ABCD ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ AB || DC. AC ಮತ್ತು BD ಕರ್ಣಗಳು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತವೆ. ವಿ(AOD) = ವಿ(BOC) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

(11) ಚಿತ್ರ 11.27 ರಲ್ಲಿ ABCDE ಒಂದು ಪಂಚಭುಜಾಕೃತಿ B ನಿಂದ AC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆಯು DC ಯ ವೃದ್ಧಿಸಿದ ಭಾಗವನ್ನು F ನಲ್ಲಿ ಸಂದಿಸಿದೆ

(i) ವಿ (ACB) = ವಿ (ACF)

(ii) ವಿ (AEDF) = ವಿ (ABCDE) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

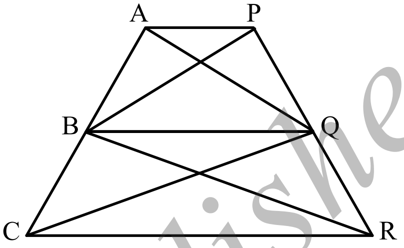


ಚಿತ್ರ 11.27

(12) ಹಳ್ಳಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಇತ್‌ವಾರಿ ಎಂಬುವರಿಗೆ ಸೇರಿದ ಜಮೀನು ಚತುರ್ಭುಜಾಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಆ ಊರಿನ ಗ್ರಾಮ ಪಂಚಾಯಿತಿಯು ಒಂದು ಆರೋಗ್ಯ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಟ್ಟಲು ಇತ್‌ವಾರಿಯವರ ಜಮೀನಿನ ಮೂಲೆಯೊಂದರ ಸ್ವಲ್ಪ ಭಾಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲು ತೀರ್ಮಾನಿಸಿತು. ಇತ್‌ವಾರಿಯು ತನ್ನ ಜಮೀನಿನ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಅಷ್ಟೇ ದೊಡ್ಡದಾದ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಹಾಗೂ ಅದನ್ನು ಅವರ ಜಮೀನಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದಾಗ ತ್ರಿಕೋನಾಕಾರ ರಚನೆಯಾಗುವಂತಿರುವ ಜಾಗವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕೆಂಬ ಶರ್ತಿನ ಮೇರೆಗೆ ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡರು. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಒಪ್ಪಂದವನ್ನು ಹೇಗೆ ಸಾಕಾರಗೊಳಿಸಬಹುದೆಂಬುವುದನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

(13) ABCD ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ AB || DC. AC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖಾಖಂಡವು AB ಯನ್ನು X ನಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ BC ಯನ್ನು Y ನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿದೆ. ಆದರೆ ವಿ(ADX) = ವಿ(ACY) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

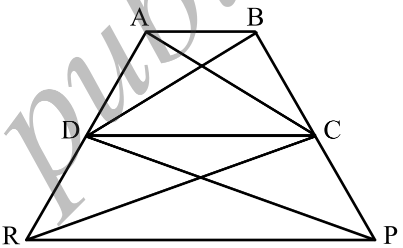
[**ಸುಳುಹು** CX ನ್ನು ಸೇರಿಸಿ]



ಚಿತ್ರ 11.28

(14) ಚಿತ್ರ 11.28 ರಲ್ಲಿ AP||BQ||CR ಅದರೆ ವಿ (AQC) = ವಿ (PBR) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(15) ΔAOD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ΔBOC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ O ನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತವೆ. ABCD ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 11.29

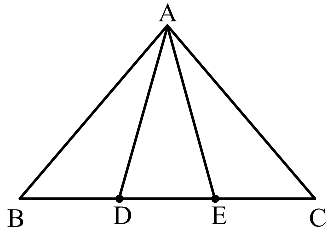
(16) ಚಿತ್ರ 11.29 ರಲ್ಲಿ ವಿ(DRC) = ವಿ(DPC) ಮತ್ತು ವಿ(BDP) = ವಿ(ARC) ಆದರೆ ABCD ಮತ್ತು DCPR ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.4 (ಐಚ್ಚಿಕ)

(1) ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಮತ್ತು ABEF ಆಯತಗಳು AB ಪಾದದ ಮೇಲಿದ್ದು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮನಾಗಿವೆ. ಆದರೆ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(2) ಚಿತ್ರ 11.30 ರಲ್ಲಿ BD=DE=EC. ಆಗುವಂತೆ BC ಯ ಮೇಲೆ D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ವಿ(ABD)=ವಿ(ADE) = ವಿ(AEC) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ ಪೀಠಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಕೇಳಲಾದ, ಬುಧಿಯಾ ತನ್ನ ಜಮೀನನ್ನು ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೂರು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿರುವಳೇ? ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಈಗ ನೀವು ಉತ್ತರಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

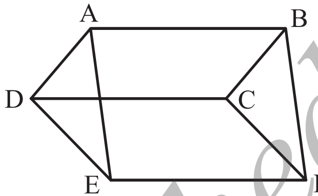


ಚಿತ್ರ 11.30

* ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಈ ಅಭ್ಯಾಸಯಿಲ್ಲ

[**ಗಮನಿಸಿ** : BD = DE = EC ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ Δ ABC ಯು ಸಮವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ Δ ABD, Δ ADE ಮತ್ತು ΔAEC ಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ BC ಯನ್ನು n ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅದರ ಅಭಿಮುಖ ಶೃಂಗಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ Δ ABC ಯು ಸಮವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೊಂದಿರುವ n ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ]

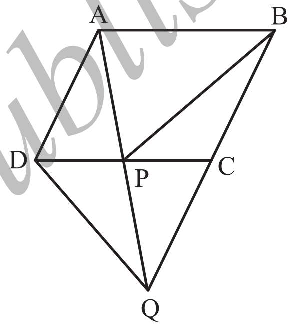
(3) ಚಿತ್ರ 11.31 ರಲ್ಲಿ ABCD, DCFE ಮತ್ತು ABFE ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಆದರೆ ವಿ (ADE) = ವಿ (BCF) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 11.31

(4) ಚಿತ್ರ 11.32 ರಲ್ಲಿ ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ. AD = CQ ಆಗುವಂತೆ BC ಯನ್ನು Q ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. AQ ರೇಖಾಖಂಡವು DC ಯನ್ನು P ನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ ವಿ (BPC) = ವಿ (DPQ) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

(**ಸುಳುಹು** : AC ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ)



ಚಿತ್ರ 11.32

(5) ಚಿತ್ರ 11.33 ರಲ್ಲಿ ABC ಮತ್ತು BDE ಗಳು ಎರಡು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು. D ಯು BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಗಿದೆ. AE ಯು BC ಯನ್ನು F ನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ,

(i) ವಿ (BDE) = $\frac{1}{4}$ ವಿ (ABC)

(ii) ವಿ (BDE) = $\frac{1}{2}$ ವಿ (BAE)

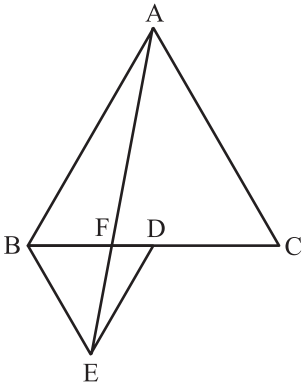
(iii) ವಿ (ABC) = 2 ವಿ (BEC)

(iv) ವಿ (BFE) = ವಿ (AFD)

(v) ವಿ (BFE) = 2 ವಿ (FED)

(vi) ವಿ(FED) = $\frac{1}{8}$ ವಿ(AFC) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

[**ಸುಳುಹು** : EC ಮತ್ತು AD ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ BE || AC ಮತ್ತು DE || AB ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ]



ಚಿತ್ರ 11.33

(6) ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳಾದ AC ಮತ್ತು BD ಗಳು ಪರಸ್ಪರ P ನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತವೆ.

ವಿ (APB) $\times$ ವಿ (CPD) = ವಿ (APD) $\times$ ವಿ (BPC) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

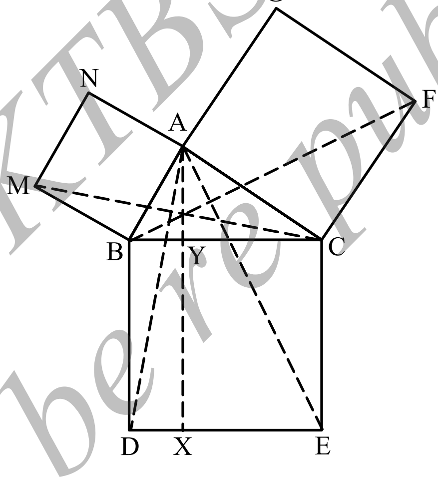
[**ಸುಳುಹು** : A ಮತ್ತು C ಗಳಿಂದ ಕ್ರಮವಾಗಿ BD ಗೆ ಲಂಬಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.]

(7) Δ ABC ಯಲ್ಲಿ P ಮತ್ತು Q ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB ಮತ್ತು AC ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು. R ಎಂಬುದು AP ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು. ಆದರೆ

(i) ವಿ(PRQ) = $\frac{1}{2}$ ವಿ(ARC) (ii) ವಿ(RQC) = $\frac{3}{8}$ ವಿ(ABC)

(iii) ವಿ(PBQ) = ವಿ(ARC) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(8) ಚಿತ್ರ 11.34 ರಲ್ಲಿ ABC ಯು A ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ಹೊಂದಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ. BCED, ACFG ಮತ್ತು ABMN ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ BC, CA, AB ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ ರಚಿಸಿರುವ ವರ್ಗಗಳಾಗಿವೆ. ರೇಖಾಖಂಡ AX $\perp$ DE ಯು BC ಯನ್ನು Y ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 11.34

(i) Δ MBC $\cong$ Δ ABD (ii) ವಿ(BYXD)=2ವಿ(MBC)

(iii) ವಿ(BYXD) =ವಿ (ABMN) (iv) Δ FCB $\cong$ Δ ACE

(v) ವಿ(CYXE) = 2 ವಿ (FCB) (vi) ವಿ (CYXE) = ವಿ (ACFG)

(vii) ವಿ(BCED) = ವಿ (ABMN) + ವಿ (ACFG) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

ಸೂಚನೆ : (vii) ನೇ ಫಲಿತಾಂಶವು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯವಾಗಿದೆ. 10ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಇದರ ಸರಳವಾದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕಲಿಯುವಿರಿ.

11.5 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

(1) ಆಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಕೆಲವು ಮೂಲಮಾನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು ಇದು ಆಕೃತಿಯು ಆವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಮತಲದ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ.

(2) ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ ಆದರೆ ಇದರ ವಿಲೋಮ ನಿಜವಾಗಿರ ಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

(3) ಆಕೃತಿಯು T ಯ ಸಮತಲಾಕೃತಿ ಪ್ರದೇಶವು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಇಲ್ಲದಂತೆ ಇರುವ ಆಕೃತಿ P ಮತ್ತು ಆಕೃತಿ Q ನ ಸಮತಲಾಕೃತಿ ಪ್ರದೇಶಗಳಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟರೆ ವಿ(T) = ವಿ(P) + ವಿ(Q),

ವಿ(X) = ಆಕೃತಿ Xನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

(4) ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳ ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ ಎಂದು ಹೇಳಾಬೇಕಾದರೆ, ಅವುಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪಾದ(ಬಾಹು)ವಿದ್ದು ಈ ಪಾದಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಶೃಂಗಗಳು ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ.

(5) ಒಂದೇ ಪಾದ (ಸಮವಾದ ಪಾದ) ದ ಮೇಲಿರುವ ಹಾಗೂ ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(6) ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದರ ಪಾದ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಎತ್ತರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(7) ಒಂದೇ ಪಾದ (ಸಮನಾದ ಪಾದ) ದ ಮೇಲಿದ್ದು ಸಮನಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ.

(8) ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಹಾಗೂ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇದ್ದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

(9) ಒಂದೇ ಪಾದ (ಸಮನಾದ ಪಾದ) ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ.

(10) ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದರ ಪಾದ ಮತ್ತು ಆ ಪಾದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಎತ್ತರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

(11) ಒಂದೇ ಪಾದ (ಸಮನಾದ ಪಾದ) ದ ಮೇಲಿದ್ದು ಸಮ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತವೆ.

(12) ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು ಆ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಸಮನಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಇರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ –12

ವೃತ್ತಗಳು

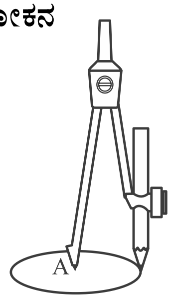
12.1 ಪೀಠಿಕೆ

ವಾಹನಗಳ ಚಕ್ರಗಳು, ಬಳೆಗಳು, ಗಡಿಯಾರದ ಡಯಲ್‌ಗಳು, 50 ಪೈಸೆ, 1ರೂ 5ರೂ ಮುಂತಾದ ನಾಣ್ಯಗಳು, ಕೀಲಿ ಗೊಂಚಲುಗಳು, ಅಂಗಿಯ ಬಟನ್‌ಗಳು ಮುಂತಾದ ಹಲವಾರು ದುಂಡಗಿರುವ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನೀವು ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುತ್ತೀರಿ. (ಚಿತ್ರ 12.1 ಗಮನಿಸಿ) ಗಡಿಯಾರದಲ್ಲಿ ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಮುಳ್ಳು ಗಡಿಯಾರದ ಡಯಲಿನ ಸುತ್ತಲೂ ವೇಗವಾಗಿ ಚಲಿಸುವುದನ್ನು ಮತ್ತು ಅದರ ತುದಿಯು ದುಂಡಗಿರುವ ಪಥದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿರಬಹುದು. ಸೆಕೆಂಡ್‌ನ ಮುಳ್ಳಿನ ತುದಿಯು ಚಲಿಸಿದ ದಾರಿಯೇ ವೃತ್ತವಾಗಿದೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ವೃತ್ತಗಳ ಬಗ್ಗೆ, ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಪದಗಳನ್ನು, ಹಾಗೂ ವೃತ್ತದ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನೂ, ಕಲಿಯಲಿತ್ತೀರಿ.

ಚಿತ್ರ 12.1

12.2 : ವೃತ್ತಗಳು ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪದಗಳು: ಒಂದು ಅವಲೋಕನ

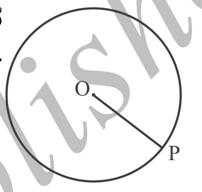
ಒಂದು ಕೈವಾರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಅನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ. ಅದರ ಚೂಪಾದ ತುದಿಯನ್ನು ಹಾಳೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಇಡಿ. ಕೈವಾರದ ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಎಳೆದು ವಿಸ್ತರಿಸಿ. ಚೂಪಾದ ತುದಿಯನ್ನು ಪೇಪರ್ ಹಾಳೆಯ ಅದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಕೈವಾರದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಾಹುವನ್ನು ಅದರ ಸುತ್ತಲೂ ಒಂದು ಸುತ್ತು ತಿರುಗಿಸಿ. ಈಗ ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನಿಂದ ಗುರುತಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಆವೃತ ಆಕೃತಿ ಯಾವುದು? ನೀವು ತಿಳಿದಂತೆ ಇದೊಂದು ವೃತ್ತವಾಗಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 12.2 ಗಮನಿಸಿ). ವೃತ್ತವನ್ನು ನೀವು ಹೇಗೆ ಪಡೆದಿರಿ? ನೀವು ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಥಿರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು. (ಚಿತ್ರ 12.2 ರಲ್ಲಿರುವ A ಬಿಂದು) A ನಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನ ತುದಿಯಿಂದ ಪರಸ್ಪರ ಸೇರಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 12.2

ಇದು ನಮಗೆ ಕೆಳಗಿನ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವೇ ವೃತ್ತ.



ಚಿತ್ರ 12.3

ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವನ್ನು ವೃತ್ತದ **ಕೇಂದ್ರ**ವೆಂದೂ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ ದೂರವನ್ನು ವೃತ್ತದ **ತ್ರಿಜ್ಯ**ವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಚಿತ್ರ 12.3 ರಲ್ಲಿ O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು OP ಯು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ: ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. 'ತ್ರಿಜ್ಯ' ವನ್ನು ಎರಡು ಅರ್ಥಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ ಎಂಬ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ, ಇನ್ನೊಂದು ಅದರ ಉದ್ದ ಎಂಬ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ,

ಚಿತ್ರ 12.4

6ನೆಯ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೆಲವು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಪರಿಚಯ ಹೊಂದಿರುವಿರಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ನಾವೀಗ ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ವೃತ್ತವು ತಾನಿರುವ ಸಮತಲವನ್ನು ಮೂರು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ,

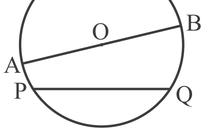
(1) **ವೃತ್ತದ ಒಳಭಾಗ** ಅಥವಾ ವೃತ್ತದ ಆಂತರಿಕ ಭಾಗ

(2) **ವೃತ್ತ** ಮತ್ತು

(3) ವೃತ್ತದ ಹೊರಭಾಗ ಅಥವಾ **ಬಹಿರ್ ಭಾಗ.** (ಚಿತ್ರ 12.4 ಗಮನಿಸಿ). ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಅದರ ಒಳಭಾಗಗಳು ಒಟ್ಟು ಸೇರಿ **ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು** ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

ನೀವು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ P ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ PQ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ವೃತ್ತದ **ಜ್ಯಾ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. (ಚಿತ್ರ 12.5 ಗಮನಿಸಿ). ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಜ್ಯಾವನ್ನು ವೃತ್ತದ **ವ್ಯಾಸ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ತ್ರಿಜ್ಯದಂತೆ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಕೂಡಾ ರೇಖಾಖಂಡವಾಗಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಉದ್ದವಾಗಿ ಎಂಬ ಎರಡು ಅರ್ಥಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸಬಹುದು. ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸಕ್ಕಿಂತ ಉದ್ದವಾದ ಜ್ಯಾವನ್ನು ನೀವು ಕಾಣುವಿರಾ? ಇಲ್ಲ, **ವ್ಯಾಸವು ವೃತ್ತದ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಜ್ಯಾ ಹಾಗೂ ಎಲ್ಲಾ ವ್ಯಾಸಗಳೂ ಸಮವಾದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದು ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅಳತೆಯ ಎರಡರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ** ಎಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಚಿತ್ರ 12.5ರಲ್ಲಿ AOB ಯು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ. ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ವ್ಯಾಸಗಳಿವೆ?

ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

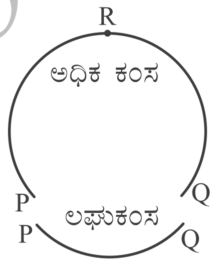


ಚಿತ್ರ 12.5

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಭಾಗವೇ **ಕಂಸ.** ಚಿತ್ರ 12.6ರಲ್ಲಿ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ವೃತ್ತದ ಭಾಗವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅಲ್ಲಿ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿದ್ದು, ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಭಾಗ ಮತ್ತೊಂದು ಚಿಕ್ಕಭಾಗ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. (ಚಿತ್ರ 12.7ರಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿ). ದೊಡ್ಡ ಭಾಗವನ್ನು **ಅಧಿಕ ಕಂಸ** PQ ಎಂದೂ ಚಿಕ್ಕ ಭಾಗವನ್ನು **ಲಘುಕಂಸ** PQ ವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಲಘುಕಂಸ PQ ವನ್ನು $\overset{\frown}{PQ}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅಧಿಕ ಕಂಸ PQ ವನ್ನು $\overset{\frown}{PRQ}$ ಎಂದೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ R ಎಂಬುವುದು P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಕಂಸದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳದ ಹೊರತು ಕಂಸ PQ ಅಥವಾ $\overset{\frown}{PQ}$ ಲಘುಕಂಸವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. P ಮತ್ತು Q ಗಳು ವ್ಯಾಸದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಾದಾಗ, ಎರಡೂ ಕಂಸಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದು ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು **ಅರ್ಧವೃತ್ತ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

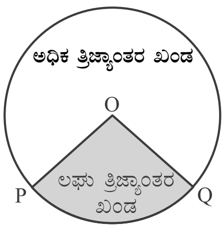
ಚಿತ್ರ 12.6

ವೃತ್ತದ ಪೂರ್ಣ ಉದ್ದವನ್ನು ಅದರ **ಪರಿಧಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. **ಜ್ಯಾ** ಮತ್ತು ಕಂಸಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ **ವೃತ್ತಖಂಡ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಎರಡು ರೀತಿಯ ವೃತ್ತಖಂಡಗಳಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿಬಹುದು. ಅವುಗಳು **ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡ** ಮತ್ತು **ಲಘುವೃತ್ತ ಖಂಡ** (ಚಿತ್ರ 12.8ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ) ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಸದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸೇರಿಸುವ ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಕಂಸಗಳಿಂದ ಆವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಭಾಗವೇ **ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ.** ವೃತ್ತ ಖಂಡದಂತೆಯೇ ಲಘುಕಂಸಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ **ಲಘುತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರಖಂಡ** ಅಧಿಕ ಕಂಸಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರಖಂಡವಿದೆ. ಚಿತ್ರ 12.9ರಲ್ಲಿ OPQ ಪ್ರದೇಶವು **ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ** ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಉಳಿದ ಪ್ರದೇಶವು **ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರಖಂಡ.** ಎರಡು ಕಂಸಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾದಾಗ ಪ್ರತಿಭಾಗವೂ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆಗ ಎರಡೂ ವೃತ್ತಖಂಡಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡೂ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು **ಅರ್ಧವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪ್ರದೇಶ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.



ಚಿತ್ರ 12.7

ಚಿತ್ರ 12.8



ಚಿತ್ರ 12.9

ಅಭ್ಯಾಸ 12.1

1. ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಉತ್ತರಗಳಿಂದ ತುಂಬಿರಿ.

(i) ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವು ವೃತ್ತದ ______ ಭಾಗದಲ್ಲಿದೆ (ಹೊರ/ಒಳ).

(ii) ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಬಿಂದು ವೃತ್ತದ ______ ಭಾಗದಲ್ಲಿದೆ (ಹೊರ/ಒಳ).

(iii) ವೃತ್ತದ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತದ ______ ಆಗಿದೆ.

(iv) ಒಂದು ಕಂಸದ ತುದಿಗಳು ವ್ಯಾಸದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಾದರೆ ಆ ಕಂಸವು ______ .

(v) ವೃತ್ತಖಂಡವು ವೃತ್ತದ ಕಂಸ ಮತ್ತು ______ ಗಳ ನಡುವಿನ ಪ್ರದೇಶ.

(vi) ವೃತ್ತವು ಅದು ಇರುವ ಸಮತಲವನ್ನು ______ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುತ್ತದೆ.

2. ಸರಿಯೋ ತಪ್ಪೋ ಕಾರಣ ಸಹಿತ ತಿಳಿಸಿ.

1 ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ.

2 ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳಿವೆ.

3 ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸಮವಾದ 3 ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದರೆ, ಪ್ರತಿ ಭಾಗವು ಅಧಿಕ ಕಂಸವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

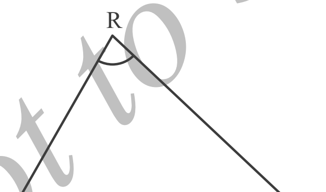
4 ತ್ರಿಜ್ಯದ ಎರಡರಷ್ಟು ಉದ್ದವಿರುವ ಜ್ಯಾವೇ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

5 ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡವು ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿರುವ ಕಂಸಗಳ ನಡುವಿನ ಪ್ರದೇಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

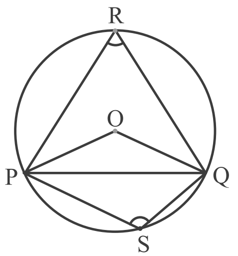
6 ವೃತ್ತವು ಸಮತಲಾಕೃತಿ ಆಗಿದೆ.

12.3 ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನ

ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ PQ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಲ್ಲದ ಒಂದು ಬಿಂದು R ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. PR ಮತ್ತು QR ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. (ಚಿತ್ರ 12.10 ಗಮನಿಸಿ).



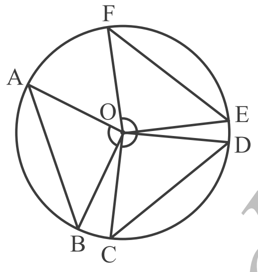
ಚಿತ್ರ 12.10



ಚಿತ್ರ 12.11

$\angle PRQ$ ಕೋನವನ್ನು PQ ರೇಖಾಖಂಡದಿಂದ R ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಚಿತ್ರ 12.11 ರಲ್ಲಿ $\angle POQ$, $\angle PRQ$ ಮತ್ತು $\angle PSQ$ ಗಳನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ? $\angle POQ$ ಇದು PQ ಜ್ಯಾದಿಂದಾಗಿ 'O' ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನವಾಗಿದೆ. $\angle PRQ$ ಮತ್ತು $\angle PSQ$ ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ PQ ಜ್ಯಾದಿಂದಾಗಿ R ಮತ್ತು S ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಅಧಿಕಕಂಸ ಮತ್ತು ಲಘುಕಂಸಗಳಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅದರಿಂದಾಗಿ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ನಾವೀಗ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅವುಗಳಿಂದಾಗಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆದಾಗ ಜ್ಯಾದ ಅಳತೆಯು ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಕೂಡಾ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಏನಾಗಬಹುದು? ಆಗ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ?



ಚಿತ್ರ 12.12

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ರಚಿಸಿ ಅದರ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 12.12 ಗಮನಿಸಿ). ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಆ ಜ್ಯಾಗಳಿಂದಾಗಿ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನೀವು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಈಗ ಇದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೀಡೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 12.1: ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ : AB ಮತ್ತು CD ಗಳು O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು (ಚಿತ್ರ 12.13 ಗಮನಿಸಿ)

ನೀವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದುದು. $\underline{|AOB} = \underline{|COD}$

Δ AOB ಮತ್ತು Δ COD ಗಳಲ್ಲಿ

OA = OC (ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

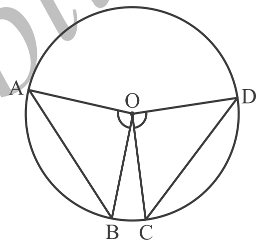
OB = OD (ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

AB = CD (ದತ್ತ)

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (ಬಾ ಬಾ ಬಾ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

ಇದರಿಂದ $\underline{|AOB} = \underline{|COD}$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

(ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು)

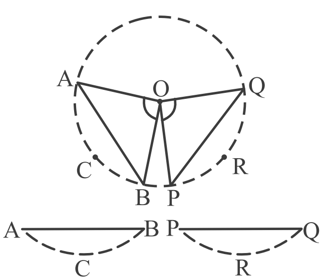


ಚಿತ್ರ 12.13

ಗಮನಿಸಿ: ನಮ್ಮ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ "**ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು**" ಎಂಬುದನ್ನು ಬರೆಯಲು **ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ. (CPCT)** ಎಂಬ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ, ಆ ಜ್ಯಾಗಳು ಹೇಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನೀವು ಹೇಳುತ್ತೀರಿ? ಅವುಗಳು ಸಮನಾಗಿವೆಯೇ? ಇಲ್ಲವೇ? ಅದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯಿಂದ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ.

ಒಂದು ಟ್ರೇಸಿಂಗ್ ಪೇಪರ್ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ, ಡಿಸ್ಕ್ (Disk) ನ ಆಕಾರದ ಹಾಳೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. ಅದರ ಕೇಂದ್ರ A ಮತ್ತು B ಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರುವಂತೆ 'O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\underline{|AOB}$ ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ. O ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ $\underline{|AOB}$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು $\underline{|POQ}$ ವನ್ನು ರಚಿಸಿ. AB ಮತ್ತು PQ ಗಳ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಈ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಹಾಳೆಯನ್ನು



ಚಿತ್ರ 12.14

ಕತ್ತರಿಸಿ. (ಚಿತ್ರ 12.14 ಗಮನಿಸಿ) ನೀವು ACB ಮತ್ತು PRQ ವೃತ್ತಖಂಡಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಿರಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಇಟ್ಟರೆ ನೀವೇನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಅವುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಅವುಗಳು ಸರ್ವಸಮ. ಆದ್ದರಿಂದ $AB = PQ$ ನೀವು ಈ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೂ ಕೂಡಾ ಬೇರೆ ಸಮವಾದ ಕೋನಗಳಿಗೂ ಇದನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದಾಗಿ, ಎಲ್ಲಾ ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮನಾಗಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 12.2: ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳಿಂದ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯವು ಪ್ರಮೇಯ 12.1 ರ ವಿಲೋಮವಾಗಿದೆ.

ಚಿತ್ರ 12.13 ರಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿ:

ನೀವು $\angle AOB = \angle COD$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

ಆಗ, $\Delta\, AOB \cong \Delta\, COD$ (ಯಾಕೆ ?)

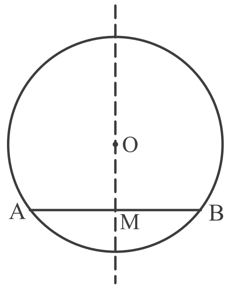
ಈಗ ನೀವು $AB = CD$ ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದೇ ?

ಅಭ್ಯಾಸ 12.2

1. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಸಮನಾದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳ ಸಮಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
2. ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳ ಜ್ಯಾಗಳು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ ಆ ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12.4 ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ

ಚಟುವಟಿಕೆ : ಒಂದು ಟ್ರೇಸಿಂಗ್ ಹಾಳೆಯ (ಪೇಪರ್) ಮೇಲೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. 'O' ಅದರ ಕೇಂದ್ರ ಆಗಿರಲಿ. ಅದರಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ AB ರಚಿಸಿ. ಜ್ಯಾದ ಭಾಗಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಬೀಳುವಂತೆ 'O' ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಗೆರೆಯ ಮೇಲೆ ಹಾಳೆಯನ್ನು ಮಡಚಿ. ಈ ಮಡಚಿದ ಗೆರೆಯು AB ಯನ್ನು M ನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಲಿ. ಆಗ $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ ಅಥವಾ OM ರೇಖೆ AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. B ಬಿಂದುವು A ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುತ್ತದಯೇ ? (ಚಿತ್ರ 12.15ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ) ಹೌದು ಸರಿಯಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $MA = MB$.



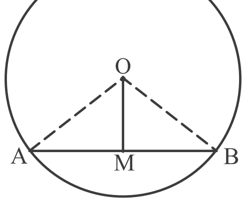
ಚಿತ್ರ 12.15

OA ಮತ್ತು OB ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಲಂಬಕೋನ $\Delta\, OMA$ ಮತ್ತು $\Delta\, OMB$ ಗಳನ್ನು ಸರ್ವಸಮ ಎಂದು ನೀವೇ ಸ್ವತಹಃ ಸಾಧಿಸಿ. ಈ ಉದಾರಣೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಕ್ಕೆ ನಿರ್ಧಿಷ್ಟವಾದ ನಿದರ್ಶನವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 12.3 : ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬವು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೇನು? ಇದನ್ನು ಬರೆಯಲು ಪ್ರಮೇಯ 12.3 ರಲ್ಲಿ ಯಾವುದನ್ನು ಊಹಾಕಲ್ಪಿಸಲಾಗಿದೆ? ಮತ್ತು ಯಾವುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ? ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಲಂಬ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿರುತ್ತಾರೆ. ಮತ್ತು ಅದು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ವಿಲೋಮದಲ್ಲಿ ಊಹಾಕಲ್ಪನೆಯು "ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸಿದರೆ" "ಆ ರೇಖೆಯು ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ" ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು. ವಿಲೋಮವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 12.4 : ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವಂತೆ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 12.16

ಇದು ಸರಿಯೇ ? ಕೆಲವು ಪ್ರಕರಣಗಳಿಗೆ ಇದನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡಿ. ಈ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಇದು ಸರಿಯಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಮಾಡಿ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅದು ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆಯೋ ಎಂದು ನೋಡಿ. ನಾವು ಹಂತಗಳನ್ನು ಬರೆದರೆ ಮತ್ತು ನೀವು ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ.

O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ AB ಜ್ಯಾ ಆಗಿರಲಿ, O ಬಿಂದುವನ್ನು AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಗೆ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ನೀವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದುದು $OM \perp AB$. OA ಮತ್ತು OB ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 12.16ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).

Δ OAM ಮತ್ತು Δ OBM ಗಳಲ್ಲಿ,

$OA = OB$ (ಯಾಕೆ?)

$AM = BM$ (ಯಾಕೆ?)

$OM = OM$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

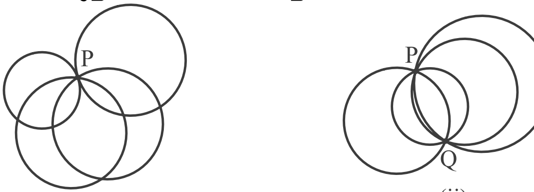
ಆದ್ದರಿಂದ, $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (ಹೇಗೆ?)

ಇದರಿಂದ, $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$ (ಯಾಕೆ?)

12.5 : ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತ

ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು 2 ಬಿಂದುಗಳು ಸಾಕು ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು 3ನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. ಅಂದರೆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಮಾತ್ರ ಹಾದು ಹೋಗಬಹುದು. ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಬಿಂದುಗಳು ಸಾಕಾಗುತ್ತವೆ? ಎಂಬ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಪ್ರಶ್ನೆ ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತದೆ.

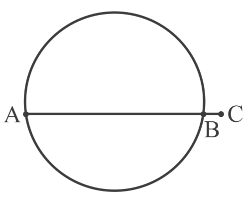
P ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಷ್ಟು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು ? ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ನಿಮಗೆ ಇಷ್ಟವಾದಷ್ಟು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. (ಚಿತ್ರ 12.17(1) ಗಮನಿಸಿ). ಈಗ P ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ಎಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. (ಚಿತ್ರ 12.17 (ii) ಗಮನಿಸಿ). A,B,C ಎಂಬ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಏನಾಗಬಹುದು? ಮೂರು ಸರಳರೇಖಾಗತ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ನೀವು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೇ? ಇಲ್ಲ. ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದ್ದರೆ 3ನೆಯ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ ಅಥವಾ ಒಳಗೆ ಇದ್ದು, ಉಳಿದೆರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತವು ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 12.18 ಗಮನಿಸಿ)



(i) (ii)

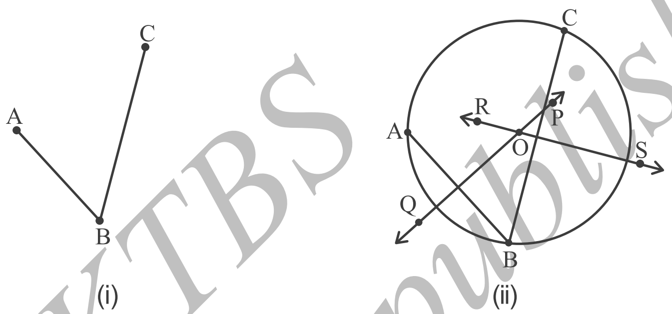
ಚಿತ್ರ 12.17

ಈಗ, ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿಲ್ಲದ A,B,C ಎಂಬ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. (ಚಿತ್ರ 12.19(1)ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). AB ಮತ್ತು BC ಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಗಳಾದ PQ ಮತ್ತು RS ಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಈ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. (PQ ಮತ್ತು RSಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳು ಸಮಾಂತರವಲ್ಲ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ) (ಚಿತ್ರ 12.19 (ii)ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 12.18

O ಬಿಂದುವು AB ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆ PQ ನ ಮೇಲಿದೆ. ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವೂ ಅದರ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ OA = OB (ಇದನ್ನು ಅಧ್ಯಾಯ 5ರಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿದೆ.)



ಚಿತ್ರ 12.19

ಹಾಗೆಯೇ, O ಬಿಂದುವು BC ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆ RS ಮೇಲಿರುವ ಕಾರಣ OB = OC. ಆದ್ದರಿಂದ OA = OB = OC., ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ A,B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು O ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನೀವೀಗ OA ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವಂತೆ O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿದಾಗ ಅದು B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಕೂಡಾ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ. A,B ಮತ್ತು C ಎಂಬ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತಹ ವೃತ್ತ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಇದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು (ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಗಳು) ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಅಂದರೆ OA ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ನೀವು ಎಳೆಯಬಹುದು ಎಂದರ್ಥ. ಅಥವಾ A,B ಮತ್ತು C ಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಮಾತ್ರ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನೀವೀಗ ಸಾಧಿಸಿದ್ದೀರಿ.

ಪ್ರಮೇಯ 12.5 : ಮೂರು ಸರಳರೇಖಾಗತವಲ್ಲದ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಮಾತ್ರ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯ.

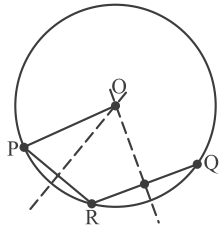
ಗಮನಿಸಿ : ABC ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವಾದರೆ ಪ್ರಮೇಯ 12.5 ರ ಪ್ರಕಾರ ತ್ರಿಕೋನದ A,B ಮತ್ತು C ಶೃಂಗಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ವೃತ್ತವಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ΔABC ಯ **ಪರಿವೃತ್ತ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದರ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ತ್ರಿಭುಜದ **ಪರಿಕೇಂದ್ರ** ಮತ್ತು **ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಒಂದು ವೃತ್ತ ಕಂಸವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ವೃತ್ತದ PQ ಕಂಸವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಬೇಕಾದರೆ ನಾವು ಅದರ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಈ ಕಂಸದ ಮೇಲೆ R ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು

ತೆಗೆದುಕೊಂಡು PR ಮತ್ತು RQ ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು. 12.5 ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ರಚನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹೀಗೆ ದೊರೆತ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 12.20 ಗಮನಿಸಿ)



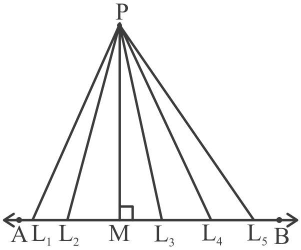
ಚಿತ್ರ 12.20

ಅಭ್ಯಾಸ 12.3

1. ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವೃತ್ತಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಪ್ರತಿ ಜೊತೆ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ? ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಷ್ಟು?
2. ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ನಿಮಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ರಚನೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.
3. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು ಆ ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾದ ಲಂಬಾರ್ಧಕದ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12.6 ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅವುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರ

AB ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. P ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಬಿಂದುಗಳಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು P ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದರೆ ನೀವು PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4....... ಇತ್ಯಾದಿ, ಅಸಂಖ್ಯಾತ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೀರಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ AB ನಿಂದ Pಗೆ ಇರುವ ದೂರ ಯಾವುದು? ಒಂದು ಕ್ಷಣ ಯೋಚಿಸಿ, ನೀವು ಉತ್ತರವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ P ನಿಂದ AB ಗಿರುವ ಲಂಬ PM ಅತ್ಯಂತ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 12.21ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ) ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ, ಕನಿಷ್ಟ ಅಳತೆ PM ಇದು AB ನಿಂದ Pಗೆ ಇರುವ ದೂರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ನೀವೀಗ ಇದನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು.

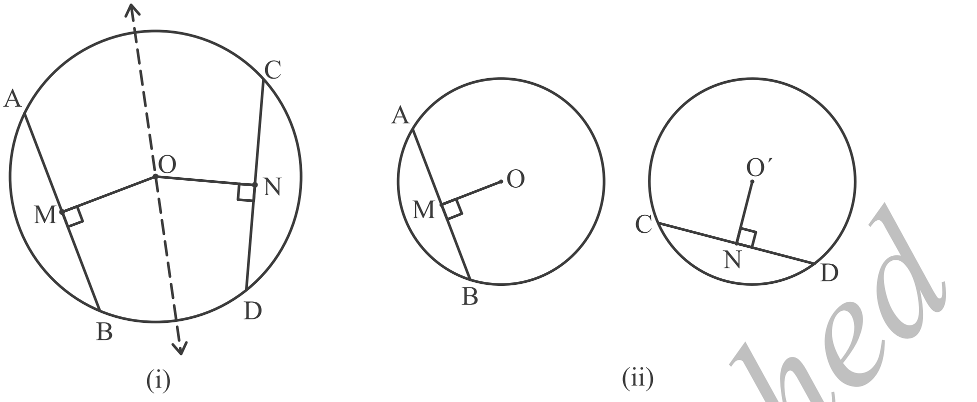


ಚಿತ್ರ 12.21

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಗಿರುವ ಲಂಬದ ಉದ್ದವೇ ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆ ಸರಳರೇಖೆಗಿರುವ ದೂರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಬಿಂದುವು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆಯೇ ಇದ್ದರೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸರಳ ರೇಖೆಗೆ ಇರುವ ದೂರವು ಸೊನ್ನೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಒಂದು ವೃತ್ತವು ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು. ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದಾಗ, ದೊಡ್ಡ ಜ್ಯಾವು ಚಿಕ್ಕ ಜ್ಯಾಕ್ಕಿಂತ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅವುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರಿಂದ ನೀವಿದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಅತ್ಯಂತ ಉದ್ದದ ಜ್ಯಾ ಆದ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೂ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಕ್ಕೂ ಇರುವ ದೂರವೇನು? ಕೇಂದ್ರವು ವ್ಯಾಸದ ಮೇಲಿರುವ ಕಾರಣ ದೂರವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಜ್ಯಾದ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧದ ಬಗ್ಗೆ ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೆ? ಈಗ ನಾವದನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.



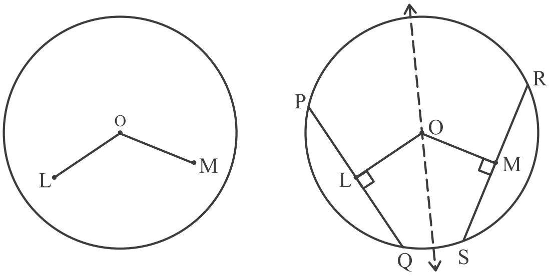
ಚಿತ್ರ 12.22

ಚಟುವಟಿಕೆ : ಟ್ರೇಸಿಂಗ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತ ರಚಿಸಿ. ಅದರಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಎಂಬ ಎರಡು ಸಮ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನೆಳೆದು ಅವುಗಳ ಮೇಲೆ O ಕೇಂದ್ರದಿಂದ OM ಮತ್ತು ON ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. B ಯು D ಯ ಮೇಲೆ ಹಾಗೂ A ಯು C ಯ ಮೇಲೆ ನಿಲ್ಲುವಂತೆ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಮಡಚಿ (ಚಿತ್ರ 12.22 (1)ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). O ಬಿಂದುವು ಮಡಚಿದ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೂ N ಬಿಂದುವು M ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ OM = ON. O ಮತ್ತು O^1 ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಎಂಬ ಸಮ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದರಂತೆ ರಚಿಸಿ, ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಈ ಜ್ಯಾಗಳ ಮೇಲೆ OM ಮತ್ತು O^1N ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 12.22 (ii)ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕೃತಿಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ, AB ಯ ಮೇಲೆ CD ಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತಾಕೃತಿಯ ಮೇಲೆ ಇಡಿ. ಆಗ O ಮತ್ತು O^1 ಹಾಗೂ M ಮತ್ತು N ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಹೀಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದೀರಿ.

ಪ್ರಮೇಯ 12.6 : ವೃತ್ತದ (ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳ) ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ(ಕೇಂದ್ರಗಳಿಂದ) ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ನಂತರ, ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವು ಸರಿಯೋ, ಅಲ್ಲವೋ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಇದಕ್ಕೆ O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ 'O' ದಿಂದ ಸಮ ಅಳತೆಯ OL ಮತ್ತು OM ಎಂಬ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 12.23 (1)ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). OL ಮತ್ತು OM ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ PQ ಮತ್ತು RS ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 12.23 (ii)ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). PQ ಮತ್ತು RS ಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಇವುಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಗಿವೆಯೆ? ಇಲ್ಲ ಎರಡೂ ಸಮನಾಗಿವೆ. ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಸಮನಾದ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ.



(i) (ii)

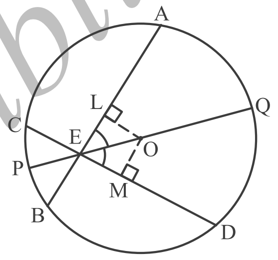
ಚಿತ್ರ 12.23

ಇದು ಪ್ರಮೇಯ 12.6 ರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 12.7: ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಒಂದು ವೃತ್ತದ, ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಅವುಗಳ ಛೇದಕ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವ್ಯಾಸದೊಂದಿಗೆ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ ಆ ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 12.24

ಪರಿಹಾರ : 'O' ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಗಳು ಪರಸ್ಪರ E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಜ್ಯಾಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. $\angle AEQ = \angle DEQ$ (ಚಿತ್ರ 12.24 ಗಮನಿಸಿ) ಆಗುವಂತೆ PQ ವು E ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ. ನೀವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದುದು AB = CD

AB ಮತ್ತು CD ಜ್ಯಾಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ OL ಮತ್ತು OM ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ

$\angle LOE = 180° - 90° - \angle LEO = 90° - \angle LEO$ (Δ ದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180)

$= 90° - \angle AEQ = 90° - \angle DEQ$

$= 90° - \angle MEO = \angle MOE$

Δ OLE ಮತ್ತು Δ OME ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle LEO = \angle MEO$	(ಯಾಕೆ?)
$\angle LOE = \angle MOE$	(ಮೇಲೆ ಸಾಧಿಸಿದೆ)
EO = EO	(ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು)
ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta OLE \cong \Delta OME$	(ಯಾಕೆ?)
ಇದರಿಂದ OL = OM	(ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು)
ಆದರೆ AB = CD	(ಯಾಕೆ?)

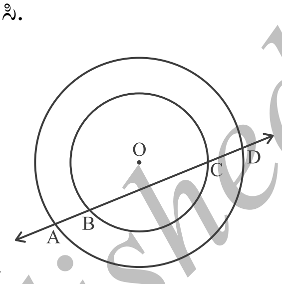
ಅಭ್ಯಾಸ 12.4

1. 5cm ಮತ್ತು 3cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 4cm ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2 ವೃತ್ತವೊಂದರ ಸಮವಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವೃತ್ತದಲ್ಲೇ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಭಾಗಗಳು ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಮತ್ತೊಂದು ಜ್ಯಾದ ಭಾಗಗಳಿಗೆ ಸಮ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3 ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸಮಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಛೇದಿಸಿದರೆ. ಛೇದಕ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಜ್ಯಾಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4 ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವು O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಎರಡು ಏಕ ಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು (ಒಂದೇ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತಗಳು) A,B,C ಮತ್ತು D ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ. AB = CD ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 12.25ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 12.25

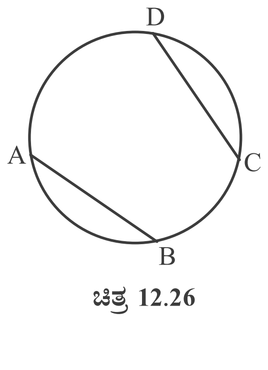
5 ರೇಷ್ಮಾ, ಸಲ್ಮಾ, ಮಂದೀಪ್ ಎಂಬ ಮೂವರು ಹುಡುಗಿಯರು ಒಂದು ಉದ್ಯಾನವನದಲ್ಲಿ 5 ಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ನಿಂತು ಆಟವಾಡುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ರೇಷ್ಮಾ ಸಲ್ಮಾಳಿಗೆ ಚೆಂಡು ಎಸೆದರೆ, ಸಲ್ಮಾ ಮಂದೀಪ್‌ಗೆ ಹಾಗೂ ಮಂದೀಪ್ ರೇಷ್ಮಾಳಿಗೆ ಚೆಂಡು ಎಸೆಯುತ್ತಾರೆ. ರೇಷ್ಮಾ ಮತ್ತು ಸಲ್ಮಾ ಹಾಗೂ ಸಲ್ಮಾ ಮತ್ತು ಮಂದೀಪ್ ಇವರುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 6m, ಆದರೆ ರೇಷ್ಮಾ ಮತ್ತು ಮಂದೀಪ್ ನಡುವಿನ ದೂರವೇನು?

6 ಒಂದು ಕಾಲೋನಿಯಲ್ಲಿ 20m ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನವಿದೆ. ಅಂಕುರ, ಸೈಯದ್, ಡೇವಿಡ್ ಎಂಬ ಮೂರು ಹುಡುಗರು ಈ ಉದ್ಯಾನವನದ ಅಂಚಿನಲ್ಲಿ ಸಮದೂರಗಳಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿರುತ್ತಾರೆ. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಲ್ಲಿಯೂ ಪರಸ್ಪರ ಮಾತನಾಡಲು ಆಟಿಕೆಯ ಟೆಲಿಫೋನ್ ಇದೆ. ಪ್ರತಿ ಫೋನಿನ ತಂತಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12.7 ವೃತ್ತದ ಕಂಸದಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನ:

ವ್ಯಾಸವಲ್ಲದ ಜ್ಯಾಗಳ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಅಧಿಕಕಂಸ ಮತ್ತು ಲಘುಕಂಸಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಆಗ ವೃತ್ತಕಂಸಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ ? ಒಂದು ಜ್ಯಾದಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕಂಸವು ಇನ್ನೊಂದು ಜ್ಯಾದಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಕಂಸಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆಯೇ ? ನಿಜವಾಗಿ ಅವುಗಳು ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಮವಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಹೇಗೆಂದರೆ ಬಗ್ಗಿಸದೆ ತಿರುಗಿಸದೆ ಒಂದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದರ ಮೇಲಿಟ್ಟರೆ ಅವುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

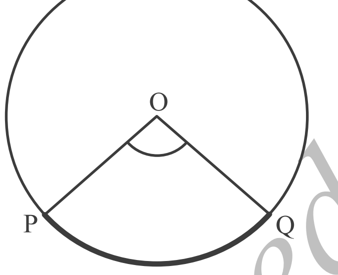
ಈ ಸತ್ಯಾಂಶವನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ಚಿತ್ರ 12.26ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ CD ಜ್ಯಾದಿಂದಾಗಿ ಉಂಟಾಗಿರುವ ಕಂಸವನ್ನು CD ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಕತ್ತರಿಸಿ ಅದನ್ನು AB ಜ್ಯಾವು ಉಂಟುಮಾಡಿರುವ ಕಂಸದ ಮೇಲೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ CD ಯು AB ಯ ಮೇಲೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು. (ಚಿತ್ರ 12.26 ಗಮನಿಸಿ) ಇದರಿಂದ **ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಕಂಸಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಸರ್ವಸಮ ಕಂಸಗಳು ಸಮ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ**. ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ನೀವು ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 12.26

ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಕಂಸಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಕಂಸಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಕಂಸದಿಂದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವೆಂದರೆ ಆ ಕಂಸಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಜ್ಯಾದಿಂದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೇಗೆಂದರೆ ಲಘುಕಂಸವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿದರೆ ಅಧಿಕ ಕಂಸವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸರಳಾಧಿಕ ಕೋನವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಚಿತ್ರ 12.27ರಲ್ಲಿ ಲಘುಕಂಸ PQ ನಿಂದಾಗಿ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟಕೋನ $\angle POQ$ ಮತ್ತು ಅಧಿಕ ಕಂಸ PQ ನಿಂದಾಗಿ ಕೇಂದ್ರ O ನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವು ಸರಳಾಧಿಕ $\angle POQ$ ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 12.27

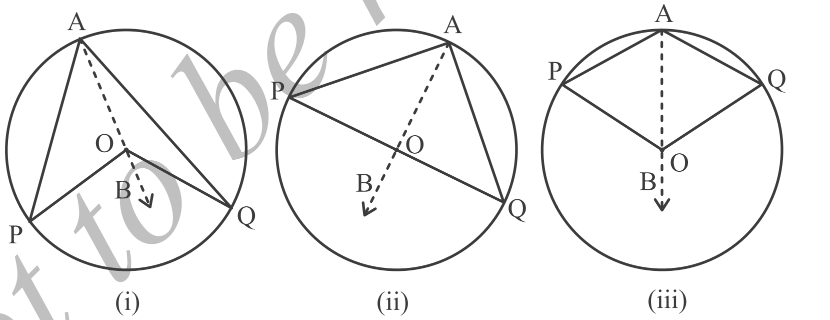
ಮೇಲಿನ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 12.1 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ವೃತ್ತದ ಸರ್ವಸಮ ಕಂಸಗಳು (ಸಮನಾದ ಕಂಸಗಳು) ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾದಿಂದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವು ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಲಘುಕಂಸವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವು ವೃತ್ತದ ಕಂಸವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನ ಹಾಗೂ ವೃತ್ತದ ಇತರ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 12.8: ಒಂದು ಕಂಸದಿಂದಾಗಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವು ಅದೇ ಕಂಸದಿಂದಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಇತರ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ:– ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕಂಸ PQ ನಿಂದಾಗಿ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ $\angle POQ$ ಹಾಗೂ ವೃತ್ತದ ಇತರ ಭಾಗದ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\angle PAQ$ ವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ. ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದು $\angle POQ = 2\angle PAQ$.



ಚಿತ್ರ 12.28

ಚಿತ್ರ 12.28 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರಕರಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

i. ರಲ್ಲಿ PQ ಲಘುಕಂಸ   ii. ರಲ್ಲಿ PQ ಅರ್ಧವೃತ್ತಕಂಸ   iii. ರಲ್ಲಿ PQ ಅಧಿಕ ಕಂಸವಾಗಿದೆ.

AO ವನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಅದನ್ನು B ಯವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಆರಂಭಿಸೋಣ.

ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ $\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$

ಏಕೆಂದರೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಹೊರಕೋನವು ಅದರ ಅಂತಸ್ಥಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೆಯೇ ΔOAQ ನಲ್ಲಿ

$OA = OQ$ .... (ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle OAQ = \angle OQA$ .... (ಪ್ರಮೇಯ 5.5)

ಇದರಿಂದ, $\angle BOQ = 2\angle OAQ$ .... (1)

ಹಾಗೆಯೇ $\angle BOP = 2\angle OAP$ .... (2)

1 ಮತ್ತು 2 ರಿಂದ $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

ಅಂದರೆ $\angle POQ = 2\angle PAQ$ .... (3)

ಪ್ರಕರಣ (iii) ರಲ್ಲಿ PQ ಅಧಿಕಕಂಸವಾಗಿದೆ. (3) ನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು. ಸರಳಾಧಿಕ $\angle POQ = 2\angle PAQ$

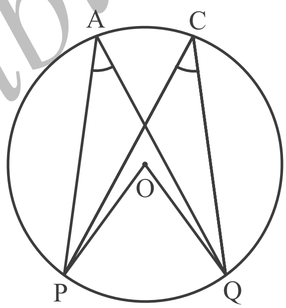
ಗಮನಿಸಿ: ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೇಳೆ P ಮತ್ತು Q ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. PQ ಜ್ಯಾವನ್ನು ಪಡೆದರೆ ಆಗ $\angle PAQ$ ವನ್ನು PAQP ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 12.8ರಲ್ಲಿ ಲಘುಕಂಸ PQ ವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ A ಯು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ, ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ವೇಳೆ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು C ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ (ಚಿತ್ರ 12.29 ಗಮನಿಸಿ) ಆಗ

$\angle POQ = 2\angle PCQ = 2\angle PAQ$

ಆದ್ದರಿಂದ : $\angle PCQ = \angle PAQ$

ಇದು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 12.29

ಪ್ರಮೇಯ 12.9 : ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಒಂದೇ ಖಂಡದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ.

ಪುನಃ ಪ್ರಮೇಯ 12.8ರ ಪ್ರಕರಣ (ii) ನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.
ಇಲ್ಲಿ $\angle PAQ$ ಇದು ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕೋನ.

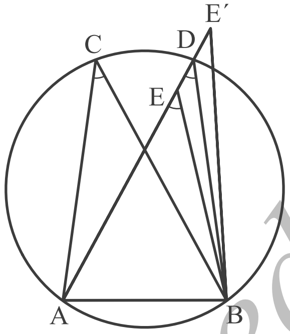
ಅದು ಅರ್ಧವೃತ್ತಖಂಡದಕೋನ ಮತ್ತು $\angle PAQ = \frac{1}{2}\angle POQ = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$ ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಬೇರೊಂದು ಬಿಂದು C ಯನ್ನು ನೀವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಪುನಃ ನೀವು $\angle PCQ = 90°$ ಎಂದು ಪಡೆಯುತ್ತೀರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ನೀವು ವೃತ್ತದ ಮತ್ತೊಂದು ಗುಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ಪಡೆಯುವಿರಿ.

ಅರ್ಧವೃತ್ತ ಖಂಡದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 12.9ರ ವಿಲೋಮವೂ ಸರಿ, ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 12.10: ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು ಆ ರೇಖಾಖಂಡದ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ ಆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿವೆ. (ಅಂದರೆ ಅವುಗಳು ವೃತ್ತೀಯ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ).

ಈ ಫಲಿತಾಂಶದ ಸತ್ಯಾಂಶವನ್ನು ನೀವು ಹೀಗೆ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಚಿತ್ರ 12.30 ರಲ್ಲಿ AB ಯು ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ ಇದು C ಮತ್ತು D ಗಳಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 12.30

ಅಂದರೆ, $\angle ACB = \angle ADB$

A,B,C ಮತ್ತು D ಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾದರೆ A,B,C ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಇದು D ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗದಿದ್ದರೆ ಅದು AD ಯನ್ನು (ಅಥವಾ AD ಯ ವೃದ್ಧಿಸಿದ ಭಾಗವನ್ನು) E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅಥವಾ (E^1 ನಲ್ಲಿ) ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ.

A,C,E ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ

$\angle ACB = \angle AEB$ (ಯಾಕೆ?)

ಆದರೆ $\angle ACB = \angle ADB$ (ದತ್ತ)

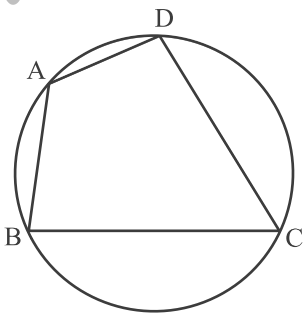
ಆದ್ದರಿಂದ $\angle AEB = \angle ADB$

E ಮತ್ತು D ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗದಿದ್ದರೆ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ (ಯಾಕೆ?)

ಹಾಗೆಯೇ E^1 ಇದು D ಯೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗಲೇಬೇಕು.

12.8 ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು

ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ನಾಲ್ಕು ಶೃಂಗಗಳು ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. (ಚಿತ್ರ 12.31ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ಈ ರೀತಿಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಒಂದು ವಿಶೇಷವಾದ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಕಾಣುವಿರಿ. ವಿವಿಧ ಅಳತೆಯ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಹಲವು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ABCD ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿ (ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ಹಲವು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಅದರ ಮೇಲೆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಇದನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು). ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆದು ಅವುಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 12.31

ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಕ್ರ.ಸಂ	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1						
2						
3						
4						
5						
6						

ಈ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ನೀವು ಯಾವ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರುವಿರಿ?

$\angle A + \angle C = 180$ ಮತ್ತು $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು ಪಡೆಯುವಿರಿ. ಅಳತೆಯಲ್ಲಾದ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸದಿದ್ದರೆ ಇದು ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತದೆ.

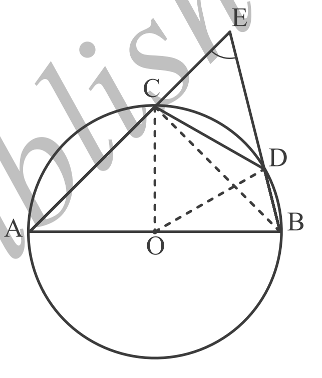
ಪ್ರಮೇಯ 12.11 : ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೂ ಸರಿ. ಅದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 12.12 : ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ನೀವು ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಪ್ರಮೇಯ 12.10 ರಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಚಿತ್ರ 12.32 ರಲ್ಲಿ AB ಯು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ. CD ಯು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾವಾಗಿದೆ. AC ಮತ್ತು BD ಗಳನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳು E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. $\angle AEB = 60^\circ$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 12.32

ಪರಿಹಾರ: OC, OD ಮತ್ತು BC ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ

ΔODC ಯು ಸಮಬಾಹುತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ (ಯಾಕೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle COD = 60^\circ$

ಈಗ: $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (ಪ್ರಮೇಯ 12.8)

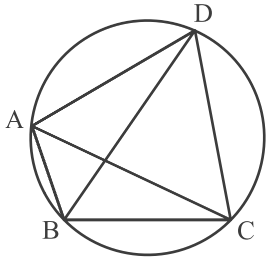
ಇದರಿಂದ $\angle CBD = 30^\circ$

ಮತ್ತು $\angle ACB = 90^\circ$ (ಯಾಕೆ?)

ಹಾಗೆ $\angle BCE = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$

ಇದರಿಂದ $\angle CEB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ಅಂದರೆ $\angle AEB = 60^\circ$

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಚಿತ್ರ 12.33ರಲ್ಲಿ ABCD ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ. AC ಮತ್ತು BD ಗಳು ಕರ್ಣಗಳು $\angle DBC = 55^\circ$, ಮತ್ತು $\angle BAC = 45^\circ$ ಆದರೆ $\angle BCD$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 12.33

ಪರಿಹಾರ: $\angle CAD = \angle DBC = 55^\circ$ (ಒಂದೇ ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು)

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC = 55^\circ + 45^\circ = 100^\circ$

ಆದರೆ $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$ (ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

ಆದುದರಿಂದ $\angle BCD = 180^\circ - 100 = 80^\circ$

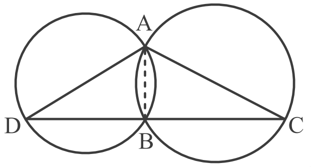
ಉದಾಹರಣೆ 5 : ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ A ಮತ್ತು B ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. AD ಮತ್ತು AC ಗಳು ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯಾಸಗಳು. (ಚಿತ್ರ 12.34 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). B ಯು DC ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : AB ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ

$$\left.\begin{array}{l}\angle ABD = 90^\circ \\ \angle ABC = 90^\circ\end{array}\right\}$$ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕೋನ

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle ABD + \angle ABC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

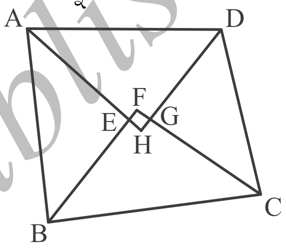
ಆದ್ದರಿಂದ DBC ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ. ಅಂದರೆ B ಯು DC ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 12.34

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಳಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಚಿತ್ರ 12.35 ರಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ AH, BF, CF ಮತ್ತು DH ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಗಳಾಗಿದ್ದು ಅವು EFGH ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 12.35

ಈಗ $\angle FEH = \angle AEB = 180 - (\angle EAB - \angle EBA)$ (ಏಕೆ?)

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

ಮತ್ತು $\angle FGH = \angle CGD = 180^\circ - \angle GCD - \angle GDC$ (ಏಕೆ?)

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\angle FEH + \angle FGH = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

$$= 360^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$$

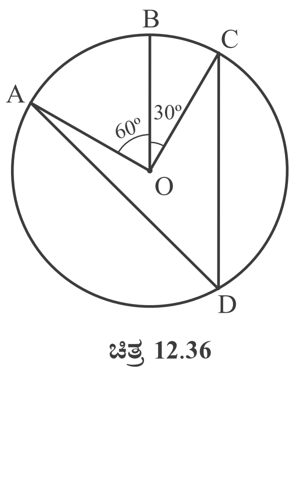
$$= 360^\circ - \frac{1}{2} \times 360^\circ$$

$$= 360^0 - 180^0 = 180^0$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 12.12ರಿಂದ EFGH ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

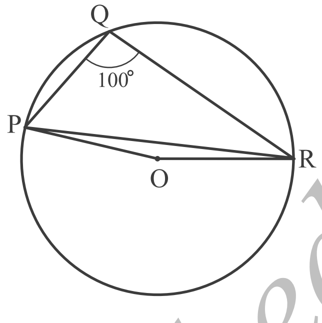
ಅಭ್ಯಾಸ 12.5

1. ಚಿತ್ರ 12.36 ರಲ್ಲಿ O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ $\angle BOC = 30^\circ$ ಮತ್ತು $\angle AOB = 60^\circ$ ಇರುವಂತೆ A,B,C ಗಳು ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು. ಕಂಸ ABC ಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ D ಯು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವಾದರೆ $\angle ADC$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



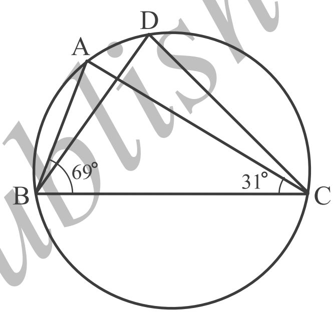
ಚಿತ್ರ 12.36

2. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾವು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಆ ಜ್ಯಾದಿಂದಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಲಘುಕಂಸದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಅಧಿಕಕಂಸದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



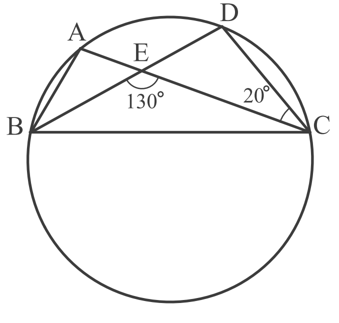
ಚಿತ್ರ 12.37

3. ಚಿತ್ರ 12.37 ರಲ್ಲಿ $\angle PQR = 100°$ P,Q,R ಗಳು O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು, $\angle OPR$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 12.38

4. ಚಿತ್ರ 12.38 ರಲ್ಲಿ $\angle ABC = 69°$, $\angle ACB = 31°$ ಆದರೆ $\angle BDC$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 12.39

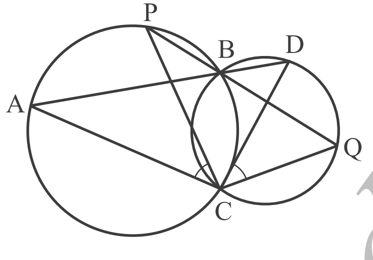
5. ಚಿತ್ರ 12.39 ರಲ್ಲಿ A,B,C ಮತ್ತು D ಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು $\angle BEC = 130°$ ಮತ್ತು $\angle ECD = 20°$ ಇರುವಂತೆ AC ಮತ್ತು BD ಗಳು E ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. $\angle BAC$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ABCDಯು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ. ಅದರ ಕರ್ಣಗಳು E ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. $\angle DBC = 70°$, $\angle BAC = 30°$ ಆದರೆ $\angle BCD$ ಯನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ AB = BC ಆದರೆ $\angle ECD$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸಗಳಾದರೆ ಆ ಚತುರ್ಭುಜವು ಆಯತವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8. ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ಸಮಾಂತರವಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಅದು ಚಕ್ರೀಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು B ಮತ್ತು C ಗಳಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. B ಯ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ABD ಮತ್ತು PBQ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ A,D,P ಮತ್ತು Q ಗಳಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 12.40 ಗಮನಿಸಿ) $\angle ACP = \angle QCD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 12.40

10. ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವಂತೆ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಈ ವೃತ್ತಗಳ ಛೇದಕ ಬಿಂದುವು ತ್ರಿಭುಜದ 3ನೆಯ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

11. ΔABC ಮತ್ತು ΔADC ಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಕರ್ಣ AC ಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು $\angle CAD = \angle CBD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. ಚಕ್ರೀಯ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಆಯತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 12.6 (ಐಚ್ಛಿಕ)*

1. ಎರಡು ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ರೇಖೆಯು ಅವುಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

2. 5cm ಮತ್ತು 11cm ಅಳತೆ ಹೊಂದಿರುವ AB ಮತ್ತು CD ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದು, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಲ್ಲಿವೆ. AB ಮತ್ತು CD ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 6cm ಆದರೆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. 6cm ಮತ್ತು 8cm ಅಳತೆಯ ಜ್ಯಾಗಳು ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಚಿಕ್ಕ ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 4cm ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಜ್ಯಾವು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ?

4. $\angle ABC$ ಯ ಶೃಂಗವು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿದೆ. ಅದರ ಬಾಹುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾದ AD ಮತ್ತು CE ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದರೆ $\angle ABC$ ಯು AC ಮತ್ತು DE ಜ್ಯಾಗಳಿಂದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಬಾಹುವನ್ನು ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, ಅದು ಕರ್ಣಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ A,B,C ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತವು CD ಯನ್ನು (ಅಗತ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ CD ವೃದ್ಧಿಸಿದ ಭಾಗವನ್ನು) E ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ AE = AD ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

* ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಈ ಅಭ್ಯಾಸಯಿಲ್ಲ

7. AC ಮತ್ತು BD ವೃತ್ತ ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ,

    1. AC ಮತ್ತು BD ಗಳು ವ್ಯಾಸಗಳಾಗಿವೆ.

    2. ABCD ಆಯತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8. ΔABCಯ A, B ಮತ್ತು C ಕೋನಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕರೇಖೆಗಳು ΔABCಯ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ D,E ಮತ್ತು F ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ ΔDEF ನ ಕೋನಗಳು $90° - \frac{1}{2}A$, $90° - \frac{1}{2}B$ ಮತ್ತು $90° - \frac{1}{2}C$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9. ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳು A ಮತ್ತು B ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. P ಮತ್ತು Q ಗಳು ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೇಲಿರುವಂತೆ A ಯ ಮೂಲಕ PAQ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. ಆದರೆ BP = BQ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10. Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\underline{|A}$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕರೇಖೆ ಹಾಗೂ BC ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳು Δ ABC ಯ ಪರಿವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12.9 ಸಾರಾಂಶ:

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

1. ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಗ್ರಹವೇ ವೃತ್ತ.

2. ವೃತ್ತದ ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು (ಅಥವಾ ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳ ಜ್ಯಾಗಳು) ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.

3. ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳಿಂದಾಗಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ.

4. ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬವು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

5. ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದಿರುವ ರೇಖೆಯು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸಿದರೆ ಅದು ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

6. ಮೂರು ಸರಳರೇಖಾಗತವಲ್ಲದ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಮಾತ್ರ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ.

7. ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತದ ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅಥವಾ ಸಮರೂಪ ಕೇಂದ್ರಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

8. ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಸಮರೂಪ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅಥವಾ ಸಮರೂಪ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

9. ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಕಂಸಗಳು ಸರ್ವಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ವಿಲೋಮವಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಕಂಸಗಳು (ಲಘು ಅಧಿಕ) ಸರ್ವಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

10. ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸರ್ವಸಮ ಕಂಸಗಳು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

11. ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಕಂಸದಿಂದಾಗಿ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವು ಅದೇ ಕಂಸದಿಂದಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಇತರ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

12. ಒಂದೇ ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

13. ಅರ್ಧವೃತ್ತ ಖಂಡದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ.

14. ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು ಅದರ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿದರೆ ಆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ.

15. ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

16. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆದರೆ ಆ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

3JCPXQ

ಅಧ್ಯಾಯ– 13

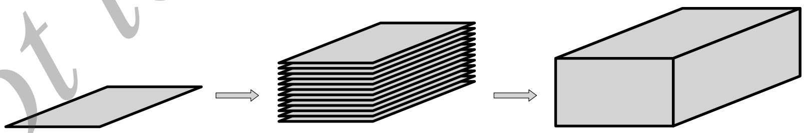
ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು

13.1 ಪೀಠಿಕೆ

ನಾವು ಎಲ್ಲಿ ನೋಡಿದರೂ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಘನ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿವರೆಗೆ ನಾವು ನೋಟ್‌ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಕಪ್ಪು ಹಲಗೆಯ ಮೇಲೆ ಸರಳವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದ ಚಿತ್ರಗಳ ಬಗ್ಗೆಯೇ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಮತಲಾಕೃತಿಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ಆಯತ, ಚೌಕ, ಮತ್ತು ವೃತ್ತಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಇವುಗಳ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅರ್ಥ ಏನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂಬುದೂ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಇವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ನಮ್ಮ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ನಾವು ಕಾರ್ಡ್‌ಬೋರ್ಡ್‌ನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಆಕಾರ ಮತ್ತು ಅಳತೆಯ ಅನೇಕ ಸಮತಲಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ, ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಒಂದನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಏನಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಕುತೂಹಲವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಿಂದ ನಾವು ಆಯತಘನ, ಸಿಲಿಂಡರ್ ಮುಂತಾದ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು (ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಘನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ) ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ನೀವು ನಿಮ್ಮ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಆಯತಘನ, ಘನ ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕಲಿತ್ತೀದ್ದಿರಿ. ಈಗ ನಾವು ಆಯತಘನ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ವಿವರವಾಗಿ ಕಲಿಯೋಣ ಮತ್ತು ಇತರ ಘನಾಕೃತಿಗಳಾದ ಶಂಕು ಮತ್ತು ಗೋಳಗಳಿಗೆ ಈ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸೋಣ.

13.2 ಆಯತಘನ ಮತ್ತು ಘನದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

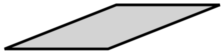
ನೀವು ಅನೇಕ ಹಾಳೆಗಳ ಒಂದು ಕಟ್ಟನ್ನು ನೋಡಿದ್ದಿರಾ? ಅದು ಹೇಗೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ? ಅದು ಚಿತ್ರ 13.1 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ನಿಮಗದು ಕಾಣುತ್ತದೆಯೇ?



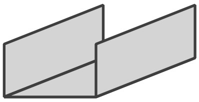
ಚಿತ್ರ 13.1

ಅದೊಂದು ಆಯತಘನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಈ ಆಯತಘನಕ್ಕೆ ಕಂದು ಬಣ್ಣದ ಹಾಳೆಯಿಂದ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಹೊದಿಕೆಯನ್ನು ಹಾಕಲು ಎಷ್ಟು ಕಾಗದ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಈಗ ನಾವು ನೋಡೋಣ.

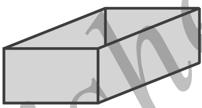
ಈಗ ನಮಗೆ ಮೊದಲಿಗೆ ಕಾಗದದ ಕಟ್ಟಿನ ಕೆಳಭಾಗವನ್ನು ಹೊದಿಸಲು ಆಯತಾಕಾರದ ಕಂದು ಬಣ್ಣದ ಹಾಳೆಯು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಚಿತ್ರ 13.2 (a) ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ.


(a)

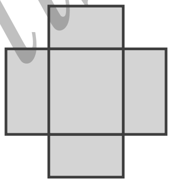
ಅನಂತರ ನಮಗೆ ಎರಡು ಬದಿಗಳಿಗೆ ಹೊದಿಸಲು ಎರಡು ಉದ್ದವಾದ ಆಯತಾಕಾರದ ಕಂದು ಬಣ್ಣದ ಹಾಳೆಯು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅದು ಚಿತ್ರ 13.2 (b) ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ.


(b)

ಅದೇರೀತಿ ನಮಗೆ ಕಾಗದದ ತಟ್ಟಿನ ಮುಂದಿನ ಮತ್ತು ಹಿಂದಿನ ಭಾಗವನ್ನು ಹೊದಿಸಲು, ಬೇರೆ ಅಳತೆಯ ಇನ್ನೂ ಎರಡು ಆಯತಾಕಾರದ ಹಾಳೆಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ನಮಗೆ ಆಗ ಚಿತ್ರ 13.2 (c) ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಆಕೃತಿಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

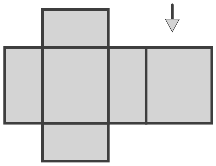

(c)

ಈ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಗಮನಿಸಿದಾಗ ಅದು ಚಿತ್ರ 13.2 (d) ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ.

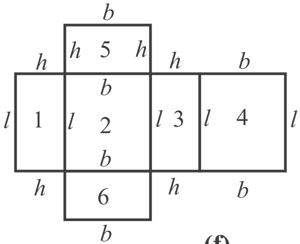

(d)

ಕೊನೆಯದಾಗಿ, ಕಾಗದದ ಕಟ್ಟಿನ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಹೊದಿಸಲು, ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ, ಇನ್ನೊಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಹಾಳೆಯು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ನಾವು ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದರೆ, ಅದು ಚಿತ್ರ 13.2 (e) ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ ಆಯತಘನದ ಹೊರಮೈಯನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಹೊದಿಸಲು ಆಯತಾಕಾರದ ಆರು ಹಾಳೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆವು.


(e)

ಇದು ನಮಗೆ ಆಯತಘನದ ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈಯು ಆರು ಆಯತಗಳಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. (ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಈ ಆಯತಾಕಾರದ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಆಯತಘನದ ಮುಖಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ). ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮುಖದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಗುಣಿಸಿ, ದೊರೆಯುವಂತಹ ಆರು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಆಯತಘನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.



(f)

ಚಿತ್ರ 13.2

ಈಗ ನಾವು ಆಯತ ಘನದ ಉದ್ದವನ್ನು l ಎಂದೂ, ಅಗಲವನ್ನು 'b' ಎಂದೂ, ಎತ್ತರವನ್ನು h ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಈ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಆಕೃತಿಯು ಚಿತ್ರ 13.2 (f) ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ ಆರು ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತವು :

ಆಯತ 1 ರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $(= l \times h)$

$+$

ಆಯತ 2 ರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $(= l \times b)$

$+$

ಆಯತ 3 ರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $(= l \times h)$

$+$

ಆಯತ 4 ರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $(= l \times b)$

$+$

ಆಯತ 5 ರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $(= b \times h)$

$+$

ಆಯತ 6 ರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $(= b \times h)$.

$= 2(l \times b) + 2(b \times h) + 2(l \times h)$

$= 2\ (lb + bh + hl)$

ಇದರಿಂದ ನಾವು ಪಡೆಯುವುದೇನೆಂದರೆ,

ಆಯತಘನದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 2 $(lb + bh + hl)$

ಇಲ್ಲಿ l, b ಮತ್ತು h ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಆಯತಘನದ ಮೂರು ಅಂಚುಗಳಾಗಿವೆ.

ಸೂಚನೆ : ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಏಕಮಾನವನ್ನು ಒಂದು ಚದರಮಾನ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ ಏಕೆಂದರೆ ಏಕಮಾನ ಉದ್ದದ ಬದಿಗಳಿರುವ ಚೌಕಗಳನ್ನು ತುಂಬಿಸುವ ಮೂಲಕ ನಾವು ಒಂದು ವಲಯದ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಅಳೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 15 cm, 10 cm ಮತ್ತು 20 cm ಇರುವ ಒಂದು ಆಯತಘನವು ನಮ್ಮಲ್ಲಿದ್ದರೆ,

ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$= 2\ [(15 \times 10) + (10 \times 20) + (20 \times 15)]\ \text{cm}^2$

$= 2\ [150 + 200 + 300]\ \text{cm}^2$

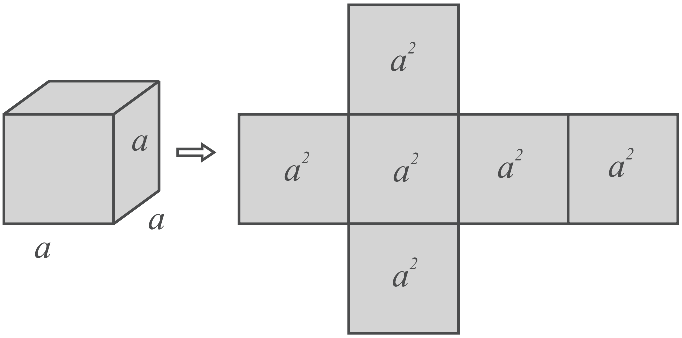
$= 2 \times 650\ \text{cm}^2$

$= 1300\ \text{cm}^2$

ಒಂದು ಆಯತಘನದಲ್ಲಿ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು ಸಮನಾದರೆ ಅದನ್ನು ಘನ ಎಂದು ಕರೆಯುವುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಘನದ ಪ್ರತಿ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದವು 'a' ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $2[a \times a + a \times a + a \times a] = 6a^2$ [ಚಿತ್ರ 13.3 ಗಮನಿಸಿ]. ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುವುದೇನೆಂದರೆ,

ಘನದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $6a^2$

ಇಲ್ಲಿ a ಯು ಘನದ ಅಂಚು ಆಗಿದೆ.



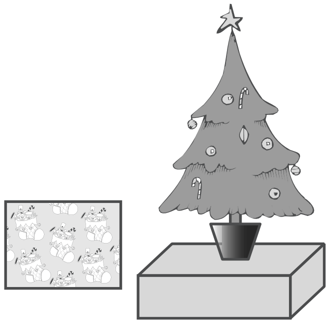
ಚಿತ್ರ 13.3

ಒಂದು ಆಯತಘನದ ಆರು ಮುಖಗಳಲ್ಲಿ, ಮೇಲ್ಭಾಗ ಮತ್ತು ಕೆಳಭಾಗದ ಮುಖಗಳನ್ನು ಹೊರತು ಪಡಿಸಿ, ಉಳಿದ 4 ಮುಖಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಈ ನಾಲ್ಕು ಮುಖಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಆಯತಘನದ **ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದ್ದ l, ಅಗಲ b ಮತ್ತು ಎತ್ತರ h ಆಗಿರುವ ಆಯತಘನದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $2lh + 2bh$ ಅಥವಾ $2(l + b)h$ ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ 'a' ಬಾಹುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಘನದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $4a^2$ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಅಂಶವನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು, ಒಂದು ಆಯತಘನದ (ಅಥವಾ ಒಂದು ಘನದ) ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಂದೂ ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಮೇರಿಯು ತನ್ನ ಕ್ರಿಸ್‌ಮಸ್ ವೃಕ್ಷವನ್ನು ಅಲಂಕರಿಸಲು ಬಯಸಿದ್ದಾಳೆ. ಸಂತಾಕ್ಲಾಸ್‌ನ ಚಿತ್ರ ಇರುವಂತೆ, ವೃಕ್ಷಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣದ ಕಾಗದವನ್ನು ಹೊದಿಸಿ ಅದನ್ನೊಂದು ಮರದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿಡಲು ಅವಳು ಬಯಸಿದ್ದಾಳೆ. [ಚಿತ್ರ 13.4 ಗಮನಿಸಿ]. ಇದರ ಸಲುವಾಗಿ ಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಹೊದಿಕೆ ಕಾಗದದ ನಿಖರವಾದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಅವಳು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಉದ್ದ, ಅಗಲ, ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 80 cm, 40 cm ಮತ್ತು 20 cm ಆದರೆ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 40 cm ಇರುವ ಚೌಕಾಕಾರದ ಎಷ್ಟು ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಗಳು ಅವಳಿಗೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ?



ಚಿತ್ರ 13.4

ಪರಿಹಾರ : ಮೇರಿಯು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಹೊರಭಾಗದ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಕಾಗದವನ್ನು ಅಂಟಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಬೇಕಾದ ಕಾಗದದ ಪ್ರಮಾಣವು ಆಯತಘನಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಈ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಅಳತೆಯು, ಉದ್ದ = 80 cm, ಅಗಲ = 40 cm, ಎತ್ತರ = 20 cm ಹೊಂದಿದೆ.

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2[lb + bh + hl]$

$= 2\,[(80 \times 40) + (40 \times 20) + (20 \times 80)]\ \text{cm}^2$

$= 2\,[3200 + 800 + 1600]\ \text{cm}^2$

$= 2 \times 5600\ cm^2 = 11200\ cm^2$

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 40 \times 40\ cm^2$

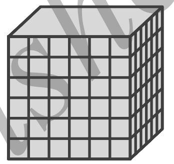
$= 1600\ cm^2$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೇಕಾಗುವ ಹಾಳೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $\dfrac{\text{ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\text{ಒಂದು ಹಾಳೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}$

$= \dfrac{11200}{1600} = 7$

ಅವಳಿಗೆ ಬೇಕಾದ ಹಾಳೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 7

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಹಮೀದನು ತನ್ನ ಮನೆಗೆ 1.5 m ಅಂಚು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತು ಮುಚ್ಚಳವಿರುವ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ಕಟ್ಟಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನ ತಳಭಾಗವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಟ್ಯಾಂಕನ ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಅವನು 25 cm ಅಂಚು ಹೊಂದಿರುವ ಚೌಕಾಕಾರದ ಹಾಸುಗಲ್ಲಿನಿಂದ ಹೊದಿಸುತ್ತಾನೆ. [ಚಿತ್ರ 13.5 ಗಮನಿಸಿ] ಒಂದು ಡಜನ್ ಹಾಸುಗಲ್ಲಿನ ಬೆಲೆ ₹ 360 ರಂತೆ, ಅವನು ಹಾಸುಗಲ್ಲಿಗೆ ಮಾಡಿದ ಖರ್ಚು ಎಷ್ಟು ?



ಚಿತ್ರ 13.5

ಪರಿಹಾರ : ಹಮೀದನು ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನ ಐದು ಮುಖಗಳಿಗೆ ಹಾಸುಗಲ್ಲು ಹೊದಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ತರಬೇಕಾದ ಹಾಸುಗಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಅವನು ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಘನಾಕಾರದ ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದ = a = 1.5 m = 150 cm

ಆದ್ದರಿಂದ, ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 5 \times 150 \times 150\ cm^2$

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗಾಕಾರದ ಹಾಸುಗಲ್ಲಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಬಾಹು × ಬಾಹು $= 25 \times 25\ cm^2$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೇಕಾದ ಹಾಸುಗಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ = $\dfrac{\text{ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\text{ಪ್ರತಿ ಹಾಸುಗಲ್ಲಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}$

$= \dfrac{5 \times 150 \times 150}{25 \times 25} = 180$

ಒಂದು ಡಜನ್ ಹಾಸುಗಲ್ಲಿನ ಬೆಲೆ, ಅಂದರೆ 12 ಹಾಸುಗಳಲ್ಲಿನ ಬೆಲೆ = ₹ 360

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಹಾಸುಗಲ್ಲಿನ ಬೆಲೆ = ₹ $\dfrac{360}{12}$ = ₹ 30

ಹಾಗಾದರೆ 180 ಹಾಸುಗಲ್ಲುಗಳ ಬೆಲೆ = 180 × ₹ 30 = ₹ 5400

ಅಭ್ಯಾಸ 13.1

1. 1.5m ಉದ್ದ, 1.25m ಅಗಲ ಮತ್ತು 65 cm ಆಳವಿರುವ ಒಂದು ಪ್ಲಾಸ್ಟಿಕ್ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲ್ಭಾಗವು ತೆರೆದಿದೆ. ಪ್ಲಾಸ್ಟಿಕ್ ಹಾಳೆಯ ದಪ್ಪವನ್ನು ನಗಣ್ಯವಾಗಿರಿಸಿ.

   (i) ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಪ್ಲಾಸ್ಟಿಕ್ ಹಾಳೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹಾಗೂ

   (ii) 1 m^2 ಪ್ಲಾಸ್ಟಿಕ್ ಹಾಳೆಗೆ ₹ 20 ರಂತೆ, ಅದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಹಾಳೆಯ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಒಂದು ಕೊಠಡಿಯ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 5m, 4m ಮತ್ತು 3m ಆಗಿವೆ. ಕೊಠಡಿಯ ಗೋಡೆಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಛಾವಣಿಗೆ ಸುಣ್ಣ ಬಳಿಯಲು ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 7.50 ರಂತೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3 ಆಯಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸಭಾಂಗಣದ ನೆಲದ ಸುತ್ತಳತೆಯು 250m ಆಗಿದೆ. ಸಭಾಂಗಣದ ನಾಲ್ಕು ಗೋಡೆಗಳಿಗೆ ಬಣ್ಣ ಬಳಿಯಲು ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 10 ರಂತೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ ₹ 15000 ಆದರೆ, ಆ ಸಭಾಂಗಣದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(**ಸುಳಿವು** : ನಾಲು ಗೋಡೆಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ)

4. ಒಂದು ಡಬ್ಬದಲ್ಲಿರುವ ಬಣ್ಣವು 9.375 m^2 ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ ಹಚ್ಚಲು ಸಾಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಡಬ್ಬದಲ್ಲಿರುವ ಬಣ್ಣದಿಂದ 22.5 cm × 10 cm × 7.5 cm ಅಳತೆಯ ಎಷ್ಟು ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳಿಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬಹುದು?

5. ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಪ್ರತಿ ಅಂಚು 10 cm ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಆಯತಘನಾಕಾರದ ಇನ್ನೊಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯು 12.5 cm ಉದ್ದ, 10 cm ಅಗಲ ಮತ್ತು 8cm ಎತ್ತರವಿದೆ.

   (i) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯು ಹೆಚ್ಚು ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಮತ್ತು ಹೋಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ?

   (ii) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯು ಕಡಿಮೆ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಮತ್ತು ಹೋಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಇದೆ?

6. ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಒಳಾಂಗಣ ಸಸ್ಯಸಂಗ್ರಹಾಲಯ(herbarium)ವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಗಾಜಿನ ಫಲಕಗಳಿಂದ ತಳಭಾಗ ಸಹಿತ ಸುಭದ್ರವಾಗಿ ಟೇಪ್ ಅಂಟಿಸುವ ಮೂಲಕ ಮಾಡಿದೆ. ಅದು 30 cm ಉದ್ದ, 25 cm ಅಗಲ ಮತ್ತು 25 cm ಎತ್ತರ ಇದ್ದರೆ,

   (i) ಗಾಜಿನ ಫಲಕಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

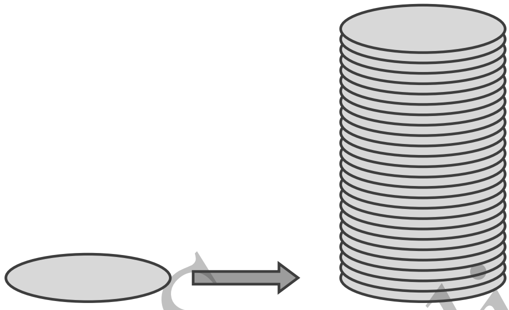
   (ii) ಎಲ್ಲಾ 12 ಅಂಚುಗಳಿಗೆ ಬೇಕಾಗುವ ಟೇಪ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣ ಎಷ್ಟು?

7. ಶಾಂತಿ ಸಿಹಿ ಅಂಗಡಿಯವರು ಸಿಹಿತಿಂಡಿಗಳನ್ನು ಕಟ್ಟಲು ಕಾರ್ಡ್‌ಬೋರ್ಡ್‌ನ ಡಬ್ಬವನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಹೇಳಿದ್ದಾರೆ. ಅವರಿಗೆ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳ ಡಬ್ಬಗಳು ಬೇಕಾಗಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಡಬ್ಬದ ಅಳತೆಯು 25cm × 20 cm × 5 cm ಮತ್ತು ಸಣ್ಣ ಡಬ್ಬದ ಅಳತೆಯು 15 cm × 12 cm × 5 cm ಆಗಿದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಮಡಚಲು ಡಬ್ಬದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ 5% ಹೆಚ್ಚಿನ ಕಾರ್ಡ್ ಬೋಡ್ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಕಾರ್ಡ್‌ಬೋರ್ಡ್‌ನ ಬೆಲೆಯು ಪ್ರತಿ 1000 cm^2 ಗೆ ₹ 4 ಆದರೆ, ಈ ಬಗೆಯ 250 ಡಬ್ಬಗಳನ್ನು ಪೂರೈಕೆ ಮಾಡಲು ಬೇಕಾದ ಕಾರ್ಡ್‌ಬೋರ್ಡ್‌ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಪರ್ವಿನ್ ಅವಳ ಕಾರನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಲು ಒಂದು ತಾತ್ಕಾಲಿಕ ಸೂರು (Shelter) ಮಾಡಬೇಕಿದೆ. ಇದು ಕಾರಿನ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಭಾಗವನ್ನು ಮುಚ್ಚುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಟಾರ್ಪಲಿನ್‌ನಿಂದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ (ಮುಂದಿನ ಭಾಗವನ್ನು ಸುತ್ತುತ್ತಾ ಮೇಲೆ ಎತ್ತುವ ಹಾಗೆ) ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅದನ್ನು ಹೊಲಿಯುವ ಅಂಚು ತುಂಬಾ ಚಿಕ್ಕದಿರುವುದರಿಂದ ನಗಣ್ಯವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ಎತ್ತರ 2.5 m ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ಅಳತೆ 4 m × 3 m ಇರುವ ಸೂರನ್ನು ಮಾಡಲು ಎಷ್ಟು ಟಾರ್ಪಲಿನ್ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

13.3 ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಕಾಗದದಿಂದ ಮಾಡಿದ ವೃತ್ತಕಾರದ ಹಾಳೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಒಂದರಂತೆ ಈ ಮೊದಲು ಆಯತಾಕಾರದ ಹಾಳೆಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದ ಹಾಗೆಯೇ ಜೋಡಿಸೋಣ. ನಮಗೆ ಏನು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ? (ಚಿತ್ರ 13.6 ಗಮನಿಸಿ)



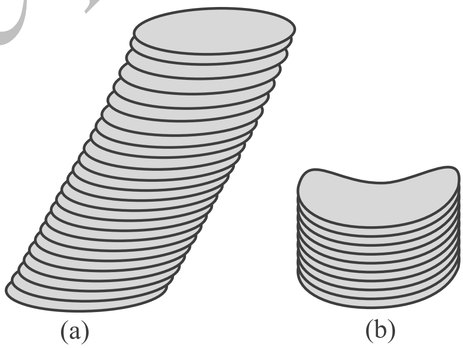
ಚಿತ್ರ 13.6

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಹಾಳೆಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಒಂದನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಸೇರಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಆಕೃತಿಯನ್ನು **ನೇರ ವೃತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಪಾದವು ವೃತ್ತಕಾರದಲ್ಲಿದೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಪಾದಕ್ಕೆ ಲಂಬಕೋನದಲ್ಲಿ ಇರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ ನಾವು ಯಾವ ವಿಧದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಅಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಚಿತ್ರ 13.7(a) ರಲ್ಲಿ ನೀವು ಒಂದು ರೀತಿಯ ವೃತ್ತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ನೋಡುತ್ತಿದ್ದೀರಿ. ಆದರೆ ಇದು ಪಾದಕ್ಕೆ ಲಂಬಕೋನದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಇದನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಎಂದು ಕರೆಯಲು ಸಾದ್ಯವಿಲ್ಲ.

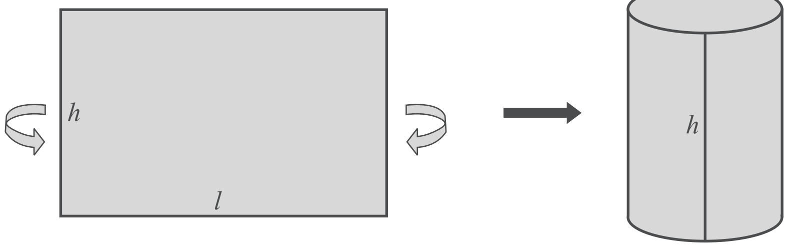
ನಿಮ್ಮ ಹತ್ತಿರ ಪಾದವು ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿಲ್ಲದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಇದ್ದರೆ, ಚಿತ್ರ 13.7(b) ಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ, ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ನೀವು ಅದನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತಾಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಎಂದು ಕರೆಯಲು ಸಾದ್ಯವಿಲ್ಲ.



ಚಿತ್ರ 13.7

ಗಮನಿಸಿ : ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೇವಲ ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಬಗ್ಗೆ ಮಾತ್ರ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಎಂದರೆ ನೇರ ವೃತ್ತಾಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಈಗ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ್ನು ಬಣ್ಣದ ಹಾಳೆಯಿಂದ ಹೊದಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಸಾದ್ಯವಾದಷ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಪ್ರಮಾಣದ ಕಾಗದವನ್ನು ಬಳಸಿ ಇದನ್ನು ಮಾಡುವುದು ಹೇಗೆ? ಮೊದಲು ಆಯತಾಕಾರದ ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ, ಅದರ ಉದ್ದವು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ್ನು ಒಮ್ಮೆ ಸುತ್ತುವಂತಿರಲಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಅಗಲವು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರ 13.8ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಸಮಾನವಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 13.8

ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನಮಗೆ ನೀಡುತ್ತದೆ. ಹಾಳೆಯ ಉದ್ದವು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ಪರಿಧಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ. ಅದು $2\pi r$ ಗೆ ಸಮವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಆಯತಾಕಾರದ ಹಾಳೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಉದ್ದ × ಅಗಲ

= ಸಿಲಿಂಡನ ಪಾದದ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ × h

= $2\pi r \times h$

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $2\pi rh$**

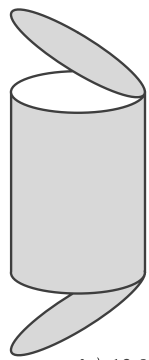
ಇಲ್ಲಿ r ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾದದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು h ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ : ಸಿಲಿಂಡರ್‌ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಬೇರೇನನ್ನೂ ಹೇಳದ ಹೊರತು, "ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ತ್ರಿಜ್ಯ" ಎಂದರೆ "ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ" ಎಂದು ಅರ್ಥ.

ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಕೆಳಭಾಗವನ್ನು ಸಹ ಹೊದಿಸಬೇಕಾದರೆ, ನಮಗೆ r ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಇನ್ನೂ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು (ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪ್ರದೇಶ) ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು πr^2 ಇರುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 13.9 ಗಮನಿಸಿ) ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $2\pi r(r + h)$**

ಇಲ್ಲಿ r ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾದದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು h ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 13.9

ಗಮನಿಸಿ : ನೀವು ಮೊದಲ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ π ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಲಿತಿರುವುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಆದ್ದರಿಂದ π ಯ ಬೆಲೆಯು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ, ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗದ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ನಾವು ನಮ್ಮ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಲ್ಲಿ, ಅದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ $\frac{22}{7}$ ಅಥವಾ 3.14 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ಸಾವಿತ್ರಿಯು ವಿಜ್ಞಾನದ ಯೋಜನೆಗಾಗಿ (Project) ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ 'ವಿವಿಧ ಚಿತ್ರದರ್ಶಕ' (Kaleidoscope)ದ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅವಳು ಚಾರ್ಟ್‌ನ ಕಾಗದವನ್ನು ಕೆಲಿಡೋಸ್ಕೋಪ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿ ಮಾಡಲು ಬಳಸುತ್ತಾಳೆ. (ಚಿತ್ರ 13.10 ಗಮನಿಸಿ). ಉದ್ದ 25 cm ಮತ್ತು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯ 3.5 cm ಇರುವಂತೆ ಕೆಲಿಡೋಸ್ಕೋಪ್ ಮಾಡಲು ಅವಳಿಗೆ ಬೇಕಾಗುವ ಚಾರ್ಟ್ ಕಾಗದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು? ನೀವು $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಪರಿಹಾರ : ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಕೆಲಿಡೋಸ್ಕೋಪ್‌ನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ $r = 3.5$ cm

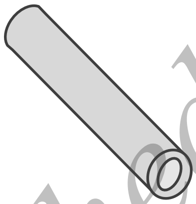
ಕೆಲಿಡೋಸ್ಕೋಪ್ ಎತ್ತರ (ಉದ್ದ) $h = 25$ cm

ಬೇಕಾಗುವ ನಕ್ಷೆಯ ಕಾಗದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಕೆಲಿಡೋಸ್ಕೋಪ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= 2\pi rh$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 25 \text{cm}^2$$

$$= 550 \text{ cm}^2$$



ಚಿತ್ರ 13.10

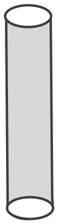
ಅಭ್ಯಾಸ 13.2

(π ಗೆ ಇತರೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡದಿದ್ದಲ್ಲಿ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ.)

1. ಒಂದು ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಎತ್ತರ 14 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 88 cm^2 ಆದರೆ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯಿಂದ 1m ಎತ್ತರ ಮತ್ತು 140 cm ವ್ಯಾಸ ಇರುವ ಒಂದು ಮುಚ್ಚಿದ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಬೇಕಾಗುವ ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯನ್ನು ಚದರ ಮೀಟರ್‌ನಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿ.

3. ಒಂದು ಲೋಹದ ಕೊಳವೆಯು 77 cm ಉದ್ದವಿದೆ. ಅದರ ಅಡ್ಡಸೀಳಿಕೆಯ ಒಳವ್ಯಾಸವು 4 cm, ಹೊರ ವ್ಯಾಸವು 4.4 cm ಇದೆ. (ಚಿತ್ರ 13.11 ಗಮನಿಸಿ) ಆದರೆ
   (i) ಒಳ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
   (ii) ಹೊರ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
   (iii) ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 13.11

4. ಒಂದು ರೋಲರ್‌ನ ವ್ಯಾಸವು 84 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಉದ್ದವು 120 cm ಆಗಿದೆ. ಆಟದ ಮೈದಾನದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಸಾರಿ ಸುತ್ತಿ ಸಮತಟ್ಟು ಮಾಡಲು ಅದು 500 ಪೂರ್ಣಸುತ್ತುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಆಟದ ಮೈದಾನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಕಂಬದ ವ್ಯಾಸವು 50 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಎತ್ತರವು 3.5 m ಆಗಿದೆ. ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 12.50 ದರದಂತೆ ಕಂಬದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಬಣ್ಣ ಬಳಿಯಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

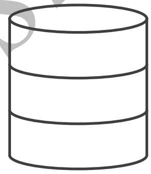
6. ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 4.4 m^2 ಆಗಿದೆ. ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 0.7 m ಆದರೆ, ಅದರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಬಾವಿಯ ಒಳ ವ್ಯಾಸವು 3.5 m ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಆಳವು 10 m ಆಗಿದೆ.
   (i) ಅದರ ಒಳ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
   (ii) ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರಗೆ ₹ 40 ದರದಂತೆ ಅದರ ಒಳ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈಯನ್ನು ಗಾರೆ (Plastering) ಮಾಡಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ನೀರನ್ನು ಬಿಸಿ ಮಾಡುವ ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ, 28 m ಉದ್ದದ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಕೊಳವೆ ಇದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯಾಸವು 5 cm ಆಗಿದೆ. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ವಿಕಿರಣ ಹೊರಸೂಸುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. (i) ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಪೆಟ್ರೋಲ್ ಸಂಗ್ರಹಿಸುವ ತೊಟ್ಟಿಯ ವ್ಯಾಸವು 4.2 m ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 4.5 m ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಥವಾ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (ii) ಈ ಪೆಟ್ರೋಲ್ ತೊಟ್ಟಿಯನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಬಳಸಿದ ಸ್ಟೀಲ್‌ನಲ್ಲಿ $\frac{1}{12}$ ರಷ್ಟು ನಷ್ಟವಾದರೆ ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿ ಬಳಸಿದ ಸ್ಟೀಲ್ ಎಷ್ಟು?

10. ಚಿತ್ರ 13.12ರಲ್ಲಿ ನೀವು ದೀಪದ ಬೆಳಕನ್ನು ನಿಯಂತ್ರಿಸುವ ಹಂದರ (frame)ವನ್ನು ನೋಡುತ್ತೀರಿ. ಇದನ್ನು ಅಲಂಕಾರಿಕ ಬಟ್ಟೆಯಿಂದ ಹೊದಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಹಂದರದ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 20 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 30 cm ಆಗಿದೆ. ಹಂದರದ ಮೇಲ್ಭಾಗ ಮತ್ತು ಕೆಳಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಬಟ್ಟೆಯನ್ನು ಮಡಚಲು 2.5 cm ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಅಂಚನ್ನು ನೀಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಹಂದರಕ್ಕೆ ಹೊದಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ಬಟ್ಟೆ ಎಷ್ಟು?



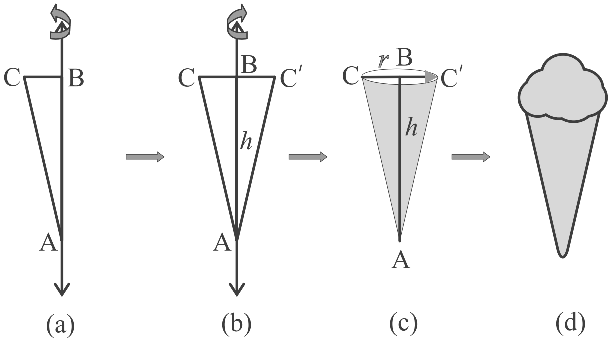
ಚಿತ್ರ 13.12

11. ಒಂದು ಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಕಾರ್ಡ್‌ಬೋರ್ಡ್‌ನಿಂದ ಮಾಡಿದ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಲೇಖನಿ ಧಾರಕವನ್ನು ರಚಿಸುವ ಮತ್ತು ಅಲಂಕಾರ ಮಾಡುವ ಸ್ಪರ್ಧೆಯನ್ನು ಶಾಲೆಯು ಏರ್ಪಡಿಸಿದೆ. ಸ್ಪರ್ಧೆಗೆ ಬೇಕಾಗುವ ಕಾರ್ಡ್‌ಬೋರ್ಡ್‌ನ್ನು ಸ್ಪರ್ಧಾಳುಗಳಿಗೆ ಶಾಲೆಯು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ಲೇಖನಿ ಧಾರಕದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 10.5 cm ಇರಬೇಕು. ಸ್ಪರ್ಧೆಯಲ್ಲಿ 35 ಸ್ಪರ್ಧಾಳುಗಳಿದ್ದರೆ, ಸ್ಪರ್ಧೆಗೆ ಖರೀದಿಸಬೇಕಾದ ಕಾರ್ಡ್‌ಬೋರ್ಡ್‌ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13.4 ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ಸರ್ವಸಮವಾದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಒಂದನ್ನು ಇಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು **"ಪಟ್ಟಕ (prism)ಗಳು"** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ನಾವು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯ ಆದರೆ ಪಟ್ಟಕವಲ್ಲದ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ. [ಈ ರೀತಿಯ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು **ಗೋಪುರ (pyramid)ಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ]. ಈಗ ನಾವು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಂಟುಮಾಡಬಹುದು ಎಂದು ನೋಡೋಣ.

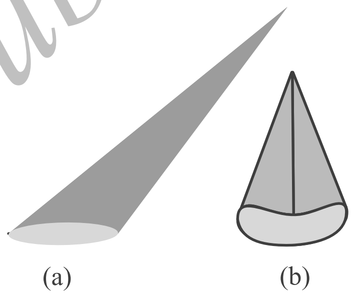
ಚಟುವಟಿಕೆ : ಕೋನ Bಯು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ (AB ಗೆ)ಉದ್ದವಾದ, ದಪ್ಪವಾಗಿರುವ ಒಂದು ತಂತಿಯನ್ನು ಅಂಟಿಸಿ. [ಚಿತ್ರ 13.13 (*a*) ಗಮನಿಸಿ]. ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಕೈಯಿಂದ ತಂತಿಯನ್ನು ಹಿಡಿದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ತಂತಿಯನ್ನು ಅಕ್ಷವಾಗಿ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಹಲವು ಬಾರಿ ತಿರುಗಿಸಿ. ಈಗ ಏನಾಗುತ್ತದೆ? ತಂತಿಯ ಸುತ್ತಲೂ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಆಕಾರವನ್ನು ನೀವು ಗುರುತಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? [ಚಿತ್ರ 13.3 b ಗಮನಿಸಿ] ಇಂತಹ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್ ಅನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಕೊಂಡು ಈ ಹಿಂದೆ ತಿಂದಿದ್ದನ್ನು ನೆನಪಿಸುತ್ತಿಲ್ಲವೆ? [ಚಿತ್ರ 13.3 (c) ಮತ್ತು (d) ಗಮನಿಸಿ].



ಚಿತ್ರ 13.13

ಇದನ್ನು **ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಚಿತ್ರ 13.13 (c)ದಲ್ಲಿ, A ಬಿಂದುವನ್ನು **ಶೃಂಗ ಬಿಂದು,** AB ಯನ್ನು **ಎತ್ತರ,** BC ಯನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು AC ಯನ್ನು ಶಂಕುವಿನ **ಓರೆಎತ್ತರ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ B ಬಿಂದುವು ಶಂಕುವಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಪಾದದ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ, ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ h, r ಮತ್ತು l ದಿಂದ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಈಗ ನಾವು ಇನ್ನೊಂದು ಬಾರಿ ಯಾವ ವಿಧದ ಶಂಕುವು ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಚಿತ್ರ 13.14 ರಲ್ಲಿ. ನೀವು ನೋಡುತ್ತಿರುವ ಆಕೃತಿಯು ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುಗಳಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಚಿತ್ರ (a) ದಲ್ಲಿ ಶೃಂಗಬಿಂದು ಮತ್ತು ಪಾದದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಪಾದದೊಂದಿಗೆ ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ (b) ದಲ್ಲಿ ಪಾದವು ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ.

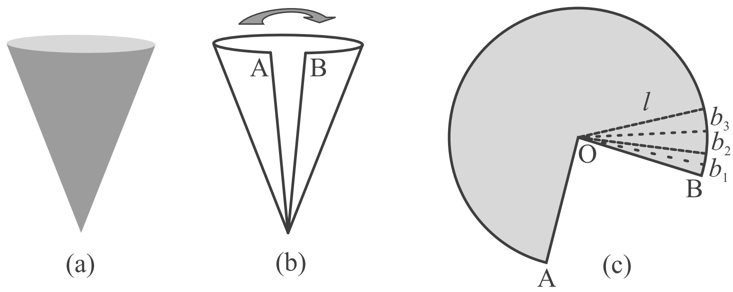


ಚಿತ್ರ 13.14

ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ, ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಬಗ್ಗೆ ಮಾತ್ರ ಓದುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಶಂಕು ಅಂದರೆ ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಶಂಕು ಎಂದು ಅರ್ಥ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಿ.

ಚಟುವಟಿಕೆ : (i) ಕಾಗದವು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಪಿಸಿರದಂತೆ, ಕಾಗದದಿಂದ ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾಗಿ ಮಾಡಿದ ಶಂಕುವನ್ನು ಅದರ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ನೇರವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿ, ಕಾಗದವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ. ನೀವು ನೋಡುವ ಕಾಗದದ ಆಕಾರವು ಶಂಕುವಿನ ಸಮತಲ ಮೇಲ್ಮೈ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. (ನೀವು ಶಂಕುವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿದ ರೇಖೆಯು ಶಂಕುವಿನ **ಓರೆ ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ**. ಅದನ್ನು l ದಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತೇವೆ.) ಇದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಕೇಕ್‌ನ ಭಾಗದಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ.

(ii) ಚಿತ್ರ 13.15 (c)ರಲ್ಲಿ, A ಮತ್ತು B ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿದ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ನೀವು ಹತ್ತಿರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬಂದರೆ, ಉಂಟಾಗುವ ವಕ್ರಭಾಗವು ಶಂಕುವಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ನೀವು ನೋಡಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 13.15

(iii) ಚಿತ್ರ 13.15 (c) ನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಆಕಾರದ ಕಾಗದವನ್ನು **'O'** ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ನೂರಾರು ಸಣ್ಣ ತುಂಡುಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ, ಪ್ರತಿ ತುಂಡಿನ ಭಾಗವು ಬಹುತೇಕವಾಗಿ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಎತ್ತರವು ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(iv) ಈಗ ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{2}$ × ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ × l

ಆದ್ದರಿಂದ ಇಡೀ ಕಾಗದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಎಲ್ಲಾ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ

$$= \frac{1}{2}\ b_1 l + \frac{1}{2}\ b_2 l + \frac{1}{2}\ b_3 l + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}\ l\,[b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots]$$

= $\frac{1}{2}$ l [ಚಿತ್ರ 13.15 (c)ಯ ಇಡೀ ವಕ್ರ ಸೀಮಾರೇಖೆಯ ಉದ್ದ]

($b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots$ ಚಿತ್ರದ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಭಾಗವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ).

ಆದರೆ ಚಿತ್ರದ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಭಾಗವು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿ = $2\pi r$, ಇಲ್ಲಿ r ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ.

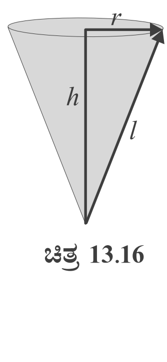
ಆದ್ದರಿಂದ, **ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ** $\boxed{= \frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi r l}$

ಇಲ್ಲಿ, r ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು l ಅದರ ಓರೆ ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ

ಗಮನಿಸಿ : ಪೈಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ $l^2 = r^2 + h^2$ ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 13.16ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ಇಲ್ಲಿ h ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

ಈಗ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದವನ್ನು ಮುಚ್ಚಲು, ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಇರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಕಾಗದ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು πr^2 ಇರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 13.16

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ** $= \pi rl + \pi r^2 = \pi r\,(l + r)$

ಉದಾಹರಣೆ 4 : ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ 10 cm ಮತ್ತು ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 7 cm ಇದ್ದರೆ ಅದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10\ cm^2$$

$$= 220\ \text{cm}^2$$

ಉದಾಹರಣೆ 5 : ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 16 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 12 cm. ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ಎಂದು ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ $h = 16$ cm ಮತ್ತು $r = 12$ cm

ಆದ್ದರಿಂದ, $l^2 = h^2 + r^2$ ದಿಂದ

$$l = \sqrt{16^2 + 12^2}\ \text{cm} = 20\ \text{cm}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi rl$

$$= 3.14 \times 12 \times 20\text{cm}^2$$

$$= 753.6\ \text{cm}^2$$

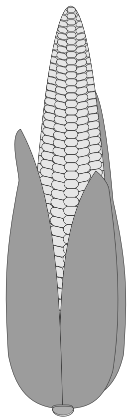
ಮುಂದುವರೆದು, ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi rl + \pi r^2$

$$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12)\text{cm}^2$$

$$= (753.6 + 452.16)\ \text{cm}^2$$

$$= 1205.76\ \text{cm}^2$$

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳದ ತೆನೆಯು ಸುಮಾರಾಗಿ ಶಂಕುವಿನ ಅಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಅಗಲವಾದ ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 2.1 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಉದ್ದ (ಎತ್ತರ)ವು 20 cm ಇದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು 1cm^2 ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ 4 ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳದ ಕಾಳುಗಳಿದ್ದರೆ, ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳದ ತೆನೆಯಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ಎಲ್ಲಾ ಕಾಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.


ಚಿತ್ರ 13.17

ಪರಿಹಾರ : ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳದ ತೆನೆಯಲ್ಲಿ ಕಾಳುಗಳು ಅದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ಕಾಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳದ ತೆನೆಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ನಾವು ಓರೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕು.

ಇಲ್ಲಿ $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ cm

$$= \sqrt{404.41}\ \text{cm}$$

$$= 20.11\ \text{cm}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ತೆನೆಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11\text{cm}^2 = 132.726\ \text{cm}^2$$

$$= 132.73\ \text{cm}^2$$ (ಸರಿಸುಮಾರು)

$1cm^2$ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ಕಾಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4

ಆದ್ದರಿಂದ, ತೆನೆಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ಕಾಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 132.73×4

= 530.92

= 531 (ಸರಿಸುಮಾರು)

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳದ ತೆನೆಯಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳದ ಕಾಳುಗಳು 531 ಆಗಿವೆ.

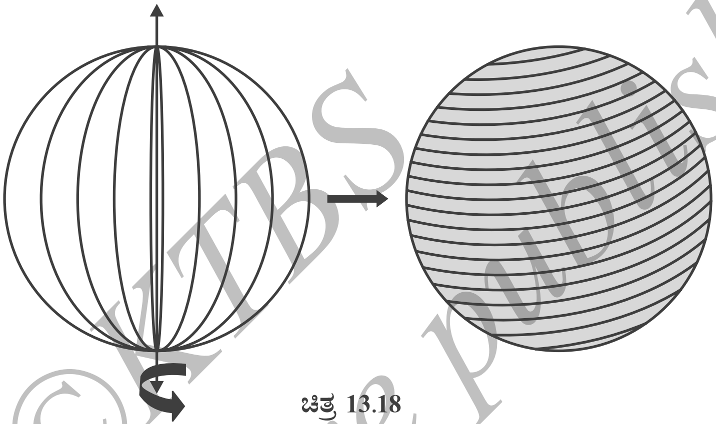
ಅಭ್ಯಾಸ 13.3

(π ಗೆ ಬೇರೆಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡದೇ ಇದ್ದಲ್ಲಿ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ.)

1. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 10.5cm ಮತ್ತು ಅದರ ಓರೆ ಎತ್ತರವು 10cm ಇದೆ. ಅದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರವು 21 m ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 24 cm ಆದರೆ ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 308 cm^2 ಮತ್ತು ಅದರ ಓರೆ ಎತ್ತರವು 14 cm ಆಗಿದೆ. ಶಂಕುವಿನ
   (i) ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು
   (ii) ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಡೇರೆಯ ಎತ್ತರವು 10 m ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 24 m ಆಗಿದೆ.
   (i) ಡೇರೆಯ ಓರೆ ಎತ್ತರ
   (ii) 1 m^2 ಕ್ಯಾನ್‌ವಾಸ್ (canvas) ಬಟ್ಟೆಯ ಬೆಲೆಯು ₹ 70. ಆದರೆ ಡೇರೆಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಬೇಕಾದ ಕ್ಯಾನ್‌ವಾಸ್ (canvas) ಬಟ್ಟೆಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಎತ್ತರ 8 m ಮತ್ತು ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 6 m ಇರುವ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಡೇರೆಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಬೇಕಾದ 3 m ಅಗಲದ ಟಾರ್ಪಾಲಿನ್‌ನ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು ಇರಬೇಕು? ಡೇರೆಯ ಅಂಚನ್ನು ಹೊಲಿಯಲು ಮತ್ತು ಕತ್ತರಿಸಿದಾಗ ವ್ಯರ್ಥವಾಗುವುದರಿಂದ 20 cm ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಟಾರ್ಪಾಲಿನ್ ಬೇಕಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ಉಪಯೋಗಿಸಿ)
6. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಗುಮ್ಮಟದ ಓರೆ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 25 m ಮತ್ತು 14 m ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ 100 m^2 ಗೆ ₹ 210ರಂತೆ ಅದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಸುಣ್ಣ ಬಳಿಯಲು ಆಗುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಒಬ್ಬ ವಿದೂಷಕನ ಟೋಪಿಯು ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 7 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 24 cm ಆದರೆ ಅಂತಹ 10 ಟೋಪಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಹಾಳೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಮರುಬಳಕೆ ಮಾಡಿದ ಕಾರ್ಡ್‌ಬೋರ್ಡ್‌ನಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ 50 ಟೊಳ್ಳಾದ ಶಂಕುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೊಂಡು ಬಸ್ ನಿಲ್ದಾಣವನ್ನು ರಸ್ತೆಯ ಉಳಿದ ಭಾಗದಿಂದ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 40 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 1 m ಇದೆ. ಅದರ ಹೊರ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಬಳಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ 1 m^2 ಗೆ ₹ 12 ವೆಚ್ಚವಾದರೆ, ಈ ಎಲ್ಲಾ ಶಂಕುಗಳಿಗೆ ಬಣ್ಣ ಬಳೆಯಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಮತ್ತು $\sqrt{1.04}$ = 1.02 ಎಂದು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.)

13.5 ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಗೋಳ ಎಂದರೇನು? ಇದು ವೃತ್ತದಂತೆ ಇದೆಯೇ? ನೀವು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಲ್ಲಿರಾ? ಹೌದು, ನೀವು ಎಳೆಯಬಹುದು, ಏಕೆಂದರೆ ವೃತ್ತವು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಆವೃತವಾದ ಆಕೃತಿ. ಅದರ ಮೇಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರ ದೂರದಲ್ಲಿವೆ. ಈ ಸ್ಥಿರದೂರವನ್ನು **ತ್ರಿಜ್ಯವೆಂದು** ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವನ್ನು **ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವೆಂದು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ನೀವು ಒಂದು ತಂತಿಯನ್ನು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅಂಟಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿದಂತೆ ಈ ವೃತ್ತವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿರಿ. ಈಗ ನೀವು ಹೊಸದಾದ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೀರಿ ಚಿತ್ರ 13.18 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ಅದು ಯಾವ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಹೋಲುತ್ತದೆ? ಒಂದು ಚೆಂಡಿನಾಕೃತಿಯೇ? ಹೌದು, ಇದನ್ನು **ಗೋಳ** (Sphere) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



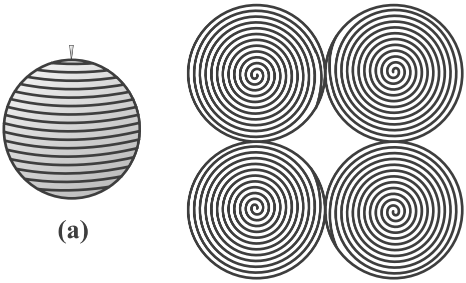
ಚಿತ್ರ 13.18

ವೃತ್ತವನ್ನು ತಿರುಗಿಸುವದರಿಂದ ಉಂಟಾದ ಗೋಳದಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು ಏನಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೀವು ಊಹಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ. ಅದು ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ **ಒಂದು ಗೋಳವು ಒಂದು ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿ (ಘನಾಕೃತಿ)ಯಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳು ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಈ ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ ದೂರವನ್ನು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.**

ಗಮನಿಸಿ : ಗೋಳವು ಒಂದು ಚೆಂಡಿನ ಮೇಲ್ಮೈಯಂತೆ ಇರುತ್ತದೆ. **'ಘನಗೋಳ'** ಎಂಬ ಶಬ್ದವನ್ನು ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರ ಮೇಲ್ಮೈ ಹೊಂದಿರುವ ಘನಾಕೃತಿಗೆ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ : ನೀವು ಒಂದು ಬುಗುರಿಯೊಂದಿಗೆ ಆಟವಾಡಿದ್ದೀರಾ? ಅಥವಾ ಯಾರಾದರೂ ಒಂದು ಬುಗುರಿಯೊಂದಿಗೆ ಆಟವಾಡುವುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿದ್ದೀರಾ? ಬುಗುರಿಗೆ ಚಾಟಿಯನ್ನು (ದಾರವನ್ನು) ಹೇಗೆ ಸುತ್ತುತ್ತಾರೆ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಅರಿವಿರಬೇಕು. ಈಗ ನಾವು ಒಂದು ರಬ್ಬರ್ ಚಂಡನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಮೊಳೆಯನ್ನು ಭದ್ರವಾಗಿ ಸಿಕ್ಕಿಸೋಣ. ಮೊಳೆಯ ಆಧಾರದಿಂದ ನಾವು ಚೆಂಡಿನ ಸುತ್ತಲು ದಾರವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಸುತ್ತೋಣ. ಗುಂಡು ಪಿನ್ನುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ದಾರವು ಜಾರದಂತೆ ಚೆಂಡಿನ ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ದಾರದಿಂದ ಸುತ್ತಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 13.19 a ಗಮನಿಸಿ) ದಾರದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭದ ಮತ್ತು ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತು ಮಾಡಿರಿ ಮತ್ತು ನಿಧಾನವಾಗಿ ದಾರವನ್ನು ಚಂಡಿನ ಮೇಲ್ಮೈಯಿಂದ ಬಿಚ್ಚಿರಿ.

ಈಗ ಶಿಕ್ಷಕರ ಸಹಾಯದಿಂದ, ನೀವು ಚೆಂಡಿನ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಇದರಿಂದ ನೀವು ಸುಲಭವಾಗಿ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು. ಆನಂತರದಲ್ಲಿ, ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ, ಚೆಂಡಿನ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ನಾಲ್ಕು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಚೆಂಡಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಸುತ್ತಿದ ದಾರವನ್ನು ಈ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಒಂದಾದ ನಂತರ ಒಂದನ್ನು ಸುತ್ತಿರಿ. [ಚಿತ್ರ 13.19 (b) ಗಮನಿಸಿ]



ಚಿತ್ರ 13.19

ಇದರಿಂದ ನೀವು ಏನನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಯಿತು?

ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈಯ ಸುತ್ತಲು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಸುತ್ತಿದ್ದ ದಾರವನ್ನು, ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವ ನಾಲ್ಕು ವೃತ್ತದ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ, ದಾರ ಉಳಿಯದಂತೆ ಸುತ್ತಲಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ ಏನು ಅರ್ಥವಾಗುತ್ತದೆ?

ಇದು ಸೂಚಿಸುವುದೇನೆಂದರೆ, ತ್ರಿಜ್ಯ r ಇರುವ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ತ್ರಿಜ್ಯ r ಇರುವ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟು = $4 \times (\pi r^2)$

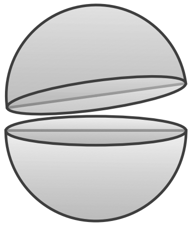
ಆದ್ದರಿಂದ, **ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $4\pi r^2$**

ಇಲ್ಲಿ r ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಮುಖಗಳನ್ನು ನೀವು ಕಾಣುತ್ತೀರಿ? ಅದು ಕೇವಲ ಒಂದು ವಕ್ರವಾಗಿರುವ ಮೇಲ್ಮೈ ಮುಖ.

ಈಗ ನಾವು ಒಂದು ಘನಗೋಳಾಕೃತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ಅದರ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಒಂದು ಸಮತಲದಿಂದ ಕತ್ತರಿಸೋಣ. ಈಗ ಗೋಳಕ್ಕೆ ಏನು ಆಗುತ್ತದೆ?

ಹೌದು, ಅದು ಎರಡು ಸಮಭಾಗವಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. [ಚಿತ್ರ 13.20 ಗಮನಿಸಿ] ಈ ಪ್ರತಿ ಅರ್ಧಭಾಗವನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ? ಅವುಗಳನ್ನು **ಅರ್ಧಗೋಳ** (hemisphere) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ? [ಏಕೆಂದರೆ hemi ಅಂದರೆ ಅರ್ಧ] ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಏನಾಗಿರುತ್ತದೆ? ಅದು ಎಷ್ಟು ಮುಖಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ? ಎರಡು ! ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ಮುಖ, ಇನ್ನೊಂದು ಸಮತಲ ಮುಖ (ಪಾದ).



ಚಿತ್ರ 13.20

ಅರ್ಧಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದರ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $\frac{1}{2} \times 4\pi r^2$

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಅರ್ಧಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $2\pi r^2$**

ಇಲ್ಲಿ, r ಗೋಳದ ಭಾಗವಾಗಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ

ಇಗ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಎರಡು ಮುಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $2\pi r^2 + \pi r^2$

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $3\pi r^2$**

ಉದಾಹರಣೆ 7 : ತ್ರಿಜ್ಯ 7 cm ಇರುವ ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ತ್ರಿಜ್ಯ 7 cm ಇರುವ ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ cm}^2$

$= 616 \text{ cm}^2$

ಉದಾಹರಣೆ 8 : 21 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ (i) ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ii) ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : 21 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 2772 \text{ cm}^2$$

(ii) ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 4158 \text{ cm}^2$

ಉದಾಹರಣೆ 9 : ವ್ಯಾಸವು 7 m ಇರುವ ಒಂದು ಟೊಳ್ಳಾದ ಗೋಳದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರ್ಕಸ್‌ನ ಬೈಕ್ ಸವಾರನು ತನ್ನ ಸಾಹಸ ಪ್ರದರ್ಶನಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ತೋರಿಸುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಬೈಕ್ ಸವಾರನಿಗೆ ಸವಾರಿಗಾಗಿ ದೊರಕುವ ಜಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸ = 7 m. ಆದ್ದರಿಂದ, ತ್ರಿಜ್ಯವು 3.5 m. ಬೈಕ್ ಸವಾರನಿಗೆ ಸವಾರಿಗಾಗಿ ದೊರಕುವ ಸ್ಥಳವು 'ಗೋಳದ' ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅದು, $4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ m}^2 = 154 \text{ m}^2$

ಉದಾಹರಣೆ 10: ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಗುಮ್ಮಟಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕಾಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 13.21 ಗಮನಿಸಿ). ಗುಮ್ಮಟದ ಪಾದದ ಪರಿಧಿಯು 17.6 m ಪ್ರತಿ 100 m^2 ಗೆ ₹ 5 ರಂತೆ ಇದಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

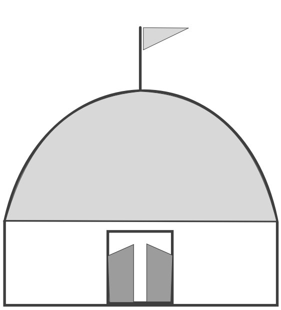
ಪರಿಹಾರ : ಗುಮ್ಮಟದ ದುಂಡಗಿರುವ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಮಾತ್ರ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ನಾವು ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ತಿಳಿಯಲು ಅರ್ಧಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈಗ ಗುಮ್ಮಟದ ಪರಿಧಿ = 17.6 m ಅಂದರೆ, 17.6 m = $2\pi r$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗುಮ್ಮಟದ ತ್ರಿಜ್ಯ $= r = 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22} \text{ m} = 2.8 \text{ m}$

ಗುಮ್ಮಟದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \text{ m}^2$$

$$= 49.28 \text{ m}^2$$



ಚಿತ್ರ 13.21

ಈಗ, 100 cm^2 ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ = ₹ 5

1 m^2 ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ = ₹ 500

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗುಮ್ಮಟಕ್ಕೆ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ = ₹ 500 × 49.28

= ₹ 24,640

ಅಭ್ಯಾಸ 13.4

π ಗೆ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡದೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) 10.5 cm (ii) 5.6 cm (iii) 14 cm

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) 14 cm (ii) 21 cm (iii) 3.5 m

3. ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 10 cm ಇದೆ. ಅದರ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

4. ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರದ ಬಲೂನ್‌ಗೆ ಗಾಳಿಯನ್ನು ತುಂಬಿದಾಗ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 7 cm ದಿಂದ 14 cm ಗೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಬಲೂನ್‌ನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಹಿತ್ತಾಳೆಯಿಂದ ಮಾಡಿದ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದ ಪಾತ್ರೆಯ ಒಳ ವ್ಯಾಸವು 10.5 cm ಆಗಿದೆ. ಪಾತ್ರೆಯ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಲಾಯಿಯನ್ನು ಹಾಕಿಸಲು ಪ್ರತಿ 100 cm^2 ಗೆ ₹ 16 ರಂತೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 154 cm^2 ಆದರೆ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಚಂದ್ರನ ವ್ಯಾಸವು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಭೂಮಿಯ ವ್ಯಾಸದ ನಾಲ್ಕನೇ ಒಂದರಷ್ಟಿದೆ. ಅವುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

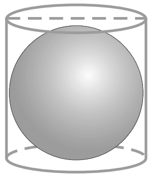
8. ಸ್ಟೀಲ್‌ನಿಂದ ಮಾಡಿದ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಪಾತ್ರೆಯ ದಪ್ಪವು 0.25 cm ಆಗಿದೆ. ಆ ಪಾತ್ರೆಯ ಒಳತ್ರಿಜ್ಯವು 5 cm. ಅದರ ಹೊರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ***r*** ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಗೋಳವನ್ನು ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್, ಸರಿಯಾಗಿ ಆವರಿಸಿಕೊಂಡಿದೆ. [ಚಿತ್ರ 13.22 ಗಮನಿಸಿ]

   (i) ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

   (ii) ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

   (iii) (i) & (ii) ರಲ್ಲಿ ಬಂದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 13.22

13.6 ಒಂದು ಆಯತಘನದ ಘನಫಲ

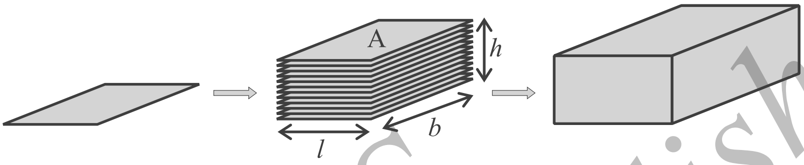
ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಕೃತಿಗಳ (ವಸ್ತುಗಳ) ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಿಮ್ಮ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಘನವಸ್ತುಗಳು ಅವಕಾಶವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಆಕ್ರಮಿಸಿಕೊಂಡ ಈ ಅವಕಾಶದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಆ ವಸ್ತುವಿನ **ಘನಫಲ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಗಮನಿಸಿ : ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದು ಆಕ್ರಮಿಸುವ ಅವಕಾಶದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ವಸ್ತುವಿನ **ಘನಫಲ** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಸ್ತುವು ಟೊಳ್ಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಒಳಭಾಗವು ಖಾಲಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಗಾಳಿಯಿಂದ ಅಥವಾ ಸಂಗ್ರಾಹಕದ ಆಕಾರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದಾದ ದ್ರವದಿಂದ ತುಂಬುವಂತಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದಾದ, ವಸ್ತುವಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಆ **ಸಂಗ್ರಾಹಕದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ವಸ್ತುವಿನ ಘನಫಲವು, ಅದು ಆಕ್ರಮಿಸುವ ಅವಕಾಶದ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಶೇಖರಿಸಬಹುದಾದ ವಸ್ತುವಿನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಹೀಗಾಗಿ, ಎರಡೂ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಏಕಮಾನವು **"ಘನಮಾನ"** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಆಯತಘನದ ಘನಫಲವೆಂಬುದನ್ನು ಮಾತನಾಡಿದಾಗ, ನಾವು ಆಯತಘನವು ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿ ಆಕ್ರಮಿಸಿದ ಪರಿಮಾಣದ ಅಳತೆ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು.

ಮುಂದುವರೆದು, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಅಥವಾ ಘನಫಲವು ಒಂದು ಕ್ಷೇತ್ರದ ಪರಿಮಾಣದ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ. ಹೀಗಾಗಿ ನಿಖರವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ, ನಾವು ಗೋಳಾಕಾರದ ಕ್ಷೇತ್ರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಅಥವಾ ಆಯತಘನಾಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಘನಫಲ ಅಥವಾ ಗೋಳಾಕಾರದ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಘನಫಲ ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

ನಾವು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ, ಆಯತಘನ ಅಥವಾ ಗೋಳದ ಘನಫಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಎಂದಾಗ ಅದು ಕೇವಲ ಅವುಗಳ ಸೀಮಾರೇಖೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಸೂಚಿಸಿದರೂ, ಸರಳತೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಆ ರೀತಿ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 13.23

ಚಿತ್ರ 13.23 ಗಮನಿಸಿ. ಪ್ರತಿ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು A ಆಗಿರಲಿ, ಆಯತಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಒಂದರಂತೆ ಎತ್ತರ h ವರೆಗೆ ಜೋಡಿಸಿದೆ ಮತ್ತು ಆಯತಘನದ ಘನಫಲವು V ಎಂದಿರಲಿ. ನೀವು V, A ಮತ್ತು h ಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವು ಏನಿರಬಹುದು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದೇ?

ಪ್ರತಿ ಆಯತ ಆವರಿಸಿದ ಸಮತಲದ ಕ್ಷೇತ್ರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ × ಎತ್ತರ

= ಆಯತಘನದಿಂದ ಅವಕಾಶವನ್ನು ಆವರಿಸಿದ ಪರಿಮಾಣ

ಆದ್ದರಿಂದ, ನಮಗೆ $A \times h = V$

ಅಂದರೆ, **ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲ = ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ × ಎತ್ತರ = ಉದ್ದ × ಅಗಲ × ಎತ್ತರ**

ಅಥವಾ $l \times b \times h,$

ಇಲ್ಲಿ l, b ಮತ್ತು h ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಆಯತಘನದ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಗಮನಿಸಿ : ನಾವು ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿನ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಪರಿಮಾಣ, ಅಂದರೆ ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿ ಘನವು ಆಕ್ರಮಿಸಿದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಅಳೆಯುವಾಗ, ನಾವು ಅದರಲ್ಲಿ ನಿಖರವಾಗಿ ಸೇರಿದ ಏಕಮಾನ ಬಾಹುವುಳ್ಳ ಘನಗಳನ್ನು ಎಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಘನಫಲವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವ ಏಕಮಾನವು ಘನಮಾನವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಘನದ ಘನಫಲ = ಅಂಚು × ಅಂಚು × ಅಂಚು = a^3**

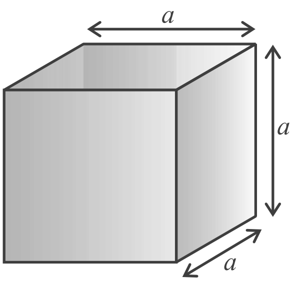
ಇಲ್ಲಿ 'a' ಯು ಘನದ ಅಂಚು. [ಚಿತ್ರ 13.24 ಗಮನಿಸಿ]

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಘನದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದವು 12 cm ಇದ್ದರೆ,

ಘನದ ಘನಫಲವು = $12 \times 12 \times 12$ cm^3

= 1728 cm^3

ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈಗ ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದನ್ನು ವಿವರಿಸೋಣ.



ಚಿತ್ರ 13.24

ಉದಾಹರಣೆ 11 : ಉದ್ದ 10 m ಇರುವ ಒಂದು ಗೋಡೆಯನ್ನು ಮೈದಾನದಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಬೇಕಾಗಿದೆ. ಗೋಡೆಯ ಎತ್ತರ 4 m ಮತ್ತು ಅದರ ದಪ್ಪವು 24 cm ಆಗಿದೆ. ಈ ಗೋಡೆಯನ್ನು 24 cm × 12 cm × 8 cm ಅಳತೆಯ ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳಿಂದ ಕಟ್ಟಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, ಎಷ್ಟು ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಬೇಕಾಗಿವೆ?

ಪರಿಹಾರ : ಗೋಡೆಯು ಆವರಿಸುವ ಅವಕಾಶವನ್ನು ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳು ತುಂಬುತ್ತವೆ. ಈಗ ನಾವು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಗೋಡೆಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, ಉದ್ದ = 10 m = 1000 cm

ದಪ್ಪ = 24 cm

ಎತ್ತರ = 4 m = 400 cm

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಡೆಯ ಘನಫಲ = ಉದ್ದ × ಅಗಲ × ಎತ್ತರ

$= 1000 \times 24 \times 400 \text{ cm}^3$

ಈಗ, ಪ್ರತಿ ಇಟ್ಟಿಗೆಯು ಒಂದು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿದೆ.

ಅದರ ಉದ್ದ = 24 cm, ಅಗಲ = 12 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ = 8 cm

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರತಿ ಇಟ್ಟಿಗೆಯ ಘನಫಲ = ಉದ್ದ × ಅಗಲ × ಎತ್ತರ

$= 24 \times 12 \times 8 \text{ cm}^3$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೇಕಾಗುವ ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $\dfrac{\text{ಗೋಡೆಯ ಘನಫಲ}}{\text{ಪ್ರತಿ ಇಟ್ಟಿಗೆಯ ಘನಫಲ}}$

$$= \frac{1000 \times 24 \times 400}{24 \times 12 \times 8}$$

$= 4166.6$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಡೆಗೆ ಬೇಕಾದ ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4167

ಉದಾಹರಣೆ 12 : ಘನಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಆಟಿಕೆಗಳೊಂದಿಗೆ (building blocks) ಆಡುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಮಗು. ಚಿತ್ರ 13.25 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಕಟ್ಟುತ್ತಾಳೆ. ಪ್ರತಿ ಘನದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವು 3 cm ಇದ್ದರೆ. ಮಗು ಕಟ್ಟಿದ ಆಕೃತಿಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಪ್ರತಿ ಘನದ ಘನಫಲ = ಬಾಹು × ಬಾಹು × ಬಾಹು

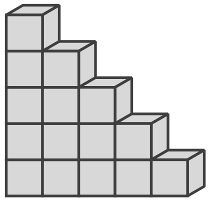
$= 3 \times 3 \times 3 \text{ cm}^3$

$= 27 \text{ cm}^3$

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಘನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 15

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆಕೃತಿಯ ಘನಫಲ = $27 \times 15 \text{ cm}^3$

$= 405 \text{ cm}^3$



ಚಿತ್ರ 13.25

ಅಭ್ಯಾಸ 13.5

1. ಒಂದು ಕಡ್ಡಿಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಅಳತೆಯು 4 cm × 2.5 cm × 1.5 cm ಇದೆ. ಇಂತಹ 12 ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಿರುವ ಒಂದು ಪೊಟ್ಟಣದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಆಯತ ಘನಾಕಾರದ ಒಂದು ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯು 6 m ಉದ್ದ, 5 m ಅಗಲ ಮತ್ತು 4.5 m ಆಳವಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ್ ನೀರು ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ? ($1 \text{ m}^3 = 1000\ l$)
3. ಆಯತ ಘನಾಕಾರದ ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯು 10 m ಉದ್ದ ಮತ್ತು 8 m ಅಗಲವಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ 380 ಘನಮೀಟರ್ ದ್ರವವನ್ನು ತುಂಬಲು ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟಿರಬೇಕು?
4. 8 m ಉದ್ದ, 6 m ಅಗಲ ಮತ್ತು 3 m ಆಳವಿರುವ ಆಯತಘನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಗುಂಡಿಯನ್ನು ಅಗೆಯಲು ಪ್ರತಿ m^3 ₹ 30 ರಂತೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ ಎಷ್ಟು?
5. ಆಯತ ಘನಾಕಾರದ ಒಂದು ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವು 50,000 ಲೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಳವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 10 m ಮತ್ತು 2.5 m ಆದರೆ ಅದರ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು 4000 ಇದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೂ ಒಂದು ದಿನಕ್ಕೆ 150 ಲೀಟರ್ ನೀರು ಬೇಕು. ಹಳ್ಳಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ತೊಟ್ಟಿಯ ಅಳತೆಯು 20 m × 15 m × 6 m ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ನೀರು ಎಷ್ಟು ದಿನಕ್ಕೆ ಸಾಕಾಗುತ್ತದೆ?
7. ಒಂದು ಗೋದಾಮಿನ ಅಳತೆಯು 40 m × 25 m × 15 m ಇದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ 1.5 m × 1.25 m × 0.5 m ಅಳತೆಯಿರುವ ಗರಿಷ್ಠ ಎಷ್ಟು ಮರದ ಕಪಾಟುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಬಹುದು.
8. ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 12 cm ಇರುವ ಘನವೊಂದನ್ನು ಸಮಗಾತ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎಂಟು ಘನಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿದೆ. ಈ ಹೊಸ ಘನದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವೇನು? ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. ಆಳ 3 m ಮತ್ತು 40 m ಅಗಲವಿರುವ ಒಂದು ನದಿಯು ಪ್ರತಿ ಗಂಟೆಗೆ 2 ಕಿಲೋಮೀಟರ್ ವೇಗದಿಂದ ಹರಿಯುತ್ತದೆ. ಒಂದು ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ, ಸಮುದ್ರಕ್ಕೆ ಹರಿಯುವ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣ ಎಷ್ಟು?

13.7 ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲ

ಆಯತಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಒಂದೇ ಅಳತೆಯ ಆಯತಗಳಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಿದ ಹಾಗೆಯೇ, ನಾವು ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ್ನು ಒಂದೇ ಅಳತೆಯ ವೃತ್ತಗಳಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದು. ಆಯತಘನಾಕೃತಿಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ತರ್ಕವನ್ನು ಬಳಸಿ ನಾವು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಘನಫಲ = ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ × ಎತ್ತರ

= ವೃತಾಕಾರದ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ × ಎತ್ತರ

= $\pi r^2 h$

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲ = $\pi r^2 h$**

ಇಲ್ಲಿ r ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು h ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 13 : ಗುಡಿಯ ಕಂಬಗಳು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇವೆ. [ಚಿತ್ರ 13.26 ಗಮನಿಸಿ] ಪ್ರತಿ ಕಂಬಗಳ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 20 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 10 m ಇದ್ದರೆ, ಇಂತಹ 14 ಕಂಬಗಳನ್ನು ಕಟ್ಟಲು ಬೇಕಾದ ಕಾಂಕ್ರೀಟ್ ಮಿಶ್ರಣದ ಪ್ರಮಾಣ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ : ಕಾಂಕ್ರೀಟ್ ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕಟ್ಟಿದ ಕಂಬಗಳು ಕಂಬದಲ್ಲಿನ ಸಂಪೂರ್ಣ ಅವಕಾಶವನ್ನು

ಆಕ್ರಮಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 20 cm

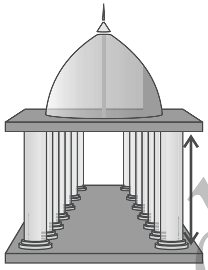
ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಕಂಬದ ಎತ್ತರ = 10 m = 1000 cm

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರತಿ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲ $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 1000 \text{ cm}^3$

$= \frac{8800000}{7} \text{ cm}^3$

$= \frac{8.8}{7} \text{ m}^3 \ [\because 1000000 \text{ cm}^3 = 1\text{m}^3]$



ಚಿತ್ರ 13.26

ಆದ್ದರಿಂದ, 14 ಕಂಬಗಳ ಘನಫಲ = ಪ್ರತಿ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲ × 14

$= \frac{8.8}{7} \times 14 \text{ m}^3$

$= 17.6 \text{ m}^3$

ಆದ್ದರಿಂದ, 14 ಕಂಬಗಳಿಗೆ 17.6 m^3 ನಷ್ಟು ಕಾಂಕ್ರೀಟ್ ಮಿಶ್ರಣ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 14 : ರಂಜ಼ಾನ್ ಮೇಳದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಆಹಾರದ ಅಂಗಡಿಯವನು 15 cm ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಹೊಂದಿರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ದೊಡ್ಡದಾದ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ 32 cm ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣಿನ ರಸವನ್ನು ತುಂಬಿಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ. ಇದನ್ನು 3 cm ತ್ರಿಜ್ಯ ಇರುವ ಸಣ್ಣ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಲೋಟದಲ್ಲಿ 8 cm ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ತುಂಬಿ ಪ್ರತಿ ಲೋಟಕ್ಕೆ ₹ 3 ರಂತೆ ಮಾರಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಹಣ್ಣಿನ ರಸ ಮಾರಿದ ನಂತರ ಅಂಗಡಿಯವನಿಗೆ ದೊರೆಯುವ ಹಣವು ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ : ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಹಣ್ಣಿನ ರಸದ ಘನಫಲ

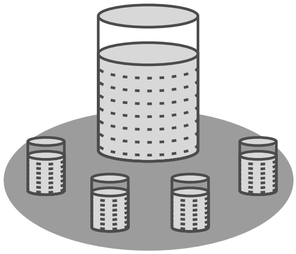
= ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಪಾತ್ರೆಯ ಘನಫಲ

$= \pi R^2 H$

(ಇಲ್ಲಿ R ಮತ್ತು H ಗಳನ್ನು ಪಾತ್ರೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ಎಂದು ಕ್ರಮವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ)

$= \pi \times 15 \times 15 \times 32 \text{ cm}^3$

ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ, ಪ್ರತಿ ಲೋಟದಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ಹಣ್ಣಿನ ರಸದ ಘನಫಲ $= \pi r^2 h$



ಚಿತ್ರ 13.27

(ಇಲ್ಲಿ r ಮತ್ತು h ಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ ಲೋಟದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ಎಂದು ಕ್ರಮವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ)

$= \pi \times 3 \times 3 \times 8 \text{ cm}^3$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮಾರಿದ ಹಣ್ಣಿನ ರಸದ ಲೋಟಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= \frac{\text{ಪಾತ್ರೆಯ ಘನಫಲ}}{\text{ಪ್ರತಿಲೋಟದ ಘನಫಲ}}$

$= \frac{\pi \times 15 \times 15 \times 32}{\pi \times 3 \times 3 \times 8}$

$= 100$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಂಗಡಿಯವನಿಗೆ ದೊರೆತ ಹಣ = ₹ 3 × 100

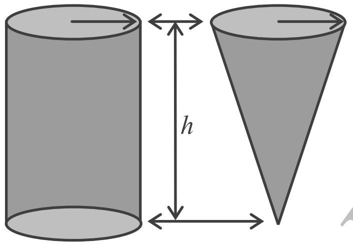
= ₹ 300

ಅಭ್ಯಾಸ 13.6

[π ನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡದೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ.]

1. ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಪಾತ್ರೆಯ ಪಾದದ ಪರಿಧಿಯು 132cm ಮತ್ತು ಅದರ ಎತ್ತರ 25cm. ಇದರಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಲೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($1000\ cm^3 = 1l$)
2. ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಕಟ್ಟಿಗೆಯ ಕೊಳವೆಯ ಒಳವ್ಯಾಸವು 24 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಹೊರವ್ಯಾಸವು 28 cm. ಕೊಳವೆಯ ಉದ್ದವು 35 cm ಆಗಿ, $1\ cm^3$ ಕಟ್ಟಿಗೆಯು 0.6 g ರ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಕೊಳವೆಯ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ತಂಪು ಪಾನೀಯವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಎರಡು ರೀತಿಯ ಪೊಟ್ಟಣಗಳಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.
   (i) ಉದ್ದ 5 cm, ಅಗಲ 4 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 15 cm. ಇರುವ ಆಯತಾಕಾರದ ಪಾದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಲೋಹದ ಡಬ್ಬದಲ್ಲಿ,
   (ii) ಅದರ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 7 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 10 cm ಇರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದ ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ಲಾಸ್ಟಿಕ್ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ, ಯಾವುದು ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ?
4. ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $94.2\ cm^2$ ಮತ್ತು ಅದರ ಎತ್ತರವು 5 cm ಇದೆ.
   (i) ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ
   (ii) ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ಉಪಯೋಗಿಸಿ)
5. 10 m ಆಳವಿರುವ ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಪಾತ್ರೆಯ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ಆದ ಖರ್ಚು ₹ 2200. ಅದಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚುವ ದರವು ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 20 ಆದರೆ
   (i) ಪಾತ್ರೆಯ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
   (ii) ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು
   (iii) ಪಾತ್ರೆಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. 1 m ಎತ್ತರ ಇರುವ ಮುಚ್ಚಿದ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಪಾತ್ರೆಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವು 15.4 ಲೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಈ ಸಿಲಿಂಡರನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಚದರ ಮೀಟರ್‌ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲ್ (ಸೀಸದ ಕಡ್ಡಿ) ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಕಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಅದರ ಮಧ್ಯದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಘನ ಗ್ರಾಫೈಟ್ ಹೊಂದಿದೆ. ಸೀಸದ ಕಡ್ಡಿಯ ವ್ಯಾಸವು 7 mm ಮತ್ತು ಗ್ರಾಫೈಟ್ ವ್ಯಾಸವು 1 mm ಆಗಿದೆ. ಸೀಸದ ಕಡ್ಡಿಯ ಉದ್ದವು 14 cm ಆದರೆ ಕಟ್ಟಿಗೆ ಮತ್ತು ಗ್ರಾಫೈಟ್‌ಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಆಸ್ಪತ್ರೆಯ ಒಬ್ಬ ರೋಗಿಗೆ ಪ್ರತಿದಿನವೂ 7 cm ವ್ಯಾಸ ಹೊಂದಿರುವ ಬಟ್ಟಲಿನಲ್ಲಿ ಸೂಪನ್ನು ನೀಡುತ್ತಾರೆ. ಈ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಸೂಪನ್ನು 4 cm ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ತುಂಬಿ ನೀಡಿದರೆ ಪ್ರತಿದಿನವೂ ಆಸ್ಪತ್ರೆಯ 250 ರೋಗಿಗಳಿಗೆ ತಯಾರಿಸಬೇಕಾದ ಸೂಪನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ.

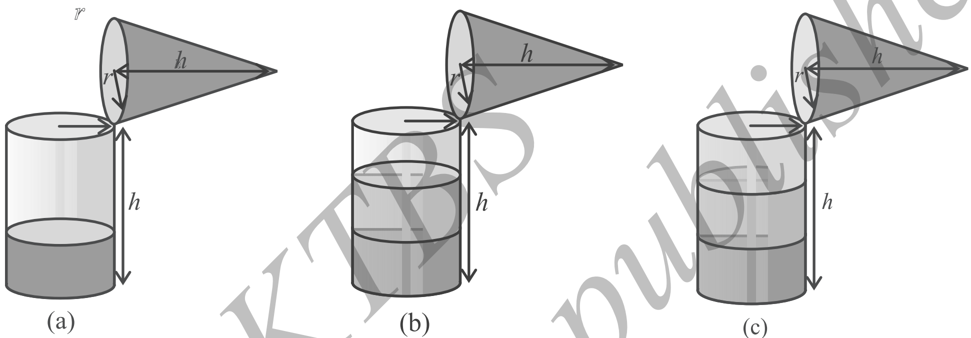
13.8 ಒಂದು ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ



ಚಿತ್ರ 13.28

ಚಿತ್ರ 13.28ರಲ್ಲಿ, ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಮತ್ತು ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವು ಒಂದೇ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುತ್ತಿದ್ದೀರಾ ?

ಚಟುವಟಿಕೆ : ಒಂದೇ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಟೊಳ್ಳಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಮತ್ತು ಟೊಳ್ಳಾದ ಶಂಕುವನ್ನು ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. [ಚಿತ್ರ 13.28 ಗಮನಿಸಿ] ನಂತರ ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವು ಏನಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಸಹಕರಿಸುವ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡೋಣ.



ಚಿತ್ರ 13.29

ಅದನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ.

ಶಂಕುವಿನಲ್ಲಿ ಅದರ ತುದಿಯವರೆಗೆ ಮರಳನ್ನು ತುಂಬಿ, ಅದನ್ನು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಾಕಿರಿ. ಅದು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಸ್ವಲ್ಪ ಭಾಗವನ್ನು ಮಾತ್ರ ತುಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತೀರಿ. [ಚಿತ್ರ 13.29 (a) ಗಮನಿಸಿ.]

ಮತ್ತೆ ನಾವು ಶಂಕುವಿನ ತುದಿಯವರೆಗೆ ಮರಳನ್ನು ತುಂಬಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದಾಗಲೂ ಸಹ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬದಿರುವುದನ್ನು ನೋಡುತ್ತೀರಿ. [ಚಿತ್ರ 13.29 (b)]

ಶಂಕುವನ್ನು ಮರಳಿನಿಂದ ಮೂರನೆಯ ಬಾರಿ ತುಂಬಿ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಾಕಿ ಖಾಲಿ ಮಾಡಿದಾಗ, ಸಿಲಿಂಡರ್ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುದಿಯವರೆಗೆ ತುಂಬಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ [ಚಿತ್ರ 13.29 (c)]

ಇದರಿಂದ, ನಾವು ಯಾವುದೇ ಅನುಮಾನವಿಲ್ಲದಂತೆ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲದ ಮೂರರಷ್ಟು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಶಂಕುವಿನ ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ಒಂದೇ ಆಗಿರಬೇಕು. ಇದರ ಅರ್ಥವು ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವು ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲದ ಮೂರನೇ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\boxed{\textbf{ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

ಇಲ್ಲಿ r ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು h ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 15 : ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 21 cm ಮತ್ತು 28 cm ಆಗಿದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $l^2 = r^2 + h^2$ ದಿಂದ

$$r = \sqrt{l^2 - h^2}$$

$$= \sqrt{28^2 - 21^2} \text{ cm} = 7\sqrt{7} \text{ cm}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21 \text{ cm}^3$$

$$= 7546 \text{ cm}^3$$

ಉದಾಹರಣೆ 16 : ಮೋನಿಕಾಳ ಹತ್ತಿರ 551 m^2 ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಕ್ಯಾನ್ವಾಸ್ ಬಟ್ಟೆ ಇದೆ. ಅವಳು ಅದನ್ನು 7 m ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಟೆಂಟ್ ಮಾಡಲು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಟೆಂಟನ್ನು ಹೊಲೆಯಲು ಬಿಡುವ ಅಂಚು ಮತ್ತು ಕತ್ತರಿಸುವುದರಿಂದ ವ್ಯರ್ಥವಾಗಿರುವ ಬಟ್ಟೆಯು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ 1 m^2 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಟೆಂಟಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಕ್ಯಾನ್ವಾಸ್‌ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 551 m^2 ಮತ್ತು ವ್ಯರ್ಥವಾದ ಕ್ಯಾನ್ವಾಸ್ ಬಟ್ಟೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 1 m^2
ಆದರಿಂದ, ಟೆಂಟ್ ಮಾಡಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಕ್ಯಾನ್ವಾಸ = $(551 - 1)$ m^2

$$= 550 \text{ m}^2$$

ಈಗ ಟೆಂಟಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 550 m^2 ಮತ್ತು ಬೇಕಾದ ಟೆಂಟಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 7 m

ಟೆಂಟ್ ಕೇವಲ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ. (ಟೆಂಟಿನ ನೆಲವನ್ನು ಕ್ಯಾನ್ವಾಸದಿಂದ ಹೊದಿಸುವುದಿಲ್ಲ.)

ಆದ್ದರಿಂದ, ಟೆಂಟಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 550 m^2

ಅಂದರೆ . $\pi rl = 550$

$$\frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$$

$$l = \frac{550}{22} \text{ m} = 25 \text{ m}$$

ಈಗ $l^2 = r^2 + h^2$

ಆದರಿಂದ, $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

$$= \sqrt{25^2 - 7^2}\, m = \sqrt{625 - 49}\, m = \sqrt{576}\, m$$

$$= 24 \text{ m}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಟೆಂಟಿನ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24 \text{ m}^3$$

$$= 1232 \text{ m}^3$$

ಅಭ್ಯಾಸ 13.7

[π ನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡದೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ.]

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) ತ್ರಿಜ್ಯ 6 cm, ಎತ್ತರ 7 cm (ii) ತ್ರಿಜ್ಯ 3.5 cm ಎತ್ತರ 12 cm

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಪಾತ್ರೆಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಲೀಟರಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) ತ್ರಿಜ್ಯ 7 cm, ಓರೆ ಎತ್ತರ 25 cm (ii) ಎತ್ತರ 12 cm ಓರೆ ಎತ್ತರ 13 cm

3. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 15 cm ಇದೆ. ಅದರ ಘನಫಲವು 1570 cm^3 ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

4. ಎತ್ತರ 9 ಇರುವ ನೇರವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವು 48π cm^3 ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಒಂದು ಹೊಂಡದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ವ್ಯಾಸ 3.5 m, ಆಳ 12 m ಇದೆ. ಅದರ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕಿಲೋಲೀಟರ್‌ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವು 9856 cm^3 ಇದೆ. ಅದರ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 28 cm ಆದರೆ

   (i) ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ

   (ii) ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ

   (iii) ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿನ ಬಾಹುಗಳು 5 cm, 12 cm ಮತ್ತು 13 cm ಇದೆ. ಇದನ್ನು 12 cm ಬಾಹುವಿನ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

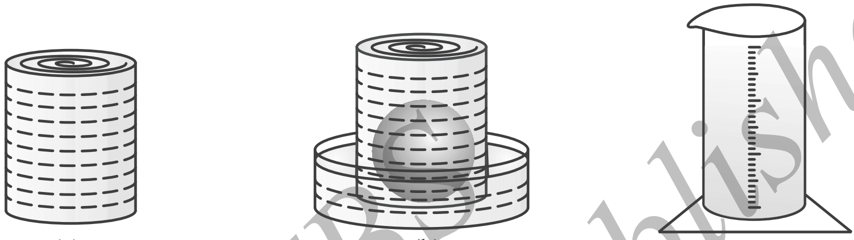
8. ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ 7 ರಲ್ಲಿನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು 5 cm ಉದ್ದದ ಬಾಹುವಿನ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಪ್ರಶ್ನೆ 7 ಮತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆ 8 ರಲ್ಲಿನ ಎರಡೂ ಘನಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಗೋಧಿಯ ರಾಶಿಯು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ವ್ಯಾಸ 10.5 m ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 3 m ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದನ್ನು ಮಳೆಯಿಂದ ರಕ್ಷಿಸಲು ಕ್ಯಾನ್ವಾಸ್ ಬಟ್ಟೆಯಿಂದ ಮಾಡಿದ ಬಟ್ಟೆಯನ್ನು ಹೊದಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾಗುವ ಕ್ಯಾನ್ವಾಸ್ ಬಟ್ಟೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13.9 ಗೋಳದ ಘನಫಲ

ಈಗ ನಾವು ಗೋಳದ ಘನಫಲವನ್ನು ಹೇಗೆ ಅಳತೆ ಮಾಡಬಹುದು ಎಂದು ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ಅಥವಾ ಮೂರು ಗೋಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಈ ಮೂರು ಗೋಳಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ ಒಂದರಂತೆ ಪ್ರತಿ ಗೋಳವನ್ನು ಹಾಕಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತಹ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಂಗ್ರಾಹಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಸಂಗ್ರಾಹಕವನ್ನೂ ಸಹ ಇಡಬಹುದಾದ ದೊಡ್ಡ ತೊಟ್ಟಿ (trough) ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ನಂತರದಲ್ಲಿ ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟಿರುವ ಸಂಗ್ರಾಹಕದ ಅಂಚಿನವರೆಗೂ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 13.30 (a) ಗಮನಿಸಿ].

ಈಗ, ನೀವು ಒಂದು ಗೋಳವನ್ನು ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟಿರುವ ಸಂಗ್ರಾಹಕದಲ್ಲಿ ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಹಾಕಿರಿ. ಸ್ವಲ್ಪ ನೀರು ಸಂಗ್ರಾಹಕದಿಂದ ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬೀಳುತ್ತದೆ. [ಚಿತ್ರ 13.30 (b) ಗಮನಿಸಿ] ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ನೀರನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಾಕಿರಿ. [ಅಂದರೆ, ಅಳತೆಯ ಗುರುತು ಹೊಂದಿರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಜಾರ್] ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಹರಿದು ಬಂದ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ [ಚಿತ್ರ 13.30 (c)] ಒಂದು ವೇಳೆ ಮುಳುಗಿಸಿದ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು r ಆಗಿರಲಿ. (ನೀವು ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಅಳೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು) ನಂತರ $\frac{4}{3}\pi r^3$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನಿಮಗೆ ಈ ಬೆಲೆಯು ಹೊರಕ್ಕೆ ಚೆಲ್ಲಿದ ನೀರಿನ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಸಮವಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತಿದೆಯೆ?



ಚಿತ್ರ 13.30

ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬೇರೆ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಗೋಳದೊಂದಿಗೆ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ R ಕಂಡುಹಿಡಿದು ನಂತರದಲ್ಲಿ $\frac{4}{3}\pi R^3$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಬೆಲೆಯು ಗೋಳವು ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದ (ಹೊರ ಚೆಲ್ಲಿದ) ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣದ ಅಳತೆಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದು ನಮಗೆ ಏನನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ? ಗೋಳದ ಘನಫಲವು ಗೋಳದಿಂದ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದ ನೀರಿನ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಪುನಃ ಪುನಃ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಗೋಳಗಳೊಂದಿಗೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಬರುವ ಫಲಿತಾಂಶವು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಗೋಳದ ಘನಫಲವು ತ್ರಿಜ್ಯದ ಘನದ $\frac{4}{3}\pi$ ರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಗೋಳದ ಘನಫಲ** $= \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi r^3}$

ಇಲ್ಲಿ r ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸತ್ತೀರಿ. ಆದರೆ ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಇದನ್ನು ನಿಜ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಅರ್ಧಗೋಳವು ಗೋಳದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುವುದರಿಂದ, ನೀವು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಬಹುದೇ? ಹೌದು ಅದು $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲ** $= \frac{2}{3}\pi r^3$

ಇಲ್ಲಿ r ಅರ್ಧಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟ ಪಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 17 : 11.2 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಗೋಳದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\text{ಬೇಕಾದ ಘನಫಲ} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 11.2\times 11.2\times 11.2 \text{ cm}^3$$

$$= 5887.32 \text{ cm}^3$$

ಉದಾಹರಣೆ 18 : ಲೋಹದಿಂದ ಮಾಡಿದ ಗೋಳಾಕಾರದ ಎಸೆತದ ಗುಂಡಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವು 4.9 cm ಇದೆ. ಲೋಹದ ಸಾಂದ್ರತೆಯು 7.8 g/cm^3 ಆದರೆ ಎಸೆತದ ಗುಂಡಿನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಎಸೆತದ ಗುಂಡು ಲೋಹದಿಂದ ಮಾಡಿದ ಘನಗೋಳವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು ಘನಫಲ ಮತ್ತು ಸಾಂದ್ರತೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ನಾವು ಗೋಳದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

$$\text{ಈಗ ಗೋಳದ ಘನಫಲ} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 4.9\times 4.9\times 4.9 \text{ cm}^3$$

$$= 493 \text{ cm}^3 \text{ (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)}$$

1 cm^3 ಗಾತ್ರದ ಲೋಹದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು 7.8 g ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎಸೆತದ ಗುಂಡಿನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ

$$= 7.8 \times 493 \text{ g}$$

$$= 3845.44 \text{ g}$$

$$= 3.85 \text{ kg (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)}$$

ಉದಾಹರಣೆ 19 : ಅರ್ಧಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಪಾತ್ರೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯ 3.5 cm. ಈ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ನೀರಿನ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯಬಹುದಾದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5\times 3.5 \text{ cm}^3$$

$$= 89.8 \text{ cm}^3$$

ಅಭ್ಯಾಸ 13.8

[π ನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡದೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ.]

1. (i) 7 cm (ii) 0.63 m ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ಗೋಳದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಘನಗೋಳಾಕಾರದ ಚೆಂಡು ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸುವ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) 28 cm (ii) 0.21 m

3. ಒಂದು ಲೋಹದ ಚೆಂಡಿನ ವ್ಯಾಸವು 4.2 cm ಇದೆ. ಲೋಹದ ಸಾಂದ್ರತೆಯು 8.9 g/cm^3 ಆದರೆ ಚೆಂಡಿನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಚಂದ್ರನ ವ್ಯಾಸವು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಭೂಮಿಯ ವ್ಯಾಸದ ನಾಲ್ಕನೇ ಒಂದರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಚಂದ್ರನ ಗಾತ್ರವು ಭೂಮಿಯ ಗಾತ್ರದ ಎಷ್ಟರ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ?

5. ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದ ಪಾತ್ರೆಯ ವ್ಯಾಸವು 10.5 cm ಆದರೆ ಅದು ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ್ ಹಾಲನ್ನು ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ?

6. ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದ ತೊಟ್ಟಿಯನ್ನು 1 cm ದಪ್ಪ ಇರುವ ಕಬ್ಬಿಣದ ಹಾಳೆಯಿಂದ ಮಾಡಿದೆ. ಅದರ ಒಳತ್ರಿಜ್ಯವು 1 m ಆದರೆ ತೊಟ್ಟಿಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಕಬ್ಬಿಣದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 154 cm^2 ಆದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ಗುಮ್ಮಟವು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಒಳಭಾಗಕ್ಕೆ ₹ 498.96 ವೆಚ್ಚದಲ್ಲಿ ಸುಣ್ಣ ಬಳಿದಿದೆ. ಸುಣ್ಣ ಬಳಿಯುವ ದರ ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 2.00 ಆದರೆ,

   (i) ಗುಮ್ಮಟದ ಒಳಭಾಗದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

   (ii) ಗುಮ್ಮಟದ ಒಳಭಾಗದ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ತ್ರಿಜ್ಯ r ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ S ಇರುವ 27 ಕಬ್ಬಿಣದ ಗೋಳಗಳನ್ನು ಕರಗಿಸಿ S^1 ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೊಂದಿರುವ ಹೊಸ ಗೋಳವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದೆ.

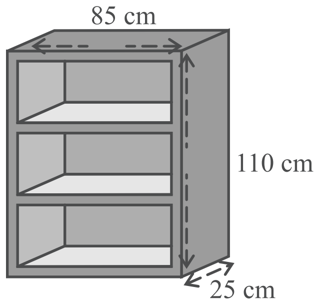
   (i) ಹೊಸ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ (r^1) ನ್ನು,

   (ii) S ಮತ್ತು S^1 ಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಔಷಧದ ಗುಳಿಗೆಯು ಗೋಳದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದ್ದು 3.5 mm ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಗುಳಿಗೆಯಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದಾದ ಔಷಧದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು mm^3 ಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

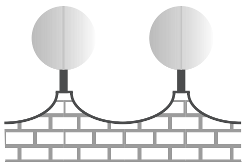
ಅಭ್ಯಾಸ 13.9 (ಐಚ್ಛಿಕ)*

1. ಮರದಿಂದ ಮಾಡಿದ ಪುಸ್ತಕದ ಕಪಾಟಿನ ಹೊರ ಅಳತೆಗಳು ಹೀಗಿವೆ: ಎತ್ತರ = 110 cm, ಆಳ = 25 cm, ಅಗಲ = 85 cm ಆಗಿದೆ [ಚಿತ್ರ 13.31 ಗಮನಿಸಿ]. ಎಲ್ಲಾ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಮರದ ಹಲಗೆಯು 5 cm ದಪ್ಪ ಇದೆ. ಅದರ ಹೊರಭಾಗವನ್ನು ನಯಗೊಳಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ ಹಾಗೂ ಅದರ ಒಳಭಾಗಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಯಗೊಳಿಸುವ ದರ ಪ್ರತಿ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ಗೆ 20 ಪೈಸೆ ಮತ್ತು ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚುವ ದರ ಪ್ರತಿ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ಗೆ 10 ಪೈಸೆ ಆದರೆ ಪುಸ್ತಕದ ಕಪಾಟಿನ ಮೇಲ್ಮೈಯನ್ನು ನಯಗೊಳಿಸಲು ಮತ್ತು ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ತಗಲುವ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 13.31

2. ಮನೆಯ ಮುಂದಿನ ಆವರಣ ಗೋಡೆಯನ್ನು 21 cm ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮರದ ಗೋಳದಿಂದ ಅಲಂಕರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ 13.22 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಸಣ್ಣ ಆಧಾರದಿಂದ ನಿಲ್ಲಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಂಥಹ ಎಂಟು ಗೋಳವನ್ನು ಈ ಉದ್ದೇಶಕ್ಕಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಗೆ ಬೆಳ್ಳಿಯ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಆಧಾರವು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದ್ದು 1.5 cm ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು 7 cm ಎತ್ತರವಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣವನ್ನು ಬಳಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಬೆಳ್ಳಿಯ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚುವ ದರ ಪ್ರತಿ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ಗೆ 25 ಪೈಸೆ ಮತ್ತು ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚುವ ದರ ಪ್ರತಿ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ಗೆ 5 ಪೈಸೆಯಂತೆ ಆದರೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.


ಚಿತ್ರ 13.32

3. ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸವನ್ನು 25% ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಎಷ್ಟು ಪ್ರತಿಶತ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ?

13.10 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ.

1. ಆಯತಘನದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $2(lb + bh + hl)$
2. ಘನದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $6a^2$
3. ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $2\pi r h$
4. ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $2\pi r (r + h)$
5. ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r l$
6. ಲಂಬ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\pi r l + \pi r^2 = \pi r (l + r)$
7. r ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = πr^2
8. ಅರ್ಧಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $2 \pi r^2$
9. ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $3 \pi r^2$
10. ಆಯತಾಕಾರ ಘನದ ಘನಫಲ = $l \times b \times h$
11. ಘನದ ಘನಫಲ = a^3
12. ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಘನಫಲ = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$
13. ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ = $\pi r^2 h$
14. r ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಗೋಳದ ಘನಫಲ = $\frac{4}{3} \pi r^3$
15. ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲ = $\frac{2}{3} \pi r^3$

(ಇಲ್ಲಿ l, b, h, a, r ಮುಂತಾದ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ)

3JLKZD

ಅಧ್ಯಾಯ – 14

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ

14.1 ಪೀಠಿಕೆ

ನಾವು ಪ್ರತಿನಿತ್ಯ ವಿವಿಧ ವಿಸ್ತೃತ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ನೈಜ ಸಂಗತಿಗಳು, ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಅಂಶಗಳು, ಕೋಷ್ಟಕಗಳು ಅಥವಾ ನಕ್ಷೆಗಳು, ಇತ್ಯಾದಿ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ನಮಗೆ ವಾರ್ತಾಪತ್ರಿಕೆಗಳು, ದೂರದರ್ಶನ, ನಿಯತಕಾಲಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ಇತರ ಸಂವಹನ ಮಾಧ್ಯಮಗಳು ಈ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸುತ್ತವೆ. ಇವು ಕ್ರಿಕೆಟ್‌ನ ಬ್ಯಾಟಿಂಗ್ ಅಥವಾ ಬೌಲಿಂಗ್ ಸರಾಸರಿ, ಒಂದು ಕಂಪೆನಿಯ ಲಾಭಾಂಶ, ನಗರಗಳ ತಾಪಮಾನಗಳು, ವಿವಿಧ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳ ಪಂಚವಾರ್ಷಿಕ ಯೋಜನೆಗಳ ಖರ್ಚುವೆಚ್ಚಗಳು, ಮತದಾನದ ಫಲಿತಾಂಶ ಇತ್ಯಾದಿಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರಬಹುದು. ಈ ನೈಜ ಸಂಗತಿಗಳ ಅಥವ ಅಂಶಗಳ, ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಅಥವಾ ಬೇರೆ ರೀತಿಯ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಉದ್ದೇಶದ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯನ್ನು "**ದತ್ತಾಂಶ**" ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ದತ್ತಾಂಶ ಪದವನ್ನು ಆಂಗ್ಲಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ **'Data'** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. **'Data'** ಎಂಬುದು ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಭಾಷೆಯ **'datam'** ಪದದ ಬಹುವಚನವಾಗಿದೆ. ನಿಮಗೆ ದತ್ತಾಂಶ ಎಂಬ ಪದವು ಹೊಸತೇನಲ್ಲ. ದತ್ತಾಂಶ ಮತ್ತು ದತ್ತಾಂಶ ನಿರ್ವಹಣೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

ನಮ್ಮ ಜಗತ್ತು ಹೆಚ್ಚೆಚ್ಚು ಮಾಹಿತಿ ಕೇಂದ್ರಿತವಾಗಿದೆ. ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದ ಪ್ರತಿ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಂದ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯುವುದನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ನಮಗೆ ಅನಿವಾರ್ಯವಾಗಿದೆ. ಈ ರೀತಿ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯುವುದನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವ ಗಣಿತದ ವಿಭಾಗವನ್ನು **ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ (Statistics)** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

'STATISTICS', ಪದವು ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಪದ **'Status'** ಪದದಿಂದ ವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿ ಹೊಂದಿದೆ. ಇದರ ಮೂಲ ಅರ್ಥ "**a (Political) State**", ಅಂದರೆ **ಒಂದು (ರಾಜಕೀಯ)ರಾಜ್ಯ.** ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವು ಜನಜೀವನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ರಾಜ್ಯಾಡಳಿತದ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಕ್ರಮೇಣ ಸರಳವಾಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸುವುದಾಗಿತ್ತು. ಕಾಲ ಬದಲಾವಣೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಹೆಚ್ಚಿದ್ದು, ಇದು ಕೇವಲ ಮಾಹಿತಿ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಸ್ತುತಿಯಾಗಿ ಉಳಿದಿಲ್ಲ. ದತ್ತಾಂಶ ವಿವರಣೆ ಮತ್ತು ನಿರ್ಧಾರಗಳ ಕೈಗೊಳ್ಳುವಿಕೆಯನ್ನೂ ಹೊಂದಿದೆ. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವು ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆ, ಕ್ರಮಬದ್ಧಜೋಡಣೆ, ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮತ್ತು ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ (Statistics) ಪದಕ್ಕೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅರ್ಥಗಳಿವೆ.

ಕೆಳಗಿನ ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

1. "ಭಾರತದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ" ಇದರ ಇತ್ತೀಚಿನ ಪ್ರತಿಯನ್ನು ನಾನು ಹೊಂದಬಹುದೇ.

2. ನಾನು 'ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ'ವನ್ನು ಕಲಿಯಲು ಇಚ್ಛಿಸಿದ್ದೇನೆ ಏಕೆಂದರೆ, ಅದು ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿದೆ.

ಮೊದಲ ವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವು ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ದತ್ತಾಂಶ ಎಂಬ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಬಹುವಚನ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಭಾರತದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಂಸ್ಥೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ವಿವಿಧ ರಾಜ್ಯಗಳ ಸಾಕ್ಷರತೆಯ ಪ್ರಮಾಣ ಇತ್ಯಾದಿ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳಬಹುದು. ಎರಡನೇ ವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಪದವು ಏಕವಚನ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದು, ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆ, ಪ್ರಸ್ತುತಿ, ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮತ್ತು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣ ತೀರ್ಮಾನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರ ಕುರಿತಾದ ವಿಷಯವೆಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಈ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

14.2 ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹ :–

ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಮೂಲಕ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಿಸುವಿಕೆ ಬಗ್ಗೆ ಅಭ್ಯಸಿಸೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 1 : ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ. ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಿಧದ ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣಾ ಕೆಲಸವನ್ನು ಸೂಚಿಸಿ.

(i) ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ 20 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರಗಳ ಅಳತೆ.

(ii) ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ತಿಂಗಳ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿದಿನ ಗೈರುಹಾಜರಾದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.

(iii) ನಿಮ್ಮ ಸಹಪಾಠಿಗಳ ಕುಟುಂಬದ ಸದಸ್ಯರ ಸಂಖ್ಯೆ.

(iv) ನಿಮ್ಮ ಶಾಲೆಯ ಸುತ್ತಮುತ್ತ ಇರುವ 15 ಗಿಡಗಳ ಎತ್ತರಗಳು.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಗ್ಗೂಡಿಸಿದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನವರು ಯಾವ ರೀತಿ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದರು?

(i) ಅವರು ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ, ಮನೆ ಅಥವಾ ವ್ಯಕ್ತಿಯನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸಿ ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆಯೇ?

(ii) ಅವರು ಶಾಲಾ ದಾಖಲೆಯಂತಹ ಮೂಲಗಳಿಂದ ಮಾಹಿತಿ ಪಡೆದರೇ?

ಮೊದಲ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಉದ್ದೇಶಕ್ಕಾಗಿ ಸಂಶೋಧಕನು ತನ್ನನ್ನು ತೊಡಗಿಸಿಕೊಂಡು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ/ನಿಯು ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ್ದರೆ ಈ ರೀತಿ ಪಡೆದ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು **'ಪ್ರಾಥಮಿಕ ದತ್ತಾಂಶ'** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಎರಡನೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಈ ಮೊದಲೇ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಮೂಲಗಳಿಂದ ಪಡೆದಿದ್ದು, ಈ ರೀತಿ ಪಡೆದ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು **'ದ್ವಿತೀಯಕ ದತ್ತಾಂಶ'** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೀತಿ ಇತರರು ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಾಗ ಅವುಗಳ ನೈಜತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಮುಂದುವರೆಯಬೇಕು.

ಈಗ ನೀವು ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುವ ಹಾಗೂ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮತ್ತು ದ್ವಿತೀಯಕ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಅರ್ಥೈಯಿಸಿಕೊಂಡಿರುವಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 14.1

1. ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನೀವು ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಮಾಡಬಹುದಾದ 5 ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿ.
2. ಪ್ರಶ್ನೆ 1 ರ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮತ್ತು ದ್ವಿತೀಯಕ ದತ್ತಾಂಶಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ.

14.3 ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಪ್ರಸ್ತುತಿ :

ಸಂಶೋಧಕನು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುವ ಕೆಲಸ ಮುಗಿದ ನಂತರ, ಅದನ್ನು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮೇಲ್ನೋಟಕ್ಕೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಅರ್ಥವಾಗುವಂತೆ, ಮುಖ್ಯ ಲಕ್ಷಣಗಳು ತಿಳಿಯುವಂತೆ ಪ್ರಸ್ತುತ ಪಡಿಸುವುದು ಮುಖ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸುವುದನ್ನು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1. ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

55	36	95	73	60	42	25	78	75	62

ಈ ರೂಪದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕಚ್ಚಾದತ್ತಾಂಶಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವಾಗ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಅಂಕಗಳನ್ನು ನೋಡಿದ ತಕ್ಷಣ ಗುರುತಿಸುವಿರಾ? ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಸಮಯ ಬೇಕಾಯಿತಲ್ಲವೇ? ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ (ಏರಿಕೆ) ಅಥವಾ ಅವರೋಹಣ (ಇಳಿಕೆ) ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಿದ್ದರೆ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಬೇಗನೆ ಗ್ರಹಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ? ಆದ್ದರಿಂದ ಈಗ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸೋಣ.

25	36	42	55	60	62	73	75	78	95

ಈಗ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕನಿಷ್ಠ ಅಂಕ 25 ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಅಂಕ 95 ಎಂದು ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ದತ್ತಾಂಶಗಳ **ವ್ಯಾಪ್ತಿ (Range)** ಎನ್ನುವರು. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು, 95 – 25 = 70.

ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಅವಲೋಕನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಿದ್ದಾಗ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಅಥವಾ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಯು ಹೆಚ್ಚು ಸಮಯ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂತಹ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಮುಂದಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2. ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 9 ನೇ ತರಗತಿಯ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು (100 ಅಂಕಗಳಿಗೆ) ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು ಈ ರೀತಿ ಇವೆ.

10	20	36	92	95	40	50	56	60	70
92	88	80	70	72	70	36	40	36	40
92	40	50	50	56	60	70	60	60	88

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕವನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಆ ಅಂಕದ ಆವೃತ್ತಿ (frequency) ಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಇಲ್ಲಿ 70 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದ 4 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದಾರೆ ಆದ್ದರಿಂದ 70 ಅಂಕದ ಆವೃತ್ತಿ 4. ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಲು ನಾವು ಮುಂದಿನಂತೆ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 14.1

ಅಂಕಗಳು (x)	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಆವೃತ್ತಿ) (f)
10	1
20	1
36	3
40	4
50	3
56	2
60	4
70	4
72	1
80	1
88	2
92	3
95	1
ಒಟ್ಟು	**30**

ಕೋಷ್ಟಕ 14.1ಗಳನ್ನು **ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ** ಅಥವಾ ಸರಳವಾಗಿ **ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ನೀವು ಈ ಕೋಷ್ಠಕವನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು **ತಾಳೆ ಗುರುತು**ಗಳನ್ನು ಸಹ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ವನಮಹೋತ್ಸವದಂದು 100 ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ತಲಾ 100 ಗಿಡಗಳನ್ನು ನೆಡಲಾಯಿತು. ಒಂದು ತಿಂಗಳ ನಂತರ ಪ್ರತಿ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಬದುಕಿ ಉಳಿದ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಲಾಯಿತು.

95	67	28	32	65	65	69	33	98	96
76	42	32	38	42	40	40	69	95	92
75	83	76	83	85	62	37	65	63	42
89	65	73	81	49	52	64	76	83	92
93	68	52	79	81	83	59	82	75	82
86	90	44	62	31	36	38	42	39	83
87	56	58	23	35	76	83	85	30	68
69	83	86	43	45	39	83	75	66	83
92	75	89	66	91	27	88	89	93	42
53	69	90	55	66	49	52	83	34	36

ಇಂತಹ ದೊಡ್ಡ ಪ್ರಮಾಣದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಓದುಗನಿಗೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಯಿಸಲು ನಾವು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು 20–29, 30–39, ... 90–99 (ಏಕೆಂದರೆ ನಮ್ಮ ದತ್ತಾಂಶವು 23 ರಿಂದ 98 ವರೆಗಿದೆ) ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಈ ಗುಂಪಗಳನ್ನು **'ವರ್ಗಗಳು'** ಅಥವಾ **'ವರ್ಗಾಂತರಗಳು'** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗಾತ್ರವನ್ನು **'ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ'** ಅಥವಾ **'ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿ'** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ 10. ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು **ಕೆಳಮಿತಿ** ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು **ಮೇಲ್ಮಿತಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 20–29 ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಕೆಳಮಿತಿ 20 ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಮಿತಿ 29.

ಈಗ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಾಳೆ ಗುರುತುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ತಯಾರಿಸುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಕೋಷ್ಟಕ 14.2

ಬದುಕುಳಿದ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ತಾಳೆ ಗುರುತುಗಳು	ಶಾಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಆವೃತ್ತಿ)
20–29	III	3
30–39	~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII	14
40–49	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12
50–59	~~IIII~~ III	8
60–69	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ III	18
70–79	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
80–89	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ III	23
90–99	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12
ಒಟ್ಟು		**100**

ಈ ರೀತಿ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸರಳವಾಗಿ, ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸುವುದರಿಂದ ಮೇಲ್ನೋಟಕ್ಕೆ ಪ್ರಮುಖ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು **ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ 8 + 18 + 10 + 23 + 12 = 71 ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ, ಶೇಕಡಾ 50 ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಮರಗಳು ಬದುಕುಳಿದಿವೆ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗಿಲ್ಲ. ನಾವು ಚಿಕ್ಕ ಗಾತ್ರದ ಹೆಚ್ಚು ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ದೊಡ್ಡ ಗಾತ್ರದ ಕಡಿಮೆ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದಾಗಿತ್ತು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು 22–26, 27–31............ ಹೀಗೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಇಂತಹುದೇ ಎಂಬ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಿಧಾನಗಳಿಲ್ಲ, ಆದರೆ ವರ್ಗಾಂತಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಬಾರದು ಅಷ್ಟೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಈ ಕೆಳಗೆ ಒಂದು ತರಗತಿಯ 38 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ನೀಡಿದೆ ಅದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಕೋಷ್ಟಕ 14.3

ತೂಕಗಳು (kg. ಗಳಲ್ಲಿ)	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
31–35	9
36–40	5
41–45	14
46–50	3
51–55	1
56–60	2
61–65	2
66–70	1
71–75	1
ಒಟ್ಟು	**38**

ಈಗ ತೂಕ 35.5kg ಮತ್ತು 40.5kg ಇರುವ ಇಬ್ಬರು ಹೊಸ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತರಗತಿಗೆ ಸೇರಿದರೆ ಅವರನ್ನು ಯಾವ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸುವಿರಿ? ಅವರನ್ನು 35 ಅಥವಾ 40 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೂ ಸೇರಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಮಿತಿಗಳ ನಡುವೆ ಅಂತರವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಮಿತಿಗಳು ಸಮನಾಗುವಂತೆ ಅವುಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸಬೇಕು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರ ಕೆಳಮಿತಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ನಂತರ ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅರ್ಧವನ್ನು ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರ ಮೇಲ್ಮಿತಿಗಳಿಗೆ ಸೇರಿಸಬೇಕು ಮತ್ತು ನಂತರ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿಗಳಿಂದ ಕಳೆಯಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ 31 – 35 ಮತ್ತು 36 – 40 ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

36–40 ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ = 36

31–35 ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿ = 35

ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ, 36–35=1

ಆದ್ದರಿಂದ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅರ್ಧಭಾಗ = $\frac{1}{2}$ = 0.5

31 – 35 ವರ್ಗಾಂತರದಿಂದ ರಚಿಸುವ ಹೊಸ ವರ್ಗಾಂತರವು (31 – 0.5) – (35 + 0.5), ಅಂದರೆ 30.5 – 35.5 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅದೇ ರೀತಿ ವರ್ಗಾಂತರ 36 – 40 ಎಂಬುದು (36 – 0.5) – (40 + 0.5) = 35.5 – 40.5 ಆಗಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಮುಂದುವರೆಯುತ್ತಾ ಹೊಸ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಈ ರೀತಿ ರಚನೆಯಾಗುತ್ತವೆ.

30.5 – 35.5, 35.5 – 40.5, 40.5 – 45.5, 45.5 – 50.5, 50.5 – 55.5, 55.5 – 60.5,
60.5 – 65.5, 65.5 – 70.5, 70.5 – 75.5.

ಈಗ ನಾವು ಹೊಸದಾಗಿ ಸೇರಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳನ್ನು ಹೊಸ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯೆಂದರೆ 35.5 ಎಂಬುದು ವರ್ಗಾಂತರ 30.5–35.5 ಮತ್ತು 35.5–40.5 ಎರಡರಲ್ಲೂ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 35.5ನ್ನು ಯಾವ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸುತ್ತೀರಿ?

ಎರಡೂ ವರ್ಗಂತಾರಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿದರೆ ಅದನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ಎಣಿಸಿದಂತೆ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ 35.5ನ್ನು ವರ್ಗಾಂತರ 35.5 – 40.5 ರಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಬೇಕು. ವರ್ಗಾಂತರ 30.5 – 35.5 ರಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಬಾರದು. ಇದೇ ರೀತಿ 40.5 ನ್ನು 40.5–45.5 ರಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಬೇಕು. 35.5–40.5 ರಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಬಾರದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಹೊಸ ತೂಕಗಳಾದ 35.5kg ಮತ್ತು 40.5kg ಗಳು 35.5 – 40.5 ಮತ್ತು 40.5 – 45.5 ಈ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಸೇರುತ್ತವೆ. ಈ ಮೇಲಿನ ಅಂಶಗಳಿಂದ ಹೊಸ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 14.4

ತೂಕಗಳು (kg. ಗಳಲ್ಲಿ) (ವರ್ಗಾಂತರ)	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಆವೃತ್ತಿ)
30.5 – 35.5	9
35.5 – 40.5	6
40.5 – 45.5	15
45.5 – 50.5	3
50.5 – 55.5	1
55.5 – 60.5	2
60.5 – 65.5	2
65.5 – 70.5	1
70.5 – 75.5	1
ಒಟ್ಟು	**40**

ಈಗ ನೀವು ಚಟುವಟಿಕೆ (– 1) ರಲ್ಲಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಅವುಗಳಿಂದ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 2 : ಈ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಗುಂಪಿನವರ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಯಿಸುವುದು. ದತ್ತಾಂಶಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಮತ್ತು ವಿಧವನ್ನು ನೋಡಿ ಯುಕ್ತ ಗಾತ್ರದ ಸೂಕ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 14.2

1. 8ನೇ ತರಗತಿಯ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ರಕ್ತದ ಗುಂಪನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ದಾಖಲಿಸಿದೆ.

   A, B, O, O, AB, O, A, O, B, A, O, B, A, O, O,

   A, AB, O, A, A, O, O, AB, B, A, O, B, A, B, O.

   ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ. ಯಾವ ರಕ್ತದ ಗುಂಪು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಯಾವುದು ವಿರಳವಾಗಿದೆ?

2. 40 ಇಂಜಿನಿಯರ್‌ಗಳ ಮನೆಯಿಂದ ಅವರ ಕೆಲಸದ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರಗಳನ್ನು (kmಗಳಲ್ಲಿ) ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
12	14	2	9	6	15	15	7	6	12

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಂದ ಮೊದಲ ವರ್ಗಾಂತರ 0–5 (5ನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿಲ್ಲ) ಇರುವಂತೆ ಗಾತ್ರ 5 ಇರುವ ಒಂದು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ. ಈ ರೀತಿಯ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಮುಖ್ಯ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

3. ಒಂದು ತಿಂಗಳಿನ 30 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಗರದ ಸಾಪೇಕ್ಷ ತೇವಾಂಶವು (% ದಲ್ಲಿ) ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.2	92.1	84.9	90.2	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89

(i) ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು 84–86, 86–88, ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಒಂದು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ.

(ii) ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಯಾವ ತಿಂಗಳು/ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ್ದು ಎಂದು ಯೋಚಿಸುವಿರಿ?

(iii) ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಎಷ್ಟು?

4. 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರಗಳ ಅಳತೆಯನ್ನು ಸಮೀಪದ cm ಗಳಿಗೆ ಅಳೆಯಲಾಗಿದೆ, ಅಳತೆಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ.

161	150	154	165	168	161	154	162	150	151
162	164	171	165	158	154	156	172	160	170
153	159	161	170	162	165	166	168	165	164
154	152	153	156	158	162	160	161	173	166
161	159	162	167	168	159	158	153	154	159

(i) ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು 160–165, 165–170, ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಂದು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

(ii) ಈ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಯಾವ ತೀರ್ಮಾನವನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯ?

5. ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಲ್ಫರ್ ಡೈ ಆಕ್ಸೈಡ್ (SO_2)ನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು (ppm ನಲ್ಲಿ = ಮಿಲಿಯನ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭಾಗ) ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಅಧ್ಯಯನ ನಡೆಸಲಾಯಿತು. 30 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಈ ರೀತಿ ಇವೆ.

0.03	0.08	0.08	0.09	0.04	0.17
0.16	0.05	0.02	0.06	0.18	0.20
0.11	0.08	0.12	0.13	0.22	0.07
0.08	0.01	0.10	0.06	0.09	0.18
0.11	0.07	0.05	0.07	0.01	0.04

(i) ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿಗಳನ್ನು 0.00–0.04, 0.04–0.08 ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಒಂದು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ರಚಿಸಿ.

(ii) ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಸಲ್ಫರ್ ಡೈ ಆಕ್ಸೈಡ್ ಪ್ರಮಾಣವು 0.11 ppm ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿದೆ?

6. ಮೂರು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ 30 ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಬಾರಿ ಶಿರ ಬಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ದಾಖಲಿಸಿದೆ.

0	1	2	2	1	2	3	1	3	0
1	3	1	1	2	2	0	1	2	1
3	0	0	1	1	2	3	2	2	0

ಈ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ.

7. π ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು 50 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

(i) ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನ ಬಳಿಕ 0 ಯಿಂದ 9 ರ ವರೆಗಿನ ಅಂಕಿಗಳ ಒಂದು ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ತಯಾರಿಸಿ.

(ii) ಹೆಚ್ಚು ಆವೃತ್ತಿ ಮತ್ತು ಕಡಿಮೆ ಆವೃತ್ತಿ ಹೊಂದಿರುವ ಅಂಕಿಗಳು ಯಾವುವು?

8. ಹಿಂದಿನವಾರ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟು ಗಂಟೆಗಳ ಕಾಲ ದೂರದರ್ಶನ (TV) ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳನ್ನು ವೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿದರು ಎಂಬುದನ್ನು ಕೇಳಲಾಯಿತು. ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

1	6	2	3	5	12	5	8	4	8
10	3	4	12	2	8	15	1	17	6
3	2	8	5	9	6	8	7	14	12

(i) ಒಂದು ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿ 5 – 10 ಆಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತು ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ 5 ಇರುವಂತೆ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಒಂದು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ತಯಾರಿಸಿ.

(ii) ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ 15 ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಗಂಟೆಯ ಸಮಯ TV ವೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದರು?

9. ಒಂದು ಕಂಪೆನಿಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಿಧದ ಕಾರ್ ಬ್ಯಾಟರಿಗಳನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸುತ್ತದೆ. 40 ಬ್ಯಾಟರಿಗಳ ಬಾಳಿಕೆಯನ್ನು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) ಈ ಕೆಳಗೆ ದಾಖಲಿಸಿದೆ.

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
3.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

ವ್ಯಾಪ್ತಿ 2 – 2.5 ರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ, ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಗಾತ್ರವು 0.5 ಇರುವಂತೆ, ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಒಂದು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ತಯಾರಿಸಿ.

14.4 ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು

ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈಗ ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಬಗ್ಗೆ ಗಮನ ಹರಿಸೋಣ. ಸಾವಿರ ಪದಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಚಿತ್ರ ಉತ್ತಮ ಎಂಬ ಮಾತಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದತ್ತಾಂಶಗಳ ನಡುವಿನ ಹೋಲಿಕೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಗಳ ಮೂಲಕ ಅತ್ಯುತ್ತಮವಾಗಿ ತೋರಿಸಬಹುದು. ಇಂತಹ ಪ್ರಸ್ತುತಿಯು ನೈಜ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗಿಂತ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸುಲಭ. ಈಗ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ನಕ್ಷೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ.

(A) ಸ್ತಂಭಲೇಖಗಳು (Bar graphs)

(B) ಒಂದೇ ಅಗಲದ ಮತ್ತು ವಿಭಿನ್ನ ಅಗಲಗಳ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂಗಳು ಅಥವಾ ಆಯತ ಚಿತ್ರಗಳು

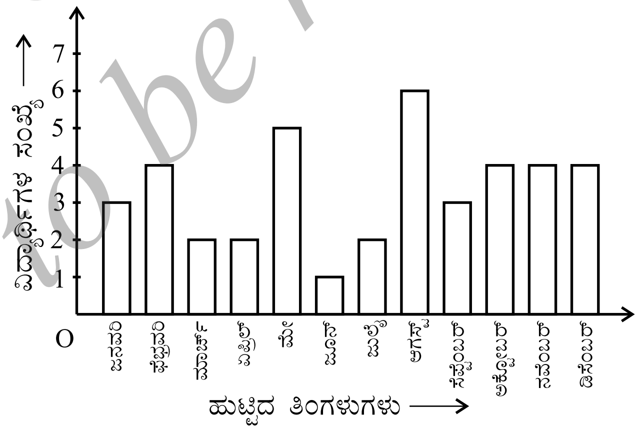
(C) ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು (Frequency Polygons)

(A) ಸ್ತಂಭಲೇಖಗಳು (Bar graphs)

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಸ್ತಂಭಲೇಖಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಭ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ರಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕ್ರಮಬದ್ಧ ಚರ್ಚೆ ನಡೆಸೋಣ. ಸ್ತಂಭಲೇಖ ಎಂದರೆ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು ಎಂದು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ಸಮಗಾತ್ರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎರಡು ಸ್ತಂಭಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ, ಒಂದು ಅಕ್ಷದ (ಉದಾ: x–ಅಕ್ಷ) ಮೇಲೆ ಚರಾಂಶವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಚರಾಂಶದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಅಕ್ಷದ (Y–ಅಕ್ಷ) ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ನಕ್ಷೆಯ ಎತ್ತರವು ಚರಾಂಶಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಒಂಭತ್ತನೆ ತರಗತಿಯ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಿಭಾಗದ 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಹುಟ್ಟಿದ ತಿಂಗಳನ್ನು ಕೇಳಿ ಪಡೆದ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಲಾಯಿತು.



ಚಿತ್ರ 14.1

ಮೇಲಿನ ಸ್ತಂಭಲೇಖವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ:

(i) ನವೆಂಬರ್ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹುಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ?

(ii) ಯಾವ ತಿಂಗಳನಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹುಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ?

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ 'ಹುಟ್ಟಿದ ತಿಂಗಳು' ಚರಾಂಶವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಚರಾಂಶದ ಬೆಲೆಯು 'ಹುಟ್ಟಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ' ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

(i) ನವೆಂಬರ್ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ 4 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹುಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ.

(ii) ಆಗಸ್ಟ್ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹುಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ಸ್ತಂಭಲೇಖದ ರಚನೆಯನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ₹ 20,000 ಆದಾಯವಿರುವ ಒಂದು ಕುಟುಂಬವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಖರ್ಚನ್ನು ಭರಿಸುವ ಯೋಜನೆ ಕೈಗೊಂಡಿತು.

ಕೋಷ್ಟಕ 14.5

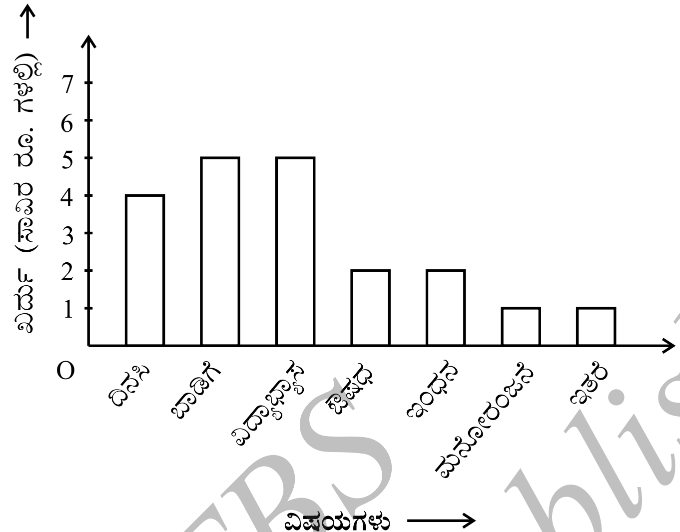
ವಿಷಯಗಳು (Heads)	ಖರ್ಚು (ಸಾವಿರ ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)
ದಿನಸಿ (ಕಿರಾಣಿ)	4
ಬಾಡಿಗೆ	5
ಮಕ್ಕಳ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸ	5
ಔಷಧ	2
ಇಂಧನ	2
ಮನೋರಂಜನೆ	1
ಇತರೆ	1

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸ್ತಂಭಲೇಖ ರಚಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳಿಂದ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸ್ತಂಭಲೇಖ ರಚಿಸಬಹುದು. ಎರಡನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಮೂಲಮಾನವು ಸಾವಿರ ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, 'ದಿನಸಿ ವಸ್ತುಗಳ ಮುಂದೆ ಇರುವ 4' ಅಂದರೆ ಅದು ₹ 4000 ಎಂದರ್ಥ.

1. ಸೂಕ್ತ ಮಾನದ ಆಯ್ಕೆಯಿಂದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು x - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ (ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರಅಕ್ಷ) ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಸ್ತಂಭದ ಅಗಲವು ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ. ಆದರೆ ಸ್ಪಷ್ಟತೆಗೋಸ್ಕರ ನಾವು ಒಂದೇ ಅಗಲದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಸ್ತಂಭಗಳ ನಡುವೆ ಸಮನಾದ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿ ವಿಷಯವನ್ನು 1 ಮಾನ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವುದು ಎಂದಿರಲಿ.
2. ಖರ್ಚನ್ನು y - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ (ಭೂಲಂಬ ಅಕ್ಷ) ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಗರಿಷ್ಠ ಖರ್ಚು ₹ 5000 ಇರುವುದರಿಂದ ಪ್ರಮಾಣವು 1 ಮಾನ = ₹ 1000 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ.
3. ಮೊದಲ ವಿಷಯ ಅಂದರೆ ದಿನಸಿ, ಇದನ್ನು ಅಗಲ 1 ಮಾನ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 4 ಮಾನ ಇರುವ ಕಂಬದ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದೆ.
4. ಇದೇ ರೀತಿ ಉಳಿದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮ ಕಂಬಗಳ ನಡುವೆ 1 ಮಾನದಷ್ಟು ಅಂತರ ಇರುವಂತೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದೆ.

ಈ ಸ್ತಂಭಲೇಖವನ್ನು ಚಿತ್ರ 14.2 ರಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರಿಸಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 14.2

ಇಲ್ಲಿ, ಮೇಲ್ನೋಟದಿಂದಲೇ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೋಲಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸದ ಮೇಲಿನ ಖರ್ಚು, ಔಷಧದ ಮೇಲಿನ ಖರ್ಚಿನ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೋಷ್ಟಕ ರೂಪಕ್ಕಿಂತ ಸ್ತಂಭಲೇಖದಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು ಉತ್ತಮ ಎನಿಸುತ್ತದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 3 : ಚಟುವಟಿಕೆ 1 ರ 4 ಗುಂಪುಗಳ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸ್ತಂಭಲೇಖದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

ಈಗ ನಾವು ನಿರಂತರ ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿ ಹೊಂದಿರುವ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಬಗ್ಗೆ ನೋಡೋಣ.

(B) ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ (ಆಯತ ಚಿತ್ರ)

ಇದು ಸ್ತಂಭಲೇಖದಂತೆಯೇ ಇರುವ ಒಂದು ರೀತಿಯ ಪ್ರಸ್ತುತಿಯಾದರೂ ಇದನ್ನು ನಿರಂತರ ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿಗಳಿಗೆ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕೋಷ್ಟಕ 14.6ರ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ತರಗತಿಯ 36 ಮಕ್ಕಳ ತೂಕಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನೀಡಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 14.6

ತೂಕಗಳು (kg. ಗಳಲ್ಲಿ)	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
30.5 – 35.5	9
35.5 – 40.5	6
40.5 – 45.5	15
45.5 – 50.5	3
50.5 – 55.5	1
55.5 – 60.5	2
ಒಟ್ಟು	**36**

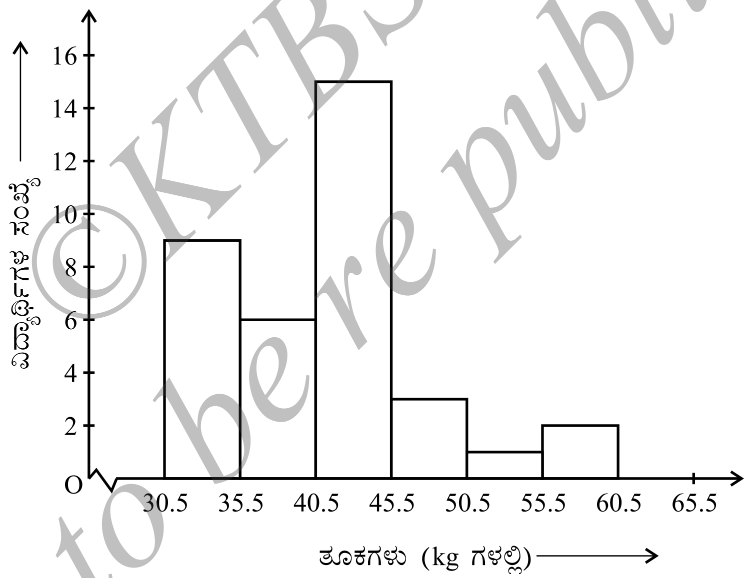
ಈ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸೋಣ.

(i) ಸೂಕ್ತ ಪ್ರಮಾಣದಿಂದ ತೂಕಗಳನ್ನು x – ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಮಾಣ 1cm = 5kg ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಮೊದಲ ವರ್ಗಾಂತರವು 30.5 ರಂದ ಆರಂಭಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ (ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಅಲ್ಲ). ಆದ್ದರಿಂದ ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಒಂದು **ತಿರುಚು / ತಡೆ (kink / break)** ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ನಕ್ಷೆ ರಚಿಸಬೇಕು.

(ii) ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಆವೃತ್ತಿ)ಯನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಪ್ರಮಾಣದಿಂದ y – ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿಯು 15 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿ ಗುರುತಿಸಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ 1 cm = 2 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ.

(iii) ಈಗ ಅಗಲವು ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿಯಷ್ಟು ಮತ್ತು ಉದ್ದವು (ಎತ್ತರ) ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯಷ್ಟು ಇರುವ ಆಯತಗಳನ್ನು (ಆಯತಾಕಾರದ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು) ನಾವು ರಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 30.5–35.5 ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ 1 cm ಅಗಲದ ಮತ್ತು 4.5 cm ಉದ್ದದ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

(iv) ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಚಿತ್ರ 14.3 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತಹ ನಕ್ಷೆಯು ನಮಗೆ ದೊರಕುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 14.3

ಗಮನಿಸಿ: ಅನುಕ್ರಮ ಆಯತಗಳ ನಡುವೆ ಯಾವುದೇ ಅಂತರ (ಸ್ಥಳಾವಕಾಶ) ಇಲ್ಲದ ಕಾರಣ ಈ ನಕ್ಷೆಯು ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಯಂತೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು **ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ** ಅಥವಾ **ಆಯತಚಿತ್ರ** ಎನ್ನುವರು. ಇದು ನಿರಂತರ ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿ ಇರುವ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಆಯತದ ಅಗಲವು ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸ್ತಂಭಲೇಖದಲ್ಲಿ ಸ್ತಂಭದ ಅಗಲವು ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ.

ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಅನುರೂಪ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೂ ಆಯತಗಳ ಅಗಲಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹಂತ (iii) ರಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿದಂತೆ ರಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

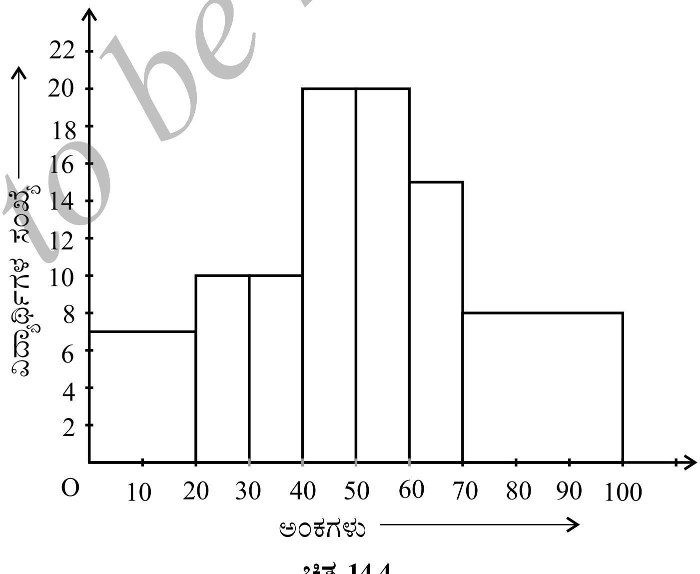
ಈಗ ಮೇಲಿನ ರೀತಿಗೆ ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 7: ಒಬ್ಬ ಶಿಕ್ಷಕರು ಒಂದು ತರಗತಿಯ ಎರಡು ವಿಭಾಗದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣಿತದ 100 ಅಂಕದ ಕಿರು ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಣೆಯನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಲು ಇಚ್ಛಿಸಿದರು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಕೆಲವರು 20 ಅಂಕಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು ಕೆಲವರು 70 ಅಂಕಗಳು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿರುವುದು ಕಂಡು ಬಂದಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವರು ವಿವಿಧ ಗಾತ್ರಗಳ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ 0–20, 20–30, ... 60–70, 70–100 ಈ ರೀತಿ ವಿಂಗಡಿಸಲು ನಿರ್ಧರಿಸಿ ಒಂದು ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದರು.

ಕೋಷ್ಟಕ 14.7

ಅಂಕಗಳು	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
0–20	7
20–30	10
30–40	10
40–50	20
50–60	20
60–70	15
70→ ಹೆಚ್ಚು	8
ಒಟ್ಟು	**90**

ಮೇಲಿನ ವಿತರಣೆಗೆ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ಅನ್ನು ಚಿತ್ರ 14.4 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ತಯಾರಿಸಿದ.



ಚಿತ್ರ 14.4

ಇಲ್ಲಿ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರುವುದನ್ನು ಎಚ್ಚರದಿಂದ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. ಇದು ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಿಯಾದ ಪ್ರಸ್ತುತಿಯೇ? ಇಲ್ಲ. ಈ ನಕ್ಷೆಯು ನಮಗೆ ತಪ್ಪು ಚಿತ್ರಣವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿಸಿರುವಂತೆ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂನಲ್ಲಿ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಹಿಂದೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ಉದ್ಭವಿಸಿರಲಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಆಯತಗಳ ಅಗಲಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಆಯತಗಳ ಅಗಲಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ಸರಿಯಾದ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಇದು 60–70 ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಆವೃತ್ತಿಗಿಂತ 70–100 ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಆವೃತ್ತಿಯು ಹೆಚ್ಚಿರುವಂತೆ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ ಇದು ಹಾಗಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರಲು ನಾವು ಆಯತಗಳ ಉದ್ದಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಾರ್ಪಾಡುಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾದ ಹಂತಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

1. ಕನಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರವಿರುವ ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಕನಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರ 10.

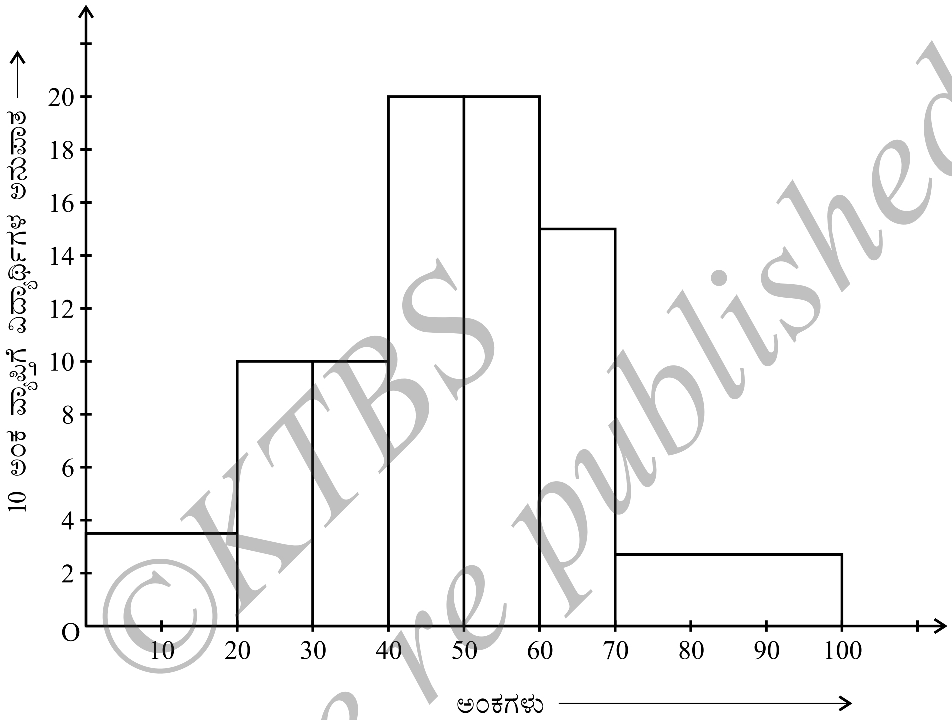
2. ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ 10ಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಆಯತಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕು. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರವು 20, ಆದಾಗ ಆಯತದ ಉದ್ದವು 7 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರವು 10 ಆದಾಗ ಆಯತದ ಉದ್ದವು $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$ ಆಗಬೇಕು.

ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರೆದಾಗ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 14.8

ಅಂಕಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ	ವರ್ಗಾಂತರದ ಅಗಲ	ಆಯತದ ಉದ್ದ (ಎತ್ತರ)
0–20	7	20	$\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$
20–30	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
30–40	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
40–50	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 - 20$
50–60	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
60–70	15	10	$\frac{15}{10} \times 10 = 15$
70–100	8	30	$\frac{8}{30} \times 10 = 2.67$

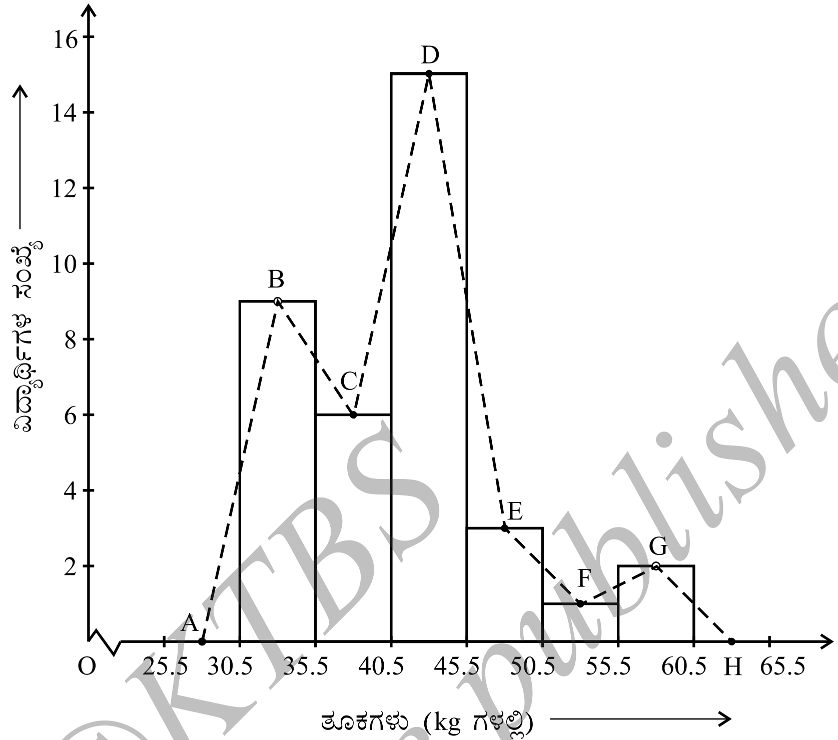
ನಾವು 10 ಅಂಕಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಉದ್ದವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಉದ್ದಗಳನ್ನು "**10 ಅಂಕ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅನುಪಾತ**" ಎನ್ನಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಬದಲಾಗುತ್ತಿರುವ ಅಗಲದ ಸರಿಯಾದ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ಚಿತ್ರ 14.5 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 14.5

(C) ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ (Frequency Polygon)

ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯ ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು. ಇದು ಒಂದು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ. ಇದನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಚಿತ್ರ 14.3 ರ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈಗ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂನ ಆಯತಗಳ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸೋಣ. ಈ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು B, C, D, E, F ಮತ್ತು G ಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಗುರುತಿಸಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಿದಾಗ BCDEFG ಆಕೃತಿ (ಚಿತ್ರ 14.6) ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ವರ್ಗಾಂತರ 30.5 – 35.5 ರ ಮೊದಲು ಮತ್ತು ವರ್ಗಾಂತರ 55.5 – 60.5 ರ ನಂತರ ಸೊನ್ನೆ ಆವೃತ್ತಿ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಇವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ A ಮತ್ತು H ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿ, ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಬಹುದು. ಚಿತ್ರ 14.3ರ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ABCDEFGH ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ 14.6 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 14.6

ಕನಿಷ್ಠ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೊದಲು ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ವರ್ಗಾಂತರದ ನಂತರ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, ನಾವು ಸೊನ್ನೆ ಆವೃತ್ತಿಯ ಎರಡು ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದು ಏಕೆ ಹೀಗೆ? (ಸುಳುಹು: ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

ಈಗ, ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತದೆ: ಮೊದಲ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದೆ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗಾಂತರ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದು? ಇಂತಹ ಒಂದು ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

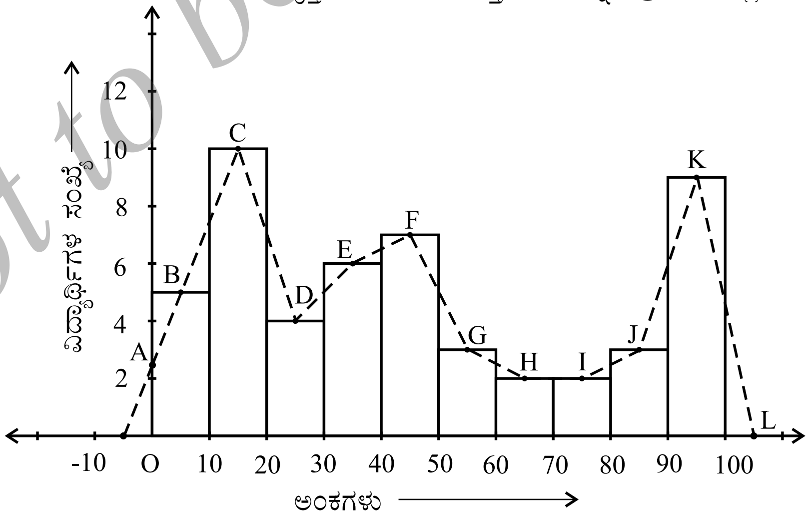
ಉದಾಹರಣೆ 8: ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ತರಗತಿಯ 51 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 100 ರಲ್ಲಿ ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 14.9 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ್ದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಕೋಷ್ಟಕ 14.9

ಅಂಕಗಳು	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
0–10	5
10–20	10
20–30	4
30–40	6
40–50	7
50–60	3
60–70	2
70–80	2
80–90	3
90–100	9
ಒಟ್ಟು	**51**

ಈ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಮೊದಲು ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಆಯತದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ B, C, D, E, F, G, H, I, J, K ಎಂದು ಗುರುತಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ವರ್ಗಾಂತರ 0–10, ಆದ್ದರಿಂದ x–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಋಣಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ವರ್ಗಾಂತರ (–10) –0ರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ಈ ಸೊನ್ನೆ ಆವೃತ್ತಿಯ ವರ್ಗಾಂತರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಆಯತಗಳ ಮೊದಲ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಅಂದರೆ 'B' ಗೆ ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಈ ರೇಖಾಖಂಡ y–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು 'A' ಎಂದು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಕೊನೆಯ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕಿಂತ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು 'L' ಆಗಿರಲಿ. ನಂತರ OABCDEFGHIJKL ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ 14.7 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 14.7

ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂನ್ನು ರಚಿಸದೆ ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿಯೂ (ನೇರವಾಗಿ) ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ನಮಗೆ ದತ್ತಾಂಶದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಈ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವರ್ಗ–ಅಂಕಗಳು ಎನ್ನುವರು.

ವರ್ಗ–ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಮಿತಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಅದರಂತೆ ವರ್ಗ–ಅಂಕ = $\frac{\text{ಮೇಲ್ಮಿತಿ + ಕೆಳಮಿತಿ}}{2}$

ಈಗ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 9: ಒಂದು ನಗರದಲ್ಲಿ ವಾರಕ್ಕೊಮ್ಮೆ ನಡೆಸುವ ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಅಧ್ಯಯನದಂತೆ ದೊರಕಿದ ಜೀವನ ನಿರ್ವಹಣಾ ಸೂಚ್ಯಾಂಕವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 14.10

ಜೀವನ ನಿರ್ವಹಣಾ ಸೂಚ್ಯಾಂಕ	ವಾರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
140–150	5
150–160	10
160–170	20
170–180	9
180–190	6
190–200	2
ಒಟ್ಟು	**52**

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಬರೆಯಿರಿ. (ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ರಚಿಸದೆ).

ಪರಿಹಾರ: ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ರಚಿಸದೆ ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ ದತ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಅಂದರೆ, 140–150, 150–160,............... ರ ವರ್ಗ–ಅಂಕ (ಮಧ್ಯಬಿಂದು) ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ವರ್ಗಾಂತರ 140–150 ರ ಮೇಲ್ಮಿತಿ = 150 ಮತ್ತು ಕೆಳಮಿತಿ = 140

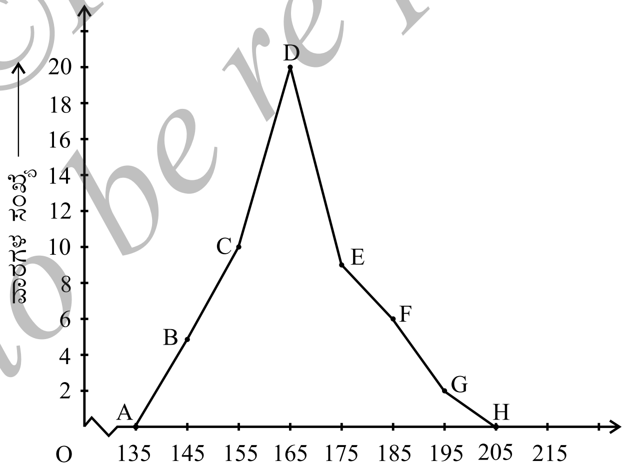
$\therefore$ ವರ್ಗ ಅಂಕ (ಮಧ್ಯಬಿಂದು) = $\frac{150+140}{2} = \frac{290}{2} = 145.$

ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರೆದು ಎಲ್ಲ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ವರ್ಗ–ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ಪಡೆದ ಹೊಸ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 14.11

ವರ್ಗಾಂತರಗಳು	ವರ್ಗ–ಅಂಕಗಳು (ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು)	ಆವೃತ್ತಿ
140–150	145	5
150–160	155	10
160–170	165	20
170–180	175	9
180–190	185	6
190–200	195	2
ಒಟ್ಟು		**52**

ಈಗ ವರ್ಗಅಂಕಗಳನ್ನು x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು y – ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ, ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಎಳೆಯಬಹುದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ B (145, 5), C (155, 10), D (165, 20), E (175, 9), F (185,6) ಮತ್ತು G (195,2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಬೇಕು. ವರ್ಗಾಂತರ 140–150 ರ ಮೊದಲು ಸೊನ್ನೆ ಆವೃತ್ತಿಯ ವರ್ಗಾಂತರ 130–140 ರ ವರ್ಗ–ಅಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಗುರುತಿಸಲು ಮರೆಯಬಾರದು. ಅದು A (135,0) ಆಗಿರಲಿ. ಅದೇ ರೀತಿ H (205,0) ಬಿಂದುವನ್ನು G (195,2) ಬಿಂದುವಿನ ನಂತರ ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ಈಗ ದೊರಕುವ ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯು ABCDEFGH ಆಗಿರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 14.8ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 14.8

ದತ್ತಾಂಶಗಳು ನಿರಂತರ ಮತ್ತು ತುಂಬಾ ದೊಡ್ಡ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ (Very large) ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಒಂದೇ ಸ್ವಭಾವದ (Same nature) ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದತ್ತಾಂಶ ಗಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಲು ಇದು ಸಹಕಾರಿಯಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದೇ ತರಗತಿಯ ಎರಡು ವಿಭಾಗಗಳ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಣೆಯನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 14.3

1. ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯು ಜಗತ್ತಿನಾದ್ಯಂತ 15 ರಿಂದ 44 ವರ್ಷ ವಯೋಮಾನದ ಮಹಿಳೆಯರಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಡೆಸಿದ ಸಮೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬಂದ ಕಾಯಿಲೆಗಳಿಗೆ ಕಾರಣ ಮತ್ತು ಸಾವಿನ ಪ್ರಮಾಣದ ಅಂಕಿ–ಅಂಶಗಳು (% ದಲ್ಲಿ) ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

ಕ್ರ.ಸಂ.	ಕಾರಣಗಳು	ಮಹಿಳಾ ಮರಣದ ಪ್ರಮಾಣ (%)
1	ಸಂತಾನೋತ್ಪತ್ತಿ ಆರೋಗ್ಯ ಸ್ಥಿತಿಗತಿಗಳು	31.8
2	ನರ–ಮಾನಸಿಕ ಸ್ಥಿತಿಗತಿಗಳು	25.4
3	ಗಾಯಗಳು	12.4
4	ಹೃದಯ ಸಂಬಂಧಿ ಸ್ಥಿತಿಗತಿಗಳು	4.3
5	ಉಸಿರಾಟದ ಸ್ಥಿತಿಗತಿಗಳು	4.1
6	ಇತರ ಕಾರಣಗಳು	22.0

(i) ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

(ii) ಜಗತ್ತಿನಾದ್ಯಂತ ಮಹಿಳೆಯರ ಅನಾರೋಗ್ಯ ಮತ್ತು ಸಾವಿಗೆ ಯಾವ ಸ್ಥಿತಿಗತಿ ಮುಖ್ಯ ಕಾರಣವಾಗಿದೆ?

(iii) (ii)ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ಕಾರಣವು ಪ್ರಮುಖವೆನಿಸಲು ಯಾವ ಎರಡು ಅಂಶಗಳ ಪಾತ್ರವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿದೆ. ಎಂದು ಶಿಕ್ಷಕರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ

2. ಭಾರತೀಯ ಸಮಾಜದ ವಿವಿಧ ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಾವಿರ ಹುಡುಗರಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಇರುವ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (ಹತ್ತಿರ ಸಮೀಪ ಬೆಲೆಗೆ) ಈ ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ವಿಭಾಗ	ತಲಾ 1000 ಹುಡುಗರಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುವ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ
ಪರಿಶಿಷ್ಟ ಜಾತಿ (ಪ.ಜಾ)	940
ಪರಿಶಿಷ್ಟ ಪಂಗಡ (ಪ. ಪಂ)	970
ಪ.ಜಾ, ಪ. ಪಂ. ಹೊರತುಪಡಿಸಿ	920
ಹಿಂದುಳಿದ ಜಿಲ್ಲೆಗಳು	950
ಹಿಂದುಳಿದಿಲ್ಲದ ಜಿಲ್ಲೆಗಳು	920
ಗ್ರಾಮೀಣ	930
ನಗರ	910

(i) ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಸ್ತಂಭಲೇಖದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

(ii) ಈ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಯಾವ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿ.

3. ಒಂದು ರಾಜ್ಯದ ವಿಧಾನಸಭಾ ಚುನಾವಣೆಯ ಮತದಾನದ ಫಲಿತಾಂಶದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ರಾಜಕೀಯ ಪಕ್ಷಗಳು ಗೆದ್ದ ಸ್ಥಾನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ರಾಜಕೀಯ ಪಕ್ಷ	A	B	C	D	E	F
ಗೆದ್ದ ಸ್ಥಾನಗಳು	75	55	37	29	10	37

(i) ಮತದಾನದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಒಂದು ಸ್ತಂಭಲೇಖ ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) ಯಾವ ರಾಜಕೀಯ ಪಕ್ಷವು ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಗೆದ್ದಿದೆ?

4. ಒಂದು ಸಸ್ಯದ 40 ಎಲೆಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು mm ಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಅಳೆದಿದೆ ಮತ್ತು ಪಡೆದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಠಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದೆ.

ಉದ್ದ (mm ಗಳಲ್ಲಿ)	ಎಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
118 -126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

(i) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಂದು ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ. (ಸುಳಿವು : ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಇರುವಂತೆ ಬರೆಯಿರಿ)

(ii) ಇದೇ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರು ನಕ್ಷಾಪ್ರತಿನಿದಿಸುವಿಕೆ ಇದೆಯೇ?

(iii) ಹೆಚ್ಚಿನ ಎಲೆಗಳು 153 mm ಉದ್ದ ಇವೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುವುದು ಸರಿಯಿದೆಯೇ? ಏಕೆ?

5. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಠಕವು 400 ನಿಯಾನ್ ಬಲ್ಬುಗಳ ಬಾಳಿಕೆ (life time) ಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತಿದೆ.

ಬಾಳಿಕೆ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ)	ಬಲ್ಬುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
300 - 400	14
400 - 500	56
500 - 600	60
600 - 700	86
700 - 800	74
800 - 900	62
900 - 1000	48

(i) ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ಸಹಾಯದಿಂದ ನೀಡಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

(ii) 700 ಗಂಟೆಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಾಳಿಕೆ ಬರುವ ಬಲ್ಬುಗಳು ಎಷ್ಟು?

6. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಅವರನ್ನು ಎರಡು ವಿಭಾಗಗಳಾಗಿ ಹಂಚಿರುವುದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದೆ.

ವಿಭಾಗ – A		ವಿಭಾಗ – B	
ಅಂಕಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ	ಅಂಕಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ
0 - 10	3	0 - 10	5
10 - 20	9	10 - 20	19
20 - 30	17	20 - 30	15
30 - 40	12	30 - 40	10
40 - 50	9	40 - 50	1

ಎರಡು ವಿಭಾಗದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ. ಈ ಎರಡು ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳಿಂದ ಎರಡು ವಿಭಾಗಗಳ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಣೆಯನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ.

7. ಒಂದು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಪಂದ್ಯದಲ್ಲಿ ಮೊದಲ 60 ಎಸೆತಗಳಲ್ಲಿ (balls) A ಮತ್ತು B ತಂಡಗಳು ಗಳಿಸಿದ ರನ್‌ಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಎಸೆತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ತಂಡ A	ತಂಡ B
1 - 6	2	5
7 - 12	1	6
13 - 18	8	2
19 - 24	9	10
25 - 30	4	5
31 - 36	5	6
37 - 42	6	3
43 - 48	10	4
49 - 54	6	8
55 - 60	2	10

ಎರಡು ತಂಡಗಳ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

(**ಸುಳಿವು** : ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ನಿರಂತರಗೊಳಿಸಿ)

8. ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ (random) ಸಮೀಕ್ಷೆಯಂತೆ ಪಾರ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಆಡುವ ವಿವಿಧ ವಯೋಮಾನದ ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1 - 2	5
2 - 3	3
3 - 5	6
5 - 7	12
7 - 10	9
10 - 15	10
15 - 17	4

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಒಂದು ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ಬರೆಯಿರಿ.

9. ಒಂದು ಸ್ಥಳೀಯ ದೂರವಾಣಿ ಮಾರ್ಗದರ್ಶಿ (Telephone directory) ಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ 100 ಉಪನಾಮ (surname) ಗಳನ್ನು ಹೆಕ್ಕಿ ತೆಗೆದಿದೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ (surname) ಕಂಡುಬಂದ ಆಂಗ್ಲಭಾಷೆಯ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಉಪನಾಮ (surname) ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1 - 4	6
4 - 6	30
6 - 8	44
8 - 12	16
12 - 20	4

(i) ನೀಡಿದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಒಂದು ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) ಉಪನಾಮಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

14.5 ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳು

ಇದೇ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಈ ಮೊದಲು, ನಾವು ವಿವಿಧ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ ಆವೃತ್ತಿವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ, ಸ್ತಂಭಲೇಖ, ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ (ಆಯತ ಚಿತ್ರ) ಮತ್ತು ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ಮೂಲಕ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದ್ದೇವೆ. 'ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಲು' ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕೇ? ಅಥವಾ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸಿ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಕೆಲವು ಪ್ರಮುಖ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದೇ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಏಳುತ್ತದೆ. ಇದು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳು ಅಥವಾ ಸರಾಸರಿಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೇರಿ ಮತ್ತು ಹರಿ ಎಂಬ ಇಬ್ಬರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಮ್ಮ ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಪತ್ರಿಕೆಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಪರೀಕ್ಷೆಯು ತಲಾ 10 ಅಂಕಗಳ 5 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿತ್ತು. ಅವರ ಅಂಕಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	1	2	3	4	5
ಮೇರಿಯ ಅಂಕಗಳು	10	8	9	8	7
ಹರಿಯ ಅಂಕಗಳು	4	7	10	10	10

ಪರೀಕ್ಷಾ ಪತ್ರಿಕೆ ಪಡೆದ ನಂತರ ಅವರ ಸರಾಸರಿ ಅಂಕಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವುದು ಅವರಿಗೆ ಕಂಡು ಬಂದಿತು.

ಮೇರಿಯ ಸರಾಸರಿ ಅಂಕ = $\frac{42}{5} = 8.4$

ಹರಿಯ ಸರಾಸರಿ ಅಂಕ = $\frac{41}{5} = 8.2$

ಮೇರಿಯ ಸರಾಸರಿಯು ಹರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇರಿಯು ತನ್ನ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಣೆ ಹರಿಗಿಂತ ಉತ್ತಮವಾಗಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತಾಳೆ. ಆಗ ಹರಿಯು ಇದಕ್ಕೆ ಒಪ್ಪುವುದಿಲ್ಲ ಆತ ಇಬ್ಬರ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತಾನೆ. ಮತ್ತು ಮಧ್ಯದ ಅಂಕವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತಾನೆ.

ಮೇರಿಯ ಅಂಕ	7	8	8	9	10
ಹರಿಯ ಅಂಕ	4	7	10	10	10

ಹರಿಯು ತನ್ನ ಮಧ್ಯದ ಅಂಕವು 10 ಆಗಿದ್ದು, ಅದು ಮೇರಿಯ ಮಧ್ಯಾಂಕ 8 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವನ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಣೆಯು ಉತ್ತಮ ಎನ್ನುತ್ತಾನೆ.

ಆದರೆ ಮೇರಿಯು ಇದಕ್ಕೆ ಒಪ್ಪದಿದ್ದಾಗ ಹರಿಯು ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾನೆ. ಇಬ್ಬರ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ ತಾನು 10 ನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಸಲ (3ಸಲ), ಆದರೆ ಮೇರಿ ಒಂದೇ ಸಲ ಪಡೆದಿದ್ದಾಳೆ, ಆದ್ದರಿಂದ ತನ್ನ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಣೆ ಉತ್ತಮ ಎನ್ನುತ್ತಾನೆ.

ಈಗ ಹರಿ ಮತ್ತು ಮೇರಿ ನಡುವಿನ ಭಿನ್ನಾಭಿಪ್ರಾಯ ಬಗೆಹರಿಸಬೇಕಿದೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ತಮ್ಮ ವಾದದ ಸಮರ್ಥನೆಗಾಗಿ ಅವರು ಬಳಸಿದ ಮೂರು ಮಾಪನಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ ಮೊದಲ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮೇರಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿದ ಅಂಕವೇ **'ಸರಾಸರಿ'(mean)**ಯಾಗಿದೆ. ಹರಿಯು ತನ್ನ ವಾದಕ್ಕಾಗಿ ಬಳಸಿದ 'ಮಧ್ಯದ ಅಂಕ'ವೇ **'ಮಧ್ಯಾಂಕ' (median)**. ಎರಡನೆಯದಾಗಿ ಹರಿ ತಿಳಿಸಿದ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಪುನರಾವರ್ತಿತ ಅಂಕವೇ **ಬಹುಲಕ** ಅಥವಾ **ರೂಢಿಬೆಲೆ (mode)**.

ಈಗ ಮೊದಲು ನಾವು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ವಿವರವಾಗಿ ನೋಡೋಣ.

ಸರಾಸರಿಯು ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಒಟ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು $\overline{x}$ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು **'x - ಬಾರ್'** ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ಒಂದು ಉದಾರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 10 : ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಸಮುದಾಯದ ಸಾಮಾಜಿಕ ಕಾರ್ಯಕ್ಕೆ ವಿನಿಯೋಗಿಸುವ ಸಮಯದ ಕುರಿತು 5 ಜನರಲ್ಲಿ ಕೇಳಲಾಯಿತು. ಅವರು ಕ್ರಮವಾಗಿ 10, 7, 13, 20 ಮತ್ತು 15 ಗಂಟೆಗಳು ಎಂದರು. ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ ಅವರು ಸಾಮಾಜಿಕ ಕಾರ್ಯಕ್ಕೆ ವಿನಿಯೋಗಿಸುವ ಸರಾಸರಿ ಸಮಯ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ನಾವು ಈ ಹಿಂದೆ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಂತೆ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯು

$$\frac{\text{ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಕೆಲಸವನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸೋಣ. i ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಸೂಚಿಸಲು ಚರಾಕ್ಷರ x_i ನ್ನು ಬಳಸೋಣ. ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ i ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು 1 ರಿಂದ 5 ರವರೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಮೊದಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ x_1, 2ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ x_2 ಈ ರೀತಿ x_5 ರ ವರೆಗೆ ಮುಂದುವರೆಯುತ್ತದೆ.

$x_1 = 10$, ಅಂದರೆ ಮೊದಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ

ಇದೇ ರೀತಿ $x_2 = 7$, $x_3 = 13$, $x_4 = 20$ ಮತ್ತು $x_5 = 15$ ಆಗಿವೆ.

$$\therefore \text{ ಸರಾಸರಿ } \bar{x} = \frac{\text{ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$= \frac{10 + 7 + 13 + 20 + 15}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

ಆದ್ದರಿಂದ 5 ಜನರು ಸಾಮಾಜಿಕ ಕಾರ್ಯಕ್ಕೆ ವಿನಿಯೋಗಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ ಸಮಯವು ವಾರಕ್ಕೆ 13 ಗಂಟೆಗಳು.

ಇದೇ ರೀತಿ 30 ಜನರ ಸರಾಸರಿ ಸಮಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{30}$ ವರೆಗೆ ಬರೆಯುವುದು ಶ್ರಮದಾಯಕ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಗ್ರೀಕ್ ಸಂಕೇತ Σ (ಸಿಗ್ಮಾ Sigma) ವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{30}$ ಎಂಬುದರ ಬದಲಾಗಿ $\sum_{i=1}^{30} x_i$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ, ಇದನ್ನು i ಯ ಬೆಲೆ '1 ರಿಂದ 30 ಇರುವಂತೆ x_i ಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ' ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$$

ಇದೇ ರೀತಿ, 'n' ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಗೆ $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

ಉದಾಹರಣೆ 11: ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ 9 ನೇ ತರಗತಿಯ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು 2ನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಈಗ, $$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{10}}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 10 + 20 + 36 + 92 + 95 + 40 + 50 + 56 + 60 + 70 + 92 + 88 + 80 + 70 + 72 + 70 + 36 + 40 + 36 + 40 + 92 + 40 + 50 + 50 + 56 + 60 + 70 + 60 + 60 + 88 = 1779$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಸಮಯ ವ್ಯರ್ಥವಾಗುತ್ತಿಲ್ಲವೇ? ಇದನ್ನು ನಾವು ಸರಳಗೊಳಿಸಬಹುದೇ? ನಾವು ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿದುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. (ಕೋಷ್ಟಕ 14.1)

ಈ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ 10 ಅಂಕಗಳನ್ನು, ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ 20 ಅಂಕಗಳನ್ನು, ಮೂವರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 36 ಅಂಕಗಳನ್ನು, ನಾಲ್ಕು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 40 ಅಂಕಗಳನ್ನು, ಮೂವರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 50 ಅಂಕಗಳನ್ನು, ಇಬ್ಬರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 56 ಅಂಕಗಳನ್ನು, ನಾಲ್ವರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 60 ಅಂಕಗಳನ್ನು, ನಾಲ್ವರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 70 ಅಂಕಗಳನ್ನು, ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು 72 ಅಂಕಗಳನ್ನು, ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು 80 ಅಂಕಗಳನ್ನು, ಇಬ್ಬರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 88 ಅಂಕಗಳನ್ನು, ಮೂವರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 92 ಅಂಕಗಳನ್ನು, ಮತ್ತು ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು 95 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

$\therefore$ ಪಡೆದ ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳು $= (1 \times 10) + (1 \times 20) + (3 \times 36) + (4 \times 40) + (3 \times 50)$

$+ (2 \times 56) + (4 \times 60) + (4 \times 70) + (1 \times 72) + (1 \times 80)$

$+ (2 \times 88) + (3 \times 92) + (1 \times 95)$

$= f_1 x_1 + \ldots + f_{13}\ x_{13}$,

ಇಲ್ಲಿ f_i ಎಂಬುದು i ನೇ ಪದದ ಆವೃತ್ತಿ (ಕೋಷ್ಟಕ 14.1 ರಂತೆ)

ಇದನ್ನು ನಾವು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ $\sum_{i=1}^{13} f_i x_i$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$\therefore$ ಪಡೆದ ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳು $= \sum_{i=1}^{13} f_i x_i$

$= 10 + 20 + 108 + 160 + 150 + 112 + 240 + 280 + 72 + 80 + 176$

$+ 276 + 95 = 1779$

ಈಗ, ಒಟ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= \sum_{i=1}^{13} f_i$

$= f_1 + f_2 + \text{- - -} + f_{13}$

$= 1 + 1 + 3 + 4 + 3 + 2 + 4 + 4 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1$

$= 30$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \dfrac{\text{ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ}}{\text{ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ}} = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{13} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{13} f_i} \right)$

$= \dfrac{1779}{30} = 59.3$

ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಇದು ಕೋಷ್ಟಕ 14.1 ಪರಿಷ್ಕೃತ ರೂಪವಾಗಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 14.12

ಅಂಕಗಳು (x_i)	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
	$\sum_{i=1}^{13} f_i = 30$	$\sum_{i=1}^{13} f_i \; x_i = 1779$

ಹೀಗೆ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತಿ ವಿತರಣೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನೀವು ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \, x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

ಈಗ ಈ ಹಿಂದೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಹರಿ ಮತ್ತು ಮೇರಿ ಇವರ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಕಡೆಗೆ ಹೋಗೋಣ. ಎರಡನೇ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಹರಿಯು ಮಧ್ಯದ ಅಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ತನ್ನ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಣೆ ಉತ್ತಮ ಎನ್ನುತ್ತಾನೆ. ಈಗಾಗಲೇ ಹೇಳಿದಂತೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಈ ಅಳತೆಯನ್ನು **ಮಧ್ಯಾಂಕ (median)** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

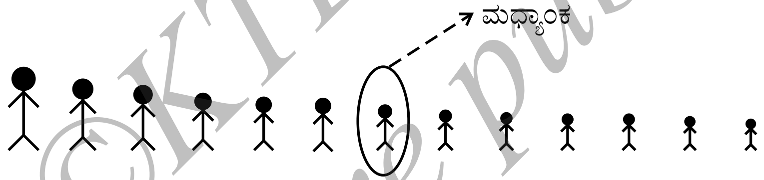
ಮಧ್ಯಾಂಕದ ಬೆಲೆಯು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆ ಅಥವಾ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

(i) ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯು (n) ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ, ಮಧ್ಯಾಂಕದ ಬೆಲೆಯು $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

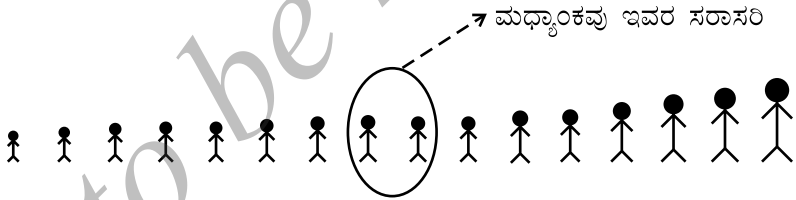
ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $n = 13$ ಆದಾಗ, $\left(\frac{13+1}{2}\right)$ನೇ ಅಂದರೆ, 7ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 14.9 (i) ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)

(ii) ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯು (n) ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ ಮಧ್ಯಾಂಕದ ಬೆಲೆಯು $\left(\frac{n}{2}\right)$ನೇ ಮತ್ತು $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $n = 16$ ಆದಾಗ, ಮಧ್ಯಾಂಕವು $\left(\frac{16}{2}\right)$ನೇ ಮತ್ತು $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ ಅಂದರೆ 8ನೇ ಮತ್ತು 9ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 14.9 (ii) ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)



(i)



(ii)

ಚಿತ್ರ 14.9

ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಇದನ್ನು ವಿವರಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 12 : ಒಂದು ತರಗತಿಯ 9 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರಗಳು (cm ಗಳಲ್ಲಿ) ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

155 160 145 149 150 147 152 144 148

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಮೊದಲು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯುವುದು.

144 145 147 148 149 150 152 155 160

ಇಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ 9, ಇದು ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ, ಆದ್ದರಿಂದ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ನೇ $=\left(\frac{9+1}{2}\right)$ನೇ = 5ನೇ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಎತ್ತರವು ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು 149cm ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 149cm ಅಥವಾ ಎತ್ತರಗಳ ಮಧ್ಯಮ ಬೆಲೆ 149 cm.

ಉದಾಹರಣೆ 13 : ಒಂದು ಕಬಡ್ಡಿ ತಂಡದಿಂದ ಒಂದು ಸರಣಿಯ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು (Points) ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

17, 2, 7, 27, 15, 5, 14, 8, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 18, 28

ತಂಡ ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ತಂಡಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ

2, 5, 7, 7, 8, 8, 10, $\boxed{10,\ 14,}$ 15, 17, 18, 24, 27, 28, 48

ಒಟ್ಟು 16 ಪದಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಮಧ್ಯದ ಪದಗಳಿವೆ, $\left(\frac{16}{2}\right)$ನೇ ಮತ್ತು $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ನೇ ಪದಗಳು, ಅಂದರೆ 8ನೇ ಮತ್ತು 9ನೇ ಪದಗಳು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮಧ್ಯಾಂಕ $=\frac{10+14}{2}=12$

ಆದ್ದರಿಂದ ಕಬಡ್ಡಿ ತಂಡವು ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 12

ಈಗ ಪುನಃ ಹರಿ ಮತ್ತು ಮೇರಿ ಇವರಿಬ್ಬರ ಬಗೆಹರಿಯದ ವಿವಾದವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ ಹರಿಯು 3ನೇ ಅಳತೆಯಾಗಿ **ಬಹುಲಕ**ವನ್ನು **(ರೂಢಿಬೆಲೆ)** ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ.

ಬಹುಲಕವು ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಆವೃತ್ತಿ ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು **ಬಹುಲಕ** ಅಥವಾ **ರೂಢಿಬೆಲೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಸಿದ್ಧ ವಸ್ತ್ರ ಮಳಿಗೆಗಳು ಮತ್ತು ಶೂ ಕಂಪನಿಗಳು ಈ ಕೇಂದ್ರಿಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಯನ್ನು ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಬಹುಲಕದ ಬಳಕೆಯ ಜ್ಞಾನದಿಂದ ಕಂಪನಿಗಳು ಯಾವ ಅಳತೆಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ.

ಇದನ್ನು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ವಿವರಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 14 : 20 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು (10 ಕ್ಕೆ) ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ. ಇವುಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4, 6, 5, 9, 3, 2, 7, 7, 6, 5, 4, 9, 10, 10, 3, 4, 7, 6, 9, 9

ಪರಿಹಾರ : ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸೋಣ.

2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10,

ಇಲ್ಲಿ '9' ಎಂಬುದು ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಅಂದರೆ 4 ಸಲ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬಹುಲಕವು 9 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 15 : 5 ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯ 5 ಉದ್ಯೋಗಿಗಳಿರುವ ಚಿಕ್ಕ ಘಟಕವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ಅವರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಸೂಪರ್‌ವೈಸರ್ ಮತ್ತು 4 ಜನ ಕಾರ್ಮಿಕರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಕಾರ್ಮಿಕರು ಪ್ರತಿತಿಂಗಳು ₹ 5000 ಪಡೆದರೆ, ಸೂಪರ್‌ವೈಸರ್ ₹ 15.000 ಪಡೆಯುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಈ ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ಘಟಕದ ವೇತನದ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಸರಾಸರಿ = $\frac{5000+5000+5000+5000+15000}{5} = \frac{35000}{5} = 7000$

∴ ವೇತನಗಳ ಸರಾಸರಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ₹ 7000

ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ವೇತನಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

5000, 5000, 5000, 5000, 15,000

ಉದ್ಯೋಗಸ್ಥರ ಸಂಖ್ಯೆ 5, ಇದು ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ, ಆದ್ದರಿಂದ ಬಹುಲಕವು, $\left(\frac{5+1}{2}\right)$ನೇ $= \left(\frac{6}{2}\right)$ = 3ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ

∴ ಮಧ್ಯಾಂಕವು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ₹ 5000 ಆಗಿದೆ.

ವೇತನಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ 5000 ಎಂಬ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 5000, 5000, 5000, 15000 ಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವೇತನಗಳ ಬಹುಲಕವು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ₹ 5000.

ಈಗ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರಿಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ ವೇತನಗಳ ಸರಾಸರಿಯು ಅಂದರೆ ₹ 7000 ವು ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ ಆದರೆ ವೇತನಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕಗಳು ಅಂದರೆ, ₹ 5000ವು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಉತ್ತಮವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಆದಿ ಮತ್ತು ಅಂತ್ಯ ಪದಗಳು ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿಯ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರುತ್ತವೆ. ಇದು ಸರಾಸರಿಯ ಒಂದು ಪರಿಮಿತಿಯಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿನ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳು ಉಳಿದ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಂಶಗಳಿಗಿಂತ ಬಹಳಷ್ಟು ಅಂತರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ. (ಉದಾಹರಣೆಗೆ : 1, 7, 8, 9, 9) ಸರಾಸರಿಯು ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಉತ್ತಮ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆ ಎನಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕಗಳು ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಆದಿ ಮತ್ತು ಅಂತ್ಯಪದಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿಲ್ಲ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಇವು ಸರಾಸರಿಗಿಂತ ಉತ್ತಮ ಎನಿಸುತ್ತವೆ.

ಈಗ ಪುನಃ ಹರಿ ಮತ್ತು ಮೇರಿಯ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸೋಣ.

ಕೇಂದ್ರಿಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳು	ಹರಿ	ಮೇರಿ
ಸರಾಸರಿ	8.2	8.4
ಮಧ್ಯಾಂಕ	10	8
ಬಹುಲಕ	10	8

ಈ ಹೋಲಿಕೆಯಿಂದ ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುವುದೇನೆಂದರೆ ಯಾವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯೂ ಉತ್ತಮ ಎಂಬ ನಿರ್ಣಯಕ್ಕೆ ಬರಲು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳು ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ನಮಗೆ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಮಾಹಿತಿಗಳ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಇದನ್ನು ನೀವು ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಸಿಸುವಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 14.4

1. ಒಂದು ಸರಣಿಯ 10 ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ತಂಡವು ಗಳಿಸಿದ ಗೋಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3

ಇವುಗಳ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. 15 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ನೀಡಿದ ಗಣಿತ ಕಿರುಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕಗಳು (100 ಕ್ಕೆ) ದಾಖಲಾದವು.

41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ರೂಢಿಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 63, ಆದರೆ 'x' ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

29, 32, 48, 50, x, $x+2$, 72, 78, 84, 95

4. 14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23, 22, 14, 18 ಇವುಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯ 60 ಕೆಲಸಗಾರರ ವೇತನವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದೆ. ವೇತನಗಳ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೇತನ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
3000	16
4000	10
5000	10
6000	8
7000	6
8000	4
9000	3
10.000	1
ಒಟ್ಟು	**60**

6. ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಿಗೆ ಒಂದೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೀಡಿ.

   (i) ಸರಾಸರಿಯು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ನಿಖರವಾದ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ.

   (ii) ಸರಾಸರಿಯು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ನಿಖರವಾದ ಅಳತೆಯಾಗಿಲ್ಲ, ಆದರೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ನಿಖರವಾದ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ.

14.6. ಸಾರಾಂಶ :

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುತ್ತೀರಿ.

1. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿ ಅಥವಾ ಅಂಕಿ–ಅಂಶಗಳನ್ನು ದತ್ತಾಂಶ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
2. ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಪ್ರಸ್ತುತಿ, ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮತ್ತು ಅರ್ಥವಿವರಣೆಯ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವ ವಿಭಾಗವೇ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ.
3. ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅಂದರೆ ಸ್ತಂಭಲೇಖ, ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ಮತ್ತು ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.
4. **ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ** ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ 3 ಅಳತೆಗಳೆಂದರೆ:

(i) **ಸರಾಸರಿ** : ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು $\overline{x}$ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

$\therefore\ \overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ, $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

(ii) **ಮಧ್ಯಾಂಕ (ಮಧ್ಯಮ ಬೆಲೆ) :** ಇದು ಅತೀ ಮಧ್ಯದ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಬೆಲೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. 'n' ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ, ಮಧ್ಯಾಂಕ $= \left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

'n' ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ, ಮಧ್ಯಾಂಕ $= \left(\dfrac{n}{2}\right)$ ನೇ ಮತ್ತು $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$ ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

(iii) **ಬಹುಲಕ (ರೂಢಿಬೆಲೆ) :** ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವೇ ಬಹುಲಕವಾಗಿದೆ.

3JVH21

ಅಧ್ಯಾಯ – 15

ಸಂಭವನೀಯತೆ

"ಅವಕಾಶದ ಆಟಗಳೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಡುವುದರಿಂದ ಆರಂಭವಾದ ವಿಜ್ಞಾನವನ್ನು, ಮಾನವನ ಜ್ಞಾನದ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಮುಖ ವಿಷಯವಾಗಿ ಉನ್ನತ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೇರಿಸುವುದು ಒಂದು ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಸಂಗತಿಯಾಗಿದೆ.

– ಪಿಯರಿ ಸೈಮನ್ ಲ್ಯಾಪ್ಲಾಸ್

It is remarkable that a science, which began with the consideration of games of chance, should be elevated to the rank of the most important subject of human knowledge.

- Pierre Simon Laplace

15.1 ಪೀಠಿಕೆ

ದಿನನಿತ್ಯದ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನಾವು ಇಂತಹ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರುತ್ತೇವೆ/ಕೇಳಿರುತ್ತೇವೆ.

1. **ಬಹುಶಃ** ಇವತ್ತು ಮಳೆ ಬರಬಹುದು.
2. ಅವನು ಕಿರುಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪಾಸಾಗುವುದು ನನಗೆ **ಸಂದೇಹ**ವಿದೆ.
3. ವಾರ್ಷಿಕ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಕವಿತಾ ಪ್ರಥಮ ಸ್ಥಾನ ಪಡೆಯುವ **ಸಂಭವ** ಹೆಚ್ಚಿದೆ.
4. ಡೀಸೆಲ್ ದರ ಏರುವ **ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು** ಹೆಚ್ಚಿವೆ.
5. ಇಂದಿನ ಪಂದ್ಯದಲ್ಲಿ ಭಾರತವು ಟಾಸ್ (Toss) ಗೆಲ್ಲುವ **ಅವಕಾಶ**ವು 50:50 ಆಗಿದೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ 'ಬಹುಶಃ', 'ಸಂದೇಹ', 'ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಭವ', 'ಅವಕಾಶಗಳು' ಇತ್ಯಾದಿ ಪದಗಳು ಅನಿಶ್ಚಿತತೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮೊದಲ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ "ಬಹುಶಃ ಮಳೆ" ಅಂದರೆ, ಈ ದಿನ ಮಳೆ ಬರಬಹುದು ಅಥವಾ ಬರದಿರಬಹುದು ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಇಂತಹುದೇ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಹಿಂದೆ ಮಳೆ ಬಂದ ಅನುಭವದ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ನಾವು ಇಂದು ಮಳೆ ಬರಬಹುದುದೆಂದು ಊಹಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. (2) ರಿಂದ (5)ರವರೆಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಊಹೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ "ಬಹುಶಃ" ಇತ್ಯಾದಿ ಪದಗಳ ಅನಿಶ್ಚಿತತೆಯನ್ನು ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೂಲಕ ಸಾಂಖ್ಯಿಕವಾಗಿ ಅಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಜೂಜಾಟದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿದ್ದರೂ ಇದನ್ನು ಭೌತವಿಜ್ಞಾನ, ವಾಣಿಜ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ, ಜೀವವಿಜ್ಞಾನ, ಔಷಧೀಯ ವಿಜ್ಞಾನ, ಹವಾಮಾನ ಮುನ್ಸೂಚನೆ ಮುಂತಾದ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ.

15.2 ಸಂಭವನೀಯತೆ – ಒಂದು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಪದ್ಧತಿ

ಬ್ಲೇಸ್ ಪ್ಯಾಸ್ಕಲ್
(1623 – 1662)
ಚಿತ್ರ. 15.1

"ಸಂಭವನೀಯತೆ" ಎಂಬ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯು ಅತ್ಯಂತ ವಿಸ್ಮಯ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯಾಯಿತು. 1654ರಲ್ಲಿ ಚೆವಲ್ಯೆರ್ ಡೀ ಮೆರಿ ಎಂಬ ಜೂಜುಗಾರನು 17ನೇ ಶತಮಾನದ ಫ್ರೆಂಚ್ ತತ್ವಜ್ಞಾನಿ ಮತ್ತು ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಬ್ಲೇಸ್‌ಪ್ಯಾಸ್ಕಲ್‌ರವರನ್ನು ದಾಳಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗಾಗಿ ಭೇಟಿ ಮಾಡಿದನು. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಆಸಕ್ತಿ ಹೊಂದಿದ ಪ್ಯಾಸ್ಕಲ್ ಅವುಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿ ಮತ್ತು ಇನ್ನೋರ್ವ ಫ್ರೆಂಚ್ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಪಿಯರಿ ಡೀ ಫರ್ಮಾಟ್‌ರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿದರು. ಪ್ಯಾಸ್ಕಲ್ ಮತ್ತು ಫರ್ಮಾಟ್ ಇವರಿಬ್ಬರೂ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದರು. ಈ ಕಾರ್ಯವು ಸಂಭವನೀಯತೆ ತತ್ವದ ಆರಂಭಿಕ ಹೆಜ್ಜೆಯಾಗಿದೆ.

ಪಿಯರಿ ಡೀ ಫರ್ಮಾಟ್
(1601 – 1665)
ಚಿತ್ರ. 15.2

ಇಟಲಿಯ ಗಣಿತಜ್ಞನಾದ ಜೆ.ಸಿ. ಕಾರ್ಡನ್ (1501–1576)ರವರು ಈ ವಿಷಯದ ಮೊದಲ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆದರು. ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಶೀರ್ಷಿಕೆ "ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಆಟಗಳ ಮೇಲಿನ ಪುಸ್ತಕ" (Book on games of chance-- Liber de Ludo Aleae) ಇದು 1663ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟವಾಯಿತು. ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಜೆ. ಬರ್ನೊಲಿ (1654–1705) ಪಿ. ಲ್ಯಾಪ್ಲಾಸ್ (1749–1827), ಎ.ಎ. ಮಾರ್ಕೋವ್ (1856–1922) ಮತ್ತು ಎ.ಎನ್. ಕೋಲ್ಮೋಗೋರೋವ್ (ಜನನ 1903) ಇವರೆಲ್ಲ ಗಣನೀಯ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ.

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವುದು, ದಾಳಗಳನ್ನು ಎಸೆಯುವುದು ಇತ್ಯಾದಿ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಕಿರುನೋಟ ತಿಳಿದಿರಬಹುದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ **ಫಲಿತಾಂಶ**ಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಬಹುದು. ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ **ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಫಲಿತಾಂಶ** ಬರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಅಳೆಯಲು ನೀವು ಈಗ ಕಲಿಯಲಿರುವಿರಿ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 1 : (i) ಯಾವುದೇ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹತ್ತು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿ ಶಿರ (Head) ಮತ್ತು ಪುಚ್ಛ (Tail) ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ದಾಖಲಿಸಿ.

ಕೋಷ್ಟಕ 15.1

ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ	ಶಿರವು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆ	ಪುಚ್ಛವು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆ
10		

ಕೆಳಗಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬರೆದುಕೊಳ್ಳಿ:

$$\frac{\text{ಶಿರವು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ಮತ್ತು

$$\frac{\text{ಪುಚ್ಛವು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

(ii) ನಾಣ್ಯವನ್ನು 20 ಬಾರಿ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಚಿಮ್ಮಿ ನಿಮ್ಮ ವೀಕ್ಷಣೆಯನ್ನು ಹಿಂದಿನಂತೆ ದಾಖಲಿಸಿ, ಪುನಃ ಈ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳಿಗೆ ಹಿಂದೆ ಕೊಟ್ಟಂತೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iii) ಇದೇ ರೀತಿ, ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಪುನಾರಾವರ್ತಿಸಿ ಮತ್ತು ಶಿರ ಮತ್ತು ಪುಚ್ಛಗಳು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ, ಅನುಗುಣವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಂತೆ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳು 0.5ರ ಸಮೀಪಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣುವಿರಿ. ಹೆಚ್ಚೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಏನಾಗುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಂಪು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಸಹ ನಡೆಸಬಹುದು.

ಚಟುವಟಿಕೆ 2 : ತರಗತಿಯನ್ನು 2 ಅಥವಾ 3 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ. ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 15 ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಲಿ. ಗುಂಪಿನ ಇನ್ನೋರ್ವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಶಿರ ಮತ್ತು ಪುಚ್ಛ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಲಿ. [ಎಲ್ಲ ಗುಂಪುಗಳು ಒಂದೇ ಮುಖಬೆಲೆಯ, ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಬಳಸಬೇಕು ಅಂದರೆ, ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನವರು ಒಂದೇ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಎಂಬುದಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುವುದು].

ಈಗ ಕಪ್ಪು ಹಲಗೆಯ ಮೇಲೆ ಕೋಷ್ಟಕ 15.2 ರಂತೆ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಮೊದಲು 1ನೆಯ ತಂಡದವರು ತಮ್ಮ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ. ಫಲಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕು.

ನಂತರ 2ನೆಯ ತಂಡದವರು ತಮ್ಮ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ ತಂಡ 1 ಮತ್ತು ತಂಡ 2ರ ಒಟ್ಟು ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬೇಕು ಮತ್ತು ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರೆಸಬೇಕು. (ನಾವು ಈ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು **ಸಂಚಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು** ಅಥವಾ **ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಸಂಚಿತ ಮೊತ್ತ** ಎನ್ನಬಹುದು) ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಒಂದು ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ನೀಡಿದ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ಮೊದಲ 3 ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ದಾಖಲಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 15.2

ಗುಂಪು	ಶಿರವುಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆ	ಪುಚ್ಛವು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆ	ಶಿರವು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ / ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ	ಪುಚ್ಛವು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ / ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**
1	3	12	$\frac{3}{15}$	$\frac{12}{15}$
2	7	8	$\frac{7+3}{15+15}=\frac{10}{30}$	$\frac{8+12}{15+15}=\frac{20}{30}$
3	7	8	$\frac{7+10}{15+30}=\frac{17}{45}$	$\frac{8+20}{15+30}=\frac{28}{45}$
4	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ಈ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಕಂಬ ಸಾಲು (4) ಮತ್ತು (5) ರ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳು 0.5ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತಾ ಹೋಗುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣುವಿರಿ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 3 : ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು* 20 ಬಾರಿ ಎಸೆದು ಅಂಕಿಗಳಾದ 1,2,3,4,5 ಮತ್ತು 6 ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಅದನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 15.3 ರಂತೆ ನಮೂದಿಸಿ.

(*ಒಂದು ದಾಳವು ಕುಂದಿಲ್ಲದ 6 ಮುಖಗಳ ಘನವಾಗಿದ್ದು, ಪ್ರತಿ ಮುಖವು 1ರಿಂದ 6ರ ವರೆಗಿನ ಒಂದು ಅಂಕಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಕೆಲವೊಂದು ಸಲ ಅಂಕಿಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಅಷ್ಟೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಚುಕ್ಕಿಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.)

ಕೋಷ್ಟಕ 15.3

ದಾಳದ ಎಸೆತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಈ ಅಂಕಿಗಳು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆ					
	1	2	3	4	5	6
20						

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

$$\frac{\text{ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ 1 ಬಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ದಾಳದ ಒಟ್ಟು ಎಸೆತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$\frac{\text{ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ 2 ಬಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ದಾಳದ ಒಟ್ಟು ಎಸೆತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\frac{\text{ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ 6 ಬಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ದಾಳದ ಒಟ್ಟು ಎಸೆತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

(ii) ಈಗ ದಾಳವನ್ನು 40 ಬಾರಿ ಎಸೆಯಿರಿ. ವೀಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ ಮತ್ತು (i) ರಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆಯೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ. ದಾಳದ ಎಸೆತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ (i) & (ii) ರಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ ಪ್ರತಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು $\frac{1}{6}$ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ನೋಡಲು ಚಟುವಟಿಕೆ – 2ರಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ ಗುಂಪು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ನಡೆಸಬಹುದು. ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಚಿಕ್ಕ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ. ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನ ಒಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು 10 ಸಲ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆಯಬೇಕು. ವೀಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ, ಸಂಚಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕು.

ಅಂಕಿ 1ರ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 15.4ರಲ್ಲಿ ದಾಖಲಿಸಬಹುದು. ಈ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಉಳಿದ ಅಂಕಿಗಳ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಹ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು ಅಥವಾ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಇನ್ನೊಂದು ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 15.4

ಗುಂಪುಗಳು (1)	ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ದಾಳದ ಎಸೆತಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ (2)	$\frac{\text{ಅಂಕಿ '1' ಬಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ}}{\text{ದಾಳದ ಎಸೆತಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ}}$ (3)
1	-	-
2	-	-
3	-	-
4	-	-

ಎಲ್ಲಾ ಗುಂಪುಗಳು ಬಳಸಿದ ದಾಳಗಳು ನೋಡಲು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಗಾತ್ರದ್ದಾಗಿರಬೇಕು. ಆಗ ಎಲ್ಲಾ ಎಸೆತಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ದಾಳದ ಎಸೆತಗಳೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.

ನೀವು ಈ ಕೋಷ್ಟಕಗಳಲ್ಲಿ ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

ಒಟ್ಟು ದಾಳದ ಎಸೆತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ (3)ನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು $\frac{1}{6}$ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತವೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 4 : (i) 2 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ 10 ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿ ಮತ್ತು ನಿಮ್ಮ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ದಾಖಲಿಸಿ.

ಕೋಷ್ಟಕ 15.5

ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಶಿರವು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರದಿರದ ಸಂಖ್ಯೆ	ಒಂದು ಶಿರವು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ	ಎರಡು ಶಿರಗಳು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ
10			

ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಬರೆದುಕೊಳ್ಳಿ:

$$A = \frac{\text{ಶಿರವು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರದಿರದ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$B = \frac{\text{ಒಂದು ಶಿರವು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$C = \frac{\text{ಎರಡು ಶಿರಗಳು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ಈ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ (ಚಟುವಟಿಕೆ 2 ರಂತೆ). ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ A, B ಮತ್ತು C ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 0.25, 0.5 ಮತ್ತು 0.25ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪಿಸುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣುವಿರಿ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 1ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ನಾಣ್ಯದ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಯನ್ನು ಒಂದು **'ಯತ್ನ' (trial)** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಚಟುವಟಿಕೆ 3ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ದಾಳದ ಎಸೆತವನ್ನು ಒಂದು ಯತ್ನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಚಟುವಟಿಕೆ 4ರಲ್ಲಿ ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಯು ಕೂಡ ಒಂದು ಯತ್ನವಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ **ಯತ್ನವು ಒಂದು ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿದ್ದು ಇದು ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಫಲಿತ (outcome) ಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ**. ಚಟುವಟಿಕೆ 1ರಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಫಲಿತಗಳು ಶಿರ ಮತ್ತು ಪುಚ್ಛವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅದರಂತೆ ಚಟುವಟಿಕೆ 3ರಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಫಲಿತಗಳು 1,2,3,4,5 ಮತ್ತು 6 ಆಗಿವೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 1ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದನ್ನು **ಶಿರ ಫಲಿತ ಘಟನೆ** (event) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಪುಚ್ಛವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು **ಪುಚ್ಛಫಲಿತ ಘಟನೆ**ಯಾಗುತ್ತದೆ. ಚಟುವಟಿಕೆ 2ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು, ಉದಾಹರಣೆಗೆ 1ನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು, ಫಲಿತ 1 ಬರುವ **ಘಟನೆ**ಯಾಗುತ್ತದೆ.

ನಮ್ಮ ಪ್ರಯೋಗವು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವುದಾಗಿದ್ದರೆ, ಘಟನೆಯು 2,4 ಮತ್ತು 6 ಎಂಬ ಮೂರು ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತಿತ್ತು.

ಹೀಗೆ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ **ಘಟನೆ**ಯೆಂದರೆ ಆ ಪ್ರಯೋಗದ ಕೆಲವು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿರುತ್ತದೆ. 10ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಒಂದು ಘಟನೆಯ ನಿಖರವಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಲಿದ್ದೀರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಈಗ ನೀವು ಚಟುವಟಿಕೆ 4ರಲ್ಲಿನ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸುವಿರಾ?

ಈ ಹಿನ್ನಲೆಯಿಂದ ಈಗ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಂದರೇನು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ನಮ್ಮ ಯತ್ನಗಳಿಂದ ಯಾವ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಪಡೆದೆವು ಎಂಬುದರ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ನಾವು **ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ** ಅಥವಾ **ಅನುಭವ ವೇದ್ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ**ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಈಗ ಒಟ್ಟು ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 'n' ಆಗಿರಲಿ, ಸಂಭವಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಘಟನೆ 'E' ಯ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ P (E) ಯು,

$$P(E) = \frac{\text{ಘಟನೆಯು ಸಂಭವಿಸಿದ ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತಿದ್ದರೂ, ಅನುಕೂಲತೆಗೆ ಇದನ್ನು **'ಸಂಭವನೀಯತೆ'** ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಹಿಂದಿನ ಚಟುವಟಿಕೆ 2 ಮತ್ತು ಕೋಷ್ಟಕ 15.2 ನ್ನು ಪುನಃ ನೋಡಿದಾಗ ಕೋಷ್ಟಕದ (4)ನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ನೀವು ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಯಾವುದು? ಇದು ಶಿರ ಪಡೆಯುವ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಆಗಿದೆ. ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಈ ಯತ್ನಗಳಲ್ಲಿ ಶಿರಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿ ಈ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಬದಲಾಗುತ್ತಿರುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, ಕೋಷ್ಟಕ 15.2ರ 5ನೇ ಕಂಬಸಾಲು ಪುಚ್ಛ ಪಡೆಯುವುದರ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು $\frac{12}{15}$ ರಿಂದ ಆರಂಭವಾಗಿ ನಂತರ $\frac{2}{3}$ ನಂತರ $\frac{28}{45}$ ಮತ್ತು ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರೆಯುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಈ ಯತ್ನಗಳಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಫಲಿತಗಳು ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 5 : ಮುಂದುವರೆಯುವುದರ ಮೊದಲು ನೀವು ಚಟುವಟಿಕೆ 3ರಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಕೋಷ್ಠಕಗಳನ್ನು ನೋಡಿ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ಬಾರಿ ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ ಅಂಕಿ 3ನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ ಇತರೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತಿಯಲ್ಲಿ 1000 ಸಲ ಚಿಮ್ಮಲಾಗಿದೆ.

ಶಿರ : 455, ಪುಚ್ಛ : 545

ಪ್ರತಿ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

ಪರಿಹಾರ : ನಾಣ್ಯವನ್ನು 1000 ಸಲ ಚಿಮ್ಮುವುದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1000.

ಶಿರ ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆ ಮತ್ತು ಪುಚ್ಛ ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತ್ತು F ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿದೆ. 'E' ಸಂಭವಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಂದರೆ, ಶಿರ ಪಡೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು 455.

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ 'E' ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ} = \frac{\text{ಶಿರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$\text{ಅಂದರೆ,}\quad P(E) = \frac{455}{1000} = 0.455$$

$$\text{ಇದೇ ರೀತಿ ಪುಚ್ಛ ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ} = \frac{\text{ಪುಚ್ಛಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$\text{ಅಂದರೆ,}\quad P(F) = \frac{545}{1000} = 0.545$$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ $P(E) + P(F) = 0.455 + 0.545 = 1$, ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಯತ್ನದ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳು E ಮತ್ತು F ಮಾತ್ರ ಆಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ 500 ಸಲ ಚಿಮ್ಮಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಫಲಿತಾಂಶವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ದೊರಕಿದೆ.

ಎರಡು ಶಿರಗಳು : 105 ಸಲ

ಒಂದು ಶಿರ : 275 ಸಲ

ಶಿರವಲ್ಲ : 120 ಸಲ

ಪ್ರತಿ ಘಟನೆಯು ದೊರೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಎರಡು ಶಿರ ಪಡೆಯುವ, ಒಂದು ಶಿರ ಪಡೆಯುವ ಮತ್ತು ಶಿರ ಪಡೆಯದ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ E_1, E_2 ಮತ್ತು E_3 ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ.

$$P(E_1) = \frac{105}{500} = 0.21$$

$$P(E_2) = \frac{275}{500} = 0.55$$

$$P(E_3) = \frac{120}{500} = 0.24$$

ಇಲ್ಲಿ $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. E_1, E_2 ಮತ್ತು E_3 ಗಳು ಯತ್ನದ ಎಲ್ಲ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಕೂಡ ಒಳಗೊಂಡಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು 1000 ಸಲ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ. 1,2,3,4,5 ಮತ್ತು 6 ಈ ಫಲಿತಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 15.6

ಫಲಿತ	1	2	3	4	5	6
ಆವೃತ್ತಿ	179	150	157	149	175	190

ಪ್ರತಿ ಫಲಿತವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

ಪರಿಹಾರ: ಫಲಿತ i ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯನ್ನು E_i ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

ಈಗ ಫಲಿತ 1 ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $P(E_1) = \dfrac{\text{1ರ ಆವೃತ್ತಿ}}{\text{ದಾಳದ ಒಟ್ಟು ಎಸೆತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$

$$= \frac{179}{1000} = 0.179$$

ಇದೇ ರೀತಿ, $P(E_2) = \dfrac{150}{1000} = 0.15$ $\quad P(E_3) = \dfrac{157}{1000} = 0.157$

$P(E_4) = \dfrac{149}{1000} = 0.149$ $\quad P(E_5) = \dfrac{175}{1000} = 0.175$

ಮತ್ತು $P(E_6) = \dfrac{190}{1000} = 0.19$

$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 1$ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ.

ಇದಲ್ಲದೆ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:

(i) ಪ್ರತಿ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ 0(ಸೊನ್ನೆ) ಮತ್ತು 1ರ ನಡುವೆ ಬರುತ್ತದೆ.

(ii) ಎಲ್ಲ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(iii) $E_1, E_2, ..., E_6$ ಗಳು ಒಂದು ಯತ್ನದ ಎಲ್ಲ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4 : ಒಂದು ದೂರವಾಣಿ ಮಾರ್ಗದರ್ಶಿ (Telephone directory) ಯ ಒಂದು ಪುಟದಲ್ಲಿ 200 ದೂರವಾಣಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳ ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು (ಉದಾಹರಣೆಗೆ 25828573 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿ 3) ಕೋಷ್ಟಕ 15.7ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 15.7

ಅಂಕಿ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ಆವೃತ್ತಿ	22	26	22	22	20	10	14	28	16	20

ಪುಟವನ್ನು ನೋಡದೆಯೇ ಪೆನ್ಸಿಲನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೇಲೆ ಇರಿಸುವುದು ಅಂದರೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು **ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ**ವಾಗಿ ಆರಿಸುವುದು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿ '6' ಇರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಅಂಕಿ 6 ಇರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ

$$= \frac{\text{6ರ ಆವೃತ್ತಿ}}{\text{ಆರಿಸಿದ ದೂರವಾಣಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$= \frac{14}{200} = 0.07$$

ಇದೇ ರೀತಿ ಇತರ ಅಂಕಿಗಳು ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ನೀವು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಹಿಂದಿನ ಅನುಕ್ರಮ 250 ದಿನಗಳ ಹವಾಮಾನ ಮುನ್ಸೂಚನೆಗಳಲ್ಲಿ 175 ಮುನ್ಸೂಚನೆಗಳು ಸರಿಯಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹವಾಮಾನ ಇಲಾಖೆಯ ದಾಖಲೆಯು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

(i) ಸರಿಯಾದ ಮುನ್ಸೂಚನೆಯನ್ನು ನೀಡಿದ ದಿನಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) ಮುನ್ಸೂಚನೆಗಳು ಸರಿಯಾಗಿಲ್ಲದ ದಿನಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ : ದಾಖಲೆಗಳು ಸಿಗುವ ಒಟ್ಟು ದಿನಗಳು = 250

(i) P (ಸರಿಯಾದ ಮುನ್ಸೂಚನೆಗಳು ಇರುವ ದಿನ)

$$= \frac{\text{ಮುನ್ಸೂಚನೆಗಳು ಸರಿಯಾಗಿರುವ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ದಾಖಲೆಗಳು ಸಿಗುವ ಒಟ್ಟು ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$= \frac{175}{250} = 0.7$$

(ii) ಮುನ್ಸೂಚನೆಗಳು ಸರಿಯಾಗಿಲ್ಲದ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 250 - 175 = 75$

ಆದ್ದರಿಂದ P (ಮುನ್ಸೂಚನೆ ಸರಿಯಾಗಿಲ್ಲದ ದಿನ) $= \frac{75}{250} = 0.3$

ಗಮನಿಸಿ : P (ಮುನ್ಸೂಚನೆ ಸರಿಯಿರುವ ದಿನ) + P (ಮುನ್ಸೂಚನೆ ಸರಿಯಾಗಿಲ್ಲದ ದಿನ)

$= 0.7 + 0.3 = 1$

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಒಂದು ಟಯರ್ ಉತ್ಪಾದನಾ ಕಂಪನಿಯು ಟಯರ್ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡುವ ಮೊದಲು ಅದು ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರದ ದಾಖಲೆಯನ್ನು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡಿದೆ. ಕೋಷ್ಟಕವು 1000 ಪ್ರಕರಣಗಳ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 15.8

ದೂರ (km ಗಳಲ್ಲಿ)	4000 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	4000 ದಿಂದ 9000	9001 ದಿಂದ 14000	14000 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು
ಆವೃತ್ತಿ	20	210	325	445

ನೀವು ಈ ಕಂಪನಿಯ ಟಯರ್‌ನ್ನು ಖರೀದಿಸುವುದಾದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 4000 km ಗಳಿಗಿಂತ ಮೊದಲೇ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡುವ ಅಗತ್ಯತೆ?

(ii) 9000 km ಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಹಾಳಾಗುವುದು?

(iii) 4000 km ನಿಂದ 14000 km ವರೆಗಿನ ನಡುವೆ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡುವ ಅಗತ್ಯತೆ?

ಪರಿಹಾರ :(i) ಯತ್ನಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ = 1000

4000 km ಗಳ ಮೊದಲು ಟಯರ್ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡುವುದರ ಆವೃತ್ತಿಯು 20

ಆದ್ದರಿಂದ P (4000 km ಗಿಂತ ಮೊದಲು ಟಯರ್ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡುವುದು) $= \frac{20}{1000} = 0.02$

(ii) 9000 km ಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಟಯರ್ ಹಾಳಾಗುವ ಆವೃತ್ತಿಯು $325 + 445 = 770$

ಆದ್ದರಿಂದ P (9000 km ಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಟಯರ್ ಹಾಳಾಗುವ) $= \frac{770}{1000} = 0.77$

(iii) 4000 km ಮತ್ತು 14000 km ಗಳ ನಡುವೆ ಟಯರ್ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡುವ ಅವಶ್ಯಕತೆಯ ಆವೃತ್ತಿಯು $= 210 + 325 = 535$

ಆದ್ದರಿಂದ P (4000 km ಮತ್ತು 14000 km ಗಳ ನಡುವೆ ಟಯರ್ ಬದಲಾವಣೆಯ ಅವಶ್ಯಕತೆ) $= \frac{535}{1000} = 0.535$

ಉದಾಹರಣೆ 7: ಮಾಸಿಕ ಘಟಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಗಳಿಸಿದ ಶೇಕಡಾವಾರು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 15.9

ಘಟಕ ಪರೀಕ್ಷೆ	I	II	III	IV	V
ಪಡೆದ ಶೇಕಡಾವಾರು ಅಂಕಗಳು	69	71	73	68	74

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಘಟಕ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಶೇಕಡಾ 70ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ನಡೆಸಿದ ಘಟಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ 5

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು 70%ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ಘಟಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 3.

ಆದ್ದರಿಂದ P (70% ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕ ಗಳಿಸಿದುದು) $= \frac{3}{5} = 0.6$.

ಉದಾಹರಣೆ 8 : ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಗರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿಮಾ ಕಂಪನಿಯು ವಯಸ್ಸು ಮತ್ತು ಅಪಘಾತಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ 2000 ಚಾಲಕರನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿತು. (ಒಬ್ಬ ಚಾಲಕನಿಗೆ ಮತ್ತೊಬ್ಬ ಚಾಲಕನಿಂದ ಆದ್ಯತೆ ದೊರಕದಂತೆ) ಪಡೆದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 15.10

ಚಾಲಕರ ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿನ ಅಪಘಾತಗಳು				
	0	**1**	**2**	**3**	**3ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು**
18–29	440	160	110	61	35
30–50	505	125	60	22	18
50ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು	360	45	35	15	9

ನಗರದಲ್ಲಿ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆರಿಸಿದ ಚಾಲಕನಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ನಿಖರವಾಗಿ 3 ಅಪಘಾತಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ 18–29 ವರ್ಷದ ಚಾಲಕರು.

(ii) ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಅಪಘಾತ ಮಾಡಿದ 30–50 ವರ್ಷದ ಚಾಲಕರು.

(iii) ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅಪಘಾತ ಮಾಡದ ಚಾಲಕರು.

ಪರಿಹಾರ : ಒಟ್ಟು ಚಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆ = 2000

(i) ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ನಿಖರವಾಗಿ 3 ಅಪಘಾತಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ 18–29 ವರ್ಷದ ಚಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆ = 61

ಆದ್ದರಿಂದ P (ನಿಖರವಾಗಿ 3 ಅಪಘಾತಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ 18–29 ವರ್ಷದ ಚಾಲಕರು) $= \frac{61}{2000} = 0.0305 \approx 0.031$

(ii) ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 1 ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಅಪಘಾತ ಮಾಡಿದ 30–35 ವರ್ಷದ ಚಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆ

= 125 + 60 + 22 + 18 = 225

ಆದ್ದರಿಂದ P (ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಅಪಘಾತ ಮಾಡಿದ 30–35 ವರ್ಷದ ಚಾಲಕ)

$= \frac{225}{2000} = 0.1125 \approx 0.113.$

(iii) ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅಪಘಾತ ಮಾಡದ ಚಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆ = 440 + 505 + 360 = 1305

ಆದ್ದರಿಂದ P(ಅಪಘಾತ ಮಾಡದ ಚಾಲಕರು) $= \frac{1305}{2000} = 0.653$.

ಉದಾಹರಣೆ 9 : ಒಂದು ತರಗತಿಯ 38 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ (ಅಧ್ಯಾಯ 14ರ ಉದಾಹರಣೆ 4ರ ಕೋಷ್ಟಕ 14.3).

(i) 46-50kg ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ತೂಕದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) ಇದರಲ್ಲಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ 0(ಸೊನ್ನೆ) ಮತ್ತು ಸಂಭವನೀಯತೆ 1 ಆಗಿರುವ ಒಂದೊಂದು ಘಟನೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :(i) ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ 38 ಮತ್ತು ತೂಕವು 46–50kg ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 3.

ಆದ್ದರಿಂದ P (46-50kg ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ತೂಕ) $= \frac{3}{38} = 0.079$

(ii) ಉದಾಹರಣೆಗೆ 30kg ತೂಕದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಘಟನೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಆದರೆ ಈ ತೂಕದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು '0' (ಸೊನ್ನೆ) ಇದೇ ರೀತಿ 30kg ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ತೂಕವಿರುವ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{38}{38} = 1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10 : ಬೀಜಗಳು ತುಂಬಿರುವ 5 ಚೀಲಗಳಿಂದ ತಲಾ 50 ಬೀಜಗಳನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಮೊಳಕೆಯೊಡೆಯಲು ಆದರ್ಶ ವಾತಾವರಣದಲ್ಲಿ ಇರಿಸಲಾಗಿದೆ. 20 ದಿನಗಳ ನಂತರ ಮೊಳಕೆಯೊಡೆದ ಪ್ರತಿ ಚೀಲದ ಬೀಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ದಾಖಲಿಸಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 15.11

ಚೀಲ	1	2	3	4	5
ಮೊಳಕೆಯೊಡೆದ ಬೀಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	40	48	42	39	41

ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮೊಳಕೆಯೊಡೆದ ಬೀಜಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 40ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬೀಜಗಳು.

(ii) ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 49 ಬೀಜಗಳು.

(iii) ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 35ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬೀಜಗಳು.

ಪರಿಹಾರ : ಒಟ್ಟು ಚೀಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 5

(i) 50 ಬೀಜಗಳಲ್ಲಿ 40ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಮೊಳಕೆಯೊಡೆದ ಬೀಜಗಳಿರುವ ಚೀಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 3

ಆದ್ದರಿಂದ P (1 ಚೀಲದಲ್ಲಿ 40ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬೀಜಗಳು ಮೊಳಕೆಯೊಡೆದುದು) $= \frac{3}{5} = 0.6$

(ii) 49 ಬೀಜಗಳು ಮೊಳಕೆಯೊಡೆದ ಚೀಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 0

P (1 ಚೀಲದಲ್ಲಿ 49 ಬೀಜಗಳು ಮೊಳಕೆಯೊಡೆದುದು) $= \frac{0}{5} = 0$

(iii) 35ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬೀಜಗಳು ಮೊಳಕೆಯೊಡೆದ ಚೀಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 5

ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{5}{5} = 1$

ಷರಾ (Remark) : ಈ ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0 (ಸೊನ್ನೆ) ಮತ್ತು 1 ರ ನಡುವಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 15.1

1. ಒಂದು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಪಂದ್ಯದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಬ್ಯಾಟ್ಸ್‌ವುಮನ್ (ಮಹಿಳಾ ದಾಂಡಿಗ) ಎದುರಿಸಿದ 30 ಎಸೆತಗಳಲ್ಲಿ 6 ಬೌಂಡರಿಗಳನ್ನು ಬಾರಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಅವಳು ಬೌಂಡರಿ ಹೊಡೆಯದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಇಬ್ಬರು ಮಕ್ಕಳಿರುವ 1500 ಕುಟುಂಬಗಳನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿದೆ.

ಒಂದು ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿನ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ	2	1	0
ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	475	814	211

ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆರಿಸಿದ ಒಂದು ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿ

(i) 2 ಹುಡುಗಿಯರಿರುವ (ii) 1 ಹುಡುಗಿಯಿರುವ (iii) ಹುಡುಗಿಯಿಲ್ಲದ

ಕುಟುಂಬದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು '1' ಆಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

3. ಅಧ್ಯಾಯ 14 ರ ವಿಭಾಗ 14.4 ರ ಉದಾಹರಣೆ 5ನ್ನು ನೋಡಿ. ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಆಗಸ್ಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಹುಟ್ಟಿದ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಮೂರು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ 200 ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಲಾಗಿದೆ ವಿವಿಧ ಫಲಿತಗಳ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಫಲಿತ	3 ಶಿರಗಳು	2 ಶಿರಗಳು	1 ಶಿರ	ಶಿರವಲ್ಲ
ಆವೃತಿ	23	72	77	28

ಮೂರು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಪುನಃ ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ 2 ಶಿರಗಳು ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯು 2400 ಕುಟುಂಬಗಳನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆರಿಸಿ, ಆದಾಯದ ಮಟ್ಟ ಮತ್ತು ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿರುವ ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಡೆಸಿತು. ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದೆ.

ಮಾಸಿಕ ಆದಾಯ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	ಕುಟುಂಬಕ್ಕಿರುವ ವಾಹನಗಳು			
	0	1	2	2ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು
7000ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	10	160	25	0
7,000–10,000	0	305	27	2
10,000–13,000	1	535	29	1
13,000–16,000	2	469	59	25
16,000 ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು	1	579	82	88

ಈಗ ಒಂದು ಕುಟುಂಬವನ್ನು ಆರಿಸಿದರೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕುಟುಂಬವನ್ನು ಆರಿಸಿದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಪ್ರತಿ ಮಾಸದ ಆದಾಯ ₹ 10,000 – 13,000 ಮತ್ತು ನಿಖರವಾಗಿ 2 ವಾಹನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದು.

(ii) ಪ್ರತಿ ಮಾಸದ ಆದಾಯ ₹ 16,000 ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಮತ್ತು ನಿಖರವಾಗಿ 1 ವಾಹನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದು.

(iii) ಪ್ರತಿ ಮಾಸದ ಆದಾಯ ₹ 7,000ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ವಾಹನವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದಿರುವುದು.

(iv) ಪ್ರತಿ ಮಾಸದ ಆದಾಯ ₹ 13,000 – 16,000 ಮತ್ತು 2ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ವಾಹನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದು.

(v) 1ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ವಾಹನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದಿರುವುದು.

6. ಅಧ್ಯಾಯ 14ರ ಕೋಷ್ಟಕ 14.7ನ್ನು ನೋಡಿ.

(i) ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಗಣಿತ ವಿಷಯದ ಕಿರುಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 20% ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕ ಪಡೆದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) 60 ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕ ಗಳಿಸಿದ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಷಯದ ಬಗ್ಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು 200 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಂದು ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಡೆಸಲಾಯಿತು. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿದೆ.

ಅಭಿಪ್ರಾಯ	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
ಇಷ್ಟ ಪಡುವವರು	135
ಇಷ್ಟ ಪಡದವರು	65

ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆರಿಸಿದರೆ

(i) ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಇಷ್ಟ ಪಡುವ

(ii) ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಇಷ್ಟ ಪಡದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಅಭ್ಯಾಸ 14.2ರ 2ನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನೋಡಿ. ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವಾಸಿಸುವ ಒಬ್ಬ ಇಂಜಿನಿಯರ್‌ಳ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಆಕೆಯ ಕೆಲಸದ ಸ್ಥಳದಿಂದ 7km ಕಡಿಮೆ ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದು.

(ii) ಆಕೆಯ ಕೆಲಸದ ಸ್ಥಳದಿಂದ 7km ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದು.

(iii) ಆಕೆಯ ಕೆಲಸದ ಸ್ಥಳದಿಂದ $\frac{1}{2}$ km ಒಳಗಿನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದು.

9. **ಚಟುವಟಿಕೆ :** ಒಂದು ಕಾಲಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ನಿಮ್ಮ ಶಾಲೆಯ ಗೇಟಿನ ಎದುರಿನಿಂದ ಹಾದುಹೋಗುವ ದ್ವಿಚಕ್ರ ವಾಹನಗಳು, ತ್ರಿಚಕ್ರ ವಾಹನಗಳು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಚಕ್ರದ ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು) ದಾಖಲಿಸಿ. ನೀವು ವೀಕ್ಷಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ವಾಹನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಾಹನ ದ್ವಿಚಕ್ರವಾಹನವಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. **ಚಟುವಟಿಕೆ :** ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ 3 ಅಂಕಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆಯಲು ತಿಳಿಸಿ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ಆರಿಸಿ. ಅವನು/ಅವಳು ಬರೆದ ಸಂಖ್ಯೆಯು 3ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು? 3ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತವು 3ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

11. 5kg ಎಂದು ನಮೂದಿಸಿದ ಗೋಧಿ ಹಿಟ್ಟಿನ 11 ಚೀಲಗಳು ನಿಜವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತೂಕಗಳುಳ್ಳ ಹಿಟ್ಟನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. (kg ಗಳಲ್ಲಿ)

4.97 5.05 5.08 5.03 5.00 5.06 5.08 4.98 5.04 5.07 5.00

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚೀಲವನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆರಿಸಿದಾಗ 5kg ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಹಿಟ್ಟನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಚೀಲವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಅಭ್ಯಾಸ 14.2 ರ ಪ್ರಶ್ನೆ 5 ರಲ್ಲಿ 30 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಗರದಲ್ಲಿ ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಲ್ಫರ್ ಡೈ ಆಕ್ಸೈಡ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು (ಮಿಲಿಯನ್ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ) ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸಲು ಕೇಳಲಾಗಿತ್ತು. ಈ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಈ ಯಾವುದೇ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ 0.12–0.16 ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಸಲ್ಫರ್ ಡೈ ಆಕ್ಸೈಡ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಅಭ್ಯಾಸ 14.2ರ ಪ್ರಶ್ನೆ 1ರಲ್ಲಿ ತರಗತಿಯ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ರಕ್ತದ ಗುಂಪುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಕೇಳಲಾಗಿತ್ತು. ಈ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಬಳಸಿ ತರಗತಿಯ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆರಿಸಿದಾಗ ರಕ್ತದ ಗುಂಪು AB ಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15.3 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುತ್ತೀರಿ.

1. ಪ್ರಯೋಗದ ಕೆಲವು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು ಆ ಪ್ರಯೋಗದ ಘಟನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
2. 'E' ಘಟನೆಯ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ P(E)

$$P(E) = \frac{\text{ಘಟನೆ E ಸಂಭವಿಸುವ ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

3. ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0 ಮತ್ತು 1 ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ (0 ಮತ್ತು 1 ನ್ನು ಸೇರಿ).

ಅನುಬಂಧ – 2

ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

A 2.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಪ್ರಾಥಮಿಕಶಾಲಾ ಹಂತದಿಂದಲೂ ನಮ್ಮ ಸುತ್ತಲಿನ ಜಗತ್ತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಬಿಡಿಸುತ್ತಾ (ಪರಿಹರಿಸುತ್ತಾ) ಬಂದಿದ್ದೀರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸರಳಬಡ್ಡಿಗಳನ್ನು ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವಿರಿ. ಈ ಸೂತ್ರವು ಬಡ್ಡಿ, ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮೂರು ಅಂಶಗಳಾದ ಅಸಲು, ಕಾಲಾವಧಿ, ಬಡ್ಡಿದರ ಇವುಗಳ ಸಂಭಂದವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸೂತ್ರವು **ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣಕ್ಕೆ** ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿ ಎಂದರೆ ನೈಜ ಜೀವನದಲ್ಲಿನ ಕೆಲವು ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಗಣಿತದ ಸಂಬಂಧ ಸೂಚಕ.

ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿನ ಅನೇಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರ ರೂಪಿಸಲು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯು ಬಳಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

- ಉಪಗ್ರಹ ಉಡಾವಣೆ ಮಾಡುವುದು.
- ಮಾನ್ಸೂನ್ ಮಳೆ ಬರುವ ಮುನ್ಸೂಚನೆಯನ್ನು ಕೊಡುವುದು.
- ವಾಹನಗಳಿಂದಾಗುವ ಪರಿಸರ ಮಾಲಿನ್ಯದ ನಿಯಂತ್ರಣ ಮಾಡುವುದು.
- ಬೃಹತ್ ನಗರಗಳಲ್ಲಿ ವಾಹನ ದಟ್ಟನೆಯ ಜಂಜಾಟವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವುದು.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಿಮಗೆ ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅದನ್ನೇ "**ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣ**" ಎಂದು ಕರೆದಿದೆ.

ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು 'ನೈಜ ಜೀವನದ ಘಟನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆ' ಯನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡು ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದ "ಗಣಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆ" ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿ ಅದರ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನೈಜ ಜೀವನದ ಸಮಸ್ಯೆಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅನಂತರದಲ್ಲಿ ಈ ಪರಿಹಾರವು ನೈಜ ಜೀವನದ ಘಟನೆಗೆ ಆಧರಿಸಿ ಎಷ್ಟರಮಟ್ಟಿಗೆ ಮಾನ್ಯತೆ ಅಥವಾ ಸಿಂಧುತ್ವ ಹೊಂದುತ್ತದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣವು ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.

ಸೂತ್ರರಚನೆ (Formulation)

ಪರಿಹಾರ (Solution)

ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ (interpretation)

ಮೌಲ್ಯೀಕರಣ (validation)

ವಿಭಾಗ A 2.2 ರಲ್ಲಿ ನೀವು ಶಾಬ್ದಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬಳಸಿಕೊಂಡ ಕಾರ್ಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದರೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ನೀವು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಿದ ಶಾಬ್ದಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಹೋಲುವಂತಹ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈಗ ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಅನಂತರ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬಳಸಿಕೊಂಡ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದಲ್ಲೂ ಬಳಸುತ್ತೇವೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಭಾಗ A2.3 ನಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸರಳ ಮಾದರೀಗಳನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದೆ.

ಭಾಗ A2.4 ನಲ್ಲಿ ಮಾದರೀಕರಣ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಒಟ್ಟಾರೆ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು, ಅದರ ಉಪಯೋಗ ಮತ್ತು ಇತಿಮಿತಿಗಳನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸೋಣ.

A2.2 ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಪುನರಾವಲೋಕನ

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಬಿಡಿಸಿದಂತಹ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸೋಣ. ಪ್ರಾರಂಭಕ್ಕೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದ ಬಗೆಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಉದಾ 1 : ನನ್ನ ಕಾರಿನಲ್ಲಿ 432 km ದೂರವನ್ನು ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು 48 ಲೀಟರ್ ಪೆಟ್ರೋಲ್ ವ್ಯಯವಾಗಿದೆ. ನಾನು ತಲುಪಬೇಕಾದ ಸ್ಥಳವು ಇಲ್ಲಿಂದ 180 km ಅಂತರದಲ್ಲಿದೆ ಆ ದೂರವನ್ನು ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ನನ್ನಗೆ ಎಷ್ಟು ಪೆಟ್ರೋಲ್‌ನ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ.

ಪರಿಹಾರ : ಈ ಸಮಸ್ಯಾ ಪರಿಹಾರವು ಯಾವ ಹಂತಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ

ಹಂತ 1 : ಸೂತ್ರ ರಚನೆ

ಹೆಚ್ಚು ದೂರ ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಹೆಚ್ಚು ಪೆಟ್ರೋಲ್ ಬೇಕು ಎಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ ಅಂದರೆ ಪ್ರಯಾಣದ ದೂರಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಪೆಟ್ರೋಲ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣ ನೇರವಾಗಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ.

432 km ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಪೆಟ್ರೋಲ್ = 48 ಲೀಟರ್

180 km ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಪೆಟ್ರೋಲ್ =?

ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ :

ನಾನು ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ದೂರ = x

ನನಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಿದ್ದ ಪೆಟ್ರೋಲ್ = y

y ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ x ನೊಂದಿಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $y = kx$ ಇಲ್ಲಿ k ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ. ನಾನು 432km ನ್ನು 48 ಲೀಟರ್ ಪೆಟ್ರೋಲ್‌ನಿಂದ ಪ್ರಯಾಣಿಸಬಹುದು.

ಹಾಗಾಗಿ $y = 48, x = 432$.

ಆದ್ದರಿಂದ $K = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}$

$y = kx$ ಆದ್ದರಿಂದ $y = \frac{1}{9}x$ .... (1)

ಸಮೀಕರಣ ಅಥವಾ ಸೂತ್ರ – (1) : ಅವಶ್ಯಕ ಇರುವ ಪೆಟ್ರೋಲ್ ಮತ್ತು ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ದೂರದ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 2 : ಪರಿಹಾರ :

180 km ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಪೆಟ್ರೋಲ್‌ನ್ನು ನಾವು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ $x = 180$ ಆದಾಗ y ಎಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕು. $x = 180$ ಎಂದು ಸೂತ್ರ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸೋಣ ಆಗ $y = \frac{1}{9}x$, $y = \frac{1}{9} \times 180 = \frac{180}{9} = 20$

$y = 20$.

ಹಂತ 3 : ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ $y = 20$, ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ನಾವು 180 km ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು 20 ಲೀಟರ್ ಪೆಟ್ರೋಲ್‌ಬೇಕು.

ಹೀಗೊಂದು ಪ್ರಸಂಗವನ್ನು ಯೋಚಿಸಿ, ಇದೇ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನೀವು ಪ್ರಯಾಣಿಸುವ ಸಂದಂರ್ಭಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದೇ? ಅದು ಸಾಧ್ಯವಾಗದೇ ಇರಬಹುದು! ಸಂದರ್ಭ ಹೀಗಿದೆ, ನೀವು ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತಿರುವ $432km$ ರಸ್ತೆ ಪರ್ವತ ಪ್ರದೇಶವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ 180 km ರಸ್ತೆ ಸಮತಟ್ಟು ಪ್ರದೇಶವಾಗಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಪ್ರಯಾಣದಲ್ಲಿ ಬೆಟ್ಟ–ಗುಡ್ಡಗಳ ಓಡಾಟದಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಪೆಟ್ರೋಲ್ ಖರ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಅದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಸಮತಟ್ಟು ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಪೆಟ್ರೋಲ್ ಕಡಿಮೆ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿನ ಪ್ರಯಾಣದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯು ಒಂದೇ ರೀತಿಯದ್ದಾಗಿದ್ದರೆ ಸೂತ್ರ ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲವಾದರೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅಥವಾ ಪ್ರಯಾಣದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಇರುವುದರಿಂದ ಪ್ರಯಾಣದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಪೆಟ್ರೋಲ್‌ನ ಬಳಕೆಯು ತೀರಾ ಕಡಿಮೆಯೂ ಆಗಬಹುದು. ನಾವು ಪೆಟ್ರೋಲ್‌ನ ಖರ್ಚು, ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ದೂರಕ್ಕೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುವಾಗ 'ರಸ್ತೆ' ಹಾಗೂ 'ಪ್ರಯಾಣ' ಎರಡೂ ಸಹ ಏಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಊಹೆಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಸುಧೀರ್ ಎಂಬುವವರು ವಾರ್ಷಿಕ 8% ಸರಳಬಡ್ಡಿ ದರದಲ್ಲಿ ₹ 15,000/– ಗಳನ್ನು ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಹಣದ ಹಿಂಪಡೆಯುವಿಕೆಯಿಂದ ₹ 19.000/– ಬೆಲೆಯ ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಖರೀದಿಸಬೇಕೆಂದಿದ್ದಾರೆ. ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಅನುಕೂಲವಾಗಲು ₹ 15,000/– ನ್ನು ಎಷ್ಟು ಕಾಲದವರೆಗೆ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಿರಬೇಕು?

ಪರಿಹಾರ :

ಹಂತ 1 : ಸೂತ್ರ ರಚನೆ

ಈ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಅಸಲು, ಬಡ್ಡಿದರ ಗೊತ್ತಿದೆ. ₹ 15,000/–ದ ಜೊತೆಗೆ ಬಡ್ಡಿ ಹಣ ಸೇರಿಸಿ ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿದೆ. ಹಣ ಎಷ್ಟು ಕಾಲವಿದ್ದರೆ ಅವರ ಅಪೇಕ್ಷೆ ನೆರವೇರಬಹುದೆಂದು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ :

ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ಸೂತ್ರ = $I = \dfrac{Pnr}{100}$, ಇಲ್ಲಿ P = ಅಸಲು, n = ಅವಧಿ, r = ಬಡ್ಡಿಯ ದರ

I = ದೊರೆತ ಬಡ್ಡಿ

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ P = ರೂ. 15,000/-

ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ಸುಧೀರನಿಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಹಣ = ₹ 19,000/-

ಹಾಗಾಗಿ ಗಳಿಸಬೇಕಾದ ಬಡ್ಡಿ = ₹ (19,000–15,000) = ₹ 4,000/–

ಈಗ ₹ 15,000/– ವನ್ನು ಠೇವಣಿ ಇಡಬೇಕಾದ ಅವಧಿ = n ವರ್ಷಗಳು ಎಂದಿರಲಿ

₹ 15,000/– ಕ್ಕೆ ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿ ದರ 8%ರಂತೆ ಗಳಿಸುವ ಬಡ್ಡಿ = I

ಆಗ $I = \dfrac{1500 \times n \times 8}{100} = 1200\, n$

ಆದ್ದರಿಂದ $I = 1200\ n$ .... (1)

(1) ಅಸಲು ₹ 15,000/– ಮತ್ತು 8% ನ ಬಡ್ಡಿದರದಲ್ಲಿ ಸರಳಬಡ್ಡಿ ಹಾಗೂ ಅವಧಿಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ನಮಗೆ ₹ 4000/– ಬೇಕಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$4000 = 1200\ n$ .... (2)

$n = 4000/1200 = \dfrac{40}{12} = 3\dfrac{4}{12} = 3\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಬೇಕಾದ ಅವಧಿ = $3\,{}^{1}\!/_{3}$ ವರ್ಷಗಳು

ಹಂತ 3 : ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : $n=3\frac{1}{3}$, ವರ್ಷದ ಮೂರನೆ ಒಂದು ಭಾಗ ಅಂದರೆ 4 ತಿಂಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ 3 ವರ್ಷ 4 ತಿಂಗಳಾದ ಮೇಲೆ ಸುಧೀರ್ ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಖರೀದಿಸಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು (ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು) ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಅವೆಂದರೆ

(1) ಈ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು ಬದಲಾಗಿಲ್ಲ

(2) ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರದ ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚಳವಾಗಿಲ್ಲ. ಇಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ $I=\frac{Pnr}{100}$ ಸೂತ್ರ ಅನ್ವಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ನದಿಯ ದಂಡೆಯ ಆಚೀಚೆಗೆ ಇರುವ ಎರಡು ಗ್ರಾಮಗಳಿಗೆ ಸಂಪರ್ಕ ಕಲ್ಪಿಸುವ ಮೋಟಾರ್‌ಬೋಟ್ (ಮೋಟಾರು ದೋಣಿ) ಲಭ್ಯವಿದೆ. ಅದು ಒಂದು ತೀರದ ಊರಿನಿಂದ ನದಿ ಹರಿಯುವಿಕೆಯ ಎದುರು ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಊರನ್ನು ಸೇರಲು 6 ಗಂಟೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಆ ಮೇಲ್‌ತೀರದ ಗ್ರಾಮದಿಂದ ಕೆಳತೀರದ ಗ್ರಾಮ ಸೇರಲು ಐದು ಗಂಟೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ನದಿಯ ನೀರಿನ ಹರಿಯುವಿಕೆಯ ಜವ (speed) ವು $2km/h$ ಇದ್ದರೆ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುವ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಮೋಟಾರ್‌ಬೋಟ್‌ನ ವೇಗವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಹಂತ 1: ಸೂತ್ರರಚನೆ : ನಮಗೆ ನದಿಯ ಹರಿಯುವಿಕೆಯ ವೇಗ ಮತ್ತು ಮೋಟಾರ್ ಬೋಟ್ ಎರಡೂ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತಲುಪಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲ ಗೊತ್ತಿದೆ. ನಾವು ಸ್ಥಿರ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಬೋಟ್‌ನ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ : ಬೋಟ್‌ನ ವೇಗ x, t – ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲ ಮತ್ತು y – ಚಲಿಸಿದದೂರ ಎಂದಿರಲಿ.

ದೂರ = ವೇಗ × ಕಾಲ . ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ.

ಆಗ $y = t\,x$ .... (1)

ಈ ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ d ಆಗಿರಲಿ ನೀರಿನ ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಬೋಟ್ ಚಲಿಸುವಾಗ ಬೋಟ್‌ನ ನೈಜ ವೇಗ = ಬೋಟಿನ ವೇಗ – ನದಿಯ ವೇಗ ಏಕೆಂದರೆ ಬೋಟ್ ನದಿಯ ಹರಿಯುವಿಕೆಯ ಎದುರಾಗಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲ್‌ತೀರದ ಊರಿಗೆ ಹೋಗುವಾಗ ಬೋಟ್‌ನ ವೇಗ

$= (x-2)\ km/h$

ಮೇಲ್ ತೀರದ ಊರಿಗೆ ತಲುಪಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲ = 6 ಗಂಟೆ

ಆದ್ದರಿಂದ (1) ರಿಂದ $d = 6\,(x-2)$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ .... (2)

ಬೋಟ್ ಕೆಳತೀರದ ಊರಿಗೆ ಚಲಿಸುವಾಗ ಬೋಟಿನ ವೇಗಕ್ಕೆ ನದಿಯ ವೇಗವು ಸೇರುತ್ತದೆಯಲ್ಲವೇ? ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಬೋಟಿನ ವೇಗ = $(x+2)\ km/h$

ಮೇಲ್‌ತೀರದ ಊರಿನಿಂದ ಕೆಳತೀರದ ಊರಿಗೆ ಇರುವ ದೂರದಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿಲ್ಲ.

ಈಗ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲ = 5 ಗಂಟೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $d = 5\,(x+2)$ .... (3)

(2) ಮತ್ತು (3) ನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡರೆ $5(x+2) = 6\,(x-2)$ .... (4)

ಹಂತ2 : ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

$$5(x+2) = 6\,(x-2)$$

$$\therefore 5x + 10 = 6x - 12$$

$$6x - 5x = 10 + 12 \ \therefore\ x = 22.$$

$\therefore$ ಬೋಟಿನ ವೇಗ = 22 km/h

ಹಂತ3 : ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ

$x = 22$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಸ್ಥಿರ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಬೋಟ್‌ನ ವೇಗ (ಜವ) 22 km/h

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ನದಿಯ ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗ ಎಲ್ಲ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸಮನಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಬೋಟ್ ನದಿಯ ದಡದಿಂದ ಚಲಿಸಿ ನದಿಯ ಮಧ್ಯಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಸೇರಬೇಕಾದ ಸ್ಥಳ (ತೀರ) ಹತ್ತಿರ ಬಂದಾಗ ಚಲನೆಯ ವೇಗವನ್ನು ತಗ್ಗಿಸಿಕೊಂಡು ಆ ಜಾಗದ ಸಮೀಪಕ್ಕೆ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಬೋಟ್‌ನ ವೇಗವು ದಡ ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯ ಭಾಗ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿರುತ್ತದೆ. ದಡಗಳ (ತೀರ) ಸಮೀಪದಲ್ಲಿ ಬೋಟ್ ಕೆಲ ಸಮಯ ಮಾತ್ರ ಇರುವುದರಿಂದ ನದಿಯ ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗವು ಸ್ವಲ್ಪ ಸಮಯ ಮಾತ್ರ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಈ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ನದಿಯ ವೇಗದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ನಗಣ್ಯ ಮಾಡಬಹುದು. ಅದೇ ರೀತಿ ಬೋಟ್‌ನ ವೇಗದಲ್ಲಾಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ ನಗಣ್ಯವಾದುದು. ಮತ್ತೊಂದು ಅಂಶವೆಂದರೆ ನದಿಯ ನೀರಿನ ಮತ್ತು ಬೋಟ್‌ನ ತಳದ ಭಾಗದ ನಡುವಿನ ಘರ್ಷಣೆ (ಪ್ರತಿರೋಧ friction) ಇರುತ್ತದೆ. ಇದು ಸ್ವಲ್ಪ ಪ್ರಮಾಣದಾಗಿದ್ದು ಇದರ ಪರಿಣಾಮವು ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆ ಎಂದು ಪರಿಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ,

1. ನದಿಯ ನೀರಿನ ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗ ಹಾಗೂ ಬೋಟಿನ ವೇಗವು ಎಲ್ಲಾ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
2. ನೀರು, ಬೋಟ್ ಹಾಗೂ ಗಾಳಿಯ ಒತ್ತಡದಿಂದ ಆಗುವ ಘರ್ಷಣೆಯು (ಪ್ರತಿರೋಧವು) ನಗಣ್ಯವಾದುದೆಂದು. ನಾವು ಊಹಾನಿರ್ಣಯ (assume) ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಎರಡು ಊಹಾನಿರ್ಣಯಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ನಾವು ಬೋಟ್‌ನ ವೇಗವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

ಈವರೆಗೆ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದ ಶಾಬ್ದಿಕಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಲ್ಲಿ 3 ಹಂತಗಳು ಅಳವಡಿಕೆಯಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ ಅವುಗಳೆಂದರೆ.

1. ಸೂತ್ರ ರಚನೆ. (Formulation)

ನಾವು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನವಾಗಿ ಪ್ರಭಾವ ಬೀರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇವು ಸುಸಂಬದ್ಧ ಅಂಶಗಳು (Relevant).

ನಮ್ಮ ಮೊದಲನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಸುಸಂಬದ್ಧ ಅಂಶಗಳೆಂದರೆ ಚಲಿಸಿದ ದೂರ ಮತ್ತು ಬಳಕೆಯಾದ ಪೆಟ್ರೋಲ್. ರಸ್ತೆಯ ಸ್ಥಿತಿ, ರಸ್ತೆಯ ರೀತಿ, ಚಾಲನೆ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದ ವೇಗ ಮುಂತಾದ ಸಣ್ಣ ಪುಟ್ಟ ಅಂಶಗಳನ್ನು 'ನಗಣ್ಯ'ವಾಗಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಹಾಗಿಲ್ಲವಾಗಿದ್ದರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ತುಂಬಾ ಜಟಿಲವಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ನಾವು ನಗಣ್ಯ ಮಾಡಿದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅಸಂಬದ್ಧ ಅಂಶಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅನಂತರ ನಾವು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸೂತ್ರಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಗಣಿತೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ.

2. **ಪರಿಹಾರ :** ಹಂತ 1 ರಲ್ಲಿ ಗಣಿತೀಕರಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾದ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಪರಿಹರಿಸುತ್ತೇವೆ.

3. **ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ :** ಹಂತ 2 ರಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಪರಿಹಾರವು ದತ್ತ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಹೇಗೆ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಕೆಳಗೆ ನಿಮ್ಮ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದೆ. ಮೂರು ಹಂತಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದರಿಂದ ಈ ವಿಷಯವು ನಿಮಗೆ ಎಷ್ಟರ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಮನವರಿಕೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೀವು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ A2.1

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸೂತ್ರ ರಚನೆ, ಪರಿಹಾರ, ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸುಸಂಬದ್ಧ, ಅಸಂಬದ್ಧ ಅಂಶಗಳು ಯಾವುವು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ತಿಳಿಸಿ.

1. ಒಂದು ಉದ್ಯಮಕ್ಕೆ ಕೆಲವು ಕಾಲದವರೆಗೆ ಒಂದು ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ ಎಂದಿರಲಿ. ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ನ್ನು ಬಾಡಿಗೆಗೆ ಪಡೆಯಬಹುದು ಅಥವಾ ಖರೀದಿಸಬಹುದು. ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಬಾಡಿಗೆ ₹ 2,000/– ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ನ ಬೆಲೆ ₹ 25,000/–. ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ದೀರ್ಘಾವಧಿಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಇಷ್ಟೊಂದು ಹೆಚ್ಚಿನ ಬಾಡಿಗೆ ತೆರುವುದಕ್ಕಿಂತ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಖರೀದಿಸುವುದೇ ಅಗ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ.

   ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ನ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಒಂದು ತಿಂಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಎಂದು ಊಹಿಸೋಣ. ಆಗ ಬಾಡಿಗೆಗೆ ಪಡೆಯುವುದೇ ಅಗ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಕನಿಷ್ಠ ಎಷ್ಟು ಅವಧಿಯ ಬಳಕೆಯು ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಖರೀದಿಯನ್ನು ಬಾಡಿಗೆಗಿಂತ ಅಗ್ಗವಾಗಿಸುವುದು ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿ.

2. ಒಂದು ಕಾರು A ಎಂಬ ಸ್ಥಳದಿಂದ 40 km/h ವೇಗ (ಜವ) ದಿಂದ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿ B ಎಂಬ ಸ್ಥಳವನ್ನು ತಲುಪುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ B ಯಿಂದ A ಗೆ ಒಂದು ಕಾರು 30 km/h. ವೇಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತಿದೆ. A ಮತ್ತು B ಗಳ ಅಂತರ 100 km ಎಂದಿರಲಿ. ಹಾಗಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಸಮಯದ ನಂತರ ಈ ಕಾರುಗಳು ಒಂದನೊಂದು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ? ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

3. ಭೂಮಿಯಿಂದ ಚಂದ್ರನಿಗೆ 3,84,000 km ಅಂತರವಿದೆ. ಚಂದ್ರನು ಭೂಮಿಯನ್ನು ಸುತ್ತುವ ಪಥ ಬಹುತೇಕ ವೃತ್ತಾಕಾರವಾಗಿದೆ. ಭೂಮಿಯನ್ನು ಒಂದು ಸುತ್ತು ಹಾಕಲು ಚಂದ್ರನಿಗೆ 24 ಗಂಟೆಗಳು ಬೇಕು ಎಂದು ಊಹಿಸಿ, ಚಂದ್ರನು ಯಾವ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಭೂಮಿಯನ್ನು ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ಹಾಕುವನು ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿ.

   (π = 3.14 ಎಂದು ಬಳಸಿ. ವೃತ್ತದ ಪರಧಿ = $2\pi r$)

4. ಒಂದು ಕುಟುಂಬವು ವಾಟರ್ ಹೀಟರ್ ಬಳಸದೇ ಇರುವ ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ ಪಾವತಿಸುವ ವಿದ್ಯುತ್‌ಬಿಲ್‌ನ ಸರಾಸರಿ ಮೊಬಲಗು ₹ 1,000/–. ಅದೇ ರೀತಿ ವಾಟರ್‌ಹೀಟರ್ ಬಳಸುವ ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ ಪಾವತಿಸುವ ವಿದ್ಯುತ್‌ಬಿಲ್‌ನ ಸರಾಸರಿ ಮೊಬಲಗು ₹ 1,240/–. ವಾಟರ್ ಹೀಟರ್‌ಗೆ ವಿದ್ಯುತ್ ಬಳಸಲು ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಹಣ ಗಂಟೆಗೆ ₹ 8/–. ದಿನಂಪ್ರತಿ ವಾಟರ್ ಹೀಟರ್ ಬಳಸಿರುವ ಸರಾಸರಿ ಕಾಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

A2.3 ಕೆಲವು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಗಳು

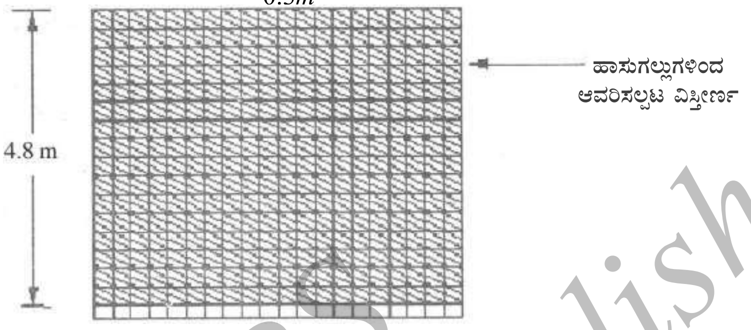
ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗಿನ ನಮ್ಮ ವಿಚಾರ ವಿನಿಮಯದಲ್ಲಿ ಹೊಸತೇನು ಕಾಣಲಿಲ್ಲ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಈಗಾಗಲೇ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದ್ದ 3 ಹಂತಗಳಿಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ಹಂತ ಸೇರಿಸಲಿದ್ದೇವೆ. ಅದೆಂದರೆ 'ಸಿಂಧುತ್ವ (ಮೌಲ್ಯೀಕರಣ) ಹಾಗೆಂದರೇನು? ನೈಜಜೀವನದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ವಾಸ್ತವ ಜೀವನಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗದಂತಹ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನೀಡುವ 'ಮಾದರಿ' ಯನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ವಾಸ್ತವದೊಂದಿಗೆ 'ಉತ್ತರ' ವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಮತ್ತು ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆಯನ್ನೂ ಸುಧಾರಿಸುವ ಕಾರ್ಯಕ್ಕೆ ಸಿಂಧುತ್ವ ಸ್ಥಿರೀಕರಣ/ಮೌಲ್ಯೀಕರಣ (Validity) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮಾದರೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಇದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಹಂತ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮೌಲ್ಯೀಕರಣದ ನಂತರ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡಬೇಕಾಗದಿರುವ ಒಂದು ಮಾದರಿಯೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 4 : ನೀವು 6m, ಉದ್ದ 5m ಅಗಲದ ಕೊಠಡಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೀರಿ ಹಾಗೂ ಅದರ ನೆಲಕ್ಕೆ ಮೊಸಾಯಿಕ್ ಟೈಲ್ಸ್‌ಗಳನ್ನು(ಹಾಸುಗಲ್ಲು) ಹಾಕಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಹಾಸುಗಲ್ಲುಗಳು 30cm ಬಾಹುವಿನ ಚಚ್ಚೌಕ ಬಿಲ್ಲೆಗಳಾಗಿವೆ. ನಿಮಗೆ ಇಂತಹ ಎಷ್ಟು ಬಿಲ್ಲೆಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿಕೊಂಡು ಬಿಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ :

ಹಂತ 1: ಸೂತ್ರ ರಚನೆ : ನಾವು ಕೊಠಡಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ) ಹಾಗೂ ಹಾಸುಗಲ್ಲಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು. ಪ್ರತಿ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಲ್ಲೆಯ ಉದ್ದ 30cm = 0.3m ಕೊಠಡಿಯ ಉದ್ದ 6m. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಠಡಿಯ ಉದ್ದದವರೆಗೂ ಒಂದು ಸಾಲಿಗೆ $\frac{6m}{0.3m}=20$ ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಬಹುದು. (ಚಿತ್ರ A2.1)



ಕೊಠಡಿಯ ಅಗಲ 5m, ಆದ್ದರಿಂದ. $\frac{5m}{0.3m}=16.67$. ಹಾಗಾಗಿ 16 ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಅಗಲದ ಗುಂಟ ಜೋಡಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ 16 ಸಾಲು ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಬಹುದು.

ಅಗಲದ ಗುಂಟ 16×0.3 = 4.8m ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ $5 - 4.8 = 0.2$m ಅಗಲದ ಗುಂಟ ಬಿಲ್ಲೆ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿಲ್ಲ. 0.2m ನ್ನು ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ತುಂಡುಮಾಡಿ ಜೋಡಿಸಿ ತುಂಬಬೇಕು. ಬಿಲ್ಲೆಯು 0.3 m ಇದೆ. ಇದನ್ನು 2 ಸಮಭಾಗ ಮಾಡಿದರೆ 0.15 m ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದು 0.2m ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು 2 ಸಮ ಭಾಗಮಾಡಿದರೆ, 2 ಭಾಗವನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ:

ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಬಿಲ್ಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

= (ಉದ್ದದ ಗುಂಟ ಬೇಕಾದ ಬಿಲ್ಲೆಗಳು × ಅಗಲದ ಗುಂಟ

ಬೇಕಾದ ಬಿಲ್ಲೆಗಳು) + ತುಂಬಿಸದೇ ಉಳಿದ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಬಿಲ್ಲೆಗಳು

ಪರಿಹಾರ : ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ನೋಡಿರುವಂತೆ ಉದ್ದದ ಗುಂಟ ಬೇಕಾದ ಬಿಲ್ಲೆಗಳು 16 ಮತ್ತು ಅಗಲದ ಗುಂಟ ಬೇಕಾದ ಬಿಲ್ಲೆಗಳು 16. ಹಾಗೂ ತುಂಬಿಸದೇ ಉಳಿದ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಬಿಲ್ಲೆಗಳು = 20

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸುವುದರಿಂದ, $(20 \times 16) + 20 = 320 + 20 = 340$.

ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : ನಮಗೆ ಕೊಠಡಿಯ ನೆಲಕ್ಕೆ ಹಾಸಲು 340 ಬಿಲ್ಲೆಗಳು ಬೇಕು.

ಸಿಂಧುತ್ವ (ಮೌಲ್ಯೀಕರಣ) : ಈ ಪರಿಹಾರದ ಕಾರ್ಯಸಾಧ್ಯತೆ (ಸಿಂಧುತ್ವ) ಎಷ್ಟು? ಅಂದರೆ ನಿಜಜೀವನದಲ್ಲಿ, ಹಾಸುಗಲ್ಲು ಜೋಡಿಸುವ ಕೆಲಸಗಾರ ಇನ್ನಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿನ ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸಲು ಕೇಳಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ ಕತ್ತರಿಸುವಾಗ ಬಿಲ್ಲೆಗಳು ಹಾಳಾಗಬಹುದು. ನಿಮ್ಮ ಕೆಲಸಗಾರನು ಚತುರತೆ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಬಿಲ್ಲೆಗಳು ಹಾಳಾಗದಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು, ಚತುರ ಕೆಲಸಗಾರನಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಬಿಲ್ಲೆಗಳು ಹಾಳಾಗಲೂಬಹುದು.

ಇದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ನಮ್ಮ ಸೂತ್ರ (1) ನ್ನು ಬದಲಿಸಬೇಕಿಲ್ಲ. ಈ ಸೂತ್ರವು ನಿಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಬಿಲ್ಲೆಗಳ ಸ್ಥೂಲ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಇಷ್ಟು ಸಾಕು.

ಈಗ ಇನ್ನೊಂದು ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.

2000 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ವಿಶ್ವ ಸಂಸ್ಥೆಯ (U.N .O) 191 ಸದಸ್ಯ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು ಒಂದು ಘೋಷಣೆಗೆ ಸಮ್ಮತಿಸಿ ಸಹಿ ಹಾಕಿದವು. ಈ ಘೋಷಣೆಯು ಸಹಿಹಾಕಿದ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳು 2015 ರ ವೇಳೆಗೆ ಕೆಲವು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯ ಗುರಿಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದಾಗಿತ್ತು ಇದನ್ನು 'ಮಿಲೆನಿಯಮ್ ಡೆವಲಪ್‌ಮೆಂಟ್ ಗೋಲ್ಸ್' (ಸಹಸ್ರಮಾನದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಗುರಿಗಳು) ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗುರಿ ಲಿಂಗತಾರತಮ್ಯ ನಿವಾರಿಸುವುದು ಅಥವಾ ಲಿಂಗ ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು. ಈ ಅಂಶವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರುವುದನ್ನು ಅರಿಯಲು ಬಳಸುವ ಒಂದು ಸೂಚಕವೆಂದರೆ ಪ್ರಾಥಮಿಕ, ಮಾಧ್ಯಮಿಕ, ಪ್ರೌಢ ಹಾಗೂ ಉನ್ನತ ಶಿಕ್ಷಣ ಪಡೆಯುತ್ತಿರುವ ಹುಡುಗಿ ಹಾಗೂ ಹುಡುಗರ ಅನುಪಾತ. ಭಾರತವೂ ಈ ಘೋಷಣೆಗೆ ಸಹಿ ಹಾಕಿರುವ ಸದಸ್ಯ ರಾಷ್ಟ್ರವಾಗಿದ್ದು ಈ ಅನುಪಾತದ ಸುಧಾರಣೆಗೆ ಬದ್ಧವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿರುವ ಕೋಷ್ಟಕವು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರ ಶೇಕಡಾ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ (ಕೋಷ್ಟಕ A2.1)

ಕೋಷ್ಟಕ A2.1

ವರ್ಷ	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರ ದಾಖಲಾತಿ (ಶೇಕಡಾವಾರು)	
1991 – 92	41.9	
1992 – 93	42.6	
1993 – 94	42.7	
1994 – 95	42.9	
1995 – 96	43.1	
1996 – 97	43.2	
1997 – 98	43.5	
1998 – 99	43.5	
1999 – 2000	43.6 *	}ದತ್ತಾಂಶವು ತಾತ್ಕಾಲಿಕ
2000 – 2001	43.7 *	}ದತ್ತಾಂಶವು ತಾತ್ಕಾಲಿಕ
2001 – 2002	44.1 *	}ದತ್ತಾಂಶವು ತಾತ್ಕಾಲಿಕ

(ಆಧಾರ, ಭಾರತ ಸರ್ಕಾರದ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ವೆಬ್‌ಸೆಟ್ – ಶಿಕ್ಷಣ ಅಂಕಿ – ಅಂಶ)

ಈ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾದ ಹೆಣ್ಣು ಮಕ್ಕಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ವಿವರಿಸಿ ಹಾಗೂ ಯಾವ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರ ದಾಖಲಾತಿ ಅನುಪಾತವು 50% ಆಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಮೊದಲು ನಾವು ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಗಣಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸೋಣ.

ಹಂತ 1 : ಸೂತ್ರ ರಚನೆ

ಕೋಷ್ಟಕ A2.1 ನಿಂದ 1991–92 ರಿಂದ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ದಾಖಲಾತಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವರ್ಷದ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾಗುವುದರಿಂದ ನಾವು 1991–92, 1992–93 ಅನ್ನುವ ಬದಲು 1991, 1992 ಈ ರೀತಿ ನಮೂದಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರ ದಾಖಲಾತಿಯು ಕೊಷ್ಟಕದಲ್ಲಿನ ಶೇಕಡಾದಂತೆಯೇ ಹೆಚ್ಚಳವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎಷ್ಟು ವರ್ಷಗಳು ಎನ್ನುವುದು ಮುಖ್ಯವೇ ವಿನಃ ಯಾವ ವರ್ಷ ಎನ್ನುವುದಲ್ಲ. (ಇದಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೆ ಯಾಗುವ ಒಂದು ಸನ್ನಿವೇಶ ₹ 1500/– ಕ್ಕೆ 8% ರಂತೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷಕ್ಕೆ ಆಗುವ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಮಾಡುವಾಗ ಅದು 1999 ರಿಂದ 2002, ಆದರು 2001 ರಿಂದ 2004 ರವರೆಗೆ ಆದರೂ ಒಂದೇ ಮುಖ್ಯವಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ, ಈ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿನ ಬಡ್ಡಿಯ ದರ) ಇಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ 1991 ರಿಂದ

ದಾಖಲಾತಿಯು ಹೇಗೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ 1991 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾದ ವರ್ಷಗಳನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. 1991 ನ್ನು ಶೂನ್ಯ ವರ್ಷವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. 1992ಕ್ಕೆ 1ನೇ ವರ್ಷ 1993ಕ್ಕೆ 2ನೇ ವರ್ಷ. ಇದೇ ರೀತಿ ಬರೆದರೆ ಕೋಷ್ಟಕ 2.2 ದೊರಕುತ್ತದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ A2.2

ವರ್ಷ	ದಾಖಲಾತಿ %
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

ಕೋಷ್ಟಕ A2.3 ದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷದಲ್ಲಿನ ಹೆಚ್ಚಳವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ A2.3

ವರ್ಷ	ದಾಖಲಾತಿ (ಶೇಕಡಾವಾರು)	ಹೆಚ್ಚಳ
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 ರಿಂದ 1992 ರ ವರ್ಷಾಂತ್ಯದಲ್ಲಿ 41.9 ರಿಂದ 42.6% ಗೆ ಅಂದರೆ 0.7 % ಹೆಚ್ಚಳವಾಯಿತು. ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ 42.6% ರಿಂದ 42.9 ಕ್ಕೆ ಅಂದರೆ 0.1 % ಹೆಚ್ಚಳವಾಯಿತು. ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಹೆಚ್ಚಳದ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ಇರುವ ಕಾಲಾವಧಿ ಹಾಗೂ ಶೇಕಡಾ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ರೂಪಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಆದರೆ ಹೆಚ್ಚಳವು ಒಂದಿಷ್ಟು ಸ್ಥಿರ ರೀತಿಯದ್ದಾಗಿದೆ. ಕೇವಲ ಮೊದಲನೆಯ ಹಾಗೂ ಹತ್ತನೆಯ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಹೆಚ್ಚಿನ ವ್ಯತ್ಯಯವಿದೆ. ಈ ಬೆಲೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಸರಾಸರಿ $= \dfrac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10} = 0.22$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಾಸರಿ ಹೆಚ್ಚಳವು ಶೇಕಡಾ 0.22 ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ

ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ:

ನಾವು ದಾಖಲಾತಿಯು 0.22% ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಳವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಪರಿಭಾವಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಷದ ದಾಖಲಾತಿ ಹೆಚ್ಚಳದ ಶೇಕಡಾ (Enrolment percentage) = EP $= 41.9 + 0.22$.

2ನೆಯ ವರ್ಷದ EP $= 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 \times 0.22$

3ನೆಯ ವರ್ಷದ EP $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22$

$= 41.9 + 3 \times 0.22.$

ಅದೇ ರೀತಿ ($n \geq 1$) n ನೇ ವರ್ಷದ EP $= 41.9 + 0.22n$ ಆದಾಗ .... (1)

ದತ್ತ ಸಮಸ್ಯೆ ಎಂದರೆ ನಾವು ದಾಖಲಾತಿ ಶೇಕಡಾವು (EP) 50 ಆಗುವುದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ವರ್ಷಗಳಾಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸೂತ್ರ (1) ರಲ್ಲಿ n ನ ಬೆಲೆಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು

$50 = 41.9 + 0.22\ n$ .... (2)

ಹಂತ 2 : ಪರಿಹಾರ: ಸೂತ್ರ (2) ನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ

$0.22\ n = 50 - 41.9 = 8.1$

$n = \dfrac{8.1}{0.22} = 36.8$

ಹಂತ 3 : ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ: ವರ್ಷದ ಲೆಕ್ಕಚಾರವು ಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ 36.8 ರ ಬದಲಾಗಿ 37 ವರ್ಷ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ಶೇ 50 ದಾಖಲಾತಿಯು 1991 + 37 = 2028 ರಲ್ಲಿ ಆಗಲಿದೆ.

ಶಾಬ್ಧಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ನೈಜಜೀವನದಲ್ಲಿ ಅದರ ಮೌಲ್ಯೀಕರಣ (ಸಿಂಧುತ್ವ)ದ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು. ಗಣಿತದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ನಿಜಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವ ಮೌಲ್ಯ ಹೊಂದಿರಬೇಕು.

ಹಂತ 4 ಮೌಲ್ಯೀಕರಣ : ಸೂತ್ರ 2 ವಾಸ್ತವಿಕತೆಗೆ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಸೂತ್ರ 2ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಅವಧಿ (ವರ್ಷಗಳು)ಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ ಮತ್ತು ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವ ಬೆಲೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಕೋಷ್ಟಕ A2.4

ವರ್ಷ	ದಾಖಲಾತಿ (% ನಲ್ಲಿ)	ಸೂತ್ರ (2) ರಂತೆ ದೊರೆತ ಬೆಲೆ% ನಲ್ಲಿ	ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಶೇಕಡಾದಲ್ಲಿ
0	41.9	41.90	0.00
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	− 0.06
9	43.7	43.88	− 0.18
10	44.1	44.10	0.00

ಸೂತ್ರ (2) ರಿಂದ ದೊರೆತ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳು ನೈಜ ಬೆಲೆಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆ 0.3% ರಷ್ಟು ಅಥವಾ 0.5 % ಗಿಂತಲು ಕಡಿಮೆ ಇರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.

ಪ್ರತಿವರ್ಷವು 1% ರಿಂದ 2% ಹೆಚ್ಚಳವಿರುವುದರಿಂದ 3 ರಿಂದ 5 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿ ಆಗಬಹುದು. ಇಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣದ ವ್ಯತ್ಯಯವನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಾಗಿದ್ದು, ಇದನ್ನು ಇಲ್ಲಿಗೆ ಸಮಾಪ್ತಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಸೂತ್ರ (2) ನಮ್ಮ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿ.

ಒಂದು ವೇಳೆ ಈ ಪ್ರಮಾಣದ ದೋಷವು ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಮಾಣ ಎನಿಸಿದಲ್ಲಿ ನಾವು ನಮ್ಮ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಸುಧಾರಿಸಬಹುದು. ಆಗ ಪುನಃ ಹಂತ (1) ಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ ಸೂತ್ರ (2) ನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕು ಹಾಗೆ ಮಾಡೋಣ.

ಹಂತ 1 : ಸುಧಾರಿತ ಸೂತ್ರ ರಚನೆ

ಈಗಲೂ ನಾವು ಏರಿಕೆಯು 0.22% ಸ್ಥಿರ ರೀತಿಯಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ, ಆದರೆ ದೋಷವನ್ನು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಲು ದೋಷನಿವಾರಕ ಅಂಶವನ್ನು ಸೇರಿಸೋಣ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ದೋಷದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕೋಣ.

(ಕೋಷ್ಟಕ A2.4 ರನ್ನು ನೋಡಿ)

$$\text{ದೋಷದ ಸರಾಸರಿ} = \frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10} = 0.18$$

ದೋಷದ ಸರಾಸರಿ 0.18 ನ್ನು ಬಳಸಿ ಈ ಮೌಲ್ಯದಿಂದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸರಿಪಡಿಸೋಣ.

ಪರಿಷ್ಕರಿಸಿದ ಗಣಿತ ವಿವರಣೆ :

ಸರಾಸರಿ ದೋಷವನ್ನು ಸೂತ್ರ (2) ರಲ್ಲಿ ನಾವು ಹೊಂದಿರುವ ಶೇಕಡಾಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸೋಣ. ಅದರಿಂದಾಗಿ ನಮಗೆ ಸರಿಪಡಿಸಿದ ಸೂತ್ರವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

n ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾತಿಯ ಶೇಕಡಾ ಪ್ರಮಾಣ ($n \leq 1$ ಆದಾಗ)

$= 41.9 + 0.22\ n + 0.18 = 42.08 + 0.22\ n$ .... (3)

ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಸೂತ್ರ (2) ನ್ನು ಸರಿಪಡಿಸೋಣ

ಆದ್ದರಿಂದ n ನ ಹೊಸ ಸೂತ್ರವು

$50 = 42.08 + 0.22\ n$ .... (4)

ಹಂತ 2: ಪರ್ಯಾಯ ಪರಿಹಾರ : ಸೂತ್ರ (4) ನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

$0.22\ n = 50 - 42.08 = 7.92$

$$n = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

ಹಂತ 3 : ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : 1991 + 36 = 2027 ರಲ್ಲಿ $n = 36$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲಾಹಂತದಲ್ಲಿ ಹೆಣ್ಣುಮಕ್ಕಳ ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣ 50% ಆಗುವುದು

ಹಂತ 4 ಸಿಂಧುತ್ವ : ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಸೂತ್ರ (4) ರಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನೈಜಬೆಲೆಯೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸೋಣ. ಅಂತಹ ಹೋಲಿಕೆಯನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ A2.5 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ A2.5

ವರ್ಷ	ದಾಖಲಾತಿ (ಶೇಕಡಾವಾರು)	(2) ರಿಂದ ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳು	ಮೌಲ್ಯದಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ	(4) ರಿಂದ ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳು	(ಮೌಲ್ಯಗಳಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	–0.12
8	43.6	43.66	–0.06	43.84	–0.24
9	43.7	43.88	–0.18	44.06	–0.36
10	44.1	44.10	0	44.28	–0.18

ಈಗ 4 ರಲ್ಲಿನ ಬೆಲೆಗಳು 2 ರಲ್ಲಿನ ಬೆಲೆಗಳಿಗಿಂತ ನೈಜಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ ದೋಷವು ಸೊನ್ನೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿಗೆ ಸಮಾಪ್ತಿಗೊಳಿಸೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸೂತ್ರ (4) ನಮ್ಮ ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದು ಹೆಣ್ಣುಮಕ್ಕಳ ದಾಖಲಾತಿಯಾದ ವರ್ಷಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಾಗೂ ದಾಖಲಾತಿಯ ಶೇಕಡಾ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ನಾವು ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಮೇಲಿನ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ನಾವು ಅನುಸರಿಸಿದ ಕಾರ್ಯತಂತ್ರ (ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ) ಯನ್ನು **"ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣ"** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ನಮ್ಮಲ್ಲಿರುವ ಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಗಳಿಂದ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿರಚನೆ ತಯಾರಿಸಲು ನಾವು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದೆವು ನಮ್ಮಲ್ಲಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಇನ್ನೂ ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಿ ಬಳಸಿ, ಮುನ್ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು (prediction) ನೀಡುವ ಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ಅವು ತರಗತಿ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಮೀರಿದ್ದು. ನಮ್ಮ ಉದ್ದೇಶವು ನಿಮ್ಮನ್ನು 'ಗಣಿತ ಮಾದರಿರಚನೆ' ಯ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿ ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯು ಹೇಗೆ ಸಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಪರಿಚಯಿಸುವುದೇ ವಿನಃ ಇದರಿಂದ ಅತ್ಯಂತ ನಿಖರವಾದ ಮುನ್ಸೂಚನೆ ಪಡೆಯುವುದಾಗಿಲ್ಲ ಆದ್ದರಿಂದ. ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಇಷ್ಟು ಸಾಕು.

ಈವರೆಗಿನ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು, ನೀವು ನೈಜ ಸನ್ನಿವೇಶದ ಕೆಲವು ಗಣಿತ ಮಾದರಿಯ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಚರ್ಚಿಸಬಹುದು. ನೀವು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಲು ಇಲ್ಲೊಂದು ಅಭ್ಯಾಸವಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ A2.2

1. ಒಲಂಪಿಕ್ ಕ್ರೀಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಓಟದ ಸ್ಪರ್ಧೆಗಳನ್ನು ಸೇರ್ಪಡೆಗೊಳಿಸಿದ ನಂತರ ಒಲಂಪಿಕ್ ಕ್ರೀಡೆಗಳಲ್ಲಿ 400 ಮೀಟರ್ ಓಟದ ಸ್ಪರ್ಧೆಯಲ್ಲಿ 'ಚಿನ್ನದ ಪದಕ' ವಿಜೇತರು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲಾವಧಿಯನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಈ ಕ್ರೀಡಾಪಟುಗಳು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲ ಹಾಗೂ ಕ್ರೀಡೆ ನಡೆದ ವರ್ಷ ಬಳಸಿ 'ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿ' ರಚಿಸಿ. ಇದರ ಆಧಾರದಿಂದ ಮುಂದಿನ ಒಲಂಪಿಕ್‌ನಲ್ಲಿ ಚಿನ್ನದಪದಕ ವಿಜೇತರು' ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲಾವಧಿಯನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸಿ.

ಒಲಂಪಿಕ್ ಕ್ರೀಡೆಗಳು 4 ವರ್ಷಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ನಡೆಯುತ್ತದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ A2.6

ವರ್ಷ	ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲಾವಧಿ ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳಲ್ಲಿ (ಚಿನ್ನದ ಪದಕ ವಿಜೇತರು)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

A2.4 ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಹಾಗೂ ಅದರ ಇತಿಮಿತಿಗಳು.

ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣವು ಒಳಗೊಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಈವರೆಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿರುವುದನ್ನು ಪರಿಸಮಾಪ್ತಿಗೊಳಿಸೋಣ. ಈವರೆಗಿನ ವಿವಿಧ ಘಟಕಗಳ ಹಿನ್ನಲೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಸಿಂಹಾವಲೋಕನವನ್ನು ಮಾಡುವುದು ನಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

ಹಂತ 1 : ಸೂತ್ರ ರಚನೆ : ವಿಭಾಗವನ್ನು 2.2 ರ ಉದಾಹರಣೆ 1. ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ 2.3 ರ ಉದಾಹರಣೆ 2 ರ ಸೂತ್ರರಚನೆಯಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರಬಹುದು. ವಿಭಾಗ 2.2 ರಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲವೂ ಸಿದ್ಧರೂಪದಲ್ಲಿತ್ತು. ಆದರೆ A2.3 ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಗಿರಲಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಗಣಿತೀಯ ಸೂತ್ರ ರೂಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸ್ವಲ್ಪ ಕಾಲಾವಕಾಶ ಬೇಕಾಗಿತ್ತು. ಸೂತ್ರ 1 ನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಬಳಸಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಅದು ಸೂತ್ರ 2 ರಷ್ಟು ಉತ್ತಮವಾಗಿರಲಿಲ್ಲವೆಂದು ತಿಳಿಯಿತು. ನೈಜಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಸೂತ್ರ 1 ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರುವ ಸೂತ್ರ 1 ರ ಸುಧಾರಣೆ ಅಗತ್ಯವೆನಿಸುವುದು. ಇದು ಸರ್ವೇಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಡೆಯುವ ಸತ್ಯ ನಾವು ನೈಜಜೀವನದ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ನಿವಾರಿಸುವಾಗ ಸೂತ್ರ ರಚನೆಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಮಯ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನ್ಯೂಟನ್‌ನ ಚಲನೆಯ ಮೂರು ನಿಯಮಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇವು ಚಲನೆಯ ಗಣಿತೀಯ ನಿರೂಪಣೆಗಳು ಮತ್ತು ನಿರೂಪಿಸಲು ಸರಳವಾಗಿವೆ.

ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮುಂಚೆ ನ್ಯೂಟನ್‌ರವರು ಅವರಿಗಿಂತ ಮುಂಚೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಕಲೆಹಾಕಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ. ಸೂತ್ರರಚನೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಹಂತ (ಹೆಜ್ಜೆ)ವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.

(i) ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದು: ಅನೇಕ ವೇಳೆ 'ಸಮಸ್ಯೆ'ಯು ಅಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಬಾಲಕ – ಬಾಲಕಿಯರ ದಾಖಲಾತಿಯು ಸಮನಾಗಿದೆ ಎಂದು ದೃಢೀಕರಿಸುವುದು ಒಂದು ಧ್ಯೇಯವಾಗಿದೆ. ಇದರ ಅರ್ಥ ಶಾಲೆಗೆ ಹೋಗಬೇಕಾದ ವಯೋಮಾನದ ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ 50% ಬಾಲಕರು ಹಾಗೂ 50% ಬಾಲಕಿಯರು ದಾಖಲಾಗಲೇಬೇಕೆಂಬ ಅರ್ಥವು ಬರಬಹುದು. ಇನ್ನೊಂದು ಅರ್ಥವೆಂದರೆ ಶಾಲೆಗೆ ದಾಖಲಾಗಿರುವ ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ 50% ಬಾಲಕಿಯರು ಇರಬೇಕೆಂಬುದು. ನಾವು ಎರಡನೇ ಅರ್ಥವನ್ನು ಅಂದರೆ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾದ ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ 50% ಬಾಲಕಿಯರು ಇರಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದ್ದೇವೆ.

(ii) ಸುಸಂಬದ್ಧವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವುದು :

ಯಾವ ಅಂಶಗಳು ಹಾಗೂ ಸಂಬಂಧಗಳು ನಮ್ಮ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾದವು ಹಾಗೂ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾದವು ಮತ್ತು ಯಾವುವು ಪ್ರಮುಖವಲ್ಲದ, ಅಂದರೆ ನಗಣ್ಯಾವಾದ ಕೈಬಿಡಬಹುದಾದ ಅಂಶಗಳು ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಯ ಮಕ್ಕಳ ದಾಖಲಾತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಹಿಂದಿನ ವರ್ಷ ದಾಖಲಾದ ಬಾಲಕಿಯರ ಶೇಕಡಾಪ್ರಮಾಣವು ಈ ವರ್ಷದ ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣದ ಮೇಲೆ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಬಾಲಕಿಯರು ಶಾಲೆಗೆ ದಾಖಲಾದುದನ್ನು ಕಂಡ ಪೋಷಕರು ತಮ್ಮ ಹೆಣ್ಣು ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಶಾಲೆಗೆ ದಾಖಲಿಸಬೇಕೆಂದು ಅಭಿಲಾಷೆ ಪಡಬಹುದು. ಆದರೆ ನಾವು ಈ ಅಂಶವನ್ನು ನಗಣ್ಯ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ ಏಕೆಂದರೆ ಶೇಕಡಾ ಪ್ರಮಾಣವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಹಂತವನ್ನು ದಾಟುವವರೆಗೆ ಈ ಅಂಶ ಪ್ರಮುಖವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅದೂ ಅಲ್ಲವೇ ಈ ಅಂಶವನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಸಮಸ್ಯೆ ಮತ್ತಷ್ಟು ಜಟಿಲವಾಗುತ್ತದೆ.

(iii) ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ :

ನಮಗೆ ಈಗ ಸಮಸ್ಯೆ ಹಾಗೂ ಅದರ ಯಾವ ಅಂಶಗಳು ಮುಖ್ಯವಾದವು ಎಂಬುದು ಸುಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ನಾವೀಗ ಒಂದು ಸೂತ್ರ ಒಂದು ಆಲೇಖ, ಅಥವಾ ಇನ್ನೂ ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯ ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ ರಚಿಸಬೇಕು.

ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆಯು ಸೂತ್ರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದು ಒಂದು ಚರಾಂಶವಾಗಿ (variable) ನಮ್ಮ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಇರಬೇಕಾದುದ್ದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಸಂಗತಿ.

ಹಂತ 2 : ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. (ಸಮಸ್ಯಾ ಪರಿಹಾರ ಕ್ರಮ)

ಗಣಿತೀಯ ಸೂತ್ರ ರಚನೆಯೇ ನಮಗೆ 'ಪರಿಹಾರ'ವನ್ನು ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ. ನಾವು ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಮಾನ ಗಣಿತೀಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕು. ನಿಮ್ಮ ಗಣಿತದ ಜ್ಞಾನ ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 3 : ಪರಿಹಾರದ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ.

ಗಣಿತೀಯ ಪರಿಹಾರವೆಂದರೆ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿನ ಚರಾಂಶಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಮೌಲ್ಯ ನಿರ್ಧರಿತವಾಗುವುದು.

ಚರಾಂಶದ ಈ ಬೆಲೆಗಳೊಂದಿಗೆ 'ಸಮಸ್ಯೆ'ಗೆ ವಾಪಸ್ಸಾಗಬೇಕು ಮತ್ತು ನೈಜ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಈ ಬೆಲೆಗಳು ಯಾವ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ನೋಡಬೇಕು.

ಹಂತ 4 : ಪರಿಹಾರ ಸಿಂಧುತ್ವ (ಮೌಲ್ಯೀಕರಣ)

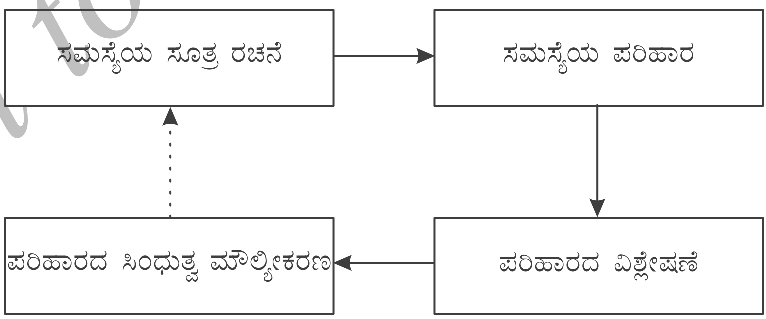
ವಿಭಾಗ A.2.3 ರಲ್ಲಿ ನಾವು ಗಮನಿಸಿದಂತೆ, ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಮೇಲೆ ನೈಜತೆಯಲ್ಲಿ ಇದು ಎಷ್ಟರ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಆದರೆ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯು ಸ್ವೀಕಾರಾರ್ಹವಾಗುತ್ತದೆ. ಪರಿಹಾರವು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗದಿದ್ದರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪುನರ್‌ರಚಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಕೊನೆಯ ಹಂತವು ಶಾಬ್ದಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದಕ್ಕೂ ಹಾಗೂ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣಕ್ಕೂ ಇರುವ ಅತ್ಯಂತ ಮುಖ್ಯವಾದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಮುಖವಾದ ಈ ಹಂತವು ಶಾಬ್ದಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ.

ಅತ್ಯಂತ ಮಹತ್ವದ ಹಂತವಾಗಿರುವ ಅಂಶ ಕೆಲವು ನೈಜ ಜೀವನದ ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದರೂ ನಾವು ಎಲ್ಲ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಉತ್ತರವನ್ನು (ಪರಿಹಾರವನ್ನು) ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ ಅಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಸರಳವಾಗಿದ್ದು, ಉತ್ತರ/ಪರಿಹಾರ ಸರಿಯಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ ಇರುತ್ತದೆ.

A2.3 ನಲ್ಲಿ ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಉದಾಹರಣೆ ಇಂತಹುದಾಗಿದೆ

ಈ ಕೆಳಗೆ ಚಿತ್ರ A2.2 ನಲ್ಲಿ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿ ಹೇಗೆ ಸಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಸಾರಾಂಶವನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿದೆ. ಸಿಂಧುತ್ವ ಪರಿಶೀಲನಾ ಹಂತದಿಂದ ಸೂತ್ರಾಚರಣೆ ಹಂತಕ್ಕೆ 'ಚುಕ್ಕೆ ರೇಖೆ' ಯಿಂದ ತೋರಿಸಿದೆ. ಇದರ ಉದ್ದೇಶ ಈ ಹಂತವನ್ನು ಪುನಃ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬೇಕಾಗದಿರಬಹುದು ಎಂದು ತಿಳಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ.



ನೀವು ಈ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯ ಹಂತಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಈ ಹಂತಗಳ ಮುಖ್ಯಾಂಶಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ಧ್ಯೇಯವೆಂದರೆ ನಿತ್ಯಜೀವನದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಉಪಯುಕ್ತ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ, ಆ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಗಣಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ರೂಪಾಂತರಿಸುವುದು. ಈ ವಿಧಾನವು ಅಧಿಕ ವೆಚ್ಚದ ವಿಧಾನಗಳಾದ ನೇರವೀಕ್ಷಣೆ ಅಥವಾ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಮೂಲಕ ಮಾಹಿತಿ ಸಂಗ್ರಹವು ಅಸಾಧ್ಯವೆನಿಸುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸುವುದಾದರೂ ಏಕೆ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಗಬಹುದು. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ಕೆಲವು ಅನುಕೂಲತೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಮಥುರಾದಲ್ಲಿರುವ ಶುದ್ಧೀಕರಣ ಕಾರ್ಖಾನೆಗಳಿಂದ ಹೊರ ಹೊಮ್ಮುವ ವಿಷ ಅನಿಲಗಳಿಂದ ತಾಜಮಹಲ್‌ನ ಅಮೃತಶಿಲೆಗೆ ತುಕ್ಕಿನಂತಹ ಪರಿಣಾಮ ಉಂಟಾಗಿದೆ. ಅದಕ್ಕಾಗುವ ಪರಿಣಾಮದ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ನಡೆಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಾವು ನೇರವಾಗಿ ತಾಜಮಹಲ್‌ನ್ನು ಬಳಸಿ ಈ ಅಧ್ಯಯನ ನಡೆಸಲು ಅಪೇಕ್ಷಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ ಹಾಗೆ ಮಾಡುವುದು ಕ್ಷೇಮಕರವಲ್ಲ ಹಾಗೆ ಬೇಕೆಂದರೆ, ಅದರ ಕಿರು ಪ್ರತಿಕೃತಿ ತಯಾರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಅದಕ್ಕೆ ವಿಶೇಷವಾದ ಸೌಕರ್ಯಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅದು ಅಪಾರ ವೆಚ್ಚದ ಕಾರ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಗಣಿತ ಮಾದರೀಕರಣವು ಇಂತಹ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಅತಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಸಂಗ, ಇನ್ನು ಐದು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ನಮಗೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಗಳು ಬೇಕು ಎನ್ನುವುದಾಗಿರಲಿ. ಇದನ್ನು ನಾವು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಅದೇ ರೀತಿ ಅನೇಕ ವಿದ್ಯಮಾನಗಳ ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳಿಗೆ ನೇರವಾಗುವ ಏಕೈಕ ಮಾರ್ಗವೆಂದರೆ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣ.

ಎರಡನೇ ಉದಾಹರಣೆ : ವಿಭಾಗ A2.3 ಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಉತ್ತಮಗೊಳಿಸಲು ಇನ್ನೂ ಒಳ್ಳೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅಳವಡಿಸಬಹುದಿತ್ತು. ಈ ಹಂತದಲ್ಲೇ ನಾವು ಸ್ಥಗಿತಗೊಳಿಸಿದ್ದೇಕೆಂದರೆ ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಭಂದಿಸಿದ 'ಗಣಿತದ ಸಾಧನ'ಗಳಿರಲಿಲ್ಲ. ನಿಜ ಜೀವನದಲ್ಲೂ ಹೀಗೆಯೇ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅನೇಕ ವೇಳೆ ನೀವು ಲಭ್ಯವಾದ ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಉತ್ತರದೊಂದಿಗೆ ಸಮಾಧಾನ ಪಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. (approximate) ಏಕೆಂದರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯ ಗಣಿತ ಸಾಧನಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಹವಾಮುನ್ಸೂಚನೆ ದೃಢೀಕರಣ ಮಾಡುವ 'ಹವಾಮಾನ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿ' ಯು ಅತ್ಯಂತ ಸಂಕೀರ್ಣವಾದುದು. ಅತ್ಯಂತ ಖಚಿತವಾದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಗಣಿತೀಯ ಸಲಕರಣೆಗಳು ಲಭ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ, ನಮ್ಮ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಉತ್ತಮಪಡಿಸಲು ಎಷ್ಟೊಂದು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬೇಕೆಂದು ನಿಮಗೆ ಅಚ್ಚರಿಯಾಗಬಹುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಉತ್ತಮಗೊಳಿಸಲು ನಾವು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದಾಗ, ನಮ್ಮ ಗಣಿತೀಯ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಅಧಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಚರಾಂಶಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕಾಗುವುದು. ಆಗ ನಮಗೆ ಬಳಸಲು ಕಷ್ಟವಾಗುವಂತಹ ಅತ್ಯಂತ ಸಂಕೀರ್ಣವಾದ ಮಾದರಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಉತ್ತಮ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯು ಎರಡು ಅಂಶಗಳ ಸಮತೋಲನ ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ಅವೆಂದರೆ

1. ನಿಖರತೆ – ವಾಸ್ತವಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಹತ್ತಿರವಾಗಿರುವುದು.

2. ಉಪಯುಕ್ತತೆ – ಬಳಸಲು ಸುಲಭವಾಗಿರಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ನ್ಯೂಟನ್‌ನ ಚಲನೆಯ ನಿಯಮಗಳ ಸೂತ್ರಗಳು ಬಹಳ ಸರಳವಾಗಿವೆ, ಆದರೆ ಅನೇಕ ಭೌತಿಕ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು 'ಮಾದರಿ' ಯಾಗಿಸಲು ಸಮರ್ಥವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ನಮ್ಮ ಎಲ್ಲ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯೇ ಪರಿಹಾರವೆ? ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಅಲ್ಲ! ಅದಕ್ಕೂ ಇತಿ–ಮಿತಿಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ಅದು ಸೀಮಿತವಾಗಿದೆ.

ಹಾಗಾಗಿ, ನಾವು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದುದೇನೆಂದರೆ

1. ಗಣಿತ ಮಾದರಿಯು ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಸರಳೀಕರಣ.
2. ನಿತ್ಯಜೀವನದ ಸಮಸ್ಯೆ ಮತ್ತು ಮಾದರಿ ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಅಲ್ಲ.

ಇದನ್ನು ದೇಶದ ಭೂಪಟದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಕೃತಿಕ ಲಕ್ಷಣಗಳಿಗೂ ಹಾಗೂ ನಿಜವಾದ ದೇಶಕ್ಕೂ ಇರುವ ಅಂತರಕ್ಕೆ ಹೋಲಿಸಬಹುದು. ಭೂಪಟದ ನೆರವಿನಿಂದ ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿನ ಪರ್ವತವು ಸಮುದ್ರ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದೇ ವಿನಃ ಅಲ್ಲಿನ ಜನರ ಚಹರೆ (ಲಕ್ಷಣ) ಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಭೂಪಟ ಮಾದರಿಯನ್ನು ನಾವು ಅದು ಯಾವುದಕ್ಕಾಗಿ ರೂಪಿತವಾಗಿದೆಯೋ ಅಷ್ಟಕ್ಕೇ ಸೀಮಿತವಾಗಿಸಬೇಕು ಮತ್ತು ಮಾದರಿ ರಚಿಸುವಾಗ ದೇಶಸಂಬಂಧಿ ಎಲ್ಲ ಅಂಶಗಳು ಅದೊಂದರಲ್ಲೇ ಸೇರಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕು ಹಾಗೂ ಅನೇಕ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನಗಣ್ಯವಾಗಿರಿಸಿರುತ್ತೆ ಎಂದು ನೆನಪಿಡಬೇಕು.

ನಾವು ಮಾದರಿಯನ್ನು ಅದನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ 'ಮಿತಿ'ಯಲ್ಲಿಯೇ ಬಳಸಬೇಕು. ಈ ಅಂಶವನ್ನು ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಇನ್ನಷ್ಟು ವಿವರವಾಗಿ ಅಭ್ಯಸಿಸೋಣ.

ಅಭ್ಯಾಸ A2.3

1. ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಶಾಬ್ದಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಗಣಿತ ಮಾದರಿ ರಚನೆ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಿಂದ ಪರಿಹಾರ, ಇವೆರಡರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನು?
2. ನಾಲ್ಕು ರಸ್ತೆಗಳ ಕೂಡು ಸ್ಥಳ (ವೃತ್ತ / ಚೌಕ) ದಲ್ಲಿ ವಾಹನಗಳು ದಟ್ಟಣೆಯಾಗುತ್ತವೆ. ಆ ವಾಹನಗಳನ್ನು ನಿಯಂತ್ರಿಸಬೇಕು. ಅವುಗಳು ಕಾಯುವ ಸಮಯ ಅತಿಕಡಿಮೆಯಾಗುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾದ ಮುಖ್ಯವಾದ ಹಾಗೂ ನಗಣ್ಯವಾದ ಅಂಶಗಳು ಯಾವುವು?

   (i) ಪೆಟ್ರೋಲಿನ ದರ

   (ii) ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದಿಕ್ಕಿನಿಂದ ನಾಲ್ಕು ರಸ್ತೆಗಳಲ್ಲಿನ ಕೂಡು ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಬರುವ ವಾಹನಗಳ ವೇಗದ ದರ

   (iii) ಸೈಕಲ್, ರಿಕ್ಷಾ ಮುಂತಾದ ಕಡಿಮೆ ವೇಗದ ವಾಹನಗಳು ಹಾಗೂ ಕಾರು, ಮೋಟಾರ್ ಬೈಕ್ ನಂತಹ ವೇಗದ ವಾಹನಗಳ ಅನುಪಾತ.

A.2.5. ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅನುಬಂಧದಲ್ಲಿ ನೀವು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

1. ಶಾಬ್ದಿಕ ಸಮಸ್ಯಾ ಪರಿಹಾರದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿದ ಹಂತಗಳು
2. ಕೆಲವು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯ ರಚನೆ.
3. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿದ ಹಂತಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು

1. ಸೂತ್ರ ರಚನೆ :

   (i) ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸುವುದು

   (ii) ಸಂಬಂಧಿಸಿದ (ಸುಸಂಬದ್ಧ) ಅಂಶ/ಘಟಕಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಮಾಡುವುದು.

   (iii) ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ

2. ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

3. 'ಪರಿಹಾರ'ವನ್ನು ನಿಜ ಜೀವನದ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವುದು.

4. ಅಭ್ಯಸಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಎಷ್ಟರ ಮಟ್ಟಿಗೆ 'ಮಾದರಿ'ಯು ಸುಸಂಬದ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಮೌಲ್ಯೀಕರಣ (ಸಿಂಧುತ್ವ ಪರಿಶೀಲನೆ)

4. ಗಣೀತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ಧ್ಯೇಯ, ಉಪಯುಕ್ತತೆ ಮತ್ತು ಇತಿ–ಮಿತಿಗಳು.

ಉತ್ತರಗಳು / ಸುಳಿವು

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 900, 3 cm^2

2. ₹ 1650000

3. $20\sqrt{2}\ m^2$

4. $21\sqrt{11}\ cm^2$

5. 9000 cm^2

6. $9\sqrt{15}\ cm^2$

ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

1. 65.5 cm^2 (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)

2. 15.2 cm^2 (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)

3. 19.4 cm^2 (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)

4. 12 cm

5. 48 m^2

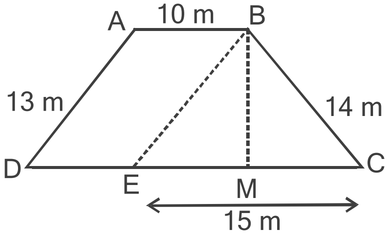
6. $1000\sqrt{6}\ cm^2$, $1000\sqrt{6} cm^2$

7. ಆಚ್ಛಾದಿತ ಭಾಗ I ರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಆಚ್ಛಾದಿತ ಭಾಗ II ರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 256 cm^2 ಮತ್ತು ಆಚ್ಛಾದಿತ ಭಾಗ III ರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 17.92 cm^2

8. ₹ 705.60

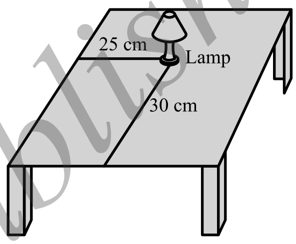
9. 196 m^2

ಚಿತ್ರ ಗಮನಿಸಿ, Δ BEC ದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅದು 84 m^2 ಆಗಿರುತ್ತದೆ ನಂತರ ಎತ್ತರ BM ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.]

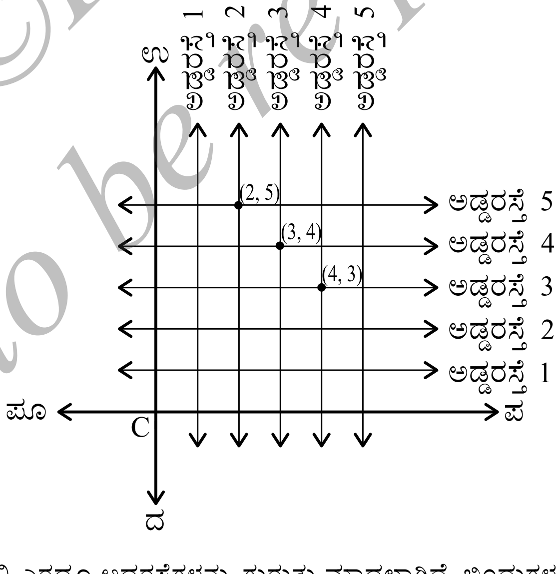


ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

1. ಮೇಜನ್ನು ಒಂದು ಸಮತಲವಾಗಿ ಮತ್ತು ದೀಪವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ. ಮೇಜಿನ ಎರಡು ಲಂಬವಾದ ಅಂಚುಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಮೇಜಿನ ಉದ್ದವಾದ ಅಂಚಿನಿಂದ ದೀಪಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿರಿ. ಅದು 25 cm ಆಗಿರಲಿ. ಮೇಜಿನ ಸಣ್ಣ ಅಂಚಿನಿಂದ ದೀಪಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿರಿ. ಅದು 30 cm ಆಗಿರಲಿ. ನೀವು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ, ದೀಪದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನೀವು (30, 25) ಅಥವಾ (25, 30) ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.



2. ರಸ್ತೆಯ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.



ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಅಡ್ಡರಸ್ತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಎರಡು ಆಧಾರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳು ಅನನ್ಯವಾಗಿ ಕಾಣಿಸುತ್ತವೆ.

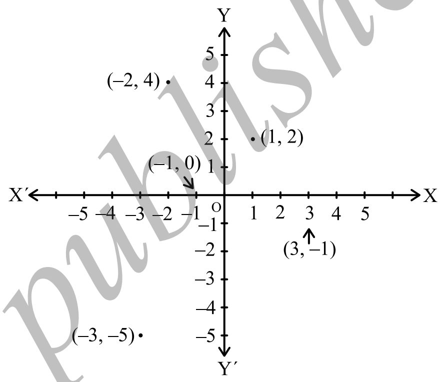
ಅಭ್ಯಾಸ 9.2

1. (i) x – ಅಕ್ಷ ಹಾಗೂ y – ಅಕ್ಷ
   (ii) ಚತುರ್ಥಕಗಳು
   (iii) ಮೂಲಬಿಂದು.

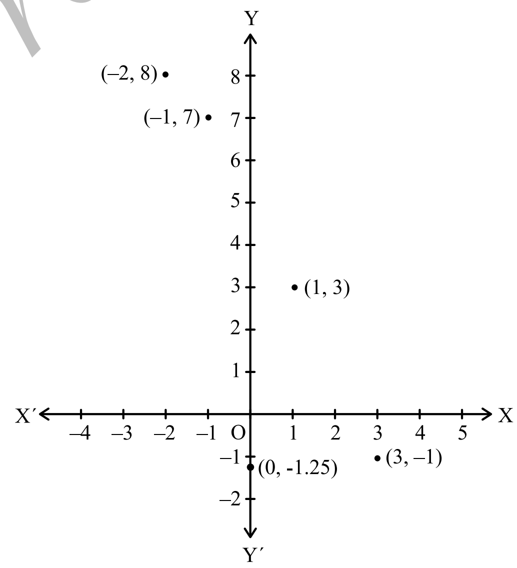
2. (i) (−5, 2) (ii) (5, − 5) (iii) E (iv) G
   (v) 6 (vi) −3 (vii) (0, 5) (viii) (−3, 0)

ಅಭ್ಯಾಸ 9.3

1. (−2, 4) ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಎರಡನೆಯ ಚತುರ್ಥಕದಲ್ಲಿದೆ. (3, −1) ಬಿಂದುವು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಚತುರ್ಥಕದಲ್ಲಿ (−1, 0) ಬಿಂದುವು ಋಣಾತ್ಮಕ x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ, (1, 2) ಬಿಂದುವು ಮೊದಲನೆಯ ಚತುರ್ಥಕದಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ (−3, −5) ಬಿಂದುವು ಮೂರನೆಯ ಚತುರ್ಥಕದಲ್ಲಿ ಇವೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.



2. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಚುಕ್ಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

1. $x - 2y = 0$

2. (i) $2x + 3y - 9.3\bar{5} = 0$; $a = 2,$ $b = 3,$ $c = -9.3\bar{5}$

(ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$; $a = 1,$ $b = -\frac{1}{5},$ $c = -10$

(iii) $-2x + 3y - 6 = 0$; $a = -2,$ $b = 3,$ $c = -6$

(iv) $1.x - 3y + 0 = 0$; $a = 1,$ $b = -3,$ $c = 0$

(v) $2x + 5y + 0 = 0$; $a = 2,$ $b = 5,$ $c = 0.$

(vi) $3x + 0.y + 2 = 0$; $a = 3,$ $b = 0,$ $c = 2$

(vii) $0 . x + 1.y - 2 = 0$; $a = 0,$ $b = 1,$ $c = -2$

(viii) $-2x + 0.y + 5 = 0$; $a = -2,$ $b = 0,$ $c = 5.$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

1. (iii) ಏಕೆಂದರೆ, x ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ, ಅನುರೂಪವಾದ y ನ ಒಂದು ಬೆಲೆ ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು y ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ, ಅನುರೂಪವಾದ x ನ ಒಂದು ಬೆಲೆ ಇರುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿಕ್ರಯ (vice-versa) ವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತದೆ.

2. (i) (0,7), (1,5), (2,3), (4,−1).

(ii) $(1, 9 - \pi)$, $(0, 9)$, $(-1, 9 + \pi)$, $\left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$

(iii) $(0, 0)$, $(4, 1)$, $(-4, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$

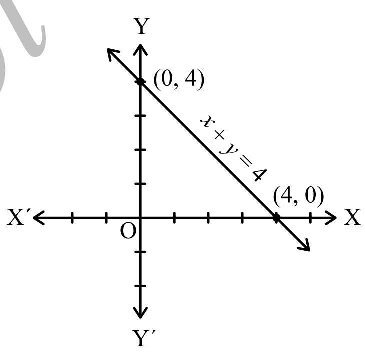
3. (i) ಇಲ್ಲ (ii) ಇಲ್ಲ (iii) ಹೌದು

(iv) ಇಲ್ಲ (v) ಇಲ್ಲ

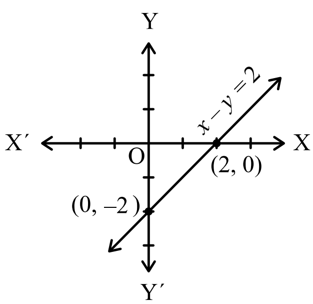
4. 7

ಅಭ್ಯಾಸ 10.3

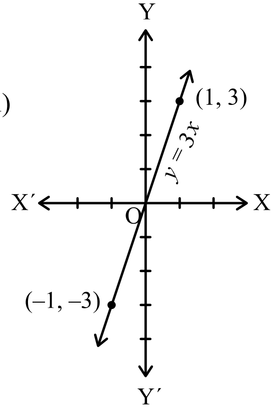
1. (i)



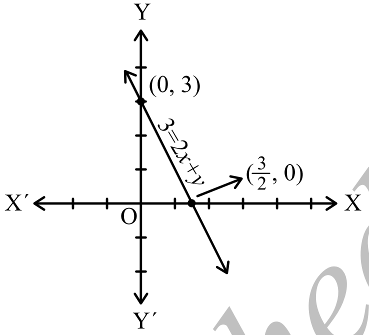
(ii)



(iii)



(iv)

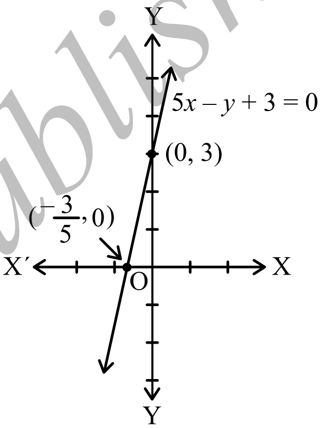


2. $7x - y = 0$ ಮತ್ತು $x + y = 16$; ಅಪರಿಮಿತ [ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.]

3. $\frac{5}{3}$

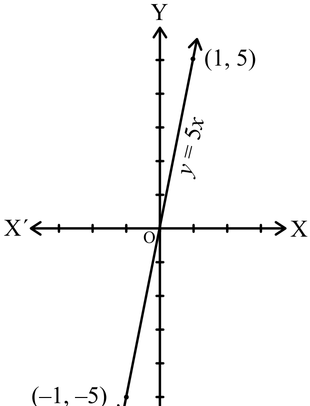
4. $5x - y + 3 = 0$

5. ಚಿತ್ರ 4.6 ಕ್ಕೆ, $x + y = 0$ ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 4.7 ಕ್ಕೆ, $y = -x + 2$

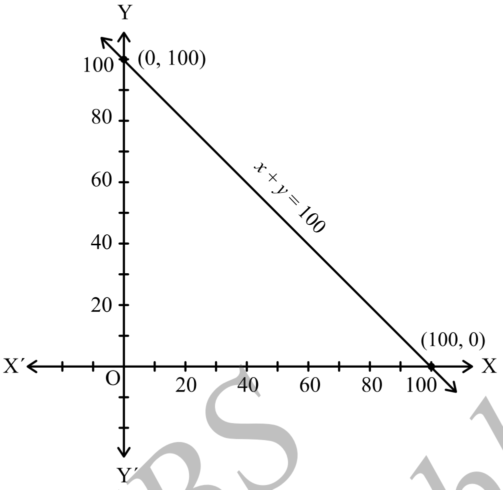


6. x ಅಂದರೆ ದೂರ ಮತ್ತು y ಅಂದರೆ ಮಾಡಿದ ಕೆಲಸ ಎಂದಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ ಸಮೀಕರಣವು $y = 5x$ ಆಗುತ್ತದೆ.

(i) 10 ಮಾನಗಳು (ii) 0 ಮಾನಗಳು.



7. $x + y = 100$



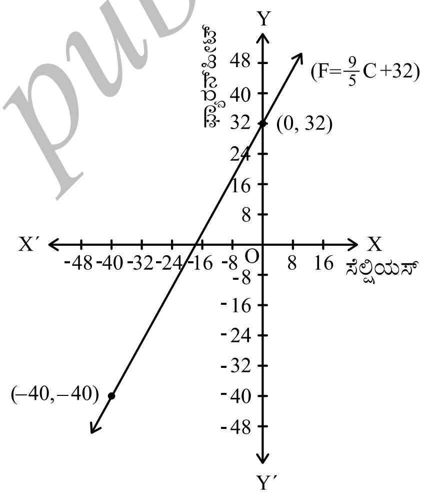
8. (i) ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

(ii) 86° F

(iii) 35° C

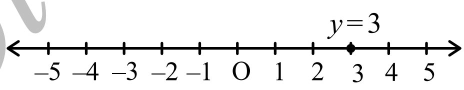
(iv) 32° F, − 17. 8° C (ಸರಿಸುಮಾರು)

(v) ಹೌದು, – 40° (F ಮತ್ತು C ಎರಡರಲ್ಲೂ)

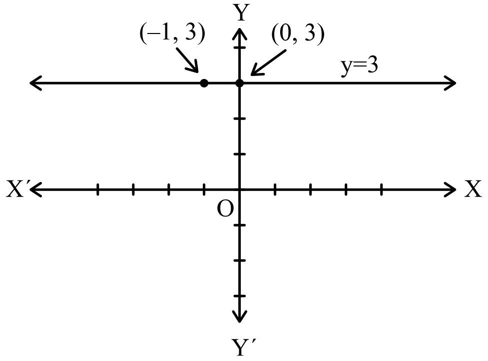


ಅಭ್ಯಾಸ 10.4

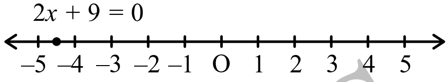
1. (i)



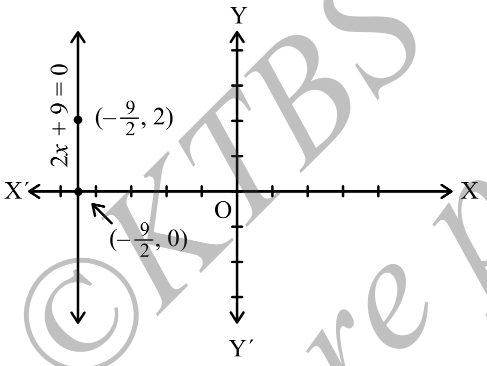
(ii)



2. (i)



(ii)



ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1. (i) ಪಾದ DC, DC ಮತ್ತು AB ಗಳು ಸಮಾಂತರ.
   (iii) ಪಾದ QR, QR ಮತ್ತು PS ಗಳು ಸಮಾಂತರ.
   (v) ಪಾದ AD, AD ಮತ್ತು BQ ಗಳು ಸಮಾಂತರ.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

1. 12.8 cm

2. EG ಸೇರಿಸಿ, ಉದಾಹರಣೆ 2ರ ಫಲಿತಾಂಶ ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.

6. Δ APQ ದಲ್ಲಿ ಗೋಧಿ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಬೇಳೆಕಾಳು ಅಥವಾ Δ APQ ದಲ್ಲಿ ಬೇಳೆಕಾಳು ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಗೋಧಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.3

4. CM $\perp$ AB ಮತ್ತು DN $\perp$ AB ಎಳೆಯಿರಿ. CM = DN ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 4ನ್ನು ನೋಡಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.4 (ಐಚ್ಛಿಕ)

7. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 3 ರ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಪುನಃ ಪುನಃ ಉಪಯೋಗಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 12.1

1.	(i) ಒಳ	(ii) ಹೊರ	(iii) ವ್ಯಾಸ
	(iv) ಅರ್ಧವೃತ್ತ	(v) ಜ್ಯಾ	(vi) ಮೂರು
2.	(i) ನಿಜ	(ii) ತಪ್ಪು	(iii) ತಪ್ಪು
	(iv) ನಿಜ	(v) ತಪ್ಪು	(vi) ನಿಜ

ಅಭ್ಯಾಸ 12.2

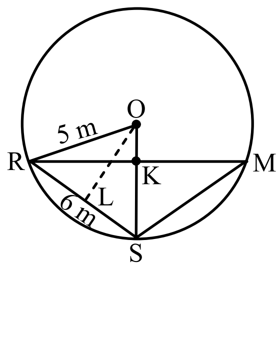
1. ಜ್ಯಾ ಹಾಗೂ ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರಮೇಯ 12.1 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಸಾಧಿಸಿ.
2. SAS ತ್ರಿಭುಜದ ಸರ್ವಸಮ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜವು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 12.3

1. 0, 1, 2, ಎರಡು
2. ಉದಾಹರಣೆ 1 ರಂತೆ ಮುಂದುವರೆಯಿರಿ.
3. O, O$^{|}$ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ AB ದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಗೆ ಸೇರಿಸಿ. ನಂತರ $\underline{|OMA} = 90^\circ$ ಮತ್ತು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 12.4

1. 6 cm, ಮೊದಲು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ನಂತರದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾವು ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
2. O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ AB, CD ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. $OM \perp AB$ ಮತ್ತು $ON \perp CD$ ಎಳೆಯಿರಿ. OE ಸೇರಿಸಿ. ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಭುಜ OME ಮತ್ತು ONE ಸರ್ವಸಮ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
3. ಉದಾಹರಣೆ 2ರಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ ಮುಂದುವರೆಯಿರಿ.
4. AD ಗೆ OM ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
5. ರೇಷ್ಮಾ, ಸಲ್ಮಾ ಮತ್ತು ಮಂದೀಪ ಇವರನ್ನು R,S,M ದಿಂದ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿ. KR = x m ಎಂದಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ ಗಮನಿಸಿ).



Δ ORS ದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{2} x \times 5$

Δ ORS + ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{2}$ RS × OL = $\frac{1}{2} \times 6 \times 4$

x ಮತ್ತು RM ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಮತ್ತು ಪೈಥಾಗೋರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 12.5

1. 45° 2. $150^\circ, 30^\circ$ 3. 10°

4. 80° 5. 110° 6. $\angle BCD = 80^\circ$ ಮತ್ತು $\angle ECD = 50^\circ$

8. CD ಯ ಮೇಲೆ AM ಮತ್ತು BN ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ($AB \parallel CD$ ಮತ್ತು $AB < CD$). $\Delta\, AMD \perp \Delta\, BMC$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇದರಿಂದ $\angle C = \angle D$ ಮತ್ತು $\angle A + \angle C = 180^\circ$.

ಅಭ್ಯಾಸ 12.6 (ಐಚ್ಛಿಕ)

2. ಬಿಂದು 'O' ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಲಲಿ. ಎರಡು ಜ್ಯಾದ ಲಂಭಾರ್ಧಕವು ಸಮ ಮತ್ತು O ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತವೆ. r ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರಲಿ, ನಂತರ $r^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (6-x)^2$

   11 cm ಉದ್ದದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ 'O' ನಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಉದ್ದ x ಆಗಿದೆ. $x = 1$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆಗ $r = \frac{5\sqrt{5}}{2} cm$

3. 3 cm

4. $\angle AOC$ ಮತ್ತು $\angle DOE = y$, ಎಂದಿರಲಿ. $\angle AOD = z$ ಆಗಿರಲಿ

   ನಂತರ $\angle EOC = z$ ಮತ್ತು $x + y + 2z = 360^\circ$

   $\angle ODB = \angle OAD + \angle DOA = 90^\circ - \frac{1}{2}z + z = 90 + \frac{1}{2}z$, $\angle OEB = 90^\circ + \frac{1}{2}z$

8. $\angle ABE = \angle ADE$, $\angle ADF = \angle ACF = \frac{1}{2}\angle C$ ಆದ್ದರಿಂದ $\angle EDF = \angle ABE + \angle ADF = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$ $= \frac{1}{2}(180 - \angle A) = 90 - \frac{1}{2}\angle A$

9. ಪ್ರಶ್ನೆ 1, ಅಭ್ಯಾಸ 12.2 ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 12.8 ಉಪಯೋಗಿಸಿ.

10. $\angle A$ ದ ಕೋನಾರ್ಧಕರೇಖೆಯು Δ ABC ಯ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು D ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸು. DC ಮತ್ತು DB ಸೇರಿಸಿ. ನಂತರದಲ್ಲಿ $\angle BCD = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle A$ ಮತ್ತು $\angle DBC = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle A$ ಆದ್ದರಿಂದ $\angle BCD = \angle DBC$ ಅಥವಾ $DB = DC$. ಹಾಗೆಯೇ D ಬಿಂದುವು BC ರೇಖೆಯ ಲಂಭಾರ್ಧಕರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 13.1

1. (i) $5.45\ m^2$ (ii) ₹ 109

2. ₹ 555

3. 6 m

4. 100 ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳು

5. (i) ಘನಾಕಾರದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 40 cm^2 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು.

(ii) ಘನಾಕೃತಿಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 10 cm^2 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು.

6. (i) ಗಾಜಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 4250 cm^2

(ii) 320 cm ಟೇಪು ಟೇಪಿನ (ಎಲ್ಲಾ ಅಂಚುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ.) (12 ಅಂಚುಗಳು 4 ಉದ್ದ, 4 ಅಗಲ ಮತ್ತು 4 ಎತ್ತರದ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.)

7. ₹ 2184

8. 47 m^2

ಅಭ್ಯಾಸ 13.2

1. 2 cm
2. 7.48 m^2
3. (i) 968 cm^2

(ii) 1064.8 cm^2

(iii) 2038.08 cm^2

[ಪೈಪಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಅದರ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅದರ ಎರಡು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ. ಉಂಗುರಾಕಾರದ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು $\pi (R^2 - r^2)$ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ R = ಹೊರ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು r = ಒಳ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ]

4. 1584 m^2
5. ₹ 68.75
6. 1 m
7. (i) 110 m^2 (ii) ₹ 4400
8. 4.4 m^2
9. (i) 59.4 m^2 (ii) 95.04 m^2

(ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿ ಕಬ್ಬಿಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು x m^2 ಆಗಿರಲಿ. ಅದರಲ್ಲಿ $\frac{1}{12}$ ರಷ್ಟು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಕಬ್ಬಿಣ ವ್ಯರ್ಥವಾದರೆ, ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಕಬ್ಬಿಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{11}{12}$ ರ x ಇದರ ಅರ್ಥವು ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಕಬ್ಬಿಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{11}{12} \times 87.12\ m^2$)

10. 2200 cm^2, ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಎತ್ತರ (30 + 2.5 + 2.5) cm ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 13.3

1. 165 cm^2
2. 1244.57 m^2
3. (i) 7 cm (ii) 462 cm^2
4. (i) 26 m (ii) ₹ 137280
5. 63 m
6. ₹ 1155
7. 5500 cm^2
8. ₹ 384.34 (ಸರಿಸುಮಾರು)

ಅಭ್ಯಾಸ 13.4

1. (i) 1386 cm^2 (ii) 394.24 cm^2 (iii) 2464 cm^2
2. (i) 616 cm^2 (ii) 1386 cm^2 (iii) 38.5m^2
3. 942 cm^2
4. 1:4
5. ₹ 27.72
6. 3.5 cm
7. 1:16
8. 173.25 cm^2
9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1 : 1

ಅಭ್ಯಾಸ 13.5

1. 180 cm^3
2. 135000 ಲೀಟರ್‌ಗಳು
3. 4.75 m
4. ₹ 4320
5. 2 m
6. 3 ದಿನಗಳು
7. 16000
8. 6 cm, 4 : 1
9. 4000 m^3

ಅಭ್ಯಾಸ 13.6

1. 34.65 ಲೀಟರ್‌ಗಳು
2. 3.432 kg [ಕೊಳವೆಯ ಘನಫಲ = $\pi h [R^2 - r^2]$ ಇಲ್ಲಿ R ಹೊರ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು r ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯ]
3. ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವು 85 cm^2 ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ.
4. (i) 3 cm (ii) 141.3 cm^3
5. (i) 110 m^2 (ii) 1.75 m (iii) 96.25 *kl*
6. 0.4708 m^2
7. ಕಟ್ಟಿಗೆಯ ಘನಫಲ = 5.28 cm^3, ಗ್ರಾಫೈಟ್‌ನ ಘನಫಲ = 0.11 cm^3
8. 38500 cm^3 ಅಥವಾ 38.5 *l* ನಷ್ಟು ಸೂಪು

ಅಭ್ಯಾಸ 13.7

1. (i) 264 cm^3 (ii) 154 cm^3
2. (i) 1.232 *l* (ii) $\frac{11}{35}\,l$
3. 10 cm
4. 8 cm
5. 38.5 *kl*
6. (i) 48 cm (ii) 50 cm (iii) 2200 cm^2
7. 100 π cm^3
8. 240 π cm^3; 5: 12
9. 86.625 m^3, 99.825 m^2

ಅಭ್ಯಾಸ 13.8

1. (i) $1437\frac{1}{3}\,cm^3$ (ii) 1.05 m^3 (ಸರಿಸುಮಾರು)
2. (i) $11498\frac{2}{3}\,cm^3$ (ii) 0.004851 m^3
3. 345. 39 g (ಸರಿಸುಮಾರು)
4. $\frac{1}{64}$
5. 0.303 *l* (ಸರಿಸುಮಾರು)
6. 0.06348 m^3 (ಸರಿಸುಮಾರು)
7. $179\frac{2}{3}$ cm^3
8. (i) 249.48 m^2 (ii) 523.9 m^3 (ಸರಿಸುಮಾರು)

9. (i) $3r$ (ii) 1 : 9

10. 22.46 mm^3 (ಸರಿಸುಮಾರು)

ಅಭ್ಯಾಸ 13.9 (ಐಚ್ಛಿಕ)

1. ₹ 6275

2. ₹ 2784.32 (ಸರಿಸುಮಾರು) [ಬೆಳ್ಳಿಯ ಬಣ್ಣದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವಾಗ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವ ಗೋಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಳೆಯಲು ಮರೆಯಬಾರದು.]

3. 43.75%

ಅಭ್ಯಾಸ 14.1

1. ನಾವು ನಮ್ಮ ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಮಾಡಬಹುದಾದ ಐದು ಉದಾಹರಣೆಗಳು

   (i) ನಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

   (ii) ನಮ್ಮ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಫ್ಯಾನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

   (iii) ನಮ್ಮ ಮನೆಯ ಎರಡು ವರ್ಷದ ವಿದ್ಯುತ್ ಬಿಲ್ಲುಗಳು

   (iv) ದೂರದರ್ಶನ ಅಥವಾ ವಾರ್ತಾಪತ್ರಿಕೆಯಿಂದ ಪಡೆದ ಮತದಾನದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು

   (v) ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕ್ಷೆಯಿಂದ ಪಡೆದಂತಹ ಸಾಕ್ಷರತೆಯ ದರದ ಅಂಕಿ ಅಂಶಗಳು. ಇವುಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಇನ್ನಿತರ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ನೀಡಬಹುದು ಎಂದು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಿ.

   ಪ್ರಾಥಮಿಕ ದತ್ತಾಂಶ (i), (ii) ಮತ್ತು (iii) ದ್ವಿತೀಯಕ ದತ್ತಾಂಶ (iv) ಮತ್ತು (v)

ಅಭ್ಯಾಸ 14.2

ರಕ್ತದ ಗುಂಪು	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
A	9
B	6
O	12
AB	3
ಒಟ್ಟು	30

ಹೆಚ್ಚು ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ರಕ್ತದ ಗುಂಪು – O ವಿರಳವಾದ ರಕ್ತದ ಗುಂಪು – AB

2.

ದೂರ kmಗಳಲ್ಲಿ	ತಾಳೆ ಗುರುತಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ
0 – 5	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$	5
5 – 10	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\vert$	11
10 – 15	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\vert$	11
15 – 20	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\vert\vert\vert\vert$	9
20 – 25	$\vert$	1
25 – 30	$\vert$	1
30 – 35	$\vert\vert$	2
	ಒಟ್ಟು	40

3. (i)

ಸಾಪೇಕ್ಷ ತೇವಾಂಶ (% ರಲ್ಲಿ)	ಆವೃತ್ತಿ
84 – 86	1
86 – 88	1
88 – 90	2
90 – 92	2
92 – 94	7
94 – 96	6
96 – 98	7
98 – 100	4
ಒಟ್ಟು	30

(ii) ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಮಳೆಗಾಲದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಹಾಗೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ ಏಕೆಂದರೆ ಸಾಪೇಕ್ಷ ತೇವಾಂಶವು ಹೆಚ್ಚಿದೆ.

ವ್ಯಾಪ್ತಿ = 99.2 – 84.9 = 14.3

4. (i)

ಎತ್ತರ (cmಗಳಲ್ಲಿ)	ಆವೃತ್ತಿ
150 − 155	12
155 − 160	9
160 − 165	14
165 – 170	10
170 − 175	5
ಒಟ್ಟು	50

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ 50% ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 165 cmಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ. ಎಂಬ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು.

5. (i)

ಸಲ್ಫರ್ ಡೈ ಆಕ್ಸೈಡ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣ (ppmಗಳಲ್ಲಿ)	ಆವೃತ್ತಿ
0.00 – 0.04	4
0.04 – 0.08	9
0.08 −0.12	9
0.12 − 0.16	2
0.16 − 0.20	4
0.20 − 0.24	2
ಒಟ್ಟು	30

(ii) ಎಂಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಸಲ್ಫರ್ ಡೈ ಅಕ್ಸೈಡ್‌ನ ಪ್ರಬಲತೆಯ ಪ್ರಮಾಣವು 0.11 pm ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ.

6.

ಶಿರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಆವೃತ್ತಿ
0	6
1	10
2	9
3	5
ಒಟ್ಟು	30

7. (i)

ಅಂಕಿಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ
0	2
1	5
2	5
3	8
4	4
5	5
6	4
7	4
8	5
9	8
ಒಟ್ಟು	50

(ii) ಹೆಚ್ಚು ಆವೃತ್ತಿ ಹೊಂದಿರುವ ಅಂಕಿಗಳು 3 ಮತ್ತು 9. ಕಡಿಮೆ ಆವೃತ್ತಿ ಹೊಂದಿರುವ ಅಂಕಿಯು '0'

8. (i)

ಗಂಟೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಆವೃತ್ತಿ
0 – 5	10
5 – 10	13
10 – 15	5
15 – 20	2
ಒಟ್ಟು	30

(ii) 2 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು

9.

ಬ್ಯಾಟರಿಗಳ ಬಾಳಿಕೆ (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಆವೃತ್ತಿ
2.0–2.5	2
2.5–3.0	6

3.0–3.5	14
3.5–4.0	11
4.0–4.5	4
4.5–5.0	3
ಒಟ್ಟು	40

ಅಭ್ಯಾಸ 14.3

1. (ii) ಸಂತಾನೋತ್ಪತ್ತಿಯ ಆರೋಗ್ಯದ ಸ್ಥಿತಿಗತಿ.

3. (ii) ಪಕ್ಷ A

4. (ii) ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜ (iii) ಇಲ್ಲ

5. (ii) 184

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಆವೃತ್ತಿ	ವ್ಯಾಪ್ತಿ	ಆಯತದ ಉದ್ದ (ಎತ್ತರ)
1 – 2	5	1	$\frac{5}{1}\times 1 = 5$
2 – 3	3	1	$\frac{3}{1}\times 1 = 3$
3 – 5	6	2	$\frac{6}{2}\times 1 = 3$
5 – 7	12	2	$\frac{12}{2}\times 1 = 6$
7 – 10	9	3	$\frac{9}{3}\times 1 = 3$
10 – 15	10	5	$\frac{10}{5}\times 1 = 2$
15 – 17	4	2	$\frac{4}{2}\times 1 = 2$

ಈಗ ನೀವು ಈ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಮ್‌ನ ಚಿತ್ರ ಎಳೆಯಬಹುದು.

9. (i)

ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಆವೃತ್ತಿ	ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ	ಆಯತದ ಉದ್ದ (ಎತ್ತರ)
1 – 4	6	3	$\frac{6}{3}\times 2 = 4$
4 – 6	30	2	$\frac{30}{2}\times 2 = 30$
6 – 8	44	2	$\frac{44}{2}\times 2 = 44$
8 – 12	16	4	$\frac{16}{4}\times 2 = 8$
12 – 20	4	8	$\frac{4}{8}\times 2 = 1$

ಈಗ ನೀವು ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಮ್‌ನ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

(ii) 6–8

ಅಭ್ಯಾಸ 14.4

1. ಸರಾಸರಿ = 2.8, ಮಧ್ಯಾಂಕ = 3, ಬಹುಲಕ (ರೂಢಿಬೆಲೆ) = 3
2. ಸರಾಸರಿ = 54.8, ಮಧ್ಯಾಂಕ = 52, ಬಹುಲಕ (ರೂಢಿಬೆಲೆ) = 52
3. $x = 62$ 4. 14
5 60 ಕೆಲಸಗಾರರ ಸರಾಸರಿ ವೇತನ ₹ 5083.33

ಅಭ್ಯಾಸ 15.1

1. $\frac{24}{30}$ ಅಂದರೆ $\frac{4}{5}$
2. (i) $\frac{19}{60}$ (ii) $\frac{407}{750}$ (iii) $\frac{211}{1500}$
3. $\frac{3}{20}$ 4. $\frac{9}{25}$
5. (i) $\frac{29}{2400}$ (ii) $\frac{579}{2400}$ (iii) $\frac{1}{240}$
   (iv) $\frac{1}{96}$ (v) $\frac{1031}{1200}$
6. (i) $\frac{7}{90}$ (ii) $\frac{23}{90}$

7. (i) $\frac{27}{40}$ (ii) $\frac{13}{40}$

8. (i) $\frac{9}{40}$ (ii) $\frac{31}{40}$ (iii) 0

11. $\frac{7}{11}$ 12. $\frac{1}{15}$ 13. $\frac{1}{10}$

ಅಭ್ಯಾಸ A .2.1

1. ಹಂತ 1. ಸೂತ್ರ ರಚನೆ

ಸುಸಂಬದ್ದ ಅಂಶಗಳು ಯಾವುವುವೆಂದರೆ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ನ್ನು ಬಾಡಿಗೆಗೆ ಪಡೆಯಬೇಕಾಗಿರುವ ಅವಧಿ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ರೀತಿಯ ಖರ್ಚು (ವೆಚ್ಚ).

ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಖರೀದಿಯ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಾಗಲಿ, ಬಾಡಿಗೆ ಪಡೆಯುವುದರಲ್ಲಾಗಲಿ, ಕಾಲಾವಧಿ ವೆಚ್ಚ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಪರಿಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಈ ರೀತಿ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ನಗಣ್ಯ (ಅಸಂಬದ್ಧ) ವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಾವು ಎಲ್ಲ ಬ್ರಾಂಡ್, ಹಾಗೂ ಜನರೇಷನ್‌ನ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ಗಳು ಒಂದೇ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಉತ್ಪಾದಕರು, ಬೇರೆಬೇರೆ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಡಕಗಳೊಂದಿಗೆ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ತಯಾರಿಸಿದ್ದರೂ ಆ ಅಂಶವನ್ನು 'ನಗಣ್ಯ'ವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

x ತಿಂಗಳಿಗೆ ಕಂಪ್ಯೂಟರನ್ನು ಬಾಡಿಗೆಗೆ ಪಡೆಯಲು ಆಗುವ ವೆಚ್ಚ $= 2000\,x$. ಇದು ಕಂಪ್ಯೂಟರನ್ನು ಖರೀದಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಆಗುವ ವೆಚ್ಚಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆಗುವುದರಿಂದ ಕಂಪ್ಯೂಟರನ್ನು ಖರೀದಿಸುವುದೇ ಉತ್ತಮ ನಿರ್ಣಯ ಆದ್ದರಿಂದ ಸೂತ್ರವು $2000\,x = 25000$……(i)

ಹಂತ 2 : ಪರಿಹಾರ (1) ನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ, $x = \frac{25,000}{2000} = 12.5$

ಹಂತ 3 : ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ಗೆ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಬಾಡಿಗೆ, ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಕೊಳ್ಳಲು ಆಗುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ 12 ತಿಂಗಳಿಗೂ ಹೆಚ್ಚು ಅವಧಿಗೆ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಅವಶ್ಯಕವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಖರೀದಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಕಡಿಮೆ ವೆಚ್ಚವಾಗುತ್ತದೆ.

2. **ಹಂತ 1 :** ಸೂತ್ರದ ರಚನೆ

ಕಾರು ಸ್ಥಿರ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಕಾರಿನ ಜವದ ಯಾವುದೇ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ನಗಣ್ಯವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

x ಗಂಟೆಗಳ ನಂತರ ಎರಡು ಕಾರುಗಳು ಸಂಧಿಸುವುದಾದರೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಕಾರು A ಯಿಂದ $40\,x$ km ಹಾಗೂ ಎರಡನೆಯ ಕಾರು B ಯಿಂದ $30\,x$km ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದಾಗ ಅಂದರೆ ಅದು A ಯಿಂದ $(100 - 30x)$ km ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸೂತ್ರವು. $40\,x = (100 - 30x)$km

ಅಂದರೆ, $70x = 100$ ……. (i)

ಹಂತ 2 : ಪರಿಹಾರ (i) ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ $x = \frac{100}{70} = \frac{10}{7}$

ಹಂತ 3 : ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : ಗಂಟೆ $\frac{100}{70}$ = 1.4 ಗಂಟೆ

ಆದ್ದರಿಂದ ಕಾರುಗಳು 1.4 ಗಂಟೆ (1 ಗಂಟೆ 25 ನಿಮಿಷ) ನಂತರ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.

3. **ಹಂತ 1 : ಸೂತ್ರರಚನೆ :** ಚಂದ್ರನು ಭೂಮಿಯನ್ನು ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ಮಾಡಿವ ವೇಗ = $\frac{\text{ಪಥದ ಉದ್ದ}}{\text{ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲ}} = \frac{C}{t}$

ಹಂತ 2 : ಪರಿಹಾರ : ಪಥವು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ವೃತ್ತಾಕಾರವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಪರಧಿಯು

$$= 2\times\pi\times 38400km = 2411520\ km$$

ಈ ಪಥದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಲ ಕ್ರಮಿಸಲು ಚಂದ್ರನು 24 ಗಂಟೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ $= \frac{2411520}{24} = 100480\ km/hour$

ಹಂತ 3 : ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : ಚಂದ್ರನ ವೇಗ = ಗಂಟೆಗೆ 100480 km/h

4. **ಸೂತ್ರ ರಚನೆ :** ವಾಟರ್ ಹೀಟರನ ಬಳಕೆಯಿಂದಾಗಿಯೇ ಬಿಲ್ಲಿನಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೆಂದು ಪರಿಭಾವಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಾಟರ್ ಹೀಟರನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ ಅವಧಿಯು x ಆಗಿರಲಿ.

ಹೀಟರ್ ಬಳಕೆಯಿಂದ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಬಿಲ್ಲಿನಲ್ಲಿ ಅದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ = (₹ 1240 – 1000) = ₹ 240

ವಾಟರ್ ಹೀಟರ್‌ನ್ನು 1 ಗಂಟೆ ಬಳಸಿದ್ದಕ್ಕೆ ಆದ ವೆಚ್ಚ = ₹ 8

ಆದ್ದರಿಂದ 30 ದಿನ ವಾಟರ್‌ಹೀಟರ್ ಬಳಸಿದ್ದಕ್ಕೆ ಆದ ಖರ್ಚು = $8 \times 30 \times x$

ಆದೇ ರೀತಿ, 30 ದಿನಗಳ ಅವಧಿಗೆ ವಾಟರ್‌ಹೀಟರ್ ಬಳಸಿದ್ದರಿಂದ ಆದ ಖರ್ಚು = ವಿದ್ಯುತ್ ಬಿಲ್ಲಿನ ಮೊಬಲಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

ಆದ್ದರಿಂದ $240\,x = 240$ ……….(i)

ಪರಿಹಾರ : ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ $x = 1$ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : $x = 1$ ಆದ್ದರಿಂದ ವಾಟರ್‌ಹೀಟರನ್ನು ಪ್ರತಿದಿನ ಸರಾಸರಿ ಒಂದು ಗಂಟೆ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ A 2.2

1. ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸುವುದಿಲ್ಲ ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸಿರುವ ವಿಧಾನ ಅಥವಾ ನಿಮಗೆ ಸರಿಯೆನಿಸುವ ಇನ್ನಾವುದೇ ಸೂಕ್ತವಾದ ಕ್ರಮದಿಂದ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ A 2.3

1. ಸೂತ್ರರಚನೆ ಹಂತವು ನೈಜಜೀವನದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಧೀರ್ಘವಾದಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಅದೇರೀತಿ, ಶಾಬ್ಧಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿನ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಮಾಲ್ಯೀಕರಣ (ಸಿಂಧುತ್ವದ ಪರೀಕ್ಷೆ) ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ.

ಇದಲ್ಲದೆ ಶಾಬ್ಧಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು 'ನಿಖರವಾದ ಉತ್ತರ'ವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

ಇದು ನಿತ್ಯಜೀವನದ ಪ್ರಸಂಗಗಳ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ಆಗಲೇಬೇಕೆಂದೇನಿಲ್ಲ.

2. ಪ್ರಮುಖವಾದ (ಸುಸಂಬದ್ದ) ಅಂಶಗಳೆಂದರೆ

(ii) ಮತ್ತು (iii)

(i) ಇಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟವಾದ ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪರಿಣಾಮ ಬೀರಬಹುದಾದರೂ ಇಲ್ಲಿ (i) ಮುಖ್ಯವಾದ ಅಂಶ ಅಲ್ಲ