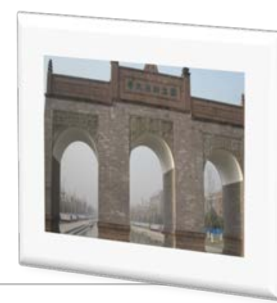
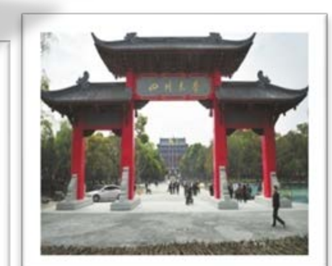
四川大学

第二章 矩阵代数

2.3 逆矩阵与矩阵的初等变换





复习：矩阵的代数运算

复习：同型矩阵与矩阵相等的概念

1. 两个矩阵的行数相等, 列数相等时, 称为**同型矩阵**.

2. 两个矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)$与$B\left(b_{ij}\right)$ 为同型矩阵,并且对应元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\ \left(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\right),$$

则称**矩阵**A与B**相等**,记作 $A=B$.

复习：矩阵的加法

定义: 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

说明: 只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

复习：矩阵的数乘

定义： 数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法与数乘统称为矩阵的线性运算

复习：矩阵的乘法

设$A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，那么规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵$C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

并把此乘积记作 $C=AB$.

$$AB = C$$

注意1： 矩阵的乘法规则——左行乘右列

$$c_{ij} = \underbrace{(a_{i1}, \quad a_{i2} \quad ,\cdots \quad ,a_{in})}_{A\text{的第}i\text{行}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}}_{B\text{的第}j\text{列}}$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \quad (i = 1, 2\cdots, s; j = 1, 2, \cdots, m).$$

注意2： 当左矩阵A的列数=右矩阵B的行数时，两个矩阵才能相乘。

注意3： 乘积矩阵C的行数＝左矩阵A的行数，
乘积矩阵C的列数＝右矩阵B的列数.

复习：矩阵乘法的运算规律

与数的乘法不同	与数的乘法类似

与数的乘法不同

(1)两个非零矩阵乘积可能为O。

(2)交换律不成立

$$AB \neq BA$$

(3)消去律不成立

$AC = AD$, 且 $A \neq O \not\Rightarrow C = D$

与数的乘法类似

(1) 乘法结合律 $(AB)C = A(BC)$

(2) 数乘和乘法的结合律和交换律

$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ (其中λ是数)

(3) 乘法对加法的分配律

左分配律：$A(B+C) = AB + AC$

右分配律：$(B+C)A = BA + CA$

(4) 零矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数0，即

$$0_{s\times m} A_{m\times n} = 0_{s\times n} \qquad A_{m\times n} 0_{n\times t} = 0_{m\times t}$$

(5) 单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数1，即

$$E_m A_{m\times n} = A_{m\times n} E_n = A$$

(6) 矩阵的幂 若 A 是 n 阶方阵，定义

$$A^0 = E_n,\quad A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k}$$

显然 $A^k A^l = A^{k+l}$, $(A^k)^l = A^{kl}$

2.3.1 逆矩阵

概念的引入：

1、数 在数的运算中，当数 $a\neq 0$ 时,有

$$ab = ba = 1,$$

则$b=\frac{1}{a}$称为a的倒数（或称为a的逆）；

也可记为 $b = a^{-1}$

2、矩阵 在矩阵的运算中，单位阵 E相当于数的乘法运算中的 1，那么，对于矩阵 A，如果存在一个矩阵 B ，有

$$AB = BA = E,$$

则矩阵B 称为A的逆矩阵， A 称为可逆矩阵.

1. 逆矩阵的定义

对矩阵 A，若存在矩阵 B，使得

$$AB = BA = E$$

则称矩阵 A 是可逆的，且矩阵 B 称为 A 的逆矩阵，记作 $B = A^{-1}$

例： 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

$\because AB = BA = E,$

$\therefore B$是A的一个逆矩阵.

说明 **1. 若A是可逆矩阵，则A必为方阵.**

证明：设$B_{s\times t}$是$A_{m\times n}$的逆矩阵，则

$$(A\ B)_{m\times t}=(B\ A)_{s\times n}=E$$

$$\therefore\ n=s,t=m \quad m=s,t=n \quad \therefore\ m=n=s=t$$

2. 若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是唯一的.

证明： 设B、C都是A的逆矩阵，则

$$AB=BA=E,\ AC=CA=E$$

从而$B=EB=(CA)B=C(AB)=CE=C$

2. 可逆矩阵的运算性质

性质1 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

性质2 若A可逆,数$\lambda\neq 0$,则λA可逆,且

$$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

性质3 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

证明: $(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}=AEA^{-1}$

$=AA^{-1}=E,$

$\therefore (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$

推广 $(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$

注： A可逆，B可逆 $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $(A+B)$可逆

例如：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$$

A,B可逆，但$A+B=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$不可逆

A,C可逆，$A+C=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$可逆，但$A^{-1}+C^{-1}\neq(A+C)^{-1}$

矩阵方程	解
$AX = B$	$X = A^{-1}B$
$XA = B$	$X = BA^{-1}$
$AXB = C$	$X = A^{-1}CB^{-1}$

例.设方程A满足$A^2-5A+6E=0$,证明:$A+7E$可逆，并求$(A+7E)^{-1}$.

证明：由$A^2-5A+6E=0$，得

$$A^2-5A+7\times(-12)E=-90E,$$

$$(A+7E)[-\frac{1}{90}(A-12E)]=E,$$

故$A+7E$可逆，（$(A+7E)^{-1}=-\frac{1}{90}(A-12E)$

2.3.2 初等矩阵和逆矩阵的求法

定义 下面三种变换称为矩阵的**初等行变换**.

（1）对换两行: $r_i \leftrightarrow r_j$

（2）数乘某行: $r_i \times k$

（3）倍加某行: $r_i + kr_j$

同理，把 r 换成 c 可定义矩阵的**初等列变换**.

矩阵的初等列变换与初等行变换统称为矩阵的**初等变换**.

初等变换的逆变换仍为初等变换，且变换类型相同.

$r_i \leftrightarrow r_j$ 逆变换 $r_i \leftrightarrow r_j$; $r_i \times k$ 逆变换 $r_i \times (\frac{1}{k})$;

$r_i + kr_j$ 逆变换 $r_i - kr_j$.

矩阵等价

定义 如果矩阵A经过有限次初等变换变成矩阵B，就称矩阵 **A与B等价**，记作 $A \cong B$

等价关系的性质：

（1）反身性： $A \cong A$;

（2）对称性： *if* $A \cong B, \Rightarrow B \cong A$;

（3）传递性： *if* $A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C$.

初等矩阵

定义 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应着三种初等方阵.

$$\begin{cases} 1.\text{以数 } k \neq 0 \text{ 乘某行(列)}; \\ 2.\text{ 交换两行(列)}; \\ 3.\text{以数 } k \text{ 乘某行（列）加到另一行（列）上去}. \end{cases}$$

(1) 交换两行或两列，得初等对换矩阵。

交换 E 中第 i, j 两行，即 $(r_i \leftrightarrow r_j)$，得初等方阵

$$P(i,j)=\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ &\ddots&&&&&&&&& \\ &&1&&&&&&&& \\ &&&0&&\cdots&&1&&& \\ &&&&1&&&&&& \\ &&&\vdots&&\ddots&&\vdots&&& \\ &&&&&&1&&&& \\ &&&1&&\cdots&&0&&& \\ &&&&&&&&1&& \\ &&&&&&&&&\ddots& \\ &&&&&&&&&&1 \end{pmatrix}$$

← 第 i 行

← 第 j 行

第 i 列　第 j 列

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列，得**初等倍乘矩阵**。

以数$k \neq 0$乘单位矩阵的第i行$(r_i \times k)$，得初等矩阵$P(i(k))$.

$$
P(i(k)) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \text{第 } i \text{ 列} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

(3) 以数 k 乘某行（列）加到另一行（列）上，

以 k 乘 E 的第 j 行加到第 i 行上 $(r_i + kr_j)$

[或以 k 乘 E 的第 i 列加到第 j 列上 $(c_j + kc_i)$]

$$P(i,j(k))=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行}\\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行}\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{cc}\text{第 }i\text{ 列} & \text{第 }j\text{ 列}\end{array} & \end{array}$$

练习

判断下列矩阵是否为初等矩阵

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ✗

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓ (4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✗

定理1 初等矩阵是可逆的，逆矩阵仍为初等矩阵。

变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换是其本身，

则 $P(i,j)^{-1} = P(i,j)$ ；

变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times \dfrac{1}{k}$,

则 $P(i(k))^{-1} = P(i(\dfrac{1}{k}))$;

变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i + (-k)r_j$,

则 $P(i,j(k))^{-1} = P(i,j(-k))$.

$$P(i,j)^{-1}=P(i,j)$$
$$P(i(k))^{-1}=P(i(\frac{1}{k}))$$
$$P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k))$$

练习

求初等矩阵逆矩阵

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

例1：计算

$$(1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\end{pmatrix}$$

$$(2)\begin{pmatrix}1&0&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+ka_{31}&a_{12}+ka_{32}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}$$

$$(3)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{13}&b_{12}\\b_{21}&b_{23}&b_{22}\\b_{31}&b_{33}&b_{32}\end{pmatrix}$$

定理2

设A是$m\times n$矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘一个相应的m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换，相当于在A的右边乘一个相应的n阶初等矩阵。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{12} \\ b_{21} & b_{23} & b_{22} \\ b_{31} & b_{33} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

一般记法：

$P(i,j)A$表示A的第i行与第j行对换，

$AP(i,j)$表示A的第i列与第j列对换.

$P(i(k))A$表示A的第i行乘k，

$AP(i(k))$表示A的第i列乘k.

$P(i,j(k))A$表示A的第j行乘k加到第i行上，

$AP(i,j(k))$表示A的第i列乘k加到第j列上.

矩阵的初等变换与初等矩阵的关系

$P(i,j)A$ 相当于$r_i \leftrightarrow r_j$,

$P(i(k))A$ 相当于 $r_i \times k$,

$P(i,j(k))A$ 相当于$r_i + kr_j$,

$AP(i,j)$ 相当于$c_i \leftrightarrow c_j$,

$AP(i(k))$ 相当于 $c_i \times k$,

$AP(i,j(k))$ 相当于$c_j + kc_i$,

说明：对矩阵实施一次初等变换可以用一个相应的初等矩阵去左乘或右乘表示。

二、用矩阵的初等行变换求逆阵

定理2. 设$A=(a_{ij})_n$,则下列命题等价

(1) A可逆.

(2) $AX=0$只有零解.

(3) A与单位矩阵E_n行等价(A经有限次初等行变换化为E).

证

1)=>2) 若A可逆，且X是$AX=0$的一个解，则

$$X=EX=(A^{-1}A)X=A^{-1}(AX)=A^{-1}0=0$$

故$AX=0$只有零解.

2)=>3)

由推论1.2.1，A的主元列数等于未知量个数n，

这n个主元位置一定在对角线上，

即A的行最简形是n阶单位矩阵E.

A可经有限次初等行变换化为单位矩阵.

3)=>1)

因为A的行化简的每一步都对应着左乘以

一个相应的初等阵，所以存在初等阵$P_1, P_2,$

$\cdots P_k$，使$P_k \cdots P_2 P_1 A = E$

因初等阵是可逆的，可逆阵的乘积仍然可逆。所以

$$(P_k\cdots P_2P_1)^{-1}(P_k\cdots P_2P_1)\mathrm{A}=(P_k\cdots P_2P_1)^{-1}E$$

$$\mathrm{A}=(P_k\cdots P_2P_1)^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_k^{-1}$$

A为可逆阵的逆，从而是可逆的.

推论2.3.2. 对n阶方阵A,下列命题等价

（1）A可逆.

（2）A可表为若干初等矩阵的乘积.

（3）A的主元列数为n.

推论2.3.3. n阶矩阵A与B行等价,则A可逆 $\Leftrightarrow$ B可逆.

利用初等变换求逆阵的方法：

当A可逆时，由 $\boxed{P_k P_{k-1} \cdots P_1} A = E$，有

$$A^{-1} = P_k P_{k-1} \cdots P_1 = \boxed{P_k P_{k-1} \cdots P_1} E,$$

$$\therefore \quad P_k P_{k-1} \cdots P_1 \left(A \,\vdots\, E \right)$$

$$= \left(P_k P_{k-1} \cdots P_1 A \,\vdots\, P_k P_{k-1} \cdots P_1 E \right)$$

$$= \left(E \,\vdots\, A^{-1} \right)$$

用矩阵的初等变换求逆矩阵方法

$$\left(A \ E \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(E \ A^{-1} \right)$$

$n \times 2n$矩阵

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解 $$(A\mid E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&-2&-5\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\dfrac{3}{2}&-3&\dfrac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(\frac{1}{-2})}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(\frac{1}{-2})}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\dfrac{3}{2}&-3&\dfrac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)$$

用矩阵的初等变换求逆矩阵

注：1. A 与 E 每一次变换必须同步;

2. 求逆时,自始至终每一步都只能用初等行变换，千万不能夹杂任何初等列变换.

3. 若作初等行变换时,出现全行为0，则无法等价为单位阵。结论：矩阵不可逆!

另：利用初等行变换求逆矩阵的方法，还可用于求矩阵 $A^{-1}B$.

即

$$(A \,\vdots\, B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(E \quad \boxed{A^{-1}B}\right)$$

例4： 求矩阵 X,使 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}.$$

解： 若 A 可逆，则 $X=A^{-1}B.$

方法1：先求出 A^{-1}，再计算 $A^{-1}B$ 。

方法2：直接求 $A^{-1}B$ 。

$$(A \mid B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E \mid A^{-1}B)$$

$$(A\,\vdots\,B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&2&5\\0&-2&-5&-1&-9\\0&-2&-6&-2&-12\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-2&1&-4\\0&-2&-5&-1&-9\\0&0&-1&-1&-3\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&3&2\\0&-2&0&4&6\\0&0&-1&-1&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_2\div(-2)}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{array}\right),\quad \therefore X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}.$$

思考： 初等变换可以求BA^{-1}，$A^{-1}CB^{-1}$吗？

利用初等列变换求逆阵：

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

如果要解 $YA = C$，则可对矩阵$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$作初等列变换，

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ CA^{-1} \end{pmatrix}$$

即可得 $Y = CA^{-1}$.

练习1

求矩阵$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{pmatrix}$的逆阵.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&0&0\\0&1/4&0\\0&0&1/5\end{pmatrix}$$

求矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&4&0\\5&0&0\end{pmatrix}$的逆阵.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1/5\\0&1/4&0\\1/3&0&0\end{pmatrix}$$

求矩阵$A=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&a_1\\0&\cdots&a_2&0\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\a_n&\cdots&0&0\end{pmatrix}$的逆阵.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1/a_n\\0&0&\iddots&0\\0&1/a_2&\cdots&0\\1/a_1&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

练习2 求矩阵 X,使 $AX=B$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}3&5&5\\2&4&3\\-2&-2&-3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\\1&3\end{pmatrix}.$$

解 若 A 可逆，则 $X=A^{-1}B$.

$$(A \vdots B)=\begin{pmatrix}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{pmatrix}$$

$$\to(E\quad A^{-1}B)=\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{21}{2}&-11\\0&1&0&-\frac{1}{2}&2\\0&0&1&7&5\end{pmatrix}$$

练习3.已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\2&0&2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,若$\boldsymbol{X}$满足

$\boldsymbol{AX}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{X}$,求$\boldsymbol{X}^4$.

解. 变形$\boldsymbol{AX}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{X}$为$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$.

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix} \qquad (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}^4=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}^4(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$