第二章 矩阵代数

2.4 转置矩阵与一些重要的方阵

主要内容

一、转置矩阵

二、对称与反对称矩阵

三、对角矩阵

四、正交矩阵

一、矩阵的转置

定义 设$A=(a_{ij})_{s\times n}$是一个$s\times n$矩阵，将A的行、列互换得到一个$n\times s$矩阵：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix},$$

称为A的**转置**(*transpose*)，记为A^T或A'。

例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^T=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} 18 & 6 \end{pmatrix}, \quad B^T=\begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

注意1

$$A_{s\times n} \Rightarrow A^T_{n\times s}$$

注意2

A^{T}中第i行第j列的元素a^T_{ij}

$= A$中第j行第i列的元素a_{ji}

转置矩阵的运算性质

$$(1)\ (A^T)^T = A;$$

$$(2)\ (A+B)^T = A^T + B^T;$$

$$(3)\ (\lambda A)^T = \lambda A^T;$$

$$(4)\ (AB)^T = B^T A^T.$$

(4) $(AB)^T = B^T A^T$;

证明： （1）同型

不失一般性， 设A是$s\times n$矩阵， B是$n\times m$矩阵，

则AB是$s\times m$矩阵，$(AB)^T$为$m\times s$矩阵；

B^T为$m\times n$矩阵，A^T为$n\times s$矩阵，故$B^T A^T$为$m\times s$矩阵；

即，$(AB)^T$与$B^T A^T$是同型矩阵。

(2) 对应元素相等

$(AB)^T$的i行j列元素$=(AB)$的j行i列元素

$=(A$的j行$)(B$的i列$)$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$$

$$B^T A^T\text{的}i\text{行}j\text{列元素} = (B^T\text{的}i\text{行})(A^T\text{的}j\text{列})$$
$$= (B\text{的}i\text{列})^T (A\text{的}j\text{行})^T$$
$$= (b_{1i}, b_{2i}, \cdots, b_{ni})\begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} \quad (i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, s)$$

于是$(AB)^T = B^T A^T$.

性质4的推广 $$(A_1 A_2 \cdots A_r)^T = A_r^T \cdots A_2^T A_1^T$$

(5) 方阵A可逆，$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

证明：由$AA^{-1}=E$和性质(4)易知：

$$(AA^{-1})^T=(A^{-1})^T A^T=E^T=E,$$

同理可得：

$$(A^{-1}A)^T=A^T(A^{-1})^T=E^T=E,$$

因此：

$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T.$$

例1

已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $(AB)^T$.

解法1

$$\because AB=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 14 & -3 \\ 17 & 13 & 10 \end{pmatrix},\qquad \therefore (AB)^T=\begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

解法2

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

二、对称阵

设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A = A^T$，即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

那么 A 称为对称阵.

如果满足 $A = -A^T$，那么 A 称为反对称阵.

对称矩阵的特点是：它的元素以主对角线为对称轴对应相等.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

对称阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \\ -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

反对称阵

反对称矩阵的主要特点是：主对角线上的元素为0，其余的元素关于主对角线互为相反数.

特别地，两个同阶的对称矩阵的和还是对称矩阵，对称矩阵的数乘也是对称矩阵. 反对称矩阵亦然。

思考： 对称矩阵的乘积是对称矩阵吗?

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 不是对称矩阵

例2

设$A=(a_{ij})_3$为一个3阶实矩阵，若$A\neq 0$，证明AA^T为对称矩阵且$AA^T\neq 0$.

证明:$(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$，故AA^T为对称矩阵；

$$设B=AA^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$则b_{ij}=a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+a_{i3}a_{j3}(i,j=1,2,3),$$

特别地，B的对角线上的元素b_{ii}是实数的平方和，

$$b_{ii}=a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2\geq 0(i=1,2,3).$$

再由题设$A\neq 0$知，A至少有一个元素$a_{il}\neq 0$，则$b_{ii}>0$，于是$B\neq 0$.

例3 设列矩阵 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $X^{\mathrm{T}}X=1$，E 为 n 阶单位阵，$H=E-2XX^{\mathrm{T}}$，试证明 H 是对称阵，且 $HH^{\mathrm{T}}=E$.

证明:

$$H^T=(E-2XX^T)^T=E^T+(-2XX^T)^T=E-2(XX^T)^T$$

$$=E-2(X^T)^TX^T=E-2XX^T=H$$

从而 H 是对称阵.

$$HH^T=H^2=(E-2XX^T)^2=E^2-4XX^T+(-2XX^T)^2$$

$$=E-4XX^T+4XX^TXX^T=E-4XX^T+4X(X^TX)X^T$$

$$=E-4XX^T+4XX^T=E$$

例4 证明任一n阶矩阵A都可表示成对称阵与反对称阵之和.

证明 设 $C=A+A^T$

则 $C^T=\left(A+A^T\right)^T=A^T+A=C,$

所以C为对称矩阵.

设 $B=A-A^T,$

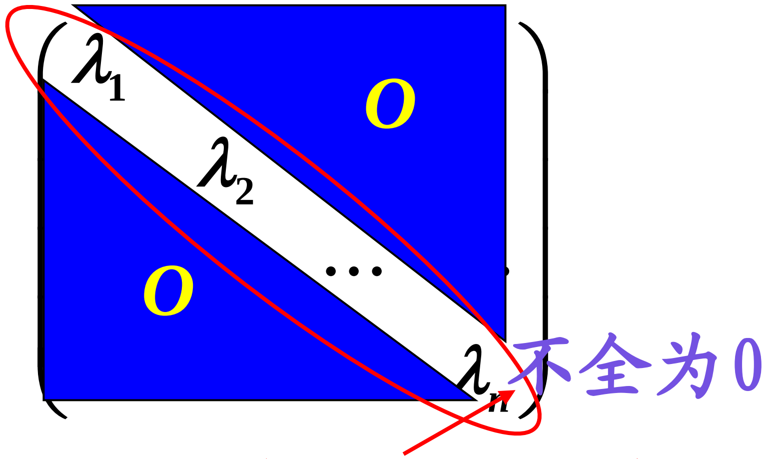
则 $B^T=\left(A-A^T\right)^T=A^T-A=-B,$

所以B为反对称矩阵.

$$A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}=\frac{C}{2}+\frac{B}{2},$$ 命题得证.

三、对角矩阵

主对角线以外的所有元素全为零的方阵称为**对角阵**.



记作 $\Lambda = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right).$

单位矩阵

主对角线上的所有元素全为1的对角阵称为**单位阵**.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{pmatrix}$$

全为1

记作 E.

数量矩阵

主对角线上的所有元素全为 λ 的对角阵称为**数量阵**.

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & O \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda \end{pmatrix}$$

全为 λ

记作 λE.

注意：

1.两同型对角阵的和、乘积都是对角阵，

而且运算都只需要对角线上的元进行相加或相乘。

2.对角阵A可逆的充要条件是其主对角线上

的元全部非零，其逆阵为对角阵，

且其对角线上的元为A中对应元的倒数。

四、正交矩阵

定义 若n阶实矩阵A满足$A^TA=E$，则A称为正交矩阵.

性质 显然正交矩阵A可逆，并且有以下性质：

(1) n阶方阵A为正交阵的充要条件是$A^T=A^{-1}$.

(2) n阶方阵A为正交阵的充要条件是

A的每一行(列)n个元的平方和为1（单位向量）；

且A的不同两行(列)的对应元的乘积之和为零（正交）.

(3) n阶方阵A为正交阵，则A^{-1}也为正交阵.

(4) n阶方阵A、B为正交阵，则AB也为正交阵.

n阶方阵$A_1,\cdots A_s$为正交阵，则$A_1A_2\cdots A_s$也为正交阵.

小结： 矩阵的转置

定义 设$A=(a_{ij})_{s\times n}$是一个$s\times n$矩阵，将A的行、列互换得到一个$n\times s$矩阵：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix},$$

称为A的**转置**(transpose)，记为A^T或A'。

注意1

$$A_{s\times n} \Rightarrow A^T_{n\times s}$$

注意2

A^T中第i行第j列的元素a^T_{ij}

$=A$中第j行第i列的元素a_{ji}

转置矩阵的运算性质

(1) $(A^T)^T = A$;

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

(5) 方阵A可逆,$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

对称阵

设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A=A^T$，即

$$a_{ij}=a_{ji}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

那么 A 称为对称阵.

如果满足 $A=-A^T$，那么 A 称为反对称阵.

对称矩阵的特点是：它的元素以主对角线为对称轴对应相等.

$$A=\begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

对称阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \\ -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

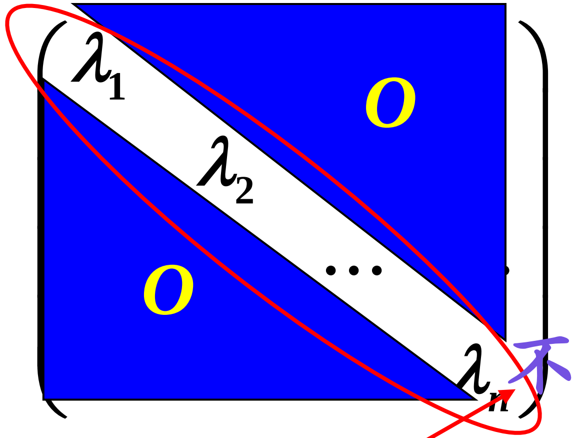
反对称阵

反对称矩阵的主要特点是:主对角线上的元素为0,其余的元素关于主对角线互为相反数.

特别地，两个同阶的对称矩阵的和还是反对称矩阵,对称矩阵的数乘也是对称矩阵.反对称矩阵亦然。

对角矩阵 主对角线以外的所有元素全为零的方阵称为**对角阵**.

对角线上的元素全为1，**单位阵**



不全为0

对角线上的元素全为相同的数，**数量矩阵**

记作 $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

注意：

1. 两同型对角阵的和、乘积都是对角阵，而且运算都只需要对角线上的元进行相加或相乘。

2. 对角阵A可逆的充要条件是其主对角线上的元全部非零，其逆阵为对角阵，且其对角线上的元为A中对应元的倒数。

正交矩阵

定义 若n阶实矩阵A满足$A^T A = E$，则A称为正交矩阵.

性质 显然正交矩阵A可逆，并且有以下性质:

(1) n阶方阵A为正交阵的充要条件是$A^T = A^{-1}$.

(2) n阶方阵A为正交阵的充要条件是
A的每一行(列)n个元的平方和为1(单位向量);
且A的不同两行(列)的对应元的乘积之和为零(正交).

(3) n阶方阵A为正交阵, 则A^{-1}也为正交阵.

(4) n阶方阵A、B为正交阵, 则AB也为正交阵.
n阶方阵$A_1,\cdots A_s$为正交阵, 则$A_1 A_2\cdots A_s$也为正交阵.