# 第三章 行列式

## 第三节 行列式的应用




## 主要内容

一、伴随矩阵

二、Cramer法则

三、用系数行列式判断方程组的解

## 一、伴随矩阵

行列式按行（列）展开定理

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, 当\ i=j, \\ 0, 当\ i\neq j; \end{cases} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, 当\ i=j, \\ 0, 当\ i\neq j; \end{cases}$$

根据矩阵乘法的定义，可得到下面的结果：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A| E_n$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A| E_n$$

**定义** 设 $A=(a_{ij})_n$，$A_{ij}$为 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$的代数余子式，构造矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为A的伴随矩阵(adjoint matrix)。

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据前面的结果，下式明显成立：

$$AA^*=A^*A=|A|E_n$$

**例** 求3阶矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$的伴随矩阵$A^*$.

解：各元素的代数余子式

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}=7, A_{12}=-\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}=16, A_{13}=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=5;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}=10, A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}=10, A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=5;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-4, A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=-7, A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=-5;$$

$$故A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 10 & -4 \\ 16 & 10 & -7 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

**例** 设$A$为$n(n\geq 2)$阶方阵，已知$|A|=k$,求$|A^*|$.

**解：** 1.当A可逆时

由$AA^*=A^*A=|A|E_n$得

$$|AA^*|=\left||A|E_n\right|$$

$$|A||A^*|=|A|^n$$

$$|A^*|=|A|^{n-1}=k^{n-1}$$

2.当A不可逆时

假设$|A^*|\neq 0$

由$AA^*=A^*A=|A|E_n$得

$$AA^*\left(A^*\right)^{-1}=0$$

$$A=0$$

则$A^*=0$，则$|A^*|$=0，与假设矛盾。

所以假设不成立,$|A^*|$=0。

结论：设$A$为$n(n\geq 2)$阶方阵,$|A^*|=|A|^{n-1}$.

# 矩阵可逆的判别定理及求法（完整版）

**定理** $n$阶方阵$A$可逆当且仅当 $|A| \neq 0$

且$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$，其中$A^*$为矩阵$A$的伴随矩阵.

证明：$(\Rightarrow)$

$A$可逆，则有$A^{-1}$，使$AA^{-1} = E$

两边取行列式，得$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = 1$

因此，$|A| \neq 0$

$(\Leftarrow)$ $$AA^* = A^*A = |A|E.$$

因为$AA^* = |A|E$，当$|A| \neq 0$时，有$A(\frac{A^*}{|A|}) = E$，

又因为$A^*A = |A|E$，当$|A| \neq 0$时，有$(\frac{A^*}{|A|})A = E$，

所以$A(\frac{A^*}{|A|}) = (\frac{A^*}{|A|})A = E$，所以$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

奇异矩阵： $|A| = 0$ （退化矩阵）

非奇异矩阵：$|A| \neq 0$ （非退化矩阵）

## 命题

设$A$为可逆矩阵，则$A$的伴随矩阵$A^*$也可逆，且$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=\frac{1}{|A|}A$.

**证** $A$可逆$\Leftrightarrow |A|\neq 0$,

由$AA^*=A^*A=|A|E$得到

$$A^*\left(\frac{1}{|A|}A\right)=\left(\frac{1}{|A|}A\right)A^*=E.$$

从而$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=(A^{-1})^*$.

# 逆矩阵的求法

## 逆矩阵的求法一：定义法

## 逆矩阵的求法二：伴随矩阵法

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*，\ 其中 A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，$A_{ij}$为行列式$|A|$中元素$a_{ij}$的代数余子式.

## 逆矩阵的求法三：初等变换法

用矩阵的初等行变换求逆矩阵方法

$$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E & A^{-1} \end{pmatrix}$$

特别地，$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \end{pmatrix}$

用矩阵的初等列变换求逆矩阵方法

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

特别地，$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$

**例** 设$A$为$n$阶可逆方阵，则$(A^*)^T=(A^T)^*$.

**证** 由$AA^*=A^*A=|A|E$得到

$$A^T(A^T)^*=(A^T)^*A^T=|A^T|E=|A|E$$

所以$(A^T)^*=|A|\left(A^T\right)^{-1}$

$$=|A|\left(A^{-1}\right)^T$$

$$=\left(|A|A^{-1}\right)^T$$

$$=\left(A^*\right)^T$$

## 伴随矩阵运算性质：

若$A$ 可逆

$$\begin{cases} (kA)^* = k^{n-1}A^* \\ (AB)^* = B^*A^* \\ (A^n)^* = (A^*)^n \\ |A^*| = |A|^{n-1} \\ (A^*)^T = (A^T)^*. \\ (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \dfrac{1}{|A|}A \end{cases}$$

## 二、Cramer法则

若$n$元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

的系数行列式 $D = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

则方程组（1）有唯一解，且

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中$D_j$是把系数行列式$D$中第$j$列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的$n$阶行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

第$j$列

**证明** 用$D$中第$j$列元素的代数余子式$A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$依次乘方程组(1)的$n$个方程,得

$$\begin{cases} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)A_{1j} = b_1 A_{1j} \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)A_{2j} = b_2 A_{2j} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)A_{nj} = b_n A_{nj} \end{cases}$$

在把 $n$ 个方程依次相加，得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj}\right)x_1 + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\right)x_j + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kj}\right)x_n = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj}\right)x_1+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\right)x_j+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kj}\right)x_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj},$$

由代数余子式的性质可知, 上式中$x_j$的系数等于$D$,

而其余$x_i(i\neq j)$的系数均为0; 又等式右端为$D_j$.

于是 $$Dx_j=D_j(j=1,2,\cdots,n). \qquad (2)$$

当$D\neq 0$时,方程组(2)有唯一的一个解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

由于方程组(2)与方程组 (1) 等价， 故

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

也是方程组的(1)解.

**例** 用克拉默则解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

**解**

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27,\qquad D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27,$$

$$\therefore x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{81}{27}=3,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-108}{27}=-4,$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-27}{27}=-1,\qquad x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{27}{27}=1.$$

**定理** 设$A$为$n$阶方阵，则

(1) 齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=0$只有零解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0.$

(2) 齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=0$有非零解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=0.$

(3) 非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$有唯一解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0.$

**例**

$$\begin{cases}\lambda x_1 + x_2 + 2\lambda x_3 = 2\\ x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 = 2\lambda\\ (2\lambda-1)x_1 + x_2 + (3\lambda-1)x_3 = \lambda+1\end{cases}$$

$\lambda$为何值时方程组无解、有唯一解、无穷多解？并在有解时求出全解。

**解：**

$$|A| = \begin{vmatrix}\lambda & 1 & 2\lambda\\ 1 & \lambda & \lambda+1\\ 2\lambda-1 & 1 & 3\lambda-1\end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)^2$$

(1)当$\lambda \neq 0$且$\lambda \neq 1$时，$|A| \neq 0$，方程组有唯一解：

$$\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda}, 3, -\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)^T$$

（2）当$\lambda$=0时，$\tilde{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&2\\1&0&1&0\\1&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&2\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$，无解。

（3）当$\lambda$=1时，$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&2\\1&1&2&2\\1&1&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，有无穷多解：

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$，其中$k_1,k_2$为任意常数。

**例** 三阶方阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $|A|=1$

$$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$$

求$|B|$.

## 小结 伴随矩阵

设 $A=(a_{ij})_n$，$A_{ij}$为 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$的代数余子式，构造矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为A的伴随矩阵(adjoint matrix)。

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据前面的结果，下式明显成立：

$$AA^*=A^*A=|A|E_n$$

结论：设$A$为$n(n\geq 2)$阶方阵，$|A^*|=|A|^{n-1}$.

# 逆矩阵的求法

逆矩阵的求法一：定义法

逆矩阵的求法二：伴随矩阵法

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*，\text{其中}A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，$A_{ij}$为行列式$|A|$中元素$a_{ij}$的代数余子式.

逆矩阵的求法三：初等变换法

用矩阵的初等行变换求逆矩阵方法

$$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E & A^{-1} \end{pmatrix}$$

用矩阵的初等列变换求逆矩阵方法

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

特别地，$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \end{pmatrix}$

特别地，$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$

## 伴随矩阵运算性质：

若$A$ 可逆
$$
\begin{cases}
(kA)^* = k^{n-1}A^* \\
(AB)^* = B^*A^* \\
(A^n)^* = (A^*)^n \\
|A^*| = |A|^{n-1} \\
(A^*)^T = (A^T)^*. \\
(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \dfrac{1}{|A|}A
\end{cases}
$$

## 二、Cramer法则

若$n$元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \quad (1)$$

的系数行列式 $D=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

则方程组（１）有唯一解，且

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

**定理** 设$A$为$n$阶方阵，则

(1) 齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=0$只有零解$\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0.$

(2) 齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=0$有非零解$\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=0.$

(3) 非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$有唯一解$\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0.$