四川大学

期末复习

重点题型讲解




题型一 计算行列式

例1(2016年期末考试题). 已知四阶方阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&0&6&0\\7&8&9&10\\11&0&12&0\end{pmatrix}$，求A的行列式。

解法一：用初等变换打成上三角矩阵

知识点：初等变换对行列式的影响

对任意初等变换对应的初等阵P，有:

$$|PA|=|AP|=|P||A|$$

其中，

$$|P|=\begin{cases}-1 & P\text{为对换变换初等阵}\\ k\neq 0 & P\text{为数乘变换初等阵}\\ 1 & P\text{为倍加变换初等阵}\end{cases}$$

题型一 计算行列式

例1(2016年期末考试题). 已知四阶方阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&0&6&0\\7&8&9&10\\11&0&12&0\end{pmatrix}$，求A的行列式。

解法一：用初等变换打成上三角矩阵

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&0&6&0\\7&8&9&10\\11&0&12&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-10&-9&-20\\0&-6&-12&-18\\0&-22&-21&-44\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&10&9&20\\0&1&2&3\\0&22&21&44\end{vmatrix}$$

$$=6\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&10&9&20\\0&22&21&44\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&11&10\\0&0&23&22\end{vmatrix}$$

$$=6\begin{vmatrix}11&10\\23&22\end{vmatrix}=6\times12=72$$

题型一 计算行列式

解法二：降阶法

知识点：行列式按照行或列展开的定理

行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$\underbrace{D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}}_{\text{行列式D按第 i 行展开}}(i = 1,2,\cdots,n)$$

或

$$\underbrace{D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots a_{nj}A_{nj}}_{\text{行列式D按第 j 列展开}}(j = 1,2,\cdots,n)$$

题型一 计算行列式

解法二：降阶法

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&0&6&0\\7&8&9&10\\11&0&12&0\end{vmatrix}=12\times\begin{vmatrix}1&1&1&2\\5&0&2&0\\7&4&3&5\\11&0&4&0\end{vmatrix}=12\times\frac{1}{5}\times\begin{vmatrix}1&1&5&2\\5&0&10&0\\7&4&15&5\\11&0&20&0\end{vmatrix}$$

$$=12\times\frac{1}{5}\times\begin{vmatrix}1&1&3&2\\5&0&0&0\\7&4&1&5\\11&0&-2&0\end{vmatrix}=12\times\frac{1}{5}\times5\times(-1)\times\begin{vmatrix}1&3&2\\4&1&5\\0&-2&0\end{vmatrix}$$

$$=-12\times\begin{vmatrix}1&3&2\\4&1&5\\0&-2&0\end{vmatrix}=-24\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}=-24\times-3=72$$

题型一 计算行列式

解法三：特殊方法

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 0 & 12 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 11 & 0 & 12 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 10 & 8 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 12 & 11 \end{vmatrix} = 12 \times 6 = 72$$

题型一 计算行列式

例2(2015年期末考试题). 若行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&3&4&6\\3&4&1&2\\2&2&2&2\end{vmatrix}$，求$A_{11}+2A_{21}+A_{31}+2A_{41}$，其中$A_{ij}$为元素$a_{ij}$的代数余子式。

行列式按行或列展开的定理：

按行展开公式：$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D,当\ i=j,\\0,当\ i\neq j;\end{cases}$

按行展开公式：$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D,当\ i=j,\\0,当\ i\neq j;\end{cases}$

其中，$\delta_{ij}=\begin{cases}1,当\ i=j,\\0,当\ i\neq j.\end{cases}$

题型一 计算行列式

例2(2015年期末考试题). 若行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&3&4&6\\3&4&1&2\\2&2&2&2\end{vmatrix}$，求$A_{11}+2A_{21}+A_{31}+2A_{41}$，其中$A_{ij}$为元素$a_{ij}$的代数余子式。

解：$A_{11}+2A_{21}+A_{31}+2A_{41}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&6\\1&4&1&2\\2&2&2&2\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&2&2\\1&-1&-1\\1&2&3\end{vmatrix}=-12$

题型一 计算行列式

练习(2017年期末考试题). 已知四阶方阵$A=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&5\end{pmatrix}$，求A的行列式。

1. 解：$|A|=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\-1&2&0&0\\-1&0&3&0\\-1&0&0&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}=(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\times$
$2\times3\times4=74.$

题型二 求解矩阵方程

例3(2016年期末考试题). 已知矩阵X满足方程$X\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\-1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\3&0&5\end{pmatrix}$，求矩阵$X$。

知识点一：矩阵方程的解

矩阵方程	解
$AX=B$	$X=A^{-1}B$
$XA=B$	$X=BA^{-1}$
$AXB=C$	$X=A^{-1}CB^{-1}$

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}E\\A^{-1}\end{pmatrix}$$

知识点二：逆矩阵的求法——初等变换法

$$(A\ E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\ \ A^{-1})$$

$n\times 2n$矩阵

$$(A\ B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\ \ A^{-1}B)$$

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}E\\BA^{-1}\end{pmatrix}$$

题型二 求解矩阵方程

例3(2016年期末考试题). 已知矩阵X满足方程$X\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\-1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\3&0&5\end{pmatrix}$，求矩阵$X$。

解：令$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\-1&0&3\end{pmatrix}$，则

$$(A\quad E)=\begin{pmatrix}1&0&-2&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\-1&0&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&3&0&2\\0&1&0&-2&1&-2\\0&0&1&1&0&1\end{pmatrix}$$

从而有：$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&2\\-2&1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$

故$X=\begin{pmatrix}-1&2&0\\3&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&2\\-2&1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&2&6\\14&0&11\end{pmatrix}$

题型二 求解矩阵方程

练习(2017年期末考试题). 已知矩阵X满足方程$A^2X = A + 3E - AX + 6X$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}，\quad E\text{为三阶单位矩阵，求矩阵}X。$$

2. 解：移项得：$(A^2 + A - 6E)X = A + 3E$，即$(A + 3E)(A - 2E)X = A + 3E$. 2

而 $|A + 3E| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 15 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$. 2 从而 $A + 3E$ 可逆. 则$(A - 2E)X = E$, 从而 $X = (A - 2E)^{-1}$. 2

由 $[A - 2E \mid E] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$. 2

从而得到 $X = (A - 2E)^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -1 \\ -11 & 7 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$. 2

题型三 求向量组的极大无关组

例4(2016年期末考试题). 设向量组$\alpha_1=(1,-1,2,4)$，$\alpha_2=(0,3,1,2)$， $\alpha_3=(3,0,7,14)$，$\alpha_4=(1,-1,2,0)$，$\alpha_5=(2,1,5,6)$，求向量组的秩、极大线性无关组，并将其余向量由极大无关组线性表出。

知识点：向量组的秩、极大无关组的求法

(1) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$作列向量构成矩阵$A$。

(2) $A\xrightarrow{\text{初等行变换}}B$（阶梯形矩阵）

(3) B的非零首元所在的列，是B的一个列极大无关组对应A的一个列极大无关组。

题型三 求向量组的极大无关组

例4(2016年期末考试题). 设向量组$\alpha_1=(1,-1,2,4)$，$\alpha_2=(0,3,1,2)$，$\alpha_3=(3,0,7,14)$，$\alpha_4=(1,-1,2,0)$，$\alpha_5=(2,1,5,6)$，求向量组的秩、极大线性无关组，并将其余向量由极大无关组线性表出。

解：令$A=(\alpha_1^T\quad\alpha_2^T\quad\alpha_3^T\quad\alpha_4^T\quad\alpha_5^T)=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

从而该向量组的秩为3，极大无关组为α_1，α_2，α_4，

且$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$.

题型三 求向量组的极大无关组

练习(2017年期末考试题). 设向量组$\alpha_1=(1,-2,3,-4)^T$，$\alpha_2=(2,-4,6,-8)^T$，$\alpha_3=(2,-5,7,11)^T$，$\alpha_4=(3,-8,11,26)^T$，$\alpha_5=(-1,4,6,3)^T$，求向量组的一个极大线性无关组，并将其余向量由极大无关组线性表出。

3. 解：$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]=\begin{bmatrix}1&2&2&3&-1\\-2&-4&-5&-8&4\\3&6&7&11&6\\-4&-8&11&26&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&2&3&-1\\0&0&-1&-2&2\\0&0&1&2&9\\0&0&19&38&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&2&3&-1\\0&0&-1&-2&2\\0&0&0&0&11\\0&0&0&0&17\end{bmatrix}$ 2

$\begin{bmatrix}1&2&2&3&-1\\0&0&-1&-2&2\\0&0&0&0&11\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$ 4

有三行不全为0，非0首元所在的列为1，3，5. 可知 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$ 为极大无关组. 2

明显可能看出$\alpha_2=2\alpha_1$;

并且若 $\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_5$，可解出 $k_1=-1,k_2=2,k_3=0$，于是 $\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_3$. 2

题型四 求解含参线性方程组

例5(2016年期末考试题). 当λ满足什么条件，方程组$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+2\lambda x_3=2 \\ x_1+\lambda x_2+(\lambda+1)x_3=2\lambda \\ (2\lambda-1)x_1+x_2+(3\lambda-1)x_3=\lambda+1 \end{cases}$

有唯一解、无穷多解、无解？有解时请求出全部解

Cramer法则： 若n元线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ (1)的系数行列式

$$D=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组(1)有唯一解，且

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

题型四 求解含参线性方程组

例5(2016年期末考试题). 当λ满足什么条件，方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + 2\lambda x_3 = 2 \\ x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 = 2\lambda \\ (2\lambda-1)x_1 + x_2 + (3\lambda-1)x_3 = \lambda+1 \end{cases}$

有唯一解、无穷多解、无解？有解时请求出全部解。

解：系数行列式$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2\lambda \\ 1 & \lambda & \lambda+1 \\ 2\lambda-1 & 1 & 3\lambda-1 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)^2.$

① 当$\lambda \neq 0$且$\lambda \neq 1$时，$|A| \neq 0$，从而方程组有唯一解$\begin{cases} x_1 = -(2\lambda+1)/\lambda \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -(\lambda+1)/\lambda \end{cases}$

② 当$\lambda = 0$时，原方程组的增广矩阵$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，

$R(A) = 2 \neq 3 = R(\tilde{A})$，故原方程组无解。

题型四 求解含参线性方程组

例5(2016年期末考试题). 当λ满足什么条件，方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + 2\lambda x_3 = 2 \\ x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 = 2\lambda \\ (2\lambda-1)x_1 + x_2 + (3\lambda-1)x_3 = \lambda+1 \end{cases}$

有唯一解、无穷多解、无解？有解时请求出全部解。

解：③ 当$\lambda = 1$时，原方程组的增广矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$R(A) = R(\tilde{A}) = 1 < 3$，故原方程组有无穷多解。

原方程组的同解方程组为：$x_1 = 2 - x_2 - 2x_3$，

令$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，可得其特解为：$(2 \quad 0 \quad 0)^T$

导出组的同解方程组为：$x_1 = -x_2 - 2x_3$，

令$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，可得其基础解系为：$(-1 \quad 1 \quad 0)^T$与$(-2 \quad 0 \quad 1)^T$，

故原方程组的通解为：$(2 \quad 0 \quad 0)^T + k_1(-1 \quad 1 \quad 0)^T + k_2(-2 \quad 0 \quad 1)^T$.

题型四 求解含参线性方程组

练习(2017年期末考试题). 已知线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4 \\ 5x_1+6x_2+7x_3=8 \\ 9x_1+10x_2+ax_3=b \end{cases}$，请回答以下问题：

(1) 当参数a、 b满足什么条件时，方程组无解？有唯一解？

(2) 当参数a、 b满足什么条件时，方程组有无穷多解？请求出此条件下方程组的解集。

4. 解：$\tilde{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&a&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&-8&a-27&b-36\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&0&a-11&b-12\end{bmatrix}$.

(1)当 $a=11, b\neq 12$ 时，此时无解；1

当 $a\neq 11$ 时，有唯一解. 1

(2)当 $a=11, b=12$ 时，原方程有无穷多解，此时原方程组等价于

$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4, \\ -4x_2-8x_3=-12. \end{cases}$ 可得一个特解为 $X_0=[-2,3,0]^T$. 2

原方程的导出组等价于

$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ -4x_2-8x_3=0. \end{cases}$ 求得基础解系为 $X_1=[1,-2,1]^T$. 2

从而可得原方程的通解为 X_0+kX_1, k 取任意数. 7

题型五 化二次型为标准型

例6(2016年期末考试题). 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3$，

(1) 写出二次型的矩阵；

(2) 用可逆线性替换将该二次型化为标准型，写出所做的线性替换及变换后的规范型。

解法一：拉格朗日配方法

1. 若二次型**含有x_i的平方项**，则先把含有x_i的乘积项集中，然后配方，再对其余的变量同样进行，直到都配成平方项为止，经过非退化线性变换，就得到标准形;

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$$

2. 若二次型中**不含有平方项**，但是$a_{ij}\neq 0(i\neq j)$，则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i=y_i-y_j \\ x_j=y_i+y_j \\ x_k=y_k \end{cases} \quad (k=1,2,\cdots,n\text{且}k\neq i,j).$$

化二次型为含有平方项的二次型，然后再按1中方法配方。

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

题型五 化二次型为标准型

解法一：拉格朗日配方法

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3$$

$$=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2-\frac{1}{4}(x_2+x_3)^2+x_2^2+x_3^2-x_2x_3$$

$$=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2+\frac{3}{4}x_3^2-\frac{3}{2}x_2x_3$$

$$=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{4}(x_2-x_3)^2$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3 \\ y_2=\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2-x_3) \\ y_3=x_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1=y_1+\frac{\sqrt{3}}{3}y_2+y_3 \\ x_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}y_2+y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

从而规范型为 $f\underset{X=CY}{=}y_1^2+y_2^2$，相应的变换矩阵为：

$$C=\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

题型五 化二次型为标准型

解法二：正交变换法

用正交变换化二次型为标准形的具体步骤：

1. 将二次型表成矩阵形式$f = X^TAX$，求出A；
2. 求出A的所有特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$；
3. 求出对应于特征值的特征向量$X_1, X_2, \cdots, X_n$；
4. 将特征向量$X_1, X_2, \cdots, X_n$正交化，单位化，得$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$，记

$$Q = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n);$$

5. 作正交变换$X = QY$，则得f的标准形$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$。

题型五 化二次型为标准型

解法二：正交变换法

二次型f对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$，

令$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda-1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-\frac{3}{2})^2=0$

从而可得特征值为$\lambda=0(1\text{重})$或$\frac{3}{2}(2\text{重})$。

当$\lambda=0$时，求解对应的齐次线性方程组$(\lambda E-A)X=0$，可得其基础解系为

$$\alpha_1=(1,1,1)^T$$

当$\lambda=\frac{3}{2}$时，求解对应的齐次线性方程组$(\lambda E-A)X=0$，可得其基础解系为

$$\alpha_2=(-1,1,0)^T,\alpha_3=(-1,0,1)^T$$

题型五 化二次型为标准型

解法二：正交变换法

对$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(-1,1,0)^T,\alpha_3=(-1,0,1)^T$进行正交化可得：

$$\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(-1,1,0)^T,\beta_3=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^T$$

对$\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(-1,1,0)^T,\beta_3=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^T$进行单位化可得：

$$\gamma_1=(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})^T,\gamma_2=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)^T,\gamma_3=(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3})^T$$

令正交矩阵$Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$，则$f\underset{X=QY}{=}\frac{3}{2}y_2^2+\frac{3}{2}y_3^2$。

令可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$，则$f\underset{X=QPZ}{=}z_2^2+z_3^2$（规范型），所用的线性替换为：

题型五 化二次型为标准型

解法二：正交变换法

$$C=QP=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

题型五 化二次型为标准型

练习(2017年期末考试题). 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$，
(1) 写出二次型的矩阵A；
(2) 计算A的特征值与特征向量；
(3) 用正交变换将该二次型化为标准型,

5 解：(1)此二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}$. 2

(2)A 的特征多项式为：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+5)=(\lambda-1)^2(\lambda-5)$, 2

可得 A 的特征值为$\lambda_1=1$(二重), $\lambda_2=5$.

对于$\lambda_1=1$, $1\cdot E-A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{bmatrix}$, 可得属于$\lambda_1=1$的两个线性无关的特征向量 2 为$X_1=[1,0,0]^T, X_2=[0,-1,1]^T$; 而属于$\lambda_1=1$的所有特征向量为$k_1X_1+k_2X_2$, ($k_1,k_2$不全为0);

对于 $\lambda_2=5$, $5E-A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{bmatrix}$, 可得属于$\lambda_2=5$的一个特征向量为$X_3=[0,1,1]^T$,而属于$\lambda_2=5$的所有特征向量为$k_3X_3(k_3\neq0)$. 2

(3)特征向量X_1,X_2,X_3已经两两正交，只须进行单位化：

$\gamma_1=\frac{X_1}{|X_1|}=[1,0,0]^T$, $\gamma_2=\frac{X_2}{|X_2|}=\frac{1}{\sqrt2}[0,-1,1]^T$, $\gamma_3=\frac{X_3}{|X_3|}=\frac{1}{\sqrt2}[0,1,1]^T$.

令 $Q=[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$. 则$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}$. 2

于是经过正交替换$X=QY$, 二次型 f 化为$y_1^2+y_2^2+5y_3^2$. 2

题型六 证明向量组线性无关

例7(2015年期末考试题). 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，向量$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，向量$\gamma$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，证明$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta+\gamma$线性无关。

判断向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的线性相关性方法

1. 判断方程组$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$有无非零解:
   - 有非零解,向量组线性相关；
   - 只有零解，向量组线性无关。
2. 判断$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关,有时可使用反证法。

题型六 证明向量组线性无关

例7(2015年期末考试题). 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，向量$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，向量$\gamma$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\gamma$线性无关。

方法一：证明对应的齐次线性方程组只有零解

证明：不妨假设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4(\beta+\gamma)=0$ (1)，

当$k_4=0$，则有： $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

又由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$k_1=k_2=k_3=0$。

当$k_4\neq 0$时，$\beta+\gamma$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出。

又因为β也可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，

从而γ可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，这与题目条件矛盾。

综上，方程组(1)只有零解。

故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\gamma$线性无关

题型六 证明向量组线性无关

例7(2015年期末考试题). 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，向量$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，向量$\gamma$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，证明$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta+\gamma$线性无关。

方法二：反证法

证明：不妨假设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta+\gamma$线性线性相关，也即存在不全为零的$k_i\ (i=1,2,3,4)$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4(\beta+\gamma)=0,$$

首先，k_4一定不等于0。（否则$k_i\ (i=1,2,3,4)$将全为0）

当$k_4\neq 0$时，$\beta+\gamma$可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出，

又因为β也可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，

从而γ可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，这与题目条件矛盾。

故原假设错误，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta+\gamma$线性无关。

题型六 证明向量组线性无关

练习(2017年期末考试题). 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$中每一个向量的长度都等于2，而其中任意两个不同向量的内积都为1，证明向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$线性无关。

2 证明：设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 + k_5\alpha_5 = 0$,

两边分别依次与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 作内积，由于每个向量的长度为2，不同两个向量的内积为1，可得：

$$\begin{cases} 4k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 0, \\ k_1 + 4k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 0, \\ k_1 + k_2 + 4k_3 + k_4 + k_5 = 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 + 4k_4 + k_5 = 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + 4k_5 = 0. \end{cases} \quad .\ (4分)$$

2

将5个式子相加得：$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 0$，依次减去以上每个式子可得$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 0$. 从而有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性无关.

题型七 求一组基到另一组基的过渡矩阵

例7(2016年期末考试题). 已知R^2中的一组基(I)为$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，另一组基$(II)$为$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，设向量$\gamma$在基$(I)$下的坐标为$X=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，求从$(I)$到$(II)$的过渡矩阵，以及向量$\gamma$在基$(II)$下的坐标$Y$。

知识点：过渡矩阵与坐标变换

设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n(I)$与$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n(II)$是$n$维向量空间$R^n$的两组基，$\alpha\in R^n$在基$(I)$和基$(II)$下的坐标分别为$X,Y$，则

（1）从(I)到(II)的过渡矩阵P是可逆矩阵，且

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)P,\qquad(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)P^{-1};$$

（2） $Y=P^{-1}X,\qquad X=PY$。

题型七 求一组基到另一组基的过渡矩阵

例7(2016年期末考试题). 已知R^2中的一组基(I)为$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，另一组基$(II)$为$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，设向量$\gamma$在基$(I)$下的坐标为$X=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，求从$(I)$到$(II)$的过渡矩阵，以及向量$\gamma$在基$(II)$下的坐标$Y$。

解：设从(I)到(II)的过渡矩阵为P，则有：

$$(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2)P$$

从而，

$$P=(\alpha_1,\alpha_2)^{-1}(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

$$Y=P^{-1}X=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$$

题型七 求一组基到另一组基的过渡矩阵

练习(2017年期末考试题). 已知R^2中的一组基(I)为$\alpha_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$，另一组基$(II)$为$\beta_1 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$，设向量$\gamma$在基$(I)$下的坐标为$X = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$，求从$(I)$到$(II)$的过渡矩阵，以及向量$\gamma$在基$(II)$下的坐标$Y$。