第二章 矩阵代数

2.5 分块矩阵

主要内容

一、分块矩阵的定义

二、分块矩阵的运算

一、分块矩阵的定义

- 由于某些条件的限制，我们经常会遇到大型文件无法上传的情况，如何解决这个问题呢?
- 这时我们可以借助**WINRAR**把文件分块，依次上传.
- 家具的拆卸与装配

问题一：什么是矩阵分块法？

定义： 用一些横线和竖线将矩阵分成若干个小块，这种操作称为**对矩阵进行分块**；
每一个小块称为**矩阵的子块**；
矩阵分块后，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**.

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{matrix}} \\ \hdashline \boxed{\begin{matrix} a_{31} & a_{32} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{33} & a_{34} \end{matrix}} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

这是2阶方阵吗？

问题二：为什么提出矩阵分块法？

答：对于行数和列数较高的矩阵 A，运算时采用分块法，可以使大矩阵的运算化成小矩阵的运算，体现了**化整为零**的思想.

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix},$$

$$A=\left(\begin{array}{c:c:c:c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

注：

分块时首先满足0，再考虑对角或三角矩阵，然后考虑E以及其它的特殊矩阵.

按行分块或按列分块是两种特殊的分块形式.

1.分块矩阵的加法

$$A=\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$$

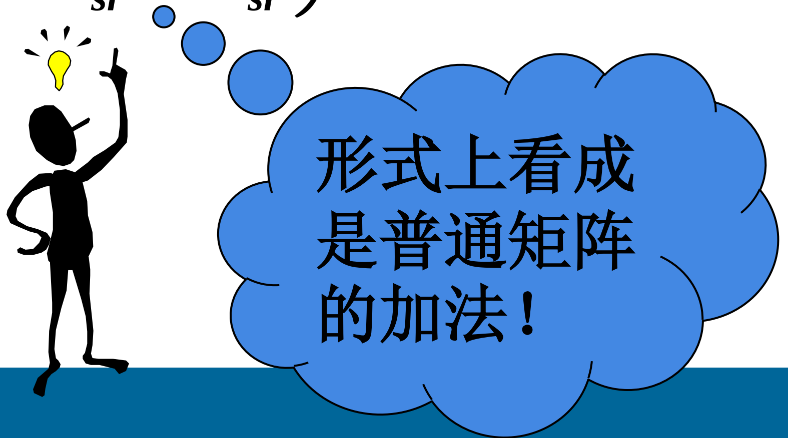
$$A+B=\left(\begin{array}{c|c} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ \hline A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{array}\right)$$

若矩阵A、B是同型矩阵，且采用相同的分块法，即

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

则有

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}$$



2. 分块矩阵的数乘

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

$$\lambda A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \hline \lambda A_{21} & \lambda A_{22} \end{array} \right)$$

若λ是数，且 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$

则有 $\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$

$m_1 + m_2 + \cdots + m_s = m$

3. 分块矩阵的运算——乘法

一般地，设 A 为 $m\times l$ 矩阵，B 为 $l\times n$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}, \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{t} A_{ik} B_{kj}$$

$$(i = 1,\cdots,s;\ j = 1,\cdots,r)$$

其中 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, B_{2j}, \cdots, B_{tj}$ 的行数.

例1.设$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} \end{array}$的列分块法与$B\begin{array}{c} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} r \\ n-r \end{array}$的行分块法一致，求$AB$.

解：根据分块矩阵的乘法规则，有

$$AB=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2+A_2B_4 \\ 0 & A_4B_4 \end{bmatrix}$$

4. 分块矩阵的转置

若 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，则 $A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$

分块矩阵不仅形式上进行转置，而且每一个子块也进行转置.

例如：

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

$$A^T = \qquad = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \\ \alpha_4^T \end{pmatrix}$$

5. 分块对角矩阵

定义：设 A 是 n 阶矩阵，若

1. A 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块，
2. 其余子块都为零矩阵，
3. 对角线上的子块都是方阵，

那么称 A 为分块对角矩阵。

例如：

$$A=\left(\begin{array}{c|c|cc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

分块对角矩阵的性质

设 A 与 B 为同型矩阵，采用相同的分块法，有

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix},$$

$$\text{则}AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sB_s \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix},$$

若 A 的每一子块都可逆，则 A 可逆，且

$$A=\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix},$$

例2 设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

求 $A+B$, ABA.

解 将 A, B 分块

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$ 其中 $$A_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$ 其中 $$B_1=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$A+B=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1+B_1 & 0\\ 0 & A_2+B_2\end{pmatrix},$$

$$A_1+B_1=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & 1\\ 1 & 2a\end{pmatrix},$$

$$A_2+B_2=\begin{pmatrix}b & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b & 0\\ 1 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b & 1\\ 2 & 2b\end{pmatrix},$$

$$\therefore\quad A+B=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1+B_1 & 0\\ 0 & A_2+B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2b & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2b\end{pmatrix}.$$

$$ABA=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1B_1A_1 & 0\\ 0 & A_2B_2A_2\end{pmatrix},$$

$$A_1B_1A_1=\begin{pmatrix}a^3+a & 2a^2+1\\ a^2 & a^3+a\end{pmatrix},\qquad A_2B_2A_2=\begin{pmatrix}b^3+2b & 2b^2+1\\ 3b^2 & b^3+2b\end{pmatrix},$$

$$\therefore ABA=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1B_1A_1 & 0\\ 0 & A_2B_2A_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a^3+a & 2a^2+1 & 0 & 0\\ a^2 & a^3+a & 0 & 0\\ 0 & 0 & b^3+2b & 2b^2+1\\ 0 & 0 & 3b^2 & b^3+2b\end{pmatrix}.$$

例3 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&9\\0&0&1&3\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^n$.

解：分块$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^n&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^n\end{bmatrix}$.

$$\boldsymbol{B}^n=\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}^n=\left(\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)^n=(3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{M})^n$$

$$\boldsymbol{M}^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^n=(3\boldsymbol{E})^n+n(3\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{M}$$

二项式公式

$$\boldsymbol{B}^n=\begin{bmatrix}3^n&0\\0&3^n\end{bmatrix}+n3^{n-1}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^n&n3^{n-1}\\0&3^n\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{C}^n=\left(\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}\right)^n=\left(\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}\right)^n$$

$$\boldsymbol{C}^n=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right)^{n-1}\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}(6)^{n-1}\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}^n=6^{n-1}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}=6^{n-1}\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot 6^{n-1}&9\cdot 6^{n-1}\\6^{n-1}&3\cdot 6^{n-1}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix}3^n&n\cdot 3^{n-1}&0&0\\0&3^n&0&0\\0&0&3\cdot 6^{n-1}&9\cdot 6^{n-1}\\0&0&6^{n-1}&3\cdot 6^{n-1}\end{bmatrix}$$

例4.设A,B都是n阶上三角阵，证明：AB是上三角阵。

证一：对n做数学归纳法。当$n=1$时，$A=a,B=b,AB=ab$,结论成立;

假设两个$n-1$阶上三角阵的乘积是上三角阵，下面考虑n阶的情况，

对A,B做如下的分块：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{11} & B_2 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix}$$

其中,A_4，B_4都是$n-1$阶上三角阵，由归纳假设，A_4B_4是$n-1$阶上三角阵，

则

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}B_2+A_2B_4 \\ 0 & A_4B_4 \end{bmatrix}$$

于是,AB是上三角阵，由归纳法，命题结论成立。

证法二： A,B为上三角阵，故当$n\geq i>j\geq 1$时，$a_{ij}=0, b_{ij}=0$,

设$C=(c_{ij})_{n\times n}=AB$, 则当$n\geq i>j\geq 1$时

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

$$=\sum_{k=1}^{i-1}0\times b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}\times 0=0,$$

故, AB为上三角阵.

6. 对分块矩阵的广义的初等变换

1.交换两行(列)

2.用一个可逆阵左乘以某行(右乘以某列)

3.用一个矩阵左乘以某一行后加到另一行上(用一个矩阵右乘以某一列后加到另一列上)

$$\begin{bmatrix} 0_{32} & A_{33} \\ B_{22} & 0_{23} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} B_{22} & 0_{23} \\ 0_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow[A_{33}^{-1} \bullet r_2]{B_{22}^{-1} \bullet r_1} \begin{bmatrix} E_{22} & 0_{23} \\ 0_{32} & E_{33} \end{bmatrix}$$

练习

1.设n阶方阵A对$\forall x \in R^n$有$Ax = 0$,证明$A = 0$.

2.设B, C为n阶方阵且对$\forall x \in R^n$有$Bx = Cx$,证明$B = C$.