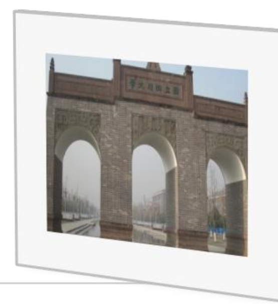
第一章　线性方程组

1.2 行化简和阶梯型矩阵 解的存在性与唯一性



本节课主要内容

一、阶梯形矩阵与行最简形

二、方程组有无解的判定

三、使用初等行变换求解线性方程组

线性方程组 **对应增广矩阵**

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4 & (1) \\ 2x_1-3x_2+2x_3=9 & (2) \\ 3x_1+2x_2+9x_3=19 & (3) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 19 \end{pmatrix}$$

$\Big\downarrow$ $r_2+(-2)r_1$, $r_3+(-3)r_1$

$$\xrightarrow[(3)+(-3)(1)]{(2)+(-2)(1)} \begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4 & (1)' \\ -5x_2-2x_3=1 & (2)' \\ -x_2+3x_3=7 & (3)' \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$\Big\downarrow$ $r_2 \leftrightarrow r_3$

$$\xrightarrow{(2)' \leftrightarrow (3)'} \begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4 & (1)'' \\ -x_2+3x_3=7 & (2)'' \\ -5x_2-2x_3=1 & (3)'' \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Big\downarrow$ $r_2+(-5)r_3$

$$\xrightarrow{(3)''+(-5)(2)''} \begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4 \\ -x_2+3x_3=7 \\ -17x_3=-34 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -17 & -34 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_2 + 3x_3 = 7 \\ -17x_3 = -34 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -17 & -34 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_3 = 2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵的定义

称满足下列两条性质的矩阵为阶梯形矩阵：

1. 所有非零行均在零行之上；

2. 每一行非零首元所在的列，都在上一行非零首元所在列的右边。

即形如

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{2j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{rj_r} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行最简形的定义

如果阶梯形矩阵A还满足以下两个条件

A的非零行的非零首元a_{ij}全为1;

非零首元所在列的其余元素全为0。

则A称为行最简形或Jordan(约当)阶梯型矩阵.

如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

命题 任何一个非零矩阵都可经初等行变换化为阶梯形矩阵

命题 任何一个非零矩阵都可经初等行变换化为Jordan阶梯形矩阵。

注意：使用不同顺序的初等行变换，化出来的阶梯形矩阵一般是不同的．但是从一个矩阵出发，通过不同顺序的初等行变换化简，得到的行最简形是唯一的。

思考：为什么行最简形是唯一的？

消元法的本质：

将线性方程组的增广矩阵通过初等行变换，化为阶梯型矩阵或**Jordan**阶梯型矩阵。

主元和主元列

定义2：矩阵A的阶梯形中非零首元对应的位置称为A的主元位置，位于主元位置的元素称为主元。主元所在列称为A的主元列.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例1. 化下列矩阵为阶梯形，行最简形，并求主元列

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & -4 & 3 & -4 & -11 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 10 & -8 & -28 \end{bmatrix}$$

解:

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 6 \\ 3 & -6 & 10 & -8 & -28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 6 \\ 3 & -6 & 10 & -8 & -28 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2+2r_1]{r_4+3r_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_4+(-7)r_2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4+2r_3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1(-1)]{\substack{r_1 + r_2 \\ r_1 + (-2)r_3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行最简形

矩阵的主元列分别是第一、第三、第四列.

不同的初等行变换化出的阶梯形不同，但是主元位置是相同的，且行最简形是唯一的。

用初等变换化矩阵为阶梯形（行最简形）的一般步骤

1. 从矩阵最左边的非零列开始，主元位置在该列的第一行；若该位置已有元为零，用对换变换把其变为非零得到主元。

2. 用初等行变换中的倍加变换将主元下方的元化为零。

3. 盖住或忽略含有主元位置的行和它上面的所有行。对余下的子矩阵应用第一步到第三步，就可以得到阶梯形矩阵。

4. 若进一步要得到行最简形，运用倍加变换将主元列中主元以外的所有元化为零，并用数乘变换将主元化为1.

用化矩阵为阶梯形的方法求解线性方程组

例2 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_5 = -1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_5 = 1 \\ x_3 + x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4 \end{cases}$$

解：首先对方程组的增广矩阵用初等行变换化为行最简形

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_5 - r_1]{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 + 2r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_5 - r_2]{\substack{r_3 - 2r_2 \\ r_4 - r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 - 2r_3]{\substack{r_1 - r_2 \\ r_1 + r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

写出行最简形对应的原方程组的同解方程组

只有三个方程，解出三个未知量

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 + x_4 = -6 \\ x_5 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ x_3 = -6 - x_4 \\ x_5 = 3 \end{cases}$$

其中变量 x_1, x_3, x_5 与阶梯形矩阵的主元位置对应，称为基本变量或首变量。在行最简形中，这三个变量分别只在一个方程中出现，可以将其解出来，显示表示。

方程组余下的变量 x_2, x_4 可以任意取值，因此它们被称为自由变量。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ x_3 = -6 - x_4 \\ x_5 = 3 \end{cases}$$

注意一 此例中自由变量的出现是因为线性方程组的主元列数少于未知量个数。

主元列数为3，基本变量为3，对应于3个方程，而总的未知量个数为5，剩下的两个变量就成为了自由变量。

方程组相容时，自由变量个数=总未知量个数 -主元列数

注意二 此例中解有无穷多个。 设$x_2 = k_1, x_4 = k_2$,则

$$\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right) = (1 - k_1, k_1, -6 - k_2, k_2, 3)$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ x_3 = -6 - x_4 \\ x_5 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -6 - x_4 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - k_1 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = -6 - k_2 \\ x_4 = k_2 \\ x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + (-1)k_1 + 0 \bullet k_2 \\ x_2 = 0 + 1 \bullet k_1 + 0 \bullet k_2 \\ x_3 = -6 + 0 \bullet k_1 + (-1)k_2 \\ x_4 = 0 + 0 \bullet k_2 + 1 \bullet k_2 \\ x_5 = 3 + 0 \bullet k_1 + 0 \bullet k_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中k_1, k_2为任意常数。

例3 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_5 = -1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_5 = 1 \\ x_3 + x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4 \end{cases}$$

解: 首先对方程组的增广矩阵用初等行变换化为阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_5 - r_1]{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 + 2r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

写出阶梯形矩阵对应的原方程组的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_5 = 3 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

矛盾方程

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

矛盾方程的出现决定了方程组无解。

矛盾方程的出现实际上是因为方程组的系数矩阵的主元列数少于增广矩阵的主元列数。

定理1 一线性方程组是相容的当且仅当增广矩阵的最右边一列不为主元列。

即 增广矩阵的阶梯形矩阵中无[0 …0 b]的行(b不为零)

定理2 一线性方程组是相容的当且仅当系数矩阵与增广矩阵有相同的主元列数。

在相容时，若主元列数等于未知量个数，方程组有唯一解；若主元列数少于未知量个数，方程组有无穷多解。

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0
\end{cases}
$$

齐次线性方程组

推论1　齐次线性方程组一定相容。$m \times n$阶线性齐次方程组只有零解当且仅当系数矩阵的主元列数等于未知量个数 n；$m \times n$阶线性齐次方程组有非零解当且仅当系数矩阵的主元列数小于未知量个数。

推论2　若m<n，则$m \times n$阶齐次线性方程组有非零解。

使用初等行变换求解线性方程组的步骤：

1. 写出线性方程组的增广矩阵。
2. 对增广矩阵用初等行变换化为阶梯形矩阵。用主元列数判断方程组是否相容。若无解，则停止。否则，进行下一步。
3. 继续进行初等行变换化简，得到行最简形。
4. 写出行最简形矩阵对应的线性方程组。
5. 改写第四步得到的每个非零方程，将其中的基本变量显示表示出来。

练习 求解下列方程组

1. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 12 \end{cases}$$

1.无解

2.无解

$$3.\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{k}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{k}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$