# 线性代数期中试题(2022-2023(春))参考答案

## 一填空题 (每题4分，共24分)

**1** .设$A=(a_{ij})$为三阶方阵,$A_{ij}$为元素$a_{ij}$的代数余子式,若$A$的每行元素之和均为3,且$|A|=2$.则$A_{12}+A_{22}+A_{32}=\underline{\frac{2}{3}}$.

**2** .设$\alpha$是三维列向量,$\alpha^T$是$\alpha$的转置.若$\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$，则$|k\alpha^T\alpha|$的值=$\underline{\mathbf{3k}}$.

**3** .设$A$为$n(n\geq 2)$阶可逆方阵,则$|[(|A|A^T)^*]^{-1}|$的值=$\underline{|A|^{1-n^2}}$.

**4** .若方程组$\begin{cases}x_1+x_2=a\\x_2+x_3=b\\x_3+x_4=c\\x_1+x_4=d\end{cases}$有解,则常数$a,b,c,d$应满足的条件是$\underline{a+c=b+d}$

**5** .已知方阵$A$满足$aA^2+bA+cE=0(a,b,c\in\mathbb{R},c\neq 0)$.则$A^{-1}=\underline{-\frac{a}{c}A-\frac{b}{c}E}$

**6** .已知向量组$\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(a,0,b),\alpha_3=(1,3,2)$生成的子空间$Span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$的维数为2,则$a,b$满足的关系式为$\underline{a=2b}$.

## 二 (10分)已知平面上的一条抛物线$y=ax^2+bx+c$经过三个不同的点$(1,1),(2,3),(3,9)$,求出这条抛物线方程.

解　由已知条件得三元线性非齐次方程组$\begin{cases}a+b+c=1\\4a+2b+c=3\\9a+3b+c=9\end{cases}$

对增广矩阵用初等行变换，或者用克莱姆法则+范德蒙德行列式，解之得$a=2,b=-4,c=3$

所求方程为$y=2x^2-4x+3$.

三 **(12分)已知矩阵方程**$A^{2023}X(E-C^{-1}B)^TC^TA=E$**,其中**$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$,$C=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$**.求**$X$**.**

解 注意到矩阵A是对换变换对应的初等矩阵,$A^{2n+1}=A=A^{-1}$

$C-B=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$可逆. $(C-B)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$

$A^{2023}X(E-C^{-1}B)^TC^TA=E$

$\to X(C-B)^T=E$

$\to X=[(C-B)^{-1}]^T$

$X=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-2&1\end{bmatrix}$

四 **(12分)设**$A$,$B$**为三阶方阵,且**$A=[\alpha\ \ 2\gamma_2\ \ 3\gamma_3]^T$,$B=[5\beta\ \ 3\gamma_2\ \ \gamma_3]^T$,$|A|=18$,$|B|=30$**.求**$|A-B|$**.**

解 由已知$|A|=6|(\alpha\ \ \gamma_2\ \ \gamma_3)^T|$,$|B|=15|(\beta\ \ \gamma_2\ \ \gamma_3)^T|$.

所以$|(\alpha\ \ \gamma_2\ \ \gamma_3)^T|=3$,$|(\beta\ \ \gamma_2\ \ \gamma_3)^T|=2$

$|A-B|=|(\alpha-5\beta\ \ -\gamma_2\ \ 2\gamma_3)^T|=-2|(\alpha-5\beta\ \ \gamma_2\ \ \gamma_3)^T|$

$=-2[|(\alpha\ \ \gamma_2\ \ \gamma_3)^T|-5|(\beta\ \ -\gamma_2\ \ 2\gamma_3)^T|$.

$=-2(3-5\times 2)=14$

五 (14分)已知向量组$\alpha_1=(1,3,0,5)^T,\alpha_2=(1,2,1,4)^T,\alpha_3=(1,-3,6,a-1)^T,\alpha_4=(-1,b,-3,-6)^T$.(1)求向量组的秩和全部极大线性无关组;(2)若向量组的秩小于4,将其余向量用极大线性无关组线性表示.

解 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\3&2&-3&b\\0&1&6&-3\\5&4&a-1&-6\end{bmatrix}\xrightarrow{row\ operations}\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\0&1&6&-3\\0&0&a&-4\\0&0&0&b\end{bmatrix}$

（1）当$a\neq 0$,且$b\neq 0$,向量组的秩为4，极大无关组就是向量组自身

(2)当$a\neq 0$,$b=0$时向量组的秩为3．其中

若$a=10$，则极大无关组分别为$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$;$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$;$\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}$；

若$a=8$,则极大无关组为$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$; $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$;$\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$.

若$a\neq 0,a\neq 8,a\neq 10$,则极大无关组分别为$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$;$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$; $\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}$; $\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$.

$\alpha_3=(-5+\frac{a}{2})\alpha_1+(6-\frac{3a}{4})\alpha_2-\frac{a}{4}\alpha_4$

$\alpha_4=(2-\frac{20}{a})\alpha_1+(-3+\frac{24}{a})\alpha_2+(-\frac{4}{a})\alpha_3$

$\alpha_1=\frac{3a-24}{2a-20}\alpha_2+\frac{2}{a-10}\alpha_3+\frac{a}{2a-20}\alpha_4$

$\alpha_2=\frac{20-2a}{3a-24}\alpha_1+\frac{4}{24-3a}\alpha_3+\frac{a}{24-3a}\alpha_4$

(3)当$a=0,b\neq 0$以及$a=0,b=0$时，向量组的秩为3，极大无关组为$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$.

$\alpha_3=-5\alpha_1+6\alpha_2+0\alpha_4$

**六 (14分，每一小问7分)已知三维向量组**$\alpha_1 = (1,1,1,),\alpha_2 = (1,0,1),\alpha_3 = (0,0,1),\alpha_4 = (1,2,0),\alpha_5 = (0,1,1)$**.**

**(1)证明:向量组(I)**$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$**与向量组(II)**$\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5$**是三维空间**$R^3$**的两组基;**

**(2)求向量组(I)到向量组(II)的过渡矩阵**$M$**.**

**证 (1)，因为**$n$**阶可逆矩阵的**$n$**个列向量构成**$R^n$**的一组基。**$n$**阶方阵可逆等价于其**$n$**个列向量组线性无关.所以只需要证明向量组(I)** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **与(II)** $\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5$**均线性无关,或者方阵**$[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T],[\alpha_1^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T]$**均可逆。**$\cdots\cdots$**3分**

**法一：用行列式值不为0,**$|\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T| = -1$**,**$|\alpha_1^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T| = 2$**可证得两向量组均线性无关．法二：用初等行变换化**$[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T]$**及**$[\alpha_1^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T]$**为阶梯型矩阵或三阶单位矩阵来证明。**

**(2)，用初等行变换法.** $[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_1^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{row\ operations} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**则向量组(I)到向量组(II)的过渡矩阵**$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

七 (14分，每一小问7分)

设$A$是$n$阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$n$维列向量，其中$\alpha_1\neq 0$,且$A\alpha_1=3\alpha_1, A\alpha_2=-\alpha_1+3\alpha_2, A\alpha_3=-\alpha_2+3\alpha_3$.

(1) 证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关;

(2) 若$n=3$,求$|A|$.

(1) 证 假设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0\cdots(1)$

由已知，用矩阵$A$左乘以式(1)得：

$(3x_1-x_2)\alpha_1+(3x_2-x_3)\alpha_2+3x_3\alpha_3=0\cdots(2)$,

(2)减去(1)的3倍得： $x_2\alpha_1+x_3\alpha_2=0\cdots(3)$,

用矩阵$A$左乘以式(3)得： $(3x_2-x_3)\alpha_1+3x_3\alpha_2=0\cdots(4)$,

(4)减去(3)的3倍得： $x_3\alpha_1=0$.

已知$\alpha_1\neq 0$,可得$x_3=0$. 再代入(3)可得$x_2=0$.再代入(1)得$x_1=0$

根据向量组线性无关的定义可知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

（2）解 $[A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3]=A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}3&-1&0\\0&3&-1\\0&0&3\end{bmatrix}$

当$n=3$时，线性无关向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$构成三阶可逆方阵，其行列式不等于0.在上式两端同时取行列式，利用方阵乘积的行列式等于行列式的乘积

可得，$|A|=\begin{vmatrix}3&-1&0\\0&3&-1\\0&0&3\end{vmatrix}=27.$