第二章 矩阵代数

2.2 矩阵的代数运算




一、同型矩阵与矩阵相等的概念

1. 两个矩阵的行数相等, 列数相等时, 称为**同型矩阵**.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

2. 两个矩阵 $A=(a_{ij})$与$B(b_{ij})$ 为同型矩阵,并且对应元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称**矩阵**A与B**相等**,记作 $A=B$.

二、矩阵的线性运算

矩阵的加法

定义： 设有两个 $m \times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

说明： 只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

二、矩阵的线性运算

数与矩阵相乘

定义： 数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法与数乘统称为矩阵的线性运算

负矩阵

称矩阵

$$-1A = (-a_{ij})_{s\times n} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{s1} & -a_{s2} & \cdots & -a_{sn} \end{bmatrix}$$

为A的负矩阵，记作$-A$。

矩阵线性运算的性质

$$(1)\quad A+B=B+A;$$

$$(2)\quad (A+B)+C=A+(B+C);$$

$$(3)\quad A+0=A;$$

$$(4)\quad A+(-A)=0;$$

$$(5)\quad 1A=A;$$

矩阵线性运算的性质

(6) $k(lA)=(kl)A$;

(7) $k(A+B)=kA+kB$;

(8) $(k+l)A=kA+lA$;

(9) $0A=0,(-1)A=-A,k0=0$;

(10) 若$kA=0$，则$k=0$,或者$A=0$.

例 4　设矩阵 A、B、C 满足等式 $3(A+C)=2(B-C)$，

其中 $A=\begin{pmatrix}2&3&6\\-1&3&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&4\\1&-3&5\end{pmatrix}$, 求 C.

解　由等式可得　$5C=2B-3A$

$$=\begin{pmatrix}2\times3&2\times2&2\times4\\2\times1&2\times(-3)&2\times5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\times2&3\times3&3\times6\\3\times(-1)&3\times3&3\times5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&-5&-10\\5&-15&-5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&-1&-2\\1&-3&-1\end{pmatrix}.$$

例5 设$A=(a_{ij})_{2\times 3}$, E_{ij}表示第i行第j列元素为1, 其余元素为0的2×3矩阵($i=1,2;j=1,2,3$)，如

$E_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$等，则$A$可表示为:

$$A=(a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+a_{13}E_{13})+(a_{21}E_{21}+a_{22}E_{22}+a_{23}E_{23})$$

$$=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}E_{1j}+\sum_{j=1}^{3}a_{2j}E_{2j}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}E_{ij};$$

或

$$A=(a_{11}E_{11}+a_{21}E_{21})+(a_{12}E_{12}+a_{22}E_{22})+(a_{13}E_{13}+a_{23}E_{23})$$

$$=\sum_{i=1}^{2}a_{i1}E_{i1}+\sum_{i=1}^{2}a_{i2}E_{i2}+\sum_{i=1}^{2}a_{i3}E_{i3}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}a_{ij}E_{ij}.$$

线性运算是同型矩阵间最基本的运算。

线性组合：如果矩阵$\mathrm{B} = \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{A}_2 + \cdots + \boldsymbol{k}_n\boldsymbol{A}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{A}_i$，则称$\boldsymbol{B}$可由矩阵$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n$线性表示，或称$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n$的一个线性组合.

n元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$，则方程组可表示为

向量形式：$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$;

练习

1. 设$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 1\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 求 $\mathrm{A}-2\mathrm{B}$

$$\begin{pmatrix}2 & -7 & 1\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

2.设$\alpha=(1,-1,0),\beta=(0,1,2)$,且$2\alpha=3\beta+2\gamma$，求$\gamma$

$$\gamma=(1,-\frac{5}{2},-3).$$

三、矩阵的乘法运算

引例: 某地区有四个工厂I、II、III、IV, 生产甲乙丙3种产品, 矩阵A表示一年中各工厂生产各种产品的数量, 矩阵B表示各种产品的单位价格(元)及单位利润(元),C表示各工厂的总收入及总利润。

$$A=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} I \\ II \\ III \\ IV \end{array} \quad B=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \text{单位价格} & \text{单位利润} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \end{array} \quad C=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \text{总收入} & \text{总利润} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} I \\ II \\ III \\ IV \end{array}$$

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}}$$

定义：矩阵的乘法

设$A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，那么规定矩阵 A

与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵$C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

并把此乘积记作 $C=AB$.

注意1：矩阵的乘法规则——左行乘右列

由矩阵乘法的定义

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

$$= (a_{i1}, \quad a_{i2} \quad , \cdots \quad , a_{in}) \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

$= A$的第i行乘B的第j列$(i = 1, 2 \cdots, s;\ j = 1, 2, \cdots, m)$.

注意2

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

当左矩阵的列数=右矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘。

乘积矩阵C的行数＝左矩阵的行数，
乘积矩阵C的列数＝右矩阵的列数.

特例：矩阵与列向量的乘积

定义 规定m行n列矩阵A与n维列向量($n\times 1$矩阵)C的乘积AC是以$d_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j,(i=1,\cdots,n)$为分量的m维列向量(m×1矩阵)

$$AC=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}c_1+a_{m2}c_2+\cdots+a_{mn}c_n \end{bmatrix}$$

从方程角度看矩阵的乘法

情形一　多元线性方程

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 5$$

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b \longrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b$$

注意　左侧的行向量与右侧的列向量乘积实际上是向量的**数量积**.

从方程角度看矩阵的乘法

情形一　多元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AX=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

例4 设$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$,

求 AB, BA, AC

$$AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, BA=\begin{bmatrix}4 & 4\\ -4 & -4\end{bmatrix}, AC=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

通过观察，我们发现：

(1)两个非零矩阵的乘积可以为零；

(2)$AB \neq BA$，因此矩阵乘法不满足交换律；

(3)$AB = AC$，但$B \neq C$，因此矩阵乘法不满足消去律；

注意3：矩阵乘法与数的乘法的区别

➢在数的乘法中，若 $ab=0 \Rightarrow a=0$ 或 $b=0$

在矩阵乘法中,若 $AB=O \nRightarrow A=O$ 或 $B=O$

两个非零矩阵乘积可能为O。

➢在数的乘法中，$ab=ba$ (交换律成立)

在矩阵乘法中，$AB \neq BA$ (交换律不成立)

➢在数的乘法中，若 $ac=ad$, 且 $a\neq 0 \Rightarrow c=d$ (消去律成立)

在矩阵乘法中, 若 $AC=AD$, 且 $A\neq O \nRightarrow C=D$ (消去律不成立)

例5：线性方程组的矩阵表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(1) 可以表示为 $AX = b.$

练习： 计算下列矩阵的乘积.

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

解: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 \\ 2\times 1 & 2\times 2 \\ 3\times 1 & 3\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

例6 计算下列矩阵的乘积.

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -8 & 0 & 2 \\ 10 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -8 & 0 & 2 \\ 10 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -8 & 0 & 2 \\ 10 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 4} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -8 & 0 & 2 \\ 10 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

矩阵乘法的运算规律

(1) 乘法结合律 $(AB)C = A(BC)$

(2) 数乘和乘法的结合律和交换律

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

（其中 λ 是数）

(3) 乘法对加法的分配律

左分配律：$A(B+C) = AB + AC$

右分配律：$(B+C)A = BA + CA$

(4) 零矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数0，即

$$0_{s\times m}A_{m\times n}=0_{s\times n}\qquad A_{m\times n}0_{n\times t}=0_{m\times t}$$

(5) 单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数1，即

$$E_m A_{m\times n}=A_{m\times n}E_n=A$$

推论: 矩阵乘法不一定满足交换律，但是λE与任何同阶方阵都是可交换的.

(6) 矩阵的幂 若 A 是 n 阶方阵，定义

$$A^0 = E_n,\quad A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k}$$

显然 $A^kA^l = A^{k+l}$，$(A^k)^l = A^{kl}$

思考：下列等式是否成立？ 什么时候成立？

$$(AB)^k = A^kB^k$$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

A、B可交换时成立

例1.6 设 $f(x)=3x^2+6x-2$是数域P上的多项式，

A是P上的n阶方阵，则$f(x)$在$x=A$的值

$$f(A)=3A^2+6A-2E$$

称为A的一个矩阵多项式。

设多项式 $h(x),g(x)$

$$l(x)=h(x)+g(x),\quad m(x)=h(x)g(x),$$

则$l(A)=h(A)+g(A), m(A)=h(A)g(A).$

一般地，A的矩阵多项式之间可交换.

例1.7 设n阶方阵A满足关系式 $A^2+2A-3E=0$，

证明:存在矩阵B使得：$(A-2E)B=E$.

分析 能否找到B为A的某一个多项式矩阵，由于要利用必须利用到关系式 $A^2+2A-3E=0$，

不妨假设$B=aA+bE$，其中参数a,b应满足

$$(A-2E)(aA+bE)=E,$$

即$aA^2+(b-2a)A-(2b+1)E=0$.

要利用关系$A^2+2A-3E=0$，于是a,b应满足

$$\frac{a}{1}=\frac{b-2a}{2}=\frac{2b+1}{3},\text{解之得}a=-\frac{1}{5},b=-\frac{4}{5}.$$

例1.8 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵 X。

解 设 $X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$ 满足 $AX=XA$，于是

法一 直接用矩阵乘法和相等得到方程组，然后求解。

法二 利用A的特殊性，可改写A为

$$A=E+B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

则由$(E+B)X=X(E+B)$当且仅当$X+BX=X+XB$,

于是$AX=XA$当且仅当$XB=BX$,从而有

$$\begin{pmatrix} 2x_{21} & 2x_{22} & 2x_{23} \\ 2x_{31} & 2x_{32} & 2x_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x_{11} & 2x_{12} \\ 0 & 2x_{21} & 2x_{22} \\ 0 & 2x_{31} & 2x_{32} \end{pmatrix}$$

由矩阵的相等得到线性方程组，解之得

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & x_{11} \end{pmatrix}$$,其中x_{11}，x_{12}，x_{13}为任意数.

练习：设矩阵$A=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$，$a_1,a_2,a_3$互不相同，

求与矩阵A可交换的矩阵B.

解：$\because AB=BA$ $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} b_{11}a_1 & b_{12}a_1 & b_{13}a_1 \\ b_{21}a_2 & b_{22}a_2 & b_{23}a_2 \\ b_{31}a_3 & b_{32}a_3 & b_{33}a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{11}a_1 & b_{12} \\ b_{21}a_1 & b_{22} \\ b_{31}a_1 & b_{32} \end{bmatrix}$$

所以，$B=\begin{bmatrix} b_{11} & & \\ & b_{22} & \\ & & b_{33} \end{bmatrix}$

$b_{12}a_1=b_{12}a_2 \Rightarrow b_{12}=0$

$b_{13}a_1=b_{13}a_3 \Rightarrow b_{13}=0$

而$b_{11}a_1=b_{11}a_1 \Rightarrow b_{11}$可以为任意数，

类似的b_{22},b_{33}可以任意数。

类似的，$b_{21}=0;b_{23}=0;b_{31}=0;b_{32}=0.$

例1.9 设$P=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $A=PQ$,求A^n.

解 $$A^2=P(QP)Q=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}2\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}=2A,$$

$$A^n=2^{n-1}A=2^{n-1}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}=2^{n-1}\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\2 & -2 & 4\\1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

练习

1. 设$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 1\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 求 A − 2B

$$\begin{pmatrix}2 & -7 & 1\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$,

求乘积 AB 和 BA.

$$AB=\begin{pmatrix}10 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix} \quad BA=\begin{pmatrix}6 & 1 & 12\\ 1 & 1 & -3\\ 2 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

3. 设$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, 求 A^n.

$$\begin{pmatrix}\cos n\theta & \sin n\theta\\ -\sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$