高等教育公共基础类“十四五”系列规划教材

线性代数习题册

Linear Algebra Workbook

（第三版）

四川大学数学学院　编

陈　丽　谭英谊　胡朝浪　主编

四川大学出版社
SICHUAN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

线性代数习题册 / 四川大学数学学院编 ; 陈丽，谭英谊，胡朝浪主编. — 3版. — 成都 : 四川大学出版社，2023.12

ISBN 978-7-5690-6504-6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①四… ②陈… ③谭… ④胡… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－习题集 Ⅳ. ①O151.2-44

中国国家版本馆 CIP 数据核字（2023）第 242823 号

书　　名：线性代数习题册（第三版）
　　　　　Xianxing Daishu Xitice (Di-san Ban)
编　　者：四川大学数学学院
主　　编：陈　丽　谭英谊　胡朝浪
丛 书 名：高等教育公共基础类“十四五”系列规划教材

丛书策划：李志勇　王　睿
选题策划：毕　潜　王　睿
责任编辑：毕　潜　王　睿
责任校对：胡晓燕
装帧设计：墨创文化
责任印制：王　炜

出版发行：四川大学出版社有限责任公司
　　　　　地址：成都市一环路南一段 24 号（610065）
　　　　　电话：（028）85408311（发行部）、85400276（总编室）
　　　　　电子邮箱：scupress@vip.163.com
　　　　　网址：https://press.scu.edu.cn
印前制作：四川胜翔数码印务设计有限公司
印刷装订：四川煤田地质制图印务有限责任公司

成品尺寸：185㎜×260㎜
印　　张：8.75
字　　数：228 千字

版　　次：2014 年 8 月 第 1 版
　　　　　2024 年 1 月 第 3 版
印　　次：2024 年 1 月 第 1 次印刷
定　　价：35.00 元

扫码获取数字资源

四川大学出版社
微信公众号

目 录

线性方程组

一、利用高斯消元法，化下列方程组为系数矩阵是行阶梯形的方程组，并判断方程组是否有解，若有解，求其解.

1. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=4; \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2-x_3=2, \\ x_1+4x_2-2x_3=1, \\ 5x_1-8x_2+2x_3=5; \end{cases}$

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

3. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3-x_4=2, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=5, \\ 3x_1+6x_2-x_3-x_4=4. \end{cases}$

二、设一线性方程组 A 分别满足下列条件，判断该方程组是否有解，并说明理由.

1. 方程组 A 有 3×4 系数矩阵，该矩阵有三个主元列；

2. 方程组 A 有 3×4 增广矩阵，该矩阵第四列为主元列；

3. 方程组 A 的系数矩阵的每一行中都有一个主元；

学院＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 教师＿＿＿＿

4. 方程组 A 有三个变量、三个方程，其系数矩阵的每一列都有一个主元.

三、方程个数比未知量个数少的一个方程组，称为一个亚定组. 亚定方程组可能有解，也可能无解，为什么？若一个亚定组有解，试说明它一定有无穷多解. 请给出一个含两个方程的三元线性方程组，并举例说明.

四、方程个数比未知量个数多的一个方程组，称为一个超定组. 超定方程组是否有解？请给出一个含三个方程的二元线性方程组，并举例说明.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

五、设线性方程组的增广矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & a & 0 \end{bmatrix}$.

1. 该方程组是否无解?

2. 当 a 为何值时,方程组有唯一解? 当 a 为何值时,方程组有无穷多解?

六、设线性方程组的增广矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{bmatrix}$.

1. 当 a,b 为何值时,方程组有无穷多解?

2. 当 a,b 为何值时，方程组无解？

七、已知方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+2x_2-ax_3=9, \\ 2x_1-x_2+3x_3=b. \end{cases}$$

1. 当 a,b 为何值时，方程组无解？

学院＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿　学号＿＿＿＿＿　教师＿＿＿＿＿

2. 当 a,b 为何值时，方程组有唯一解？

八、求数据(1,12)，(2,15)，(3,16)插值多项式 $P(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$，即求 a_0,a_1,a_2，使得

$$\begin{cases} a_0+a_1(1)+a_2(1)^2=12, \\ a_0+a_1(2)+a_2(2)^2=15, \\ a_0+a_1(3)+a_2(3)^2=16. \end{cases}$$

九、一个投资者将 100 万元投给三家企业甲、乙、丙，所得利润率分别为 12%，15%，22%. 他想得到 20 万元的利润.

1. 如果投给乙的钱是投给甲的钱的 2 倍，那么应分别给甲、乙、丙投资多少？

2. 可不可以投给丙的钱等于投给甲与乙的钱的和?

十、某厂在每批次投料生产中,获得四种不同产量的产品,同时测算出各批次的生产总成本,列表如下:

生产批次	产量(吨)				总成本(万元)
	A	B	C	D	
1	4	2	2	1	58
2	10	5	4	2	141
3	5	2	2	1	68
4	20	9	8	3	275

求每种产品的单位成本.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

十一、已知方程组

$$\begin{cases}\lambda x+y+z=0,\\ x+\lambda y-z=0,\\ 2x-y+z=0.\end{cases}$$

则当 λ 为何值时，方程组有非零解？并求其解.

十二、对于同一矩阵 $\boldsymbol{A}$，关于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 和齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，下列说法中正确的是(　　).

1. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 无非零解时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解；
2. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解；
3. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 无非零解；
4. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

矩阵的加法　数乘　乘法

一、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$,求 $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

二、计算下列矩阵乘积.

1. $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$;

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

2. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} [a \quad b \quad c]$;

3. $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$;

学院______ 姓名______ 学号______ 教师______

4. $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$;

5. 已知某公司三个部门分别销售四种商品的销售收入如下：

$$\mathbf{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{商品 1} & \text{商品 2} & \text{商品 3} & \text{商品 4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{部门 1} \\ \text{部门 2} \\ \text{部门 3} \end{array}$$

请用矩阵乘法表示下列项：

(1)该公司每个部门的销售收入；

(2)该公司每种商品的销售收入；

(3)该公司的总销售收入；

(4)该公司第 i 个部门销售第 j 种商品的销售收入 a_{ij}.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

三、求 $\boldsymbol{A}^n$，n 为自然数.

1. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}$；

2. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & 1 & 0\\0 & a & 1\\0 & 0 & a\end{bmatrix}$；

3. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$.

四、已知对角形矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_n\end{bmatrix}$，其中 $a_i, i=1,2,\cdots,n$ 两两互不相等，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 证明 $\boldsymbol{B}$ 必为对角形矩阵.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

五、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵. 证明：

1. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；
2. $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \Leftrightarrow \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；
3. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^m=\boldsymbol{A}^m+m\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{B}+C_m^2\boldsymbol{A}^{m-2}\boldsymbol{B}^2+\cdots+\boldsymbol{B}^m$.

六、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$f(x)=x^3-3x^2+3x-1$，计算 $f(\boldsymbol{A})$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

可逆矩阵和求逆矩阵

一、填空题.

1. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$______.

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{X}$ 是 n 阶未知矩阵,则矩阵方程 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 的解为________;试写出 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^{-1} =$________.

3. 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,且 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}=$________.

4. n 阶初等阵乘积 $\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{E}(i,j(-k))=$________.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是 n 阶可逆矩阵,则 $(\boldsymbol{AB}^2\boldsymbol{C}^3\boldsymbol{D}^4)^{-1}=$________.

二、选择题.

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均是 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{I}$,则有(　　).

A. $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{I}$　　B. $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{I}$

C. $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{I}$　　D. $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{I}$

2. 设 n 阶初等阵 $\boldsymbol{E}(i,j(k)),\boldsymbol{E}(i(k)),\boldsymbol{E}(i,j),\boldsymbol{A}$ 为同阶对角阵,则下列正确的是(　　).

A. $\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AE}(i,j(k))$　　B. $\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AE}(i(k))$

C. $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AE}(i,j)$　　D. 以上结论都不对

三、求下列矩阵的逆矩阵.

1. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, ad-bc\neq 0$;

2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

四、解下列矩阵方程.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

2. $\boldsymbol{X} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$;

学院______ 姓名______ 学号______ 教师______

3. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 1 & 4\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 2\\2 & 5\end{bmatrix}$;

4. $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -4 & 3\\2 & 0 & -1\\1 & -2 & 0\end{bmatrix}$.

学院______　姓名______　学号______　教师______

五、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵.

1. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 证明：$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵，并且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

2. 若 $\boldsymbol{B}$ 可逆，且满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{O}$. 证明：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都是逆矩阵.

六、若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，$k$ 为正整数. 证明：$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆，并求 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

七、(选做)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都可逆. 证明:$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$可逆.

八、设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{7}\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{B}$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

矩阵的转置及分块

一、填空题.

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&3\\0&2&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{B}_2\\\boldsymbol{B}_3\end{bmatrix}$ 为行分块矩阵, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1\\\boldsymbol{C}_2\\\boldsymbol{C}_3\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{C}_1=$________, $\boldsymbol{C}_2=$________, $\boldsymbol{C}_3=$________.

2. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{F}$ 都是 n 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{CD}=\boldsymbol{I}_n$, 则分块阵乘积 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{CFA}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{F}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}=$________.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&3&1\\1&2&3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\\-1&5\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}$ 的列分块矩阵 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2]$, 则 $\boldsymbol{AB}=$________, $[\boldsymbol{A\beta}_1\ \ \boldsymbol{A\beta}_2]=$________.

二、选择题.

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 下列矩阵中, (　　)不是对称矩阵.

A. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　B. $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　C. $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$　　D. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$

2. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵. 下列矩阵中, (　　)不是反对称矩阵.

A. $\begin{bmatrix}0&a_{12}&a_{13}\\-a_{12}&0&a_{23}\\-a_{13}&-a_{23}&0\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}0&a_{12}\\-a_{12}&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}-\begin{bmatrix}0&a_{12}\\-a_{12}&0\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}1&1&2\\-1&2&3\\-2&-3&3\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}1&1&2\\-1&2&3\\-2&-3&3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}-\begin{bmatrix}1&1&2\\-1&2&3\\-2&-3&3\end{bmatrix}$

3. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列分块矩阵分别为 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_1\ \boldsymbol{A}_2\ \boldsymbol{A}_3]$, $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1\ \boldsymbol{B}_2\ \boldsymbol{B}_3]$, k 是一个常数. 下列式子中, (　　)不成立.

A. $\boldsymbol{AB}=[\boldsymbol{AB}_1\ \ \boldsymbol{AB}_2\ \ \boldsymbol{AB}_3]$　　B. $\boldsymbol{AB}=[\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}]$

C. $k\boldsymbol{A}=[k\boldsymbol{A}_1\ \ k\boldsymbol{A}_2\ \ k\boldsymbol{A}_3]$　　D. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1\ \ \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2\ \ \boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{B}_3]$

4. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 都是 n 阶矩阵, 则下列运算中, 不正确的是(　　).

A. $[\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{C}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{A}\end{bmatrix}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$　　B. $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{C}]=[\boldsymbol{AB}\ \ \boldsymbol{AC}]$

C. $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{AC}\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{BA}\\\boldsymbol{CA}\end{bmatrix}$

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

三、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 是同阶可逆矩阵，求 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$的逆.

四、设 $\boldsymbol{A}$ 是一个方阵，证明：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为反对称矩阵，并将 $\boldsymbol{A}$ 表示为对称矩阵和反对称矩阵之和.

五、设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实数矩阵，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

六、设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的列向量为 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times s}$ 的行向量为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$.
证明：

$\boldsymbol{AB}$ 的第 i 个行向量为 $a_{i1}\boldsymbol{\beta}_1+a_{i2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{in}\boldsymbol{\beta}_n$；

$\boldsymbol{AB}$ 的第 j 个列向量为 $b_{1j}\boldsymbol{A}_1+b_{2j}\boldsymbol{A}_2+\cdots+b_{nj}\boldsymbol{A}_n$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

七、设 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，又 $\boldsymbol{U}=[u_1,u_2,\cdots,u_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{V}=[v_1,v_2,\cdots,v_n]^{\mathrm{T}}$，令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$. 证明：当 $\gamma=1+\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{U}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}-\dfrac{1}{\gamma}(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1})$.

八、设列矩阵 $\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=1$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$. 证明：$\boldsymbol{A}$ 是对称阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$.

九、已知 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，证明：

1. $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$；

2. 当 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

十、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^6$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

十一、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶对称阵，且 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{I}$ 及 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明：$(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}$ 为可逆对称阵.

十二、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -6 & 7\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$. 证明：$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}$ 可逆，并求其逆.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

行列式的定义与性质

一、填空题.

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}=$______.

2. $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=$______.

3. 方程$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=0$的根为______.

4. 设$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，则$D_2=\begin{vmatrix} 2a_{21} & 3a_{21}-5a_{22} & a_{23} \\ 2a_{11} & 3a_{11}-5a_{12} & a_{13} \\ 2a_{31} & 3a_{31}-5a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$______.

5. 写出两个矩阵$\boldsymbol{A}=$______，$\boldsymbol{B}=$______，使得$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，但$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$.

二、选择题.

若3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式$|\boldsymbol{A}|=0$，则(　　).

A. $\boldsymbol{A}$有一行为零　　B. $\boldsymbol{A}$有两行成比例

C. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$　　D. $\boldsymbol{A}$有一行是其余行的线性组合

三、利用行列式的定义计算.

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$；

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

2. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$；

3. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$；

学院______ 姓名______ 学号______ 教师______

四、将 4 阶方阵$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$的行列式按照定义展开到一阶行列式，并归纳出 4 阶方阵的行列式的值等于 4！项取自不同行不同列的元素乘积的代数和，且可推广至 n 阶方阵的行列式的值等于 n！项取自不同行不同列的元素乘积的代数和.

五、若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 中为零的元多于 n^2-n 个，求 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的值.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

六、设平面直线 $y=mx+b$ 通过平面上两点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，验证直线方程可以表示为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

七、写出行列式 $D=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 的展开式中包含 x^3 和 x^4 的项.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

行列式的性质与计算(一)

一、填空题.

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ a & 0 & c\\ b & c & 0\end{bmatrix}(a,b\neq 0)$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & l\end{bmatrix}$,当 k,l 满足________时,$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{I}$ 可逆.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=$______,$\boldsymbol{A}^{-1}=$______;已知 $|\boldsymbol{A}|>0$,$|\boldsymbol{A}|=$______.

3. 满足方程 $\begin{vmatrix}1 & x & y & z\\ x & 1 & 0 & 0\\ y & 0 & 1 & 0\\ z & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$ 的实数 $x=$______,y______,$z=$________.

4. 设 $D=\begin{vmatrix}5 & -4 & 3\\ 6 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}$,$A_{21}$,$A_{22}$,$A_{23}$ 是 a_{21},a_{22},a_{23} 的代数余子式,试用一个三阶行列式表示 $3A_{21}-2A_{22}+4A_{23}=$________.

5. 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶方阵,且满足条件:$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$,$|\boldsymbol{A}|=-5$,则 $|\boldsymbol{B}|=$______.

二、选择题.

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n>2)$ 阶方阵,k 为常数. 若 $|\boldsymbol{A}|=a$,则 $|k\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=$(　　).

A. ka^2　　B. k^2a^2

C. k^na^2　　D. 不能确定

2. 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 是两个 $n(n>1)$ 阶方阵,则以下结论中不正确的是(　　).

A. $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 不一定等于 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$

B. $|\boldsymbol{AB}|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}|$

C. $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$

D. $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|$

3. 方程 $\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$ 的根为(　　).

A. 1,0,0,0　　B. −1,0,0,0

C. −1,1,0,0　　D. 0,0,0,0

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

三、利用行列式的性质计算.

1. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$;

2. $\begin{vmatrix} 118 & 18 & 28 \\ 111 & 11 & 21 \\ 94 & -6 & 4 \end{vmatrix}$;

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

3. $\begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a & x_2 & 0 & 0 \\ a & 0 & x_3 & 0 \\ a & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$.

四、证明：$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+2c_1 & c_1+3a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+2c_2 & c_2+3a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+2c_3 & c_3+3a_3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

五、利用行列式的展开公式计算行列式.

1. $\begin{vmatrix} a & & & b \\ b & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b & a \end{vmatrix}_n$ (空格处为 0);

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

学院______ 姓名______ 学号______ 教师______

六、先化简，再利用展开公式计算行列式.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -4 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

3. $\begin{vmatrix} -x_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1}$;

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$;

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

5. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & & \\ 2 & 5 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 3 \\ & & 2 & 5 \end{vmatrix}_n$(空格处为零);

6.(选做)$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$(提示:将第 4 题的行列式按第 5 列展开,然后比较两端 x^3 的系数);

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

7. (选做) $D=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a & x_2 & a & a \\ a & a & x_3 & a \\ a & a & a & x_4 \end{vmatrix}$ $(x_i \neq a, i=1,2,3,4)$;

8. $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

行列式的性质与计算(二)

一、填空题.

1. 设 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,则 A 的伴随矩阵 $A^*=$______,$(A^*)^*=$________.

2. 设 $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,则 A 的伴随矩阵 $A^*=$________.

二、选择题.

设 A 为 3 阶方阵,A^* 是 A 的伴随矩阵,常数 $k\neq 0,k\neq\pm1$,则 $(kA)^*=$(　　).

A. $k^{-1}A^*$　　　　B. kA^*

C. k^2A^*　　　　D. k^3A^*

三、1. 设 A^* 是 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵,若 $|A|\neq 0$,证明:$|A^*|\neq 0$,$|A^*|=|A|^{n-1}$;

2. 如果 $|A|=5$,计算 $|2(A^*)^{-1}|$.

学院＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿ 教师＿＿＿＿＿

四、求下列矩阵的逆矩阵.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

五、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

六、设 $n(n>2)$ 阶非零实数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足：$\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，试证：$|\boldsymbol{A}|=1$，且 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$.

七、利用 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ 计算下列行列式.

1. $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$;

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

2. $\begin{vmatrix} \frac{1-a_1^nb_1^n}{1-a_1b_1} & \frac{1-a_1^nb_2^n}{1-a_1b_2} & \cdots & \frac{1-a_1^nb_n^n}{1-a_1b_n} \\ \frac{1-a_2^nb_1^n}{1-a_2b_1} & \frac{1-a_2^nb_2^n}{1-a_2b_2} & \cdots & \frac{1-a_2^nb_n^n}{1-a_2b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1-a_n^nb_1^n}{1-a_nb_1} & \frac{1-a_n^nb_2^n}{1-a_nb_2} & \cdots & \frac{1-a_n^nb_n^n}{1-a_nb_n} \end{vmatrix}$.

八、求行列式$\begin{vmatrix} \lambda-4 & -5 & 2 \\ 2 & \lambda+2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$的值.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

综合练习(一)

一、设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{8}$,求$\left|\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-8\boldsymbol{A}^*\right|$.

二、设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$($\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位阵,$\boldsymbol{A}$ 为正交阵),$|\boldsymbol{A}|<0$,求$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|$.

三、设 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$,求$|\boldsymbol{A}|$中所有元素代数余子式之和.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

四、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是正交矩阵，且 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{B}|}=-1$，证明：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

五、设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{I}$ 为 4 阶单位阵，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

六、设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆($n\geqslant 2$)，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求 $(\boldsymbol{A}^*)^*$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的关系.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

七、$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,满足 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{I}$($m$ 为正整数),$\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位阵,现将 $\boldsymbol{A}$ 中 n^2 个元素 a_{ij} 用其代数余子式 A_{ij} 代替,得到的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$,证明:$\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{I}$.

八、证明:奇数阶反对称阵的行列式等于零.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

九、设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^2-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$，证明：存在一个小于 1 的正数 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

十、计算元素为 $a_{ij}=|i-j|$ 的 n 阶行列式.

学院＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿　学号＿＿＿＿＿　教师＿＿＿＿＿

线性相关与线性无关

一、填空题.

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,4,-3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,1)$，则 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3=$＿＿＿＿＿.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}$，若 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3$，则 $x_1=$＿＿＿，$x_2=$＿＿＿.

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{bmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}k\\1\\1\end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则 $k=$＿＿＿＿.

4. 当 $h=$＿＿＿时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,h)^{\mathrm{T}}$ 线性相关.

二、选择题.

1. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant2)$(Ⅰ)线性无关的充分必要条件是(　　).

A.(Ⅰ)中不含零向量

B.(Ⅰ)中任何 $s-1$ 个向量都线性无关

C.(Ⅰ)中有一个向量不能由其余向量线性表出

D.(Ⅰ)中任何向量都不能由其余向量线性表出

2. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

B. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\c_1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\c_2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\c_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}-1\\1\\c_4\end{bmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组一定线性相关的是(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

4. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则(　　).

A. $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性无关　　B. $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关

C. $\boldsymbol{\alpha}$ 必可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示　　D. $\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

三、设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}2\\-3\\7\\0\end{bmatrix}$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

1. 判断 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性相关性；

2. 判断 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性相关性；

3. 问 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？如果可以，将 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 写成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

四、设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\a+2\\-3a\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\-b-2\\a+2b\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\3\\-3\end{bmatrix}$. 试讨论当 a,b 为何值时,

1. $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

2. $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且表示式唯一,并写出线性表示式；

3. $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但表示式不唯一,此时写出一个线性表示式.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

五、设在向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq 0$，并且每一个$\boldsymbol{\alpha}_i$都不能由前面的$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$线性表示，证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

六、设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.

1. 判断向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$的线性相关性，并说明理由；

2. 判断向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4$的线性相关性，并说明理由.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

向量组的极大线性无关组和秩

一、填空题.

1. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $r\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$________ $r\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}\}$.

2. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，则 $r\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}\}=$________.

3. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的秩为 2，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 3，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为________.

4. 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-3,5,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-3,7,-1)^{\mathrm{T}}$，若 $\boldsymbol{A}$ 行等价于 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，则向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=$________，$\boldsymbol{\alpha}_4=$________.

二、求下列向量组的秩与一个极大线性无关组.

1. $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,-1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,-3,6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,-2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,0,1,2)^{\mathrm{T}}$;

2. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,3,6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,-2,-5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,k,5,8)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(0,2,1,1)^{\mathrm{T}}$.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

三、设 4 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+k,1,1,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+k,2,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+k,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+k)^T$. 问当 k 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组线性表出向量组中的其余向量.

四、已知秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)=4$. 求秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

五、设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关,证明:或者 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 中至少有一个可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出,或者向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\gamma}$ 等价.

六、证明:向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

七、设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,k)^T$ 线性表出.

1. 求 k 的值；

2. 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

基和维数

一、填空题.

1. 若$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$是$\mathbf{R}^3$的一个基,则$\boldsymbol{\beta}=(3,4,3)^{\mathrm{T}}$在该基下的坐标为________.

2. 从$\mathbf{R}^2$的基$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$到基$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$的过渡矩阵为________.

3. 设$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$是$\mathbf{R}^3$的一组基,则这组基到基$\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_1$的过渡矩阵为______.

4. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,k)^{\mathrm{T}}$,若由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$生成的向量空间的维数为2,则$k=$________.

二、判别下列$\mathbf{R}^4$的子集是否为$\mathbf{R}^4$的子空间.

1. $H=\{(0,x_2,x_3,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_2,x_3,x_4\in\mathbf{R}\}$;

2. $H=\{(1,x_2,x_3,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_2,x_3,x_4\in\mathbf{R}\}$;

3. $H=\{(a,b,c,d)^{\mathrm{T}}\mid a-2b+5c=d,c-a=b\}$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

三、求 $\mathbf{R}^4$ 的子空间 $span\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 的维数和一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-3\\2\\4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-3\\9\\-6\\12\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\4\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}-4\\5\\-3\\7\end{bmatrix}.$$

四、令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&5&9&-2\\6&5&1&12\\3&4&8&-3\end{bmatrix}$，求 $Col(\boldsymbol{A})$ 和 $Null(\boldsymbol{A})$ 的基.

五、证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,-2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,1,3)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的一组基，并求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(7,14,-1,-2)^{\mathrm{T}}$ 在该基下的坐标.

六、设 $\mathbf{R}^3$ 中由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$. 若 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(2,-2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3=(3,-1,-1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$.

七、在 $\mathbf{R}^3$ 中,设有两组基:(Ⅰ)$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(2,3,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(3,7,1)^{\mathrm{T}}$;(Ⅱ)$\boldsymbol{\eta}_1=(9,24,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\eta}_2=(8,22,-2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\eta}_3=(12,28,4)^{\mathrm{T}}$.

1. 求基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵;

2. 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基(Ⅰ)下的坐标为 $\boldsymbol{x}=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基(Ⅱ)下的坐标.

学院______　姓名______　学号______　教师______

矩阵的秩

一、填空题.

1. 写出一个秩为 2 的三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=$______,其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩=______.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3×4 矩阵,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是______阶对称矩阵,$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=$______.

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,则 $r(\boldsymbol{A}^3)=$______.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k&1&1\\1&k&1\\1&1&k\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$ 相抵,则 $k=$______.

二、选择题.

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 3 阶可逆矩阵,则下列结论不正确的是(　　).

A. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 必定等价　　B. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不一定等价

C. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价　　D. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵,$\boldsymbol{I}$ 为 m 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$,则(　　).

A. 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$,秩 $r(\boldsymbol{B})=m$　　B. 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$,秩 $r(\boldsymbol{B})=n$

C. 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,秩 $r(\boldsymbol{B})=m$　　D. 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,秩 $r(\boldsymbol{B})=n$

三、计算下列矩阵的秩.

1. $\begin{bmatrix}0&0&-1&-1&-3\\1&4&-1&0&-3\\1&4&-2&1&0\\2&8&1&1&-3\end{bmatrix}$;

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

四、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $s\times n$ 矩阵,证明:$rank(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant rank(\boldsymbol{A})+rank(\boldsymbol{B})$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

五、设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是3维列向量. 证明：

1. $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$；

2. 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $r(\boldsymbol{A})<2$.

六、设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3 维列向量组，若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，且 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

线性方程组

一、填空题.

1. 设ξ_1,ξ_2都是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$的解,则$\xi_1-\xi_2$是方程组________的解,$\xi_2+k(\xi_1-\xi_2)$是方程组________的解.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,n 维列向量ξ不是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,则 $r\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\xi\}=$________.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$有无穷多解或无解的充分必要条件是________.

4. 已知方程组$\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$无解,则 $a=$________.

5. 若ξ_1,ξ_2,ξ_3是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,当 k 满足条件________时,向量组$k\xi_1+\xi_2+\xi_3,\xi_1+k\xi_2+\xi_3,\xi_1+\xi_2+k\xi_3$也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

二、选择题.

1. 在非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中,方程个数少于未知量个数,则(　　).

A. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

B. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

C. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解

D. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $s\times n$ 矩阵,秩 $\boldsymbol{A}=s$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定(　　).

A. 有唯一解　　B. 有无穷多解

C. 有解　　D. 无解

3. 已知$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,k_1,k_2为任意常数,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为(　　).

A. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

B. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

C. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

D. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

4. 设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$是秩为 2 的三阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则齐次线性方程组$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解一定能表示为(　　),其中 k,l,m 是任意常数.

A. $k\boldsymbol{\alpha}_1+l\boldsymbol{\alpha}_2$　　B. $l\boldsymbol{\alpha}_2+m\boldsymbol{\alpha}_3$

C. $k\boldsymbol{\alpha}_1+m\boldsymbol{\alpha}_3$　　D. $k\boldsymbol{\alpha}_1-l\boldsymbol{\alpha}_2+m\boldsymbol{\alpha}_3$

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

三、求下列齐次线性方程组的一个基础解系及通解.

1. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2+x_3+2x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+x_4=0; \end{cases}$

2. 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,其系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可经初等行变换化为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$.

四、解下列线性方程组.

1. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4+2x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=2, \\ 3x_1+3x_2+3x_4+x_5=3; \end{cases}$

2. 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$,其增广矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$ 可经初等行变换化为 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

学院＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿　学号＿＿＿＿＿　教师＿＿＿＿＿

五、λ 为何值时，方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$ 有解？有解时，求出通解.

六、写出方程组 $x_1-x_2=a_1, x_2-x_3=a_2, x_3-x_4=a_3, x_4-x_1=a_4$ 有解的充要条件，并求解.

七、设$\boldsymbol{\eta}_0$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$的一个解，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是其导出组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，令$\boldsymbol{\eta}_j=\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\xi}_j,j=1,2,\cdots,n-r$. 证明：

1. $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关；

2. $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$线性无关，且都是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解；

3. 方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的任一解可表示为$\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{\eta}_0+\lambda_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}$的形式，其中常数$\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-r}$满足$\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r}=1$.

八、设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0})$ 的 3 个线性无关的解向量，$r(\boldsymbol{A})=3$，且$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1,3)^{\mathrm{T}}$，求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

九、已知四阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$均为 4 维列向量，其中$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

学院＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　学号＿＿＿＿　教师＿＿＿＿

十、设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 n 的 $s\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，证明：$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

十一、设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足：$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵，证明：

$$rank(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I})+rank(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})=n.$$

十二、设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n>1)$ 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明：$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A})=n, \\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1, \\ 0, & r(\boldsymbol{A})\leqslant n-2. \end{cases}$

十三、若任意一个 n 维向量都是 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

学院________　姓名________　学号________　教师________

综合练习(二)

一、填空题.

1. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,向量组$p\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,s\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,t\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$线性相关,则$p,s,t$满足条件________.

2. 设$\boldsymbol{\alpha}_i=(1,\lambda_i,\lambda_i^2,\cdots,\lambda_i^{n-1})^{\mathrm{T}},i=1,2,\cdots,r$,其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$是互不相同的$r$个数,则对于向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$,当$r>n$时,线性__________;当$r=n$时,线性__________;当$r<n$时,线性__________.

3. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\mathbf{R}^3$的一组基,则由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$到$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$的过渡矩阵为________.

4. 设$\boldsymbol{\alpha}$为3维列向量,$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$,$\boldsymbol{I}$为3阶单位矩阵,则矩阵$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$的秩为__________.

5. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为$n$阶矩阵,齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解都是$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$的解,则$r(\boldsymbol{A})$______$r(\boldsymbol{B})$.

6. 设$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$为3阶矩阵,若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关,且$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,则线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解为____________.

二、选择题.

1. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$的任意两个非零矩阵,则必有(　　).

A. $\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关

B. $\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$的列向量组线性相关

C. $\boldsymbol{A}$的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关

D. $\boldsymbol{A}$的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$的列向量组线性相关

2. 设$\boldsymbol{A}$为4×3矩阵,$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的3个线性无关的解,$k_1,k_2,k_3$是任意常数,则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的通解为(　　).

A. $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3$

B. $k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$

C. $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$

D. $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$

3. 设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$是4阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵. 若$(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$是线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系,则$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系为(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$

C. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

三、设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,p+2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,p)^{\mathrm{T}}$.

1. p 取何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关？此时将 $\boldsymbol{\beta}=(4,1,6,10)^{\mathrm{T}}$用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表出；

2. p 取何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关？此时求$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的秩及一个极大线性无关组.

四、设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\ (r\geqslant 2)$线性无关，任取$k_1,k_2,\cdots,k_{r-1}\in\mathbf{R}$，证明：向量组$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r-1}=\boldsymbol{\alpha}_{r-1}+k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

五、设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\mathbf{R}^3$的一个基,$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

1. 证明:向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$是$\mathbf{R}^3$的一个基;

2. 当k为何值时,存在非零向量ξ在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标相同,并求出所有的$\xi$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

六、设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 n 的 $s\times n$ 矩阵，证明：$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$.

七、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$，已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在 2 个不同的解.

1. 求 λ，a；

2. 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

八、设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值和所有公共解.

学院＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿ 教师＿＿＿＿＿

九、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵.

1. 求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系；

2. 求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

学院＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿　学号＿＿＿＿＿　教师＿＿＿＿＿

矩阵的特征值与特征向量

一、选择题.

1. 设非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 2，则矩阵 $(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2)^{-1}$ 有一个特征值等于(　　).

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

2. 下列说法正确的是(　　).

A. 若 0 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则与它对应的特征向量可能为零向量

B. 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征向量，则它们对应的特征值必相同

C. 不同的矩阵必有不同的特征多项式

D. 矩阵的一个特征值可以有多个特征向量，但一个特征向量仅能属于一个特征值

3. 下列说法错误的是(　　).

A. 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 λ^k(k 为正整数)为 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值

B. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 $n-1$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 0

C. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $n-1$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个 $n-1$ 重的零特征值以及一个单特征值

D. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 可能有不同的特征值

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为(　　).

A. 1,0,1　　B. 1,1,2　　C. -1,1,2　　D. -1,1,1

二、填空题.

1. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1,1,2 且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2$，则 $|\boldsymbol{B}|=$＿＿＿＿＿.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值，则 $a=$＿＿＿＿＿，$b=$＿＿＿.

三、求下列矩阵的特征值与特征向量.

1. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$；

2. $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

3. $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$;

学院______ 姓名______ 学号______ 教师______

4. $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 2 & 3\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

四、设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 2.

1. 求证：$\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，且 $\boldsymbol{\beta}=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$ 是相应的特征向量；

2. 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的各行元素之和为多少？矩阵 $3\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{2}+2\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为多少？

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

五、设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$的全部特征值和相应的特征向量，求$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$的全部特征值与相应的特征向量.

六、设方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，证明：$\boldsymbol{A}$的特征值只有0或1.

七、设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$的$n$个特征值，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是对应的$n$个线性无关的特征向量，求$\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I}$的全部特征值与一组对应的线性无关的特征向量.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

矩阵的相似对角化

一、选择题.

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则(　　).

A. $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$　　B. $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$

C. $\boldsymbol{C}\sim\boldsymbol{B}$　　D. 以上结论均不成立

2. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 a,b 分别为(　　).

A. $-1,1$　　B. $1,0$　　C. $0,1$　　D. $1,-1$

3. 下列说法错误的是(　　).

A. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值

B. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有 n 个互异的特征值

C. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征向量

D. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

4. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则下列说法错误的是(　　).

A. $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$

B. 存在对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均相似于 $\boldsymbol{\Lambda}$

C. $\boldsymbol{A}^{2013}\sim\boldsymbol{B}^{2013}$

D. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$

二、填空题.

1. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.4&5&6\\0&0.5&6\\0&0&0.6\end{bmatrix}$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\boldsymbol{A}^n=$__________.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $a=$______，$b=$_____.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

三、判断下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可以对角化，若可以，求出可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵.

1. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&0\\2&0&2\\0&2&2\end{bmatrix}$；

2. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{bmatrix}$；

学院＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿ 教师＿＿＿＿＿

3. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -8 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

4. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$.

学院＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿　学号＿＿＿＿＿　教师＿＿＿＿＿

四、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

五、设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为 1,1,2,对应的特征向量为 $\boldsymbol{\gamma}_1=[1,2,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=[2,0,-1]^{\mathrm{T}}$.

1. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$；

2. 若 $\boldsymbol{\beta}=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}^{10}\boldsymbol{\beta}$.

六、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

七、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ -k & -1 & k\\ 4 & 2 & -3\end{bmatrix}$，求：

1. $\boldsymbol{A}$ 为何值时，$\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵？

2. 可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

实对称矩阵的相似对角化

一、用施密特正交规范化方法把下列向量组正交规范化.

1. $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&2\\1&4&8\end{bmatrix}$;

2. $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&2&1&0\\1&2&0&0\\1&0&2&2\end{bmatrix}$.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

二、对下列矩阵 $\boldsymbol{A}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

1. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$；

2. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 4\\ 0 & 6 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

三、已知 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，且对应于 λ_1,λ_2 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=[-1,-1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=[1,-2,-1]^{\mathrm{T}}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 λ_3 对应的一个特征向量及矩阵 $\boldsymbol{A}$.

四、设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 6，3，3，且特征值 6 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

五、设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，属于 λ_1 的特征向量为 $\boldsymbol{\eta}=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

六、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{10}$，求对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{B}$ 相似于 $\boldsymbol{\Lambda}$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

综合练习(三)

一、$\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵且 $|\boldsymbol{A}|=-1$,证明:-1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

二、求 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{bmatrix}$ 的特征值与对应的特征向量.

学院______ 姓名______ 学号______ 教师______

三、设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是矩阵$\boldsymbol{A}$对应于不同特征值$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量，且$\lambda_1\lambda_2\neq0$，证明：$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$不是$\boldsymbol{A}$的特征向量.

四、已知向量$\boldsymbol{\alpha}=[1,k,1]^{\mathrm{T}}$是矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

的逆矩阵的特征向量，求常数k.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

五、$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵,证明:$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值.

六、设 $\boldsymbol{A}\backsim\boldsymbol{B}$,且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&a&2\\0&2&3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{bmatrix}$.

1. 求 a,b;

2. 求可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

七、设向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$ 都是非零向量,且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$,记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,求:

1. $\boldsymbol{A}^2$;

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

2. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

八、求解微分方程组 $\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

九、$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}n & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{n\times n}$，证明：$\boldsymbol{A}\backsim\boldsymbol{B}$.

十、$\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$，求$\lim\limits_{n\to 0}x_n$，$\lim\limits_{n\to 0}y_n$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

二次型及其矩阵表示

一、写出下列二次型的矩阵，并求出该二次型的秩.

1. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+3x_2^2-x_3^2-3x_4^2+2x_1x_2+x_1x_3-2x_2x_4+x_3x_4$；

2. $f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

二、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+kx_3^2-3x_4^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2,求参数 k.

三、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$,分别作如下 4 个可逆线性替换,求新二次型.

1. $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$;

学院______ 姓名______ 学号______ 教师______

2. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$;

3. $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$;

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

4. $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

二次型化为标准形

一、分别用正交变换法和配方法化下列二次型为标准形.

1. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3$;

2. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$;

3. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+9x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$;

学院________　姓名________　学号________　教师________

4. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_4^2+2x_1x_2+2x_3x_4$.

二、已知 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\ (a>0)$ 经过正交变换化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 以及所用的正交变换.

三、设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,3，$\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{\mathrm{T}}$，$f(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$. 当 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=1$ 时，求 $f(\boldsymbol{\alpha})$ 的最大值和最小值.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

正定二次型

一、请对下列二次型进行分类(正定、负定、半正定、半负定、不定).

1. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$;

2. $f(x_1,x_2,x_3)=-5x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3$;

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

3. $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$.

二、试确定参数 a 的取值范围，使得 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & a\\ 2 & 6 & 0\\ a & 0 & a\end{bmatrix}$ 为正定矩阵.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

三、设$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$为正定矩阵,证明:$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}^{-1}$,$\boldsymbol{A}^{*}$,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$也是正定矩阵.

四、设$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$分别为m阶和n阶正定矩阵,矩阵$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$,证明:$\boldsymbol{C}$为正定矩阵.

五、求参数 t 的值,使得二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2+tx_2^2+4tx_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$ 为负定二次型.

六、设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,且满足 $6\boldsymbol{A}^2-7\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$. 证明:$\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

综合练习(四)

一、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$可通过正交变换化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

1. 求参数 a 及所用的正交变换矩阵;
2. 问 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示什么曲面.

二、设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值为 λ, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维实向量,且 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=1$. 证明: $f(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\leqslant\lambda$.

学院＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　学号＿＿＿＿　教师＿＿＿＿

三、设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,证明:存在常数 k,使当 $\mu>k$ 时,$\mu\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 总是正定矩阵.

四、设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times r$ 矩阵,且秩$(\boldsymbol{B})=r$. 证明:$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

五、设 $f(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 是一实二次型，$\lambda_1,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$. 证明：$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$，有 $\lambda_1\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\leqslant f(\boldsymbol{\alpha})\leqslant\lambda_n\|\boldsymbol{\alpha}\|^2$.

六、设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^{n\times 1}$，有 $f(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$. 证明：$\boldsymbol{A}$ 为零矩阵.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

七、$\boldsymbol{A}$ 既是正定矩阵，又是正交矩阵. 证明：$\boldsymbol{A}$ 一定是单位矩阵.

八、$\boldsymbol{A}$ 是实反对称矩阵，证明：$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2$ 是正定矩阵.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

期中考试试题(闭卷)

(2020--2021 学年第 2 学期)

一、填空题(每题 4 分,共 24 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵,$\boldsymbol{x}_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{x}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{x}_3=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 分别是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{b}_i$ 的解,其中 $\boldsymbol{b}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{b}_2=(4,5,6)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{b}_3=(7,8,9)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{A}=$________.

2. 考虑元素取值为 0 或 1 的二阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times2}$. 这样的可逆矩阵共有 =________个.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$|\boldsymbol{A}^*|=8$,则行列式 $|(2\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{A}^*|=$________.

4. 若线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_3=kx_2\\x_2+x_3=kx_1\\2x_1-x_2=-x_3\end{cases}$ 有非零解,则常数 $k=$________.

5. 若 $\begin{vmatrix}1&x&y&z\\x&1&0&0\\y&0&2&0\\z&0&0&3\end{vmatrix}=6$,则 $x+y+z=$________.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(1,\lambda_i,\lambda_i^2,\cdots,\lambda_i^{n-1})$,$i=1,2,\cdots,r$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是 r 个互补相同的 r 个数,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\lambda_r$ 线性无关当且仅当 r 和 n 满足条件________.

二、(10 分)将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ 表示成有限个初等矩阵的乘积.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

三、(12 分)矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$.

(1)计算 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}+2$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为四阶单位矩阵;

(2)用 $\boldsymbol{A}^*$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,计算$((\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}})^*$.

四、(12 分)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$,且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXC}-\boldsymbol{BXC}=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{BX}+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵. 求 $\boldsymbol{X}$.

学院＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　学号＿＿＿＿　教师＿＿＿＿

五、(12 分)已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(3,7,b,4)^{\mathrm{T}}$.

(1)a，b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？

(2)a，b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表出方式唯一？并给出其表示式.

六、(15 分)判断下列结论的正确性，若正确，请证明之；否则，请举出一个反例.

(1)若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为零矩阵；

(2)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$；

(3)设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 是四维列向量，若 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 也线性相关.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

七、(15 分)设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶方阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 4 维列向量,

(1)若 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,求$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{2021}$;

(2)若 a_1,a_2,a_3,a_4 为非零实数,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3,a_4)^{\mathrm{T}}$,求$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|$;

(3)若 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵,且$|\boldsymbol{A}|=1$,$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$,证明$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|=1$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

期中考试试题(闭卷)

(2021—2022 学年第 2 学期)

一、填空题(每题 4 分,共 24 分)

1. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$, $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3]$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i=1,2,3)$为三维列向量. 若$|\boldsymbol{A}|=3$,则$|\boldsymbol{B}|=$________.

2. 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&5&3&4\\-1&4&-2&3\\2&2&7&10\\0&7&1&8\end{bmatrix}$,$M_{ij}$为$\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij}的余子式,则 $-2M_{12}-4M_{32}+2M_{42}=$________.

3. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}|=2$,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{B}=(2\boldsymbol{A}^*)^{-1}+\frac{1}{4}\boldsymbol{A}$,则$|\boldsymbol{B}|=$________.

4. 设向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}3\\-5\\2\\k\end{bmatrix}$可以被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\2\\2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\5\\1\\4\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-4\\15\\-1\\8\end{bmatrix}$线性表出,则 $k=$________.

5. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,则 $k=$________.

6. 已知 $Rank(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=4$,$Rank(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=4$,$Rank(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_6)=5$,则 $Rank(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_6)=$________.

二、(12 分)已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\2&1&0\\2&1&3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{XA}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{X}$,求 $\boldsymbol{X}^{2023}$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

三、(14 分)已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)$,$\boldsymbol{\beta}=(1,1,-1)$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$,$f(x)=x^2+x-3$.

(1)求 $\boldsymbol{A}^n$,其中 n 为整数,且 $n\geqslant 1$;

(2)求 $f(\boldsymbol{A})$.

四、(10 分)计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$,其中 $n\geqslant 2$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

五、(15 分)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,5,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,-4,-3)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,-2,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(1,2,9,8)$. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩以及它的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其余向量.

六、(15 分)λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=2 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=\lambda \end{cases}$ 有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解的情形下，求出该方程组的全部解.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

七、(10 分)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是两个线性无关的 n 维向量组. 证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关$\Leftrightarrow$存在非零向量 $\boldsymbol{\gamma}$,它既可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示,又可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

期中考试试题(闭卷)

(2022—2023 学年第 2 学期)

一、填空题(每题 4 分,共 24 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为三阶方阵,A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式,若 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 3,且 $|\boldsymbol{A}|=2$,则 $A_{12}+A_{22}+A_{32}=$________.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是三维列向量,$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置.若 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$,则 $|k\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}|$ 的值=________.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶可逆方阵,则行列式 $|[(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*]^{-1}|$ 的值=________.

4. 若线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=a\\ x_2+x_3=b\\ x_3+x_4=c\\ x_1+x_4=d\end{cases}$ 有解,则常数 a,b,c,d 应满足的条件是________.

5. 已知方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $a\boldsymbol{A}^2+b\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{I}=0(a,b,c\in\mathbf{R},c\neq 0)$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$________.

6. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(a,0,b),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,2)$ 生成的子空间 $Span\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 的维数为 2,则 a,b 满足的关系式为________.

二、(10 分)已知平面上的一条抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过三个不同的点 $(1,1),(2,3),(3,9)$.求出这条抛物线的方程.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

三、(12 分)已知矩阵方程 $\boldsymbol{A}^{2023}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$.求 $\boldsymbol{X}$.

四、(12 分)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶方阵,且 $\boldsymbol{A}=[\alpha,2\gamma_2,3\gamma_3]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{B}=[5\beta,3\gamma_2,\gamma_3]^{\mathrm{T}}$,$|\boldsymbol{A}|=18$,$|\boldsymbol{B}|=30$.求 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

五、(14分)已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,0,5)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1,4)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-3,6,a-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,b,-3,-6)^{\mathrm{T}}$.

(1)求向量组的秩和全部极大线性无关组;

(2)若向量组的秩小于4,将其余向量用极大线性无关组线性表示.

六、(14分)已知三维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_5=(0,1,1)$.

(1)证明:向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与向量组(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 是三维空间 $\mathbf{R}^3$ 的两组基;

(2)求向量组(Ⅰ)到向量组(Ⅱ)的过渡矩阵 $\boldsymbol{M}$.

学院＿＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿＿　学号＿＿＿＿＿＿　教师＿＿＿＿＿＿

七、(14 分)设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq 0$，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=3\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1)证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

(2)若 $n=3$，求 $|\boldsymbol{A}|$.

注：本试题中的 $\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 表示方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

学院＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　学号＿＿＿＿　教师＿＿＿＿

期末考试试题(闭卷)

(2020—2021 学年第 2 学期)

一、填空题(每题 3 分,共 18 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为四阶方阵,且 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{4}$,则 $|(2\boldsymbol{A}^*)^{-1}|=$＿＿＿＿.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$,则秩 $r(\boldsymbol{AB})=$＿＿＿＿.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的第一行元素为 1,2,3,$|\boldsymbol{A}|$ 的第二行元素的余子式分别为 $a+2$,$a+1$,$a-2$,则 $a=$＿＿＿＿.

4. 设 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}2&5&12\\1&4&9\\3&6&15\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}^{2021}\boldsymbol{QR}=$＿＿＿＿.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\a+4\\-3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}a+1\\1\\1\end{bmatrix}$,且 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$,则 $a=$＿＿＿＿.

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=[x_1\quad x_2\quad x_3]\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 的秩为＿＿＿＿.

二、(10 分)已知 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 是三维列向量. $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}]$ 可逆,并且 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}=5\boldsymbol{A\alpha}-4\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$.

(1)求 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$;

(2)求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|$.

学院________　姓名________　学号________　教师________

三、(13 分)线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=5\\x_1+2x_2+4x_3=7\\x_1+(a+3)x_2+(a^2+3)x_3=3a+10\end{cases}$,其中 a 为常数.

(1)写出该方程组的增广矩阵;

(2)a 为何值时方程组有解?有解时求出所有的解.

四、(13 分)设 V 是由 $\boldsymbol{\alpha}_1=[2,3,1,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,2,-1,1]^{\mathrm{T}}$ 所张成的子空间. $\boldsymbol{\beta}_1=[4,7,-1,3]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=[3,4,3,1]^{\mathrm{T}}$.

(1)求子空间 V 的维数 $\dim(V)$;

(2)判断是否有 $\boldsymbol{\beta}_1\in V$,$\boldsymbol{\beta}_2\in V$ 并说明理由;

(3)$\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2$ 是否是子空间 V 的基?请说明理由. 如果是,求基 $\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的过渡矩阵.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

五、(13 分)三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$,且对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[-2,-3,3]^{\mathrm{T}}$.

(1)求 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_3=2$ 的特征向量;

(2)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 及对角形矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

六、(13 分)设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\2&1&0\\2&1&3\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$.

(1)求 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}$;

(2)求 $\boldsymbol{X}^{2021}$.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

七、(10 分)已知 $n\geqslant 2, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是常数,实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$.

(1)证明二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定或半正定的;

(2)当且仅当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足什么条件时 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 正定?

八、(10 分)证明题

(1)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+9\boldsymbol{\alpha}_2+16\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

(2)设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非零实矩阵$(n>2)$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$,证明 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.

注:本试题中的 $\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 表示方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

期末考试试题(闭卷)

(2021—2022 学年第 2 学期)

一、填空题(每题 3 分,共 18 分)

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为三维列向量,记矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$, $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3]$. 如果 $|\boldsymbol{A}|=1$,则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{2022}-2\boldsymbol{A}^{2021}=$________.

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{bmatrix}$,当参数 $\lambda=$________时矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩最小.

4. 三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,1,2,则行列式 $\left|\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}+\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{I}\right|=$________.

5. 二维平面上的向量 $\boldsymbol{\beta}=(5,6)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,4)^{\mathrm{T}}$ 下的坐标为________.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-ax_2)^2+(x_2-bx_3)^2+(x_3-cx_1)^2$,当且仅当 a,b,c 满足________条件时,该二次型 f 正定.

二、解答题(共 68 分)

1. (12 分)设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=\left(1,\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}8&4\\16&8\end{bmatrix}$,令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$,其中 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 表示列向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 求解方程 $2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}^3\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\gamma}$.

2. (14 分)考虑如下非齐次线性方程组(Ⅰ):$\begin{cases}x_1+x_2-2x_4=-6\\4x_1-x_2-x_3-x_4=1\\3x_1-x_2-x_3=3\end{cases}$,与非齐次方程组

(Ⅱ):$\begin{cases}x_1+ax_2-x_3-x_4=-5\\bx_2-x_3-2x_4=-11\\x_3-2x_4=-c+1\end{cases}$.

(1)求解方程组(Ⅰ),用导出组基础解系表示通解;

(2)方程组(Ⅰ)与方程组(Ⅱ)同解,求参数 a,b,c 的值.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

3.(12 分)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 1 & -7\\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1\\ 2 & -4 & 1 & 8 & -4\end{bmatrix}$.

(1)请给出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组；

(2)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间 $null(\boldsymbol{A})$的维数是多少？请给出零空间 $null(\boldsymbol{A})$的一组最小生成集.

4.(15分)某城市及郊区乡镇共有50万人从事农、工、商工作,假设总人数在若干年内保持稳定不变.经调查表明,在这50万的就业人员中,目前大约有25万人从事农业,有15万人从事工业,有10万人从事商业.在务农的人员中,每年大约有20%改为务工,10%改为经商;在务工的人员中,每年大约有20%改为务农,10%改为经商;在经商的人员中,每年大约有10%改为务农,10%改为务工.

(1)请写出一年后从事农、工、商工作的人数分别是多少.

(2)请预测 n 年后从事各行业的人员总数及发展趋势.

5.(15分)已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(a,b>0)$,且已知二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为1,特征值之积为 -12.

(1)求参数 a,b 的值;

(2)利用正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 将其化成标准形,写出所用的正交变换的矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

学院________　姓名________　学号________　教师________

三、证明题(14 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵,三维列向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关,且 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{A\alpha}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$. 证明:矩阵 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{\alpha}]$可逆.

2. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,且 $r(\boldsymbol{A})=r(0<r<n)$,证明:$\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$,其中 $\boldsymbol{I}_r$ 为 r 阶单位矩阵,符号"~"代表相似.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

四川大学期末考试试题(闭卷)

(2022—2023 学年第 2 学期)A 卷

一、填空题(每题 3 分,共 18 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&4&2\\1&3&9&0\\1&-1&1&2\\1&4&16&3\end{bmatrix}$,$M_{ij}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素的余子式($i,j=1,2,3,4$),则 $-8M_{14}+27M_{24}+M_{34}+64M_{44}=$________.

2. 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(c,0,\cdots,0,c)^{\mathrm{T}}$,其中 $c>0$,$\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+c^{-1}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$,则 $c=$________.

3. 已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$,则矩阵 $\boldsymbol{A}^{2023}\boldsymbol{B}^{2024}$ 位于第二行第三列的元素的值=________.

4. 已知以 $n(n\geqslant 2)$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 仅有两个线性无关的解向量,则矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为________.

5. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}|=0$,$\boldsymbol{I}$ 为三阶单位矩阵,则 $|\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{IE}|=$________.

6. 使二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+tx_2^2+(t-2)x_3^2+2x_1x_2$ 负定的参数 t 的取值范围为________.

二、(12 分)已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,2,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,a,b,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,-2,1)^{\mathrm{T}}$.

1. 求向量组的秩和一个极大线性无关组;

2. $\boldsymbol{\alpha}_3$ 能否由其余向量线性表出?若能,请给出线性表出的表达式.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

三、(10 分)已知方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&2&0\end{bmatrix}$ 满足 $[(|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|^{-1}\boldsymbol{A})^*]^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

四、(12 分)设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&2&2\\a&1&b&c\\d&e&1&f\\g&h&k&1\end{bmatrix}$ 对应特征值 $\lambda=3$ 有三个线性无关的特征向量,其中 a,b,c,d,e,f,g,h,k 为常数.

1. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

2. 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角形矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

五、(12 分)已知非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$有三个线性无关的解.

1. 求 a,b 的值;
2. 求线性方程组的通解.

六、(12 分)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,a,3)^{\mathrm{T}}$ 是三维空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基. $\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在这组基下的坐标为$(b,c,1)^{\mathrm{T}}$.

1. 求 a,b,c 的值;
2. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基,并求 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{M}$.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

七、(12分)设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,1,4. 向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应特征值 $\lambda=1$ 的特征向量. 记 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

1. 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定并说明理由;
2. 用正交变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形,写出所用的正交变换;
3. 求出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$.

八、证明题(每题6分,共12分)

1. 四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$,齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $(1,2,0,0)^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 证明:$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.
2. 设 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-(a+b)\boldsymbol{A}+ab\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$,其中常数 $a\neq b$,$\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵. 证明:$rank(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{I})+rank(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{I})=n$,且 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.