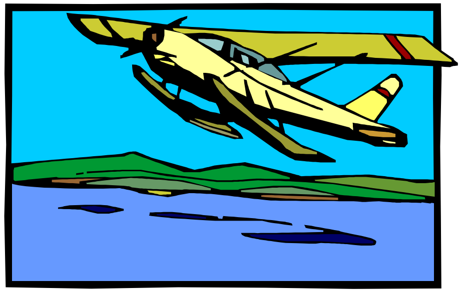
第二章 矩阵代数

2.1 矩阵与向量

一、 向量的定义



如何确定空中飞机的状态?

需要以下6个参数:

机身的仰角 $\phi \quad (-\frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{\pi}{2})$

机翼的转角 $\psi \quad (-\pi < \psi \le \pi)$

机身的水平转角 $\theta \quad (0 \le \theta < 2\pi)$

飞机重心在空间的位置参数 $P(x,y,z)$

所以，确定飞机的状态，需用一个6维数组

$$\boldsymbol{a} = (x, y, z, \phi, \psi, \theta)$$

一、 向量的定义

线性方程组的解是什么形式?

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

上述n元线性方程组的解是一组满足该方程组的n维数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

一、 向量的定义

定义1(向量)由n个数构成的有序数组，记作

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

称为n维行向量；并称数a_i为α的第i个分量$(i = 1,2,\cdots,n)$。若记作

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

则α称为n维列向量。

n维行向量和n维列向量都可称为n维向量$(vector)$, n维向量常用小写黑体希腊字母$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$，$\cdots$表示。

例： $\boldsymbol{\alpha}=(1，3，8)$; $\boldsymbol{\gamma} = (10，23，45，2)$; $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

二、矩阵的定义

定义2(矩阵) 数域P中$s \times n$个数排成的s行n列的数表，

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

称为数域P上的$s \times n$矩阵($matrix$)，通常用一个大写黑体字母如A或$A_{s\times n}$表示，有时也记作$A = (a_{ij})_{s\times n}$，其中$a_{ij}(i = 1,2,\cdots,s; j = 1,2,\cdots,n)$称为矩阵$A$的第$i$行第$j$列元素($entry$)。

二、矩阵的定义

几种特殊矩阵

（1）当$s=n$时，称

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为n阶矩阵或n阶**方阵**，也可记作A_n，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$为$A$的主对角线上的元素。

（2）只有一行的矩阵$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为**行矩阵**(或**行向量**)；

只有一列的矩阵$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$称为**列矩阵**(或**列向量**)。

二、矩阵的定义

（3）形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵称为对角矩阵(或对角阵)。

不全为0

记作$A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$。

特别的， 对角阵 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 称为单位矩阵(或单位阵)。

全为1

对角阵 $\lambda\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$ 称为数量矩阵。

全为λ

二、矩阵的定义

（4）所有元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，$m\times n$阶零矩阵记作$\mathbf{0}_{m\times n}$或$\mathbf{0}$。

注：不同阶数的零矩阵是不相等的。

例如：$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\neq(0\quad 0\quad 0\quad 0).$

（5）形如$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{pmatrix}$的方阵称为**上三角矩阵**；

形如 的方阵称为**下三角矩阵**；

注：上三角矩阵与下三角矩阵统称为**三角阵**，记作tria(A)。

二、矩阵的与向量的关系

1. 向量是一种特殊的矩阵

- n维行向量可视为$1 \times n$阶矩阵；
- n维列向量可视为$n \times 1$阶矩阵；

2. 矩阵可由向量表示

- 矩阵$A = (a_{ij})_{s\times n}$的每一行都是n维行向量，记$\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$表示$A$的第$i$个行向量，则：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_s \end{pmatrix},$$

- 矩阵$A = (a_{ij})_{s\times n}$的每一列都是n维列向量，记$\boldsymbol{\beta}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$表示$A$的第$i$个列向量，则$A = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$。