2020-2021 年春《线性代数》（理工）期中试题参考答案

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. $\underline{\begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}}$；　2. $\underline{6}$；　3. $\underline{\dfrac{81}{32}}$；　4. $\underline{1\text{ 或}-4}$；　5. $\underline{0}$；　6. $\underline{r \le n}$.

二、（10 分）将矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 表示成有限个初等矩阵的乘积.

解：$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2-3r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\times r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

即 $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}A=E_2,$$

故 $$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

三、（12 分）矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

（1）计算 $f(A)=A^3+A+2E$，其中 E 为 4 阶单位矩阵；

（2）用 A^* 表示 A 的伴随矩阵，计算 $\left(\left(A^{-1}\right)^T\right)^*$.

解：（1）$f(A)=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$.

（2）$|A|=-2$，$\left(\left(A^{-1}\right)^T\right)^*=\dfrac{1}{|A|}A^T=-\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

四、（12 分）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，且矩阵 X 满足 $AXC-BXC=AX-BX+E$，其中 E 是 3 阶单位矩阵，求 X .

解：化简矩阵方程，得 $(A-B)X(C-E)=E$，

故 $X=(A-B)^{-1}(C-E)^{-1}=\left[(C-E)(A-B)\right]^{-1}$

$$=\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

五、（12 分）已知 $\alpha_1=(1,3,0,2)^T,\alpha_2=(2,5,1,3)^T,\alpha_3=(0,1,-1,a)^T,\beta=(3,7,b,4)^T$. 问：

（1）a,b 为何值时，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？

（2）a,b 为何值时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表出方式唯一？给出其表示式.

解：考虑 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，

$$\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta\right]=\begin{bmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&7\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{bmatrix},$$

（1）当 $b\neq 2$ 时，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出；

（2）当 $b=2,a\neq 1$ 时，$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 有唯一解 $(-1,2,0)^T$，即 $\beta=-\alpha_1+2\alpha_2$.

六、（15 分）判断下列结论的正确性，若对请证明之，否则请举出一个反例.

（1）若矩阵 A 满足 $A^2=0$，则 A 为零矩阵.

（2）设 A 为 n 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}$.

（3）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 4 维列向量，若 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 也线性相关.

解：（1）错，$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$.

（2）对。

证明：若 A 可逆，$|A|\neq 0$，由 $AA^*=|A|E$ 两端同时取行列式，化简可得结论；

若 A 不可逆，则 $|A|=0$，$AA^*=0$，此时若 A^* 可逆，则 $A=0$，可知 $A^*=0$，矛盾，

故 A^* 不可逆，有 $|A^*|=0$，结论成立。

（3）错，任取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关均可。

七、(15 分) A 为 4 阶矩阵，α 为 4 维列向量.

（1）若 $\alpha=(1,1,1,1)^T$， $B=A+\alpha\alpha^T$，求 $(A-B)^{2021}$；

（2）若 a_1,a_2,a_3,a_4 为非零实数， $A=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix}$， $\alpha=(a_1,a_2,a_3,a_4)^T$，求

$|A+\alpha\alpha^T|$；

（3）若 A 为反对称矩阵，且 $|A|=1$， $\alpha=(1,1,1,1)^T$，证明： $|A+\alpha\alpha^T|=1$.

解:（1）$(A-B)^{2021}=(-\alpha\alpha^T)^{2021}=-\alpha(\alpha^T\alpha)^{2020}\alpha^T=-4^{2020}\alpha\alpha^T=-4^{2020}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

（2）$|A+\alpha\alpha^T|=\begin{vmatrix} a_1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 \\ a_2a_1 & a_2+a_2^2 & a_2a_3 & a_2a_4 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3+a_3^2 & a_3a_4 \\ a_4a_1 & a_4a_2 & a_4a_3 & a_4+a_4^2 \end{vmatrix}$

$$=a_1a_2a_3a_4\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1+a_4 \end{vmatrix}=a_1a_2a_3a_4(1+a_1+a_2+a_3+a_4).$$

（3）设 $A=(a_{ij})$，将 $|A+\alpha\alpha^T|=\begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12}+1 & a_{13}+1 & a_{14}+1 \\ a_{21}+1 & a_{22}+1 & a_{23}+1 & a_{24}+1 \\ a_{31}+1 & a_{32}+1 & a_{33}+1 & a_{34}+1 \\ a_{41}+1 & a_{42}+1 & a_{43}+1 & a_{44}+1 \end{vmatrix}$ 逐列拆开，化简得

$$\left|A+\alpha\alpha^T\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 1 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 1 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 1 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & 1 & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= |A| + \sum_{j=1}^{4}(A_{1j} + A_{2j} + A_{3j} + A_{4j}) = |A| + \sum_{i,j=1}^{4} A_{ij}$$，（A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式）

由 $|A| = 1$ 知 $A^* = A^{-1}$，有 $\left(A^*\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1} = -A^*$，

故 A^* 为反对称矩阵，$\sum_{i,j=1}^{4} A_{ij} = 0$，

$\therefore$ $\left|A+\alpha\alpha^T\right| = |A| = 1$.