2023–2024学年线性代数(理工)期中考试参考答案

一 填空题 (每题4分，共24分)

1． 240

2． $\frac{1}{2}$ **or**-1

3． $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

4．k^{n-1-n^2}

5． $2^{2024}\begin{bmatrix} \cos(2024\theta) & -\sin(2024\theta) \\ \sin(2024\theta) & \cos(2024\theta) \end{bmatrix}$

6．$a+b=1$

二 (12分) 解 $A=[2\alpha_1,3\alpha_2,\beta]$,$B=[3\alpha_2,\alpha_1,2\gamma]$,

$|A|=|\,[2\alpha_1,3\alpha_2,\beta]\,|=6|[\alpha_1,\alpha_2,\beta]|$,**所以** $|[\alpha_1,\alpha_2,\beta]|=\frac{a}{3}$.

$|B|=|\,[3\alpha_2,\alpha_1,2\gamma]\,|=-6|[\alpha_1,\alpha_2,\gamma]|$,**所以**$|[\alpha_1,\alpha_2,\gamma]|=-\frac{b}{6}$ **(6分)**

$2A-B=[4\alpha_1-3\alpha_2,6\alpha_2-\alpha_1,2\beta-2\gamma]$

$|2A-B|=|\,[4\alpha_1-3\alpha_2,6\alpha_2-\alpha_1,2\beta-2\gamma]\,|$

$=21|[\alpha_1,\alpha_2,2\beta-2\gamma]|$

$=42|[\alpha_1,\alpha_2,\beta]|-42|[\alpha_1,\alpha_2,\gamma]|$

$=14a+7b$ **(6分)**

三 (12分) 解将向量组$\alpha_1=(-1,1,0,0)^T,\alpha_2=(-1,2,-1,1)^T,\alpha_4=(1,-3,2,3)^T,\alpha_3=(0,a,b,-1)^T$,**构成一个矩阵A，并用初等行变换将其化为阶梯形。**

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & a+b \end{bmatrix} \xrightarrow{a+b=0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1-4a}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3a-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1-a}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ **(6分)**

当$a+b=0$**时，向量组的秩为3；一个极大无关组为**$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

α_3**可由该极大无关组唯一性性表示.**

$\alpha_3=\frac{1-4a}{5}\alpha_1+\frac{3a-2}{5}\alpha_2+\frac{-1-a}{5}\alpha_4$

当$a+b\neq 0$**时，向量组的秩为4,极大无关组为其自身,**α_3**不能由其余向量线性表出。** **(6分)**

四 (12分)解因n阶方阵$H=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$,

记$H=[h_{ij}^1]$则H的元满足$h_{i,i+1}^1=1, i=1,2,\cdots,n-1$,其余元均为0.

通过矩阵乘法计算出$H^2=[h_{ij}^2], h_{i,i+2}^2=1, i=1,2,\cdots,n-2$,其余元均为0.

$H^m=[h_{ij}^m], h_{i,i+m}^m=1$,其余元均为0. 以此类推$H^n=O$.

再由矩阵的加法可得: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}=I+H+H^2+\cdots+H^{n-1}$ **(6分)**

因$H^n=O$,所以$I-H^n=I$,从而$(I-H)(I+H+H^2+\cdots+H^{n-1})=I$,也即$(I-H)A=I$.

在矩阵方程$AX=I+2H+3H^2+\cdots+nH^{n-1}$两端左侧乘以$I-H$,则有$X=(I-H)(I+2H+3H^2+\cdots+nH^{n-1})=A$. **(6分)**

注:如果直接用求A^{-1}方法求解出X,结论正确6分。

五 (14分) 解写出非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=1 \\ x_2+2x_3+3x_4=2 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+bx_4=4 \end{cases}$的增广矩阵,然后用初等行变换将其化为阶梯形.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & b & 4 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{a=0,b\neq 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{4-b}{b-2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2b-7}{b-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{b-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(6分)

1.当$b=2$时,方程组无解;当$b\neq 2, a\neq 0$时,方程组无解;对任意的a,b取值,都不存在唯一解的情况;当$a=0, b\neq 2$时,方程组有无穷多解; **(6分)**

2.其全部解为$(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(\frac{4-b}{b-2}+k, \frac{2b-7}{b-2}-2k, k, \frac{1}{b-2})^T, k\in R$. **(2分)**

六 (14分) 解将向量组$\alpha_1=(1,1,4)^T, \alpha_2=(1,0,4)^T, \alpha_3=(1,2,a)^T, \beta=(1,1,1)^T$按列构成矩阵$A$,用初等行变换将其化为行最简形.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & a & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a-4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{a-4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{a-4} \end{bmatrix}$$ **(4分)**

$\frac{a+2}{a-4}=b, \frac{-3}{a-4}=c, \frac{-3}{a-4}=1$

解得$a=c=1, b=-1$ **(2分)**

因$|[\alpha_2,\alpha_3,\beta]|=-3\neq 0$,所以$\alpha_2,\alpha_3,\beta$线性无关，从而构成$R^3$的一组基. **(2分)**

将向量$\alpha_2,\alpha_3,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$按列构成矩阵$B$，将$B$用初等行变换化为行最简形。

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&2&1&1&0&2\\4&1&1&4&4&1\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&-1&0&0\end{bmatrix}\qquad \textbf{(4分)}$$

所以由基α_2,α_3,β到基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵$M=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix}$. **(2分)**

注：根据过渡矩阵的定义，此题可以求出α_1在基α_2,α_3,β下的坐标$[1,1,-1]^T$,再利用$\alpha_2=1\alpha_2+0\alpha_3+0\beta$,$\alpha_3=0\alpha_2+1\alpha_3+0\beta$,得到$\alpha_2,\alpha_3$在基$\alpha_2,\alpha_3,\beta$下的坐标分别为$[1,0,0]$,$[0,1,0]^T$,从而这三个坐标按列写构成由基$\alpha_2,\alpha_3,\beta$到基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵$M=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix}$.

七 证明题(12分)

1.证：已知$n(n>4)$维向量$\beta_i=\alpha_i+k\alpha_4,i=1,2,3$.考虑$t_1\beta_1+t_2\beta_2+t_3\beta_3=0$

整理为$t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+t_3\alpha_3+k(t_1+t_2+t_3)\alpha_4=0$. **(3分)**

由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，得$t_1=t_2=t_3=0$.

所以对任意的数k，β_1,β_2,β_3都线性无关。 **(3分)**

2.证：已知$n(n>4)$维向量$\beta_i=\alpha_i+i\lambda_i\xi,i=1,2,3,4$.考虑$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4=0$.

整理得$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4+(x_1\lambda_1+2x_2\lambda_2+3x_3\lambda_3+4x_4\lambda_4)\xi=0$.

已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$满足$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4=0$，取$x_1=1,x_2=2,x_3=3,x_4=4$，

得$(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3+16\lambda_4)\xi=0$. **(4分)**

要对任意的n维向量ξ,向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$总线性相关,只需$\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3+16\lambda_4=0$.

因此当不全为零的数$\lambda_i(i=1,2,3,4)$满足$\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3+16\lambda_4=0$时，对任意的$n$维向量$\xi$,向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$总线性相关. **(2分)**

注：若对已知向量组$(I):\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩分情况讨论：当$(I)$的秩≤2时，对任意的$n$维向量$\xi$和任意的数$\lambda_i,i=1,2,3,4$,向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$总线性相关.（2分）当$(I)$的秩=3时，要对任意的$n$维向量$\xi$,向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$总线性相关,只需$\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3+16\lambda_4=0$.（4分）不分秩的情况讨论不扣分。