

第三章 行列式

第二节 行列式的重要性质





主要内容

一、行列式的性质

二、初等行变换对方阵行列式的作用

三、行列式展开定理

四、可逆矩阵判别定理

**性质1**

设 A 为 n 阶方阵, 则 $|A^T| = |A|$.

证明:

一阶方阵是对称的, 则 $|A^T| = |A|$.

假设结论对 k 阶方阵都成立.

对 $k+1$ 阶方阵 A , 按第一行展开.

$$|A| = \sum_{j=1}^{k+1} a_{1j} (-1)^{1+j} M_{1j}$$

其中 M_{1j} 为元素 a_{1j} 的余子式, 为 k 阶方阵的行列式.

据归纳假设, $M_{1j}^T = M_{1j}$.

$$|A| = \sum_{j=1}^{k+1} a_{1j} (-1)^{1+j} M_{1j}^T = |A^T|.$$

说明

行列式中行与列具有同等的地位, 因此行列式的性质凡是对行成立的, 对列也同样成立.



性质2

若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和.

即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



初等行变换对方阵行列式的作用

行运算I对换变换

性质3

行列式交换两行，行列式反号。

设A为二阶方阵, 且对换变换的初等阵 $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$|PA| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -|A| = |P||A|$$



假设该结论对 $n-1$ 阶行列式成立, 则当 A 是 n 阶行列式时:

$$\begin{aligned}
 |P_{ij}A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{第 } i \text{ 行} \rightarrow a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{第 } j \text{ 行} \rightarrow a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \cdots & & \\ a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & & \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \end{vmatrix} + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} \cdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{j(n-1)} \\ \cdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{i(n-1)} \\ \cdots & & \end{vmatrix} \\
 &= (-1)a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \cdots & & \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \\ a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & & \end{vmatrix} + \cdots + (-1)a_{1n}(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} \cdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{i(n-1)} \\ \cdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{j(n-1)} \\ \cdots & & \end{vmatrix} \\
 &= (-1)a_{11}(-1)^{1+1} M_{11} + \cdots + (-1)a_{1n}(-1)^{1+n} M_{1n} \\
 &= -(a_{11}A_{11} + \cdots + a_{1n}A_{1n}) = -|A|
 \end{aligned}$$



所以，由数学归纳法可知，当 $n \geq 2$ 时，交换行列式两行，行列式变号。

$$|P_{ij}A| = -|A|$$

特别地， $|P_{ij}| = |P_{ij}E| = -|E| = -1$

所以，对任意对换变换对应的初等阵 P ，

$$|PA| = -|A| = |P||A|$$



例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

推论1

如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

证明 互换相同的两行，有 $D = -D$,
 $\therefore D = 0$.



行运算II数乘变换

性质4 行列式的某一行中所有的元素都乘以同一数 k ，等于用数 k 乘此行列式.

设 P 为单位阵的第 i 行乘以一非零常数 k 得到的初等阵. 将 $|PA|$ 按第 i 行展开, 则

$$\begin{aligned}|PA| &= ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in} \\ &= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) \\ &= k|A|\end{aligned}$$

特别地, $|P| = |PE| = k|E| = k$

对任意数乘变换对应的初等阵 P , $|PA| = k|A| = |P||A|$.



推论1 行列式的某一行（列）中所有元素为零，则该行列式等于零.

推论2 设 A 为 n 阶方阵， k 为数，则 $|kA| = k^n |A|$.

$$\left| k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质5

行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

证明

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$



行列式按行（列）展开定理(完整版)

行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = \underline{a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

行列式D按第 **i** 行展开

或 $D = \underline{a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$

行列式D按第 **j** 列展开

推论

行列式D中，某一行（列）元素与另一行对应元素的代数余子式乘积之和为**零**。

即当 **$i \neq j$** $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$



$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j.$$

证 把行列式 $D = \det(a_{ij})$ 按第 j 行展开, 有

$$a_{j1}A_{j1} + \cdots + a_{jn}A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当 $i \neq j$ 时, $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad (i \neq j).$



行列式按行（列）展开定理(完整版)

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = D \delta_{ij} = \begin{cases} D, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = D \delta_{ij} = \begin{cases} D, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j; \end{cases}$$

$$\text{其中 } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$



课堂练习

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

请将

1. $-2M_{41} + 3M_{42} - 4M_{43} + 5M_{44}$

2. $2M_{13} - 3M_{23} + M_{33} - 5M_{43}$

3. $A_{21} + 2A_{22} + 3A_{23} + 4A_{24}$

分别用四阶行列式表示, 并求值.



单选题

已知某4阶行列式的第2行元素依次是 $2, -1, m, 6$, 第3行元素的余子式的值依次是 $3, 9, -3, -1$, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$

A

3

B

-3

C

7

D

-7



行运算III倍加变换

性质6

把行列式的某一行的各元素乘以同一数然后加到另一行对应的元素上去，行列式不变。

设 P 为单位阵的第 i 行乘以一非零常数 k 加到第 j 行得到的初等阵。

将 $|PA|$ 按照第 j 行展开, 并据行列式展开定理得

$$\begin{aligned}
 |PA| &= (a_{j1} + ka_{i1})A_{j1} + (a_{j2} + ka_{i2})A_{j2} + \cdots + (a_{jn} + ka_{in})A_{jn} \\
 &= (a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn}) + k(a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}) \\
 &= |A| + k \cdot 0 = |A|
 \end{aligned}$$



注意到初等阵 P 为三角形的,其主对角线上元为 1.

$$\therefore |P|=1$$

\therefore 对任意倍加变换对应的初等阵 P , $|PA|=|A|=|P||A|$

初等行变换对方阵行列式的作用

对任意初等变换对应的初等阵 P , $|PA|=|P||A|$

其中 $|P| = \begin{cases} -1 & P \text{ 为对换变换初等阵} \\ k \neq 0 & P \text{ 为数乘变换初等阵} \\ 1 & P \text{ 为倍加变换初等阵} \end{cases}$



方阵可逆的判别定理

n 阶方阵 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$.

证明:

方阵 A 可经有限次初等行变换化为阶梯形 U ,
存在初等阵 P_1, P_2, \dots, P_k , 使得

$$U = P_k P_{k-1} \cdots P_1 A$$

由于初等阵的行列式不为零, $\therefore |A| \neq 0 \Leftrightarrow |U| \neq 0$

如果 A 不可逆, A 的主元列数小于列数, U 有一零行,

$$|U| = 0 \Rightarrow |A| = 0.$$

如果 A 可逆, A 的主元列数等于列数, U 的主对角线上元都不为零,

$$|U| \neq 0, \text{ 从而 } |A| \neq 0.$$

$$\therefore A \text{ 可逆 } \Leftrightarrow |A| \neq 0.$$



方阵乘积的行列式

设 A, B 均为 n 阶方阵, $|AB| = |A||B|$.

证明

若 B 不可逆, 等价于方程组 $BX = 0$ 有无穷多解.
而其解是方程组 $ABX = 0$ 的解, 所以 AB 不可逆.

$$\therefore |AB| = 0 = |A||B|.$$

若 B 可逆, 则 $B = P_k P_{k-1} \cdots P_1$.

$$\therefore |AB| = |AP_k P_{k-1} \cdots P_1| = |A||P_k||P_{k-1}| \cdots |P_1| = |A||B|.$$



推论

可逆矩阵的判别方法

设 A 、 B 为同阶方阵，若 $AB = E$ ，则方阵 A 和 B 都可逆，
且 $A^{-1} = B$ ， $B^{-1} = A$

可逆方阵逆的行列式

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$



n 阶方阵行列式的运算规律

(A B 是 n 阶方阵矩阵, $\lambda \in R$)

$$(1) \quad |A^T| = |A|$$

$$(2) \quad |\lambda A| = \lambda^n |A|$$

$$(3) \quad |AB| = |A||B| = |BA|$$

$$(4) \quad |A^{-1}| = |A|^{-1}$$

$$(5) \quad |A^n| = |A|^n$$

注 $|A + B| \neq |A| + |B|$



本节内容回顾

一、行列式的性质

性质1 设 A 为 n 阶方阵, 则 $|A^T| = |A|$.

性质2 若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和.

说明 行列式中行与列具有同等的地位, 因此行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

即
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**性质3**

行列式交换两行(列)，行列式反号。

推论1

如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零。

性质4

行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k ，等于用数 k 乘此行列式。

推论1

行列式的某一行（列）中所有元素为零，则该行列式等于零。

推论2

设 A 为 n 阶方阵， k 为数，则 $|kA| = k^n |A|$ 。

性质5

行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零。

性质6

把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式不变。



二、初等行变换对方阵行列式的作用

对任意初等变换对应的初等阵 P , $|PA| = |P||A|$

其中 $|P| = \begin{cases} -1 & P \text{ 为对换变换初等阵} \\ k \neq 0 & P \text{ 为数乘变换初等阵} \\ 1 & P \text{ 为倍加变换初等阵} \end{cases}$



三、行列式按行（列）展开定理(完整版)

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = D \delta_{ij} = \begin{cases} D, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = D \delta_{ij} = \begin{cases} D, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j; \end{cases}$$

$$\text{其中 } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$



四、可逆矩阵的常用判别方法

1、充要条件

n 阶方阵 A 可逆当且仅当 A 的主元列数等于 n 。

2、判别定理

n 阶方阵 A 可逆当且仅当 $|A| \neq 0$

3、推论

设 A 、 B 为同阶方阵，若 $AB = E$ ，则方阵 A 和 B 都可逆，
且 $A^{-1} = B$ ， $B^{-1} = A$



五、方阵乘积的行列式

设 A, B 均为 n 阶方阵, $|AB| = |A||B|$.

六、可逆方阵逆的行列式

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$

n 阶方阵行列式的运算规律

(A, B 是 n 阶方阵矩阵, $\lambda \in R$)

$$(1) \quad |A^T| = |A| \qquad (2) \quad |\lambda A| = \lambda^n |A|$$

$$(3) \quad |AB| = |A||B| = |BA| \qquad (4) \quad |A^{-1}| = |A|^{-1}$$

$$(5) \quad |A^n| = |A|^n$$