2021-2022 第二学期线性代数（理工）期中考试答案

一、填空题

1、-3；　2、2；　3、$\dfrac{1}{4}$；　4、-1；　5、4；　6、5

二、由 $XA+2B=AB+2X$，得 $X(A-2E)=(A-2E)B$, $X=(A-2E)B(A-2E)^{-1}$,

$$X^{2023}=[(A-2E)B(A-2E)^{-1}]^{2023}=(A-2E)B^{2023}(A-2E)^{-1}$$
$$=(A-2E)B(A-2E)^{-1}$$

而 $A-2E=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$，于是

$$X^{2023}=(A-2E)B(A-2E)^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\6&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

三、$A=\alpha^{\mathrm{T}}\beta=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&2&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}$

(1) $A^n=(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)^n=\alpha^{\mathrm{T}}(\beta\alpha^{\mathrm{T}})^{n-1}\beta=(\beta\alpha^{\mathrm{T}})^{n-1}\alpha^{\mathrm{T}}\beta=2^{n-1}A=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&2&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}$

(2) $f(A)=A^2+A-3E=2A+A-3E=3(A-E)=\begin{pmatrix}0&3&-3\\6&3&-6\\3&3&-6\end{pmatrix}$

四、原式第 2, 3,…, n 行减去第 1 行，得

$$\text{原式}=\begin{vmatrix}x_1-m&x_2&x_3&\dots&x_n\\m&-m&0&\dots&0\\m&0&-m&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\m&0&0&\cdots&-m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i-m&x_2&x_3&\dots&x_n\\0&-m&0&\dots&0\\0&0&-m&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&-m\end{vmatrix}$$

(第 2, 3,…, n 列加到第 1 列)

$$=(-m)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)$$

五、$(\alpha_1^{\mathrm{T}}, \alpha_2^{\mathrm{T}}, \alpha_3^{\mathrm{T}}, \alpha_4^{\mathrm{T}}, \alpha_5^{\mathrm{T}})$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & -2 & 9 \\ 3 & 3 & -3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$的秩为 3, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$是它的一个极大无关组，且

$$\alpha_3 = -\frac{1}{3}\alpha_1 - \frac{2}{3}\alpha_2, \quad \alpha_5 = \frac{5}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 - 2\alpha_4$$

六、$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

当$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq 2$时，方程组有唯一解.

当$\lambda = 1$时，增广矩阵可通过行变换变为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}，方程组无解$$

当$\lambda = 2$时，增广矩阵可通过行变换变为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，方程组有无穷多解,$$

其解为 $X = \begin{pmatrix} -3x_3+3 \\ x_3-1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 x_3 可任意取值.

七、“$\Rightarrow$”：由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$线性相关，知存在不全为零的 $k_1, k_2, \ldots, k_r, c_1, c_2, \ldots, c_s$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r + c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \ldots + c_s\beta_s = 0 \tag{1}$$

下证在(1)式中 $k_1, k_2, \ldots, k_r$ 也不全为零. 若不然, $k_1, k_2, \ldots, k_r$ 全为零，则 $c_1, c_2, \ldots, c_s$不全为零，且

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \ldots + c_s\beta_s = 0$$

这与$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$是两个线性无关矛盾. 于是 $k_1, k_2, \ldots, k_r$不全为零. 令

$$\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r$$

由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性无关，得$\gamma \neq 0$. 又由(1)式,

$$\gamma = -c_1\beta_1 - c_2\beta_2 - \ldots - c_s\beta_s$$

即非零向量γ既可以由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性表示，又可由$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$线性表示.

“$\Leftarrow$”: 不妨设非零向量γ由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$和$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$线性表示的表示方式分别为

$$\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \ldots + c_s\beta_s \tag{2}$$

由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$和$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$均线性无关, 得 $k_1, k_2, \ldots, k_r$不全为零, $c_1, c_2, \ldots, c_s$不全为零. 于是由(2)式得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r - c_1\beta_1 - c_2\beta_2 - \ldots - c_s\beta_s = 0$$

其中 $k_1, k_2, \ldots, k_r, -c_1, -c_2, \ldots, -c_s$不全为零. 即向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$线性相关.