四川大学期中考试试题（闭卷）

（2020——2021 学年第 2 学期）　　A 卷

课程号：201080030　课序号：　课程名称：线性代数（理工）　任课教师：　成绩：

适用专业年级：　学生人数：　印题份数：　学号：　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）.

1. 设 A 为 3 阶方阵，$x_1=(0,0,1)^T, x_2=(1,0,0)^T, x_3=(0,1,0)^T$ 分别是 $Ax_i=b_i$ 的解，其中 $b_1=(1,2,3)^T, b_2=(4,5,6)^T, b_3=(7,8,9)^T$，则 $A=$ ________.

2. 考虑元素取值为 0 或 1 的 2 阶方阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{2\times 2}$，其中 $a_{ij}=0$ 或 1，$i,j=1,2$．这样的可逆矩阵共有________个.

3. 设 A 为 4 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，$|A^*|=8$，则 $\left|(2A)^{-1}-A^*\right|=$________.

4. 若线性方程组 $\begin{cases} x_2+x_3=kx_1 \\ x_1-x_3=kx_2 \\ 2x_1-x_2=-x_3 \end{cases}$ 有非零解，则 $k=$ ________.

5. 若 $\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 2 & 0 \\ z & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=6$，则 $x+y+z=$________.

6. 设 $\alpha_i=\left(1,\lambda_i,\lambda_i^2,\cdots,\lambda_i^{n-1}\right)$，$i=1,2,\cdots,r$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是互不相同的 r 个数．则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关当且仅当 r 和 n 满足条件________.

二、（10 分）将矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 表示成有限个初等矩阵的乘积.

试卷编号：201-25

三、（12 分）矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$.

（1）计算 $f(A)=A^3+A+2E$，其中 E 为 4 阶单位矩阵；

（2）用 A^* 表示 A 的伴随矩阵，计算 $\left(\left(A^{-1}\right)^T\right)^*$.

四、（12 分）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，且矩阵 X 满足

$$AXC-BXC=AX-BX+E,$$

其中 E 是 3 阶单位矩阵，求 X.

五、（12 分）已知 $\alpha_1=(1,3,0,2)^T,\alpha_2=(2,5,1,3)^T,\alpha_3=(0,1,-1,a)^T$，$\beta=(3,7,b,4)^T$. 问：

（1）a,b 为何值时，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？

（2）a,b 为何值时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表出方式唯一？并给出其表示式.

六、（15 分）判断下列结论的正确性，若对请证明之，否则请举出一个反例.

（1）若矩阵 A 满足 $A^2=0$，则 A 为零矩阵.

（2）设 A 为 n 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$.

（3）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 4 维列向量，若 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 也线性相关.

七、（15 分）A 为 4 阶矩阵，α 为 4 维列向量.

（1）若 $\alpha=(1,1,1,1)^T$，$B=A+\alpha\alpha^T$，求 $(A-B)^{2021}$；

（2）若 a_1,a_2,a_3,a_4 为非零实数，$A=\begin{bmatrix}a_1&0&0&0\\0&a_2&0&0\\0&0&a_3&0\\0&0&0&a_4\end{bmatrix}$，$\alpha=(a_1,a_2,a_3,a_4)^T$，求 $\left|A+\alpha\alpha^T\right|$；

（3）若 A 为反对称矩阵，且 $|A|=1$，$\alpha=(1,1,1,1)^T$，证明：$\left|A+\alpha\alpha^T\right|=1$.