四川大学

期末复习

知识点总结

第一章 线性方程组

第四章会重新探讨线性方程组，所以这章的内容放在第四章复习。

第二章 矩阵代数

- 矩阵的定义
- 矩阵的线性运算
- 矩阵的乘法运算
- 矩阵的转置
- 矩阵的分块
- 矩阵的逆运算与矩阵的初等变换

矩阵乘法的运算规律

与数的乘法不同	与数的乘法类似
(1)两个非零矩阵乘积可能为O。 (2)交换律不成立 $AB \neq BA$ (3)消去律不成立 $AC = AD$, 且 $A \neq O \not\Rightarrow C = D$	(1) 乘法结合律 $(AB)C = A(BC)$ (2) 数乘和乘法的结合律和交换律 $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ (其中λ是数) (3) 乘法对加法的分配律 左分配律：$A(B+C) = AB + AC$ 右分配律：$(B+C)A = BA + CA$ (4) 零矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数0，即 $0_{s\times m} A_{m\times n} = 0_{s\times n}$ $A_{m\times n} 0_{n\times t} = 0_{m\times t}$ (5) 单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数1，即 $E_m A_{m\times n} = A_{m\times n} E_n = A$ (6) 矩阵的幂 若A是n阶方阵，定义 $A^0 = E_n$, $A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k}$ 显然 $A^k A^l = A^{k+l}$, $(A^k)^l = A^{kl}$

转置矩阵的运算性质

对称阵: $A = -A^T$

反对称阵: $A = -A^T$

(1) $(A^T)^T = A$;

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

性质4的推广 $(A_1 A_2 \cdots A_r)^T = A_r^T \cdots A_2^T A_1^T$

分块矩阵之间与一般矩阵之间的运算性质类似

(1)加法　同型矩阵,采用相同的分块法

(2)数乘　数k乘矩阵A,需k乘A的每个子块

(3)乘法　若A与B相乘,需A的列的划分与B的行划分相一致

(4)转置　不仅形式上进行转置，每一个子块也要进行转置

矩阵的逆运算与矩阵的初等变换

- 可逆矩阵的定义
- 可逆矩阵的判别
- 逆矩阵的求法
- 克拉默法则

逆矩阵的定义

对矩阵 A，若存在矩阵 B，使得

$$AB = BA = E$$

则称矩阵 A 是可逆的，且矩阵 B 称为 A 的逆矩阵，记作 $B = A^{-1}$

说明 1. 若A 是可逆矩阵，则 A 必为方阵.

2. 若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是唯一的.

矩阵可逆的判别

判别定理 n阶方阵A可逆当且仅当 $|A| \neq 0$

推论： 设A、B为同阶方阵，若$AB = E$，
则方阵A和B都可逆，
且$A^{-1} = B$，$B^{-1} = A$

即： 判断B是否为A的逆矩阵，
只需验证$AB = E$和$BA = E$中的一个即可

逆矩阵的求法

逆矩阵的求法一：定义法

逆矩阵的求法二：伴随矩阵法

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*,\ \text{其中}A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中A^*为A的伴随矩阵，

A_{ij}为行列式$|A|$中元素a_{ij}的代数余子式.

逆矩阵的求法三：初等变换法

用矩阵的初等变换求逆矩阵

用矩阵的初等行变换求逆矩阵方法

$$(A\ E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\ \ A^{-1})$$

特别地，$$(A\ B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\ \ A^{-1}B)$$

用矩阵的初等列变换求逆矩阵方法

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

特别地，$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$$

注：

1. A 与 E 每一次变换必须同步;

2. 求逆时,自始至终每一步都只能用初等行（列）变换，千万不能夹杂任何初等列（行）变换.

3. 若作初等行变换时,出现全行为0，则矩阵的行列式等于0。结论：矩阵不可逆!

初等矩阵是可逆的，逆矩阵仍为初等矩阵。

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$,则 A可逆$\Leftrightarrow$

A可以经过一系列的初等行变换化为单位阵E_n

若A可逆，则A可表示为若干初等矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ & & & a_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & a_3^{-1} & \\ & & & a_4^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & a_3 & & \\ a_4 & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & a_4^{-1} \\ & & a_3^{-1} & \\ & a_2^{-1} & & \\ a_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

可逆矩阵运算性质：

若A 可逆

$$
\begin{cases}
\left(A^{-1}\right)^{-1} = A \\
(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1} \\
\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T} \\
\left(A^{*}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{*} = \dfrac{1}{|A|}A \\
\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \\
(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}
\end{cases}
$$

伴随矩阵运算性质：

设A为$n(n\geq 2)$阶方阵，$\left|A^*\right| = |A|^{n-1}$

若A可逆，$\left(A^*\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^* = \dfrac{1}{|A|}A$

若A可逆，$\left(A^*\right)^T = \left(A^T\right)^*$.

矩阵方程	解
$AX = B$	$X = A^{-1}B$
$XA = B$	$X = BA^{-1}$
$AXB = C$	$X = A^{-1}CB^{-1}$

当A,B都可逆时

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & & \\ & B^{-1} & \\ & & C^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

第三章 行列式

- n阶行列式的定义
- 行列式的性质
- 行列式的计算：化三角形法和降阶法
- n阶矩阵乘积的行列式

n阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}.$$

$$|A| = \begin{cases} a_{11} & \text{当} n = 1 \text{时} \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & \text{当} n > 1 \text{时} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

行列式性质总结

性质1 行列式与它的转置行列式相等.$|A^T| = |A|$

性质2 互换行列式的两行（列）,行列式变号.

性质3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数k,等于用数k乘此行列式.

性质4 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

性质5 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和，则它等于相应的两个行列式之和。

性质6 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

计算行列式常用方法： $\boxed{\text{化三角形法}}$

利用运算 $r_i + kr_j$ 把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i + kr_j} \cdots\cdots = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

例4 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$

$\boxed{\text{箭形行列式}}$

解

$$D \xlongequal[\substack{c_1+(-\frac{1}{3}c_3) \\ \cdots\cdots \\ c_1+(-\frac{1}{n}c_n)}]{c_1+(-\frac{1}{2}c_2)} \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

行列式按行（列）展开定理

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j; \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j. \end{cases}$

行列式展开定理重要意义在于：n阶行列式可降为低阶行列式来计算其值——降阶法

范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j).\qquad(1)$$

例如

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=abc\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

方阵的乘积的行列式定理——引理

$$D=\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}=|A||B|$$

$$D=\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix}=(-1)^{nm}|A||B|$$

方阵的乘积的行列式定理

$$|AB| = |A||B|$$

n阶方阵行列式的运算规律

（A B是n阶方阵矩阵，$\lambda \in R$）

（1）$|A^T| = |A|$

（2）$|\lambda A| = \lambda^n |A|$

（3）$|AB| = |A||B| = |BA|$

（4）$|A^n| = |A|^n$

Cramer法则

若n元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \quad (1)$$

的系数行列式 $D=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

则方程组（1）有唯一解，且

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

第四章 向量与线性方程组

- 线性方程组的表示
- 向量的线性相关和线性无关
- 向量组的秩、子空间的基和维数
- 矩阵的秩
- 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
- 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

线性方程组的表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

一般形式

$$AX = \beta$$

矩阵形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

向量形式

线性相关和线性无关的定义

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(I)$是$P^n$的一个向量组,如果存在不全为0的数$k_i\in P(i=1,2,\cdots,s)$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

则称向量组(I)线性相关;

如果$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$必有$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$,

则称向量组(I)线性无关;

向量组线性相关与线性无关的5个性质

性质1.一个向量α线性相关的充要条件是$\alpha=0$

性质2 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s>1)(I)$线性相关的充分必要条件是$(I)$中至少有一个向量可由其余$s-1$个向量线性表出。

性质3.设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(I)$的一部分线性相关，则$(I)$线性相关.

性质4：设n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,在每个向量的相同位置添加$m$个分量，则所得的$n+m$维向量组$\beta_1$，$\beta_2,\cdots$，$\beta_s$仍然线性无关。

性质5.n个n维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关的充分必要条件是

$$\det(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=0.$$

线性相关的判定定理

$\boxed{\text{向量组}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\text{线性相关}}$ $\Leftrightarrow$ 向量组中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表示

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$AX=0$有非零解，其中$A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_m)$

$\Leftrightarrow$ $|A|=0$,其中$A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_m)$

含有零向量的向量组必线性相关

部分线性相关，则全体线性相关

向量组线性相关，则“截短”后仍线性相关

当向量维数n小于向量组向量个数m时一定线性相关.

线性无关的判定定理

$\boxed{\text{向量组}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\text{线性无关}}$ $\Leftrightarrow$ 向量组中任何一个向量都不能由其余$m-1$个向量线性表示

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$AX=0$仅有零解，其中$A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_m)$

$\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$，其中$A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_m)$

一个非零向量必线性无关

全体线性无关，则部分线性无关

向量组线性无关，则“拉长”后仍线性无关

向量组的秩

设$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ (II)为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ (I)的一个部分组. 如果

(1) (II)是一线性无关组;

(2) **(I)**中的任意向量可由(II)线性表示.

则称(II)为(I)的一个极大（线性）无关组.

说明 (1) 极大无关组不唯一;

(2) 向量组与它的极大无关组是等价的.

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为不全为零的向量组，其极大无关组所含向量的个数，称为向量组的秩(rank)，记为$r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$.

特别说明：全为零的向量组我们认为没有极大无关组，其秩定义为0.

向量组的秩的一些重要结论

（1）零向量组的秩为0。

(2) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关⇔极大无关组是本身

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$$

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关⇔极大无关组是它的真部分组

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$$

（3）如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可以由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，则

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

（4）等价的向量组必有相同的秩。

（5）$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$

$$\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

例5 设 $\alpha_1=(1,-2,0,3)$, $\alpha_2=(2,-5,-3,6)$,

$\alpha_3=(0,1,3,0)$, $\alpha_4=(2,-1,4,-7)$,

$\alpha_5=(1,-8,1,2)$,

求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表出.

解 令 $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T)$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T)$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为向量组的一个极大无关组，

且 $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$，$\alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$．

子空间

简单地讲，**子空间是对加法和数乘运算封闭的R^n的非空子集。**

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p \in R^n$，由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$的所有可能的线性组合构成的集合称为由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$张成（生成）的$R^n$的子空间，记为$span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$，即

$$span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\} = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_p\alpha_p | k_1,k_2,\ldots,k_p \in R\}.$$

等价向量组生成相同的子空间。

矩阵的列空间

定义4.4.2 设A是$m \times n$矩阵，A的列空间col$A$是A的列向量的所有可能的线性组合构成的集合。记$A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$，则

$$ColA = span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \subset R^m.$$

注：易知$ColA = \{b | 存在x \in R^n，使得b = Ax\}$，故$ColA$也称为$A$的值域空间Range$(A)$。

问题：如何判断一个向量b是否属于A的列空间?

本质上示判断$b = Ax$有无解。

矩阵的零空间

定义4.4.3 设A是$m\times n$阶矩阵， A的零空间Nul$A$是齐次线性方程组$Ax=0$的所有解向量构成的集合。即

$$NulA=\{x\in R^n|Ax=0\}.$$

定理4.4.3 矩阵A的零空间Nul$A$是R^n的子空间. 等价地， m个方程n个未知量的齐次线性方程组$Ax=0$的解集是R^n的子空间，称为$Ax=0$的解空间。

空间基的定义与构造

H的基就是H的极大无关组

极大无关组具有的相应性质基也具有

生成集的极大无关组就是生成集生成的子空间的基。

$NulA$的基中向量个数=自由变量的个数

A的列极大无关组构成$colA$的一组基。

空间维数的定义

子空间H的维数=向量组H的秩=H的生成组的秩

若$\dim H=p$，则H中任意p个线性无关的向量构成H的一组基，任意$p+1$个向量线性相关。

坐标变换与过渡矩阵

坐标的定义 设$B=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p\}$是子空间$H$的一组基。$H$中的任一向量$x$，称$x$在基$B$唯一线性表示下的系数为$x$在基$B$下的坐标，记为$X$。

即设 $$x=c_1\beta_1+c_2\beta_2+\ldots+c_p\beta_p=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_p\end{pmatrix}$$

则$X=\left(c_1,c_2,\cdots,c_p\right)^T$。

过渡矩阵的定义 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n(I)$与$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n(II)$是$n$维向量空间$R^n$的两组基，则基$(II)$可由基$(I)$线性表出，即

$$\begin{cases}\eta_1=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n\\ \eta_2=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{n2}\varepsilon_n\\ \quad\cdots\cdots\\ \eta_n=a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n\end{cases},$$

或

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}.$$

称$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$是由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$到基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$的过渡矩阵，其中A的第$j$列是$\eta_j$在基$(I)$下的坐标。

坐标变换

(1) 过渡矩阵P是可逆矩阵;

(2) 设P是由基x_1，x_2，…，x_n到基y_1，y_2，…，y_n的过渡矩阵，

则P^{-1}是由基y_1，y_2，…，y_n到基x_1，x_2，…，x_n的过渡矩阵。

向量在不同基下的坐标是不同的。设

$$\mathbf{x}=\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_n\right)X$$

$$=\left(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\cdots,\mathbf{y}_n\right)Y$$

$$=\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_n\right)PY$$

由于基向量线性无关，则 $X=PY$,

得坐标变换公式 $Y=P^{-1}X$

矩阵秩的定义

设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于 0，那末 D 称为矩阵A的最高阶非零子式，数 r称为矩阵 A 的秩，记作 $rankA, R(A)$, 秩A 或 r_A .并规定零矩阵的秩等于零.

矩阵 A 的秩 $R(A)$ 是 A 中非零子式的最高阶数.

矩阵秩的性质

（1） $R(O)=0$ （2）$R(A)\le\min\{m,n\}$

（3） $R(A^T)=R(A), R(kA)=R(A), k\neq 0$

（4） 若A有一个r阶子式不为零，则$R(A)\ge r$

若A所有r阶子式全为零，则$R(A)<r$

（5） 若A为n阶方阵，则 $|A|\neq 0 \Leftrightarrow R(A)=n$

$|A|=0 \Leftrightarrow R(A)<n$

重要结论：阶梯形矩阵的秩正好为非零行数

定理5 矩阵的行秩、列秩、秩都相等。

定理6 初等变换不改变矩阵的秩。

初等变换求矩阵秩的方法：

把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.

$$B=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 称为标准形矩阵

任何一个非零矩阵A都可经过一系列的初等变换化为标准形矩阵B，且 $A\cong B$

定理 设 A与B为同型矩阵，则 $A\cong B$的充要条件是 $r_A=r_B$

矩阵秩的一些重要性质

定理 矩阵乘积的秩 $r_{AB} \le \min\{r_A, r_B\}$。

推论 设A是一个$s \times n$矩阵，P，Q分别是s阶和n阶可逆矩阵，则

$$r_A = r_{PA} = r_{AQ} = r_{PAQ}.$$

结论： 设A, B为n阶方阵，且$AB = 0$，证明：$R(A) + R(B) \le n$。

齐次线性方程组有非零解的充要条件

设A为$s\times n$型矩阵,则齐次线性方程组$AX=O$有非零解

其中$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

$\Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ $R(A)<n$

若A为方阵, 即向量组中向量个数与维数相等

$\Leftrightarrow$ $|A|=0$

齐次方程组的解的结构

若$X_1, X_2, \cdots, X_t$是$AX = O$的一个基础解系，

则 $k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_tX_t$ 为$AX = O$ 的通解。

其中$k_1, k_2, \cdots, k_t$是任意常数。

设A是一个 $s \times n$矩阵，如果$r_A = r < n$，**则齐次线性方程组AX=0** 存在基础解系，且基础解系

含有n-r个向量。

例2 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

求出一个基础解系和通解

解:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\2&3&1&-1\\1&2&2&-3\\3&4&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&3&-5\\0&1&3&-5\\0&1&3&-5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&3&-5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-4&7\\0&1&3&-5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Jordan阶梯形矩阵

同解方程组$BX=O$

$$\begin{cases}x_1=4x_3-7x_4\\x_2=-3x_4+5x_4\end{cases}$$

取自由未知量为x_3,x_4

自由未知量为x_3, x_4,分别代入值$(1,0),(0,1)$

得到方程组的一个基础解系：

$$\begin{cases} x_1 = 4x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -3x_4 + 5x_4 \end{cases}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

方程组通解为

$$c_1X_1 + c_2X_2, \qquad c_1, c_2\text{为任意常数}$$

非齐次线性方程组有解的充要条件

定理 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$

设A为$s\times n$型矩阵,则非齐次线性方程组AX=β

其中$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

有解 $\Leftrightarrow$ β可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\ \beta$等价

$\Leftrightarrow r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}=r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\ \beta\}$

$\Leftrightarrow R(A)=R(\tilde{A})$

有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\tilde{A})=n$

有多个解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\tilde{A})\neq n$

无解 $\Leftrightarrow R(A)\neq R(\tilde{A})$

非齐次方程组的解的结构

当$AX=\beta$有解且不唯一时，必有无穷多个解

设X_0是$AX=\beta$一个特解，

X_1，$X_2,\cdots$，X_{n-r}是$AX=0$的基础解系

全部解 $X_0+k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_{n-r}X_{n-r}$

例2 设有线性方程组 $\begin{cases} x_1 + \quad a x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + (2a-1)x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + (a+3)x_3 = b \end{cases}$

(1) 问a,b为何值时,方程组有唯一解, 无穷多解,无解;

(2) 当方程组有无穷多解时,求出全部解

解 对增广矩阵$\tilde{A}$作初等行变换化简,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & a & a+3 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & b-1 \end{pmatrix} = \tilde{B}.$$

当$a \neq 1$且$a \neq -1$时, $r_A = r_{\tilde{A}} = 3$ 方程组有唯一解;

当a=1时, $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & b-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$

当a=1时，$\tilde{B}=\begin{pmatrix}1&a&2&1\\0&0&1&0\\0&0&2&b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&0&1&0\\0&0&0&b-1\end{pmatrix}$

当$a=1,b\neq 1$时，$r_A=2\neq r_{\tilde{A}}=3$， 方程组无解;

当$a=1,b=1$时，$r_A=r_{\tilde{A}}=2$ 方程组有无穷多解;

$\tilde{B}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 全部解为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\tilde{A} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & b-1 \end{pmatrix} = \tilde{B} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

同理,当$a=-1,b\neq 1$时 $r_A = 2 \neq r_{\tilde{A}} = 3$, 方程组无解;

当$a=-1,b=1$时,$r_A = r_{\tilde{A}} = 2$ 方程组有无穷多解;

$$\tilde{B} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

全部解为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

第六章 特征值、特征向量、矩阵的相似

- 矩阵的特征值与特征向量
- 矩阵的相似、矩阵的对角化
- 实对称矩阵的对角化

方阵的特征值与特征向量

定义 设A为复数域上的n阶方阵，如果存在复数λ_0和非零的n维列向量X_0，使得

$$AX_0 = \lambda_0 X_0,$$

则称λ_0是A的一个特征值，X_0是A的属于（或对应于）特征值λ_0的特征向量.

特征值与特征向量的性质

更一般地，若$X_1, X_2, \cdots, X_t$为A的属于同一特征值λ_0的特征向量，则

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_tX_t (\neq 0)$$

仍是A的属于特征值λ_0的特征向量.

若λ是矩阵A的特征值,X是A的属于特征值λ的特征向量，且$f(\mathrm{A}) = a_m\mathrm{A}^m + \cdots + a_1\mathrm{A} + a_0\mathrm{E}$，则

$$f(\lambda) = a_m\lambda^m + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

为$f(A)$的特征值，且$f(\lambda)$对应的特征向量也为X.

进一步，λ_1，λ_2,$\cdots$，λ_n为n阶方阵A的全部特征值，则$f(\lambda_1)$，$f(\lambda_2)$,$\cdots$，$f(\lambda_n)$为$f(A)$的全部特征值。

从特征值和特征向量的性质可以看出：矩阵A的一个特征值对应若干个线性无关的特征向量；

但反之，一个特征向量只能属于一个特征值。

性质6 设n阶方阵$A=\left(a_{ij}\right)$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则有

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\underline{a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}}$;

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$. 称为A的迹, 记为$tr(A)$

求n阶方阵A的特征值和特征向量

由特征值和特征向量的性质4,5。得到求n阶矩阵A的特征值和特征向量的步骤：

（1） 计算特征多项式$|\lambda E-A|$；

（2） 求出$|\lambda E-A|=0$的全部根，得A的全部特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

（3） 对于每个不同的特征值λ_j，求出齐次线性方程组$\left(\lambda_j E-A\right)X=0$的一个基础解系$X_1,X_2,\cdots,X_t$，则$A$的属于$\lambda_j$的全部特征向量为$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_tX_t$(其中$k_1,k_2,\cdots,k_t$是不全为零的任意常数）。

相似关系

设A,B都是n阶方阵,若有可逆矩阵P,使得

$$P^{-1}AP = B$$

则称**B是A的相似矩阵**,或称**矩阵A与B相似**, 记为$A \sim B$。

把$P^{-1}AP$看成对A作的运算，称为对A施行的相似变换,可逆矩阵P称为把A变成B的相似变换矩阵。

相似的性质

(1)相似关系是等价关系;

(2)若$A\sim B$，$f(x)$是x的多项式，则$f(A)\sim f(B)$;

(3)若$A\sim B$，则$|A|=|B|$;

(4)若$A\sim B$，则A和B有相同的特征值;

(5)若$A\sim B$，则$r_A=r_B$;

(6)若$A\sim B$，则 $trA=trB$;

(7)若$A\sim B$，且都可逆，则 $A^{-1}\sim B^{-1}$

方阵可对角化判定定理

定理1 n阶矩阵A相似于对角矩阵(可(相似)对角化)的充分必要条件为A有n个线性无关的特征向量。

定理3 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是$n$阶矩阵$A$的不同的特征值，而

$X_{11},X_{12},\cdots,X_{1i_1}$是$A$属于$\lambda_1$的线性无关的特征向量；

$X_{21},X_{22},\cdots,X_{2i_2}$是$A$属于$\lambda_2$的线性无关的特征向量；

…………………………

$X_{m1},X_{m2},\cdots,X_{mi_m}$是$A$属于$\lambda_m$的线性无关的特征向量；

则 $X_{11},X_{12},\cdots,X_{1i_1},X_{21},X_{22},\cdots,X_{2i_2},\cdots,X_{m1},X_{m2},\cdots,X_{mi_m}$ 线性无关。

定理4. 设λ_0为n阶矩阵A的k重特征值,则属于λ_0的A的线性无关的特征向量最多只有k个.

定理5 n阶矩阵A可对角化的充分必要条件是:对于A的每个k_i重特征值λ_i,A有k_i个线性无关的特征向量(与重根的重数相同).

将方阵化为对角矩阵的步骤

1、求 A 的全部互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ ；

2、对每一个特征值λ_i,解出其特征方程

$(\lambda_i E - A)X = 0$的一个基础解系 $X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{it_i}$ ；

3、计算$T = \sum_{i=1}^{m} t_i$, 则得A的T个线性无关的特征向量

若$T < n$, 则表示A找不到n个线性无关的特征向量，

从而不可对角化；若$T = n$,则A可对角化（由定理1）.

4、若可对角化， 令

$P = (X_{11}\cdots X_{1t_1}, X_{21}\cdots X_{2t_2},\cdots, X_{m1}\cdots X_{mt_m})$ ，

则P可逆 且有

$P^{-1}AP = \Lambda = diag(\lambda_1\cdots\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_2,\cdots\lambda_m\cdots\lambda_m)$.

实对称阵的对角化

1 向量正交的定义

当$[x, y] = 0$时，称向量x与y正交.

由定义知，若 $x = 0$，则 x 与任何向量都正交.

2 正交向量组的定义

若一不含有零向量的向量组中的向量两两正交，则称该向量组为正交向量组.

进一步，正交向量组中每个向量均为单位向量，则称该向量组为标准正交向量组（或规范正交组）

n维基本向量组 $e_1, e_2, \cdots, e_n$是一个规范正交向量组

施密特(Schmidt)正交规范化方法

-------------将线性无关向量组改造为规范正交组

（1）正交化　　　　（2）单位化

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$(I)是$R^n$中的一个线性无关组

（1）正交化

$$\beta_1=\alpha_1 \qquad \beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2,$$

可验证，

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$为正交向量组，

且与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$等价

………………………………

$$\beta_m=\alpha_m-\frac{[\alpha_m,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_m,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2-\cdots-\frac{[\alpha_m,\beta_{m-1}]}{[\beta_{m-1},\beta_{m-1}]}\beta_{m-1}$$

上述由线性无关向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$构造出正交向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$的过程,称为 **施密特正交化过程** .

（2）**单位化**，取

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\quad \gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\ \cdots\cdots,\gamma_m=\frac{\beta_m}{\|\beta_m\|},$$

那么$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$为一个规范正交向量组

且与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$等价

定义6 若n阶方阵Q满足 $Q^TQ = QQ^T = E$,则称Q为 正交矩阵 .

Q 为正交矩阵的充要条件是Q 的行/列向量都是单位向量且两两正交.

定理6 实对称矩阵的特征值均为实数.

定理8 设A为n阶实对称矩阵,则必有正交矩阵P,使$P^{-1}AP = \Lambda$,其中 Λ是以A的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵.

求正交矩阵将实对称矩阵对角化的方法

根据上述结论，求正交矩阵将实对称矩阵化为对角矩阵，其具体步骤为：

1. 求A的全部特征值;

2. 由$(\lambda_i E - A)x = 0$,

   求出A的n个线性无关的特征向量; $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

3. 将这n个线性无关的特征向量正交化,单位化;

$$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$$

4. 令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$ 则 $Q^{-1}AQ$

$$= diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

第七章 二次型

- 二次型的矩阵表示
- 二次型化为标准型的方法
- 实二次型的分类、正定矩阵

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=X^TAX$$ 其中$A=A^T$

对称矩阵A的秩叫做二次型 f 的秩.

定理1 对二次型 $f=X^TAX$,($A^T=A$)作可逆线性变换 $X=CY$,则化成新变量下的二次型 $g=Y^TBY$,其中$B=C^TAC$,且B是二次型 g 的矩阵

定义2 设 A,B为n阶方阵，若存在可逆阵C,使得

$$B=C^TAC,$$

则称A与B合同，记为 $A\simeq B$

用正交变换化二次型为标准形的具体步骤

1. 将二次型表成矩阵形式$f = X^T AX$,求出A;

2. 求出A的所有特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$;

3. 求出对应于特征值的特征向量$X_1, X_2,\cdots, X_n$;

4. 将特征向量$X_1, X_2,\cdots, X_n$正交化,单位化,得

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$,记$Q=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$;

5. 作正交变换$X = QY$,则得f的标准形

$$\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2.$$

拉格朗日配方法的步骤

$$(1)a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

1. 若二次型含有x_i的平方项，则先把含有x_i的乘积项集中，然后配方，再对其余的变量同样进行，直到都配成平方项为止，经过非退化线性变换，就得到标准形；

$$(2)(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

2. 若二次型中不含有平方项，但是$a_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$,则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ x_k = y_k \end{cases} \quad (k = 1,2,\cdots,n \text{且} k \neq i,j)$$

化二次型为含有平方项的二次型，然后再按1中方法配方.

实二次型的分类

定义 设n元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$，如果对任何 $X=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T\neq 0$，都有

(1) $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$,则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定的;

$<$ 为负定的

(2) $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\geq 0$,则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为半正定的;

$\leq$ 为半负定的

(3) f 既取得正值又取得负值,则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为不定的

正定矩阵、正定矩阵的等价条件

定义7 设n元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX,\ (A^T=A)$ 正定，则称 A 为正定矩阵。

定理5 设A为n阶实对称矩阵，$f=X^TAX$，则下列命题相互等价：

(1)A为正定矩阵；　(2)A的特征值全是正实数；

(3)$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的正惯性指数$p=n$；

(4)存在可逆实矩阵C，使得$C^TAC=E$；

(5)存在可逆实矩阵P，使得$A=P^TP$.

定义8 设 $A=(a_{ij})$为n阶方阵，记A的位于左上角的子式为

$$A_1=|a_{11}|,\ A_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \cdots,\ A_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$$A_n=|A|,$$

称为A的$1,2,3,\cdots,k\cdots,n$阶**顺序主子式**。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定理6 n元二次型$f = X^T A X$为正定的

$\Leftrightarrow$ A 的各阶顺序主子式均大于零

推论2 n元二次型$f = X^T A X$为负定的

$\Leftrightarrow$ A 的偶数阶顺序主子式均大于零

奇数阶顺序主子式均小于零