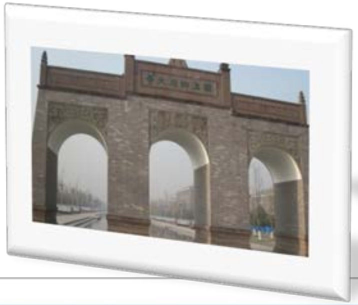
第三章　行列式

第一节　方阵的行列式




主要内容

一、低阶方阵的行列式的定义与计算

二、n阶行列式的定义与计算

n 阶行列式形式上的定义

形式上 设A是n阶方阵，

记号 $\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 表示

方阵A的行列式，或称为一个n阶行列式。

问题：n阶行列式的值如何定义？

一（一）、一阶方阵的行列式

一阶方阵 $A=(a)$ 定义 $|A|=a.$

又因为当且仅当 $a\neq 0$ 时存在乘法逆元 $\dfrac{1}{a}$,

所以对于一阶方阵 A, A 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0.$

一（二）、二阶方阵的行列式

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

二阶方阵A可逆的充要条件是A行等价于单位阵E.

若$a_{11}\neq 0$，则利用初等行变换可将A化为阶梯形

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

因$a_{11}\neq 0$, A行等价于$E \Leftrightarrow a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$.

当$a_{11}=0$时，交换两行 $\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{12} \end{bmatrix}$

它行等价于E的充要条件是$a_{21}a_{12}\neq 0$.

也满足等价条件$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$.

定义 表达式$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为二阶方阵$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$的行列式，即

$$|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

二阶方阵A可逆的充要条件是$|A|\neq 0$.

二阶行列式的计算——对角线法则

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

一（三）、三阶方阵的行列式

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

假设$a_{11}\neq 0$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} \end{bmatrix}$$

A可逆等价于与之行等价的B可逆.

B可逆, B的主元列数为3. A可逆等价于B中二阶子矩阵

$$C=\begin{bmatrix} a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21} \\ a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} \end{bmatrix}$$可逆.

$$C=\begin{bmatrix} a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21} \\ a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} \end{bmatrix}\text{可逆.}$$

二阶方阵C可逆的充要条件是$|C|\neq 0$.

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21} \\ a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} \end{vmatrix}\neq 0$$

即 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$

当$a_{11}=0$时，也可以得到相同的结论。

定义 称$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$为三阶方阵$A$的行列式, 即

$$|A|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

三阶方阵A可逆的充要条件是$|A|\neq 0.$

三阶行列式的计算

对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

小结

二阶与三阶行列式的计算——对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

说明 对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

二阶, 三阶行列式的特点

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

二阶行列式为2!单项式的和, 每项都是位于不同行、不同列,

三阶行列式包括3!单项式的和, 每一项都是位于不同行 、不同列

三阶行列式的特点

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

三阶行列式包括3!单项式的和

每个单项式的一般形式可记为: $\pm a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$

其中 $i_1 i_2 i_3$ 取遍1, 2, 3的所有全排列

即 $\underbrace{123,\quad 231,\quad 312,}_{+}\quad \underbrace{321,\quad 213,\quad 132}_{-}$。

排列与逆序

问题： 把1, 2, 3,⋯ n 排成一列，共有几种不同的排法？

定义 把n个数1, 2, 3,⋯ n 排成一列，组成的有序数组

$$i_1 i_2 i_3 \cdots\cdots i_{n-1} i_n$$

称 为一个 n 级排列.

$123\cdots\cdots n$ 为一个 n 级**自然排列**

例如 **3124** 为一个 4 级排列 共有 4！=24个

1234 为一个 4 级自然排列

排列的逆序数

我们规定各元素之间有一个自然次序，n 个不同的自然数，规定由小到大为**自然次序**.

定义 在一个排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$ 中，若数 $i_t > i_s$ 则称这两个数组成一个逆序.

例如 排列32514 中，

逆序

3 2 5 1 4

逆序

定义 一个排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**.

记为 $\tau\left(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n\right)$

例如 排列32514 中，

逆序 逆序

3 2 5 1 4

逆序 逆序 逆序

故此排列的逆序数为 5. 即 $\tau\left(32514\right)=5$

定义 一个排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**. 记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$

排列的奇偶性

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**;

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例2 计算下列排列的逆序数，并讨论它们的奇偶性.

(1) 217986354

解

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & 1 & 7 & 9 & 8 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{array}$$

$$\tau = 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 3 + 4 + 4 + 5$$

$$= 18$$

此排列为偶排列.

$(2)\quad n(n-1)(n-2)\cdots 321$

解

$$\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 321}^{n-1}$$

$$\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots}_{(n-2)}$$

$$t=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$

$$=\frac{n(n-1)}{2},$$

当 $n=4k,4k+1$ 时为偶排列；

当 $n=4k+2,4k+3$ 时为奇排列.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

三阶行列式包括3!单项式的和

每个单项式的一般形式可记为： $\pm a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$

其中 $i_1 i_2 i_3$ 取遍1, 2, 3的所有全排列

即 $\underbrace{123,\quad 231,\quad 312,}_{+}\quad \underbrace{321,\quad 213,\quad 132}_{-}$。

（3）每项的正负号都取决于位于不同行不同列的三个元素的下标排列.

例如 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 列标排列的逆序数为 $\tau(312)=1+1=2,$

偶排列 $+$正号

$a_{11}a_{23}a_{32}$ 列标排列的逆序数为 $\tau(132)=1+0=1,$

奇排列 $-$负号,

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{3!} (-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

二、n 阶行列式的定义（一）

定义　由 n^2 个数组成的 n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和 $\sum\limits_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

记作
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素.

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,\ n$ 的一个排列，τ 为这个排列的逆序数.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的定义说明

$$=\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

1、 n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和;

2、 n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列 n 个元素的乘积;

3、 一阶行列式 $|a|=a$

4、 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)}$.

二、三阶行列式的特点

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}\left|a_{22}\right| - a_{12}\left|a_{21}\right|$$

$$= a_{11}(-1)^{2+2}\left|a_{22}\right| + a_{12}(-1)^{1+2}\left|a_{21}\right|$$

二阶行列式的特点：二阶行列式可用一阶行列式表示.

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

三阶行列式的特点：三阶行列式可用二阶行列式表示.

余子式与代数余子式

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}.

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}.$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}.$$

行列式的每个元素分别对应着一个余子式和一代数余子式.

一个元素的余子式及代数余子式与该元素的大小没有关系，只与该元素的位置有关系.

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

三阶行列式

行列式按第一行展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

行列式可按其它行或者列展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$ 按第一行展开

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21}$$ 按第一列展开

$$= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22}$$ 按第二列展开

$$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22}$$ 按第二行展开

对三阶行列式同样可以按其任意行列展开

二、n 阶行列式的定义（二）

一个 n阶方阵A的行列式,记为$|A|$，是一个与A对应的数量, 它可如下递归定义：

$$|A| = \begin{cases} a_{11} & \text{当} n = 1 \text{时} \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & \text{当} n > 1 \text{时} \end{cases}$$

其中$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$为$A$的元素$a_{ij}$对应的代数余子式.

……行列式按第一行展开

定理3.1.1 行列式展开定理

设A为n阶方阵,$n \geq 2$,则A的行列式可以按照任意行或列展开

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$

一些特殊行列式的计算

例 计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 分析 选择含最多零元的行展开

$$|A| = a_{nn}A_{nn} = a_{nn}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}$$ 连续n次展开

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理可得下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

三角形方阵的行列式的值等于主对角线上元之积.

特别地, 对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

练习 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

形如

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n .$$

小结

二阶与三阶行列式的计算 ——$\boxed{\text{对角线法则}}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned}$$

n 阶行列式的定义

一个 n阶方阵A的行列式,记为$|A|$，是一个与A对应的数量, 它可如下递归定义:

$$|A| = \begin{cases} a_{11} & \text{当}n=1\text{时} \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & \text{当}n>1\text{时} \end{cases}$$

其中$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$为$A$的元素$a_{ij}$对应的代数余子式.

……行列式按第一行展开

定理3.1.1 行列式展开定理

设A为n阶方阵,$n \geq 2$,则A的行列式可以按照任意行或列展开

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad i = 1,2,\cdots,n.$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad j = 1,2,\cdots,n.$$