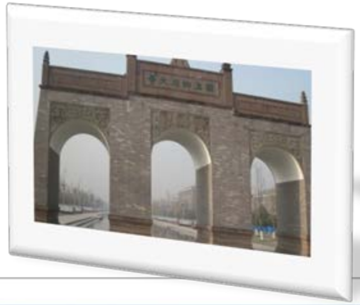
第三章 行列式

第二节 行列式的重要性质
——行列式的计算



行列式的计算

（1）二三阶行列式：对角线法

（2）计算行列式的常用方法之一 —— “降阶法”

行列式展开定理重要意义在于：n阶行列式可将为低阶行列式来计算其值。

（3）计算行列式常用方法之二—— 化三角形法

利用运算r_i+kr_j把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i+kr_j} \cdots\cdots = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

例1

计算行列式常用方法：利用运算 $r_i + kr_j$ 把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

例 1 $$D = \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad -1 \quad 2 \quad -3 \quad 1} \\ -3 \quad 3 \quad -7 \quad 9 \quad -5 \\ 2 \quad 0 \quad 4 \quad -2 \quad 1 \\ 3 \quad -5 \quad 7 \quad -14 \quad 6 \\ 4 \quad -4 \quad 10 \quad -10 \quad 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times 3 \\ \oplus \end{array}$$

解 $$D=\begin{vmatrix} \boxed{1 & -1 & 2 & -3 & 1} \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{r_2+3r_1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ r_2+3r_1 \\ \overline{\overline{\qquad}} \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \times(-2) \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (-4)\times \\ \\ r_3-2r_1 \\ \overline{\overline{\qquad}} \\ \oplus \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \times(-3) \\ \\ \oplus \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\overset{r_4-3r_1}{\underset{r_5-4r_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2 \leftrightarrow r_4}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$\oplus$

$$\xlongequal{r_3+r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \oplus$$

$$\xlongequal{r_4+r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times(-2) \\ \oplus \\ \\ \end{matrix}$$

$$\xlongequal{r_5-2r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} & & & \boxed{-1} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} \times 4 \oplus$$

$$\xlongequal{r_5+4r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-2)(-1)(-6) = 12.$$

例2

计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

解 将第 $2,3,\cdots,n$ 都加到第一列得

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$
=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}
$$

$$
=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ & a-b & & & \\ & & a-b & \mathbf{O} & \\ & \mathbf{O} & & \ddots & \\ & & & & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.
$$

法二：将第1行的-1倍分别加到第2…n行：

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

将第2…n列的1倍分别加到第1列：

$$=\begin{vmatrix} a-(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例3

计算
$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$$

箭形行列式

解

$$D\ \underset{\substack{c_1+(-\frac{1}{3}c_3)\\ \cdots\cdots\\ c_1+(-\frac{1}{n}c_n)}}{\overset{c_1+(-\frac{1}{2}c_2)}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}&1&1&\cdots&1\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

例4

计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & n & n & n & n \end{vmatrix}$

解 **分析** 此行列式的特点是相邻两行对应元素要么差1要么相等.

这类行列式可以考虑依次把上一行的（-1）倍加到下一行去，

依次从第n-1行开始，而不是从第1行开始！

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\tau(n,n-1,\cdots,1)} 1 \times 1 \times \cdots 1 \times n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n$$

例5

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{2+5}\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+5} 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 + r_1]{r_2 + (-2)r_1} -10 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -10 \cdot (-2) \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 20(-42 - 12) = -1080.$$

例6 计算行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & \iddots & 0 \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ 0 & \iddots & & & \ddots & 0 \\ c & 0 & \cdots & \cdots & 0 & d \end{vmatrix}_{2n}$$

解

$$D_{2n}=a\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & \\ & & c & d & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c & & & & & d & \\ 0 & & & & & 0 & d \end{vmatrix}_{2n-1}+(-1)^{1+2n}b\begin{vmatrix} 0 & a & & & & & b \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a & b & & \\ & & & c & d & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & c & & & & & d \\ c & & & & & 0 & 0 \end{vmatrix}_{2n-1}$$

$$D_{2n}=a\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0\\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & \\ & & c & d & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c & & & & & d & \\ 0 & & & & & 0 & d \end{vmatrix}_{2n-1}+(-1)^{1+2n}b\begin{vmatrix} 0 & a & & & & & b\\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a & b & & \\ & & & c & d & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & c & & & & & d\\ c & & & & & 0 & 0 \end{vmatrix}_{2n-1}$$

$$=ad\begin{vmatrix} a & & \cdots & \cdots & & b\\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & \cdots & \cdots & & d \end{vmatrix}_{2n-2}-(-1)^{2n-1+1}cb\begin{vmatrix} a & & \cdots & \cdots & & b\\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & \cdots & \cdots & & d \end{vmatrix}_{2n-2}$$

$$=(ad-cb)D_{2n-2}=(ad-cb)^2D_{2n-4}\cdots=(ad-cb)^{n-1}D_2=(ad-cb)^n$$

例7 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & ab \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

三对角线形行列式

解 按第一行展开

$$D_n=(a+b)\begin{vmatrix} a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & ab \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1} - ab\begin{vmatrix} 1 & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & ab \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$$

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$$

$$D_n-bD_{n-1}=a(D_{n-1}-bD_{n-2})$$

$$=a^2(D_{n-2}-bD_{n-3})$$

$$\cdots$$

$$=a^{n-2}(D_2-bD_1)$$

$$=a^n$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$=a^2+b^2+ab$$

$$D_1=|a+b|=a+b$$

由a，b的对称性可知：$D_n-aD_{n-1}=b^n$

（1）当$a\neq b$时：$D_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$

（2）当$a=b$时：$D_n=a^n+aD_{n-1}$

$$=a^n+a(a^{n-1}+aD_{n-2})=2a^n+a^2D_{n-2}$$

$$\cdots$$

$$=(n-1)a^n+a^{n-1}D_1=（n+1）a^n$$

$$D_n=\begin{cases}\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b},a\neq b\\(n+1)a^n,a=b\end{cases}$$

练习： 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}3&1&\cdots&0&0\\2&3&1&\cdots&0\\0&2&3&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&1\\0&0&\cdots&2&3\end{vmatrix}$$

三对角线形行列式

解 按第一行展开

$$D_n=3\begin{vmatrix}3&1&\cdots&0&0\\2&3&1&\cdots&0\\0&2&3&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&1\\0&0&\cdots&2&3\end{vmatrix}_{n-1}-\begin{vmatrix}2&1&\cdots&0&0\\0&3&1&\cdots&0\\0&2&3&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&1\\0&0&\cdots&2&3\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=3D_{n-1}-2D_{n-2}$$

$$D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$$

$$D_n - D_{n-1} = 2(D_{n-1} - D_{n-2})$$
$$= 2^2(D_{n-2} - D_{n-3})$$
$$\cdots$$
$$= 2^{n-2}(D_2 - D_1)$$
$$= 2^n$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$D_1 = |3| = 3$$

$$\left.\begin{aligned} D_n - D_{n-1} &= 2^n \\ D_{n-1} - D_{n-2} &= 2^{n-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_2 - D_1 &= 2^2 \end{aligned}\right\} +$$

$$\Rightarrow D_n - D_1 = \frac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2}$$

$$\Rightarrow D_n = 2^{n+1} - 1$$

例8 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}$$

解：将D_n按第一列展开

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}\cdot a_n\cdot(-1)^{n-1}=xD_{n-1}+a_n\ ,$$

这里D_{n-1}与 D_n 有相同的结构，但阶数是 n-1的行列式。

现在, 利用递推关系式计算结果. 对此, 只需反复进行代换, 得

$$
\begin{aligned}
D_n &= x\left(xD_{n-2}+a_{n-1}\right)+a_n = x^2 D_{n-2}+a_{n-1}x+a_n \\
&= x^2\left(xD_{n-3}+a_{n-2}\right)+a_{n-1}x+a_n = \cdots\cdots \\
&= x^{n-1}D_1+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n \ ,
\end{aligned}
$$

因 $D_1=\left|x+a_1\right|=x+a_1$

故 $D_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

例9

证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j). \qquad (1)$$

证 用数学归纳法

$$\because \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j),$$

$\therefore$ 当 $n = 2$ 时（1）式成立.

假设（1）对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第1列展开，并把每列的公因子 $(x_i - x_1)$ 提出，就有

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

n-1阶范德蒙德行列式

$$\therefore \quad D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{n\ge i>j\ge 2}(x_i-x_j)$$

$$=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j).$$

范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j). \qquad (1)$$

例如
$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=abc\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

例10 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

解

$$D_n = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

$$D_n = D_n^T = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

$$D_n = n!\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i - x_j)$$

$$= n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)$$

$$\cdot(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)]$$

$$= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!.$$

例11 利用公式 $|AB|=|A||B|$ 计算行列式

$$|C|=\begin{vmatrix} \dfrac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \dfrac{1-a_2^n b_1^n}{1-a_2 b_1} & \cdots & \dfrac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} \\ \dfrac{1-a_1^n b_2^n}{1-a_1 b_2} & \dfrac{1-a_2^n b_2^n}{1-a_2 b_2} & \cdots & \dfrac{1-a_n^n b_2^n}{1-a_n b_2} \\ \vdots & \vdots & & \\ \dfrac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} & \dfrac{1-a_2^n b_n^n}{1-a_2 b_n} & \cdots & \dfrac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n} \end{vmatrix}$$

分析： $C_{ji}=\dfrac{1-a_i^n b_j^n}{1-a_i b_j}$

解： $$C_{ji}=\frac{1-a_i^n b_j^n}{1-a_i b_j}=1+a_i b_j+a_i^2 b_j^2+\dots+a_i^{n-1}b_j^{n-1}$$

$$=(1\ a_i\ \ a_i^2\ \ \dots\ a_i^{n-1})\begin{pmatrix}1\\ b_j\\ \vdots\\ b_j^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$|C|=|C^T|=\begin{vmatrix}\frac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1b_1} & \frac{1-a_1^n b_2^n}{1-a_1b_2} & \cdots & \frac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1b_n}\\ \frac{1-a_2^n b_1^n}{1-a_2b_1} & \frac{1-a_2^n b_2^n}{1-a_2b_2} & \cdots & \frac{1-a_2^n b_n^n}{1-a_2b_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_nb_1} & \frac{1-a_n^n b_2^n}{1-a_nb_2} & \cdots & \frac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_nb_n}\end{vmatrix}$$

$$= \left| \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1^2 & b_2^2 & \cdots & b_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{bmatrix} \right|$$

范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$= \prod_{n \ge i > j \ge 1} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$$

例13

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a & x_2 & a & a \\ a & a & x_3 & a \\ a & a & a & x_4 \end{vmatrix}$$

可以用倍加变换化其为箭形行列式，然后用展开定理降阶

$$\begin{vmatrix} x_1 & a-x_1 & a-x_1 & a-x_1 \\ a & x_2-a & 0 & 0 \\ a & 0 & x_3-a & 0 \\ a & 0 & 0 & x_4-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & a-x_1 & a-x_1 & a-x_1 \\ 0 & x_2-a & 0 & a-x_4 \\ 0 & 0 & x_3-a & a-x_4 \\ a & 0 & 0 & x_4-a \end{vmatrix}$$

只要将行列式化为箭形行列式，通常用倍加变换化箭形行列式为三角形行列式.

例14

若A为正交矩阵，则A的行列式为__________。

例15 若n阶正交阵A与B满足$|A|+|B|=0$,证明$|A+B|=0$.

证 $|A+B|=|EA+B|=|BB^TA+B|=|B(B^TA+E)|$

$=|B(B^TA+A^TA)|=|B(B^T+A^T)A|=|B||B^T+A^T||A|$

$=|B||(B+A)^T||A|=|B||B+A||A|=-|B|^2|B+A|$

$=-|B+A|$

所以$|A+B|=0.$

例16

已知$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$为$\boldsymbol{n}$阶方阵, 且$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$都可逆.证明$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}$可逆.

证 $$\left|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}\right|=\left|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BA}\right|=\left|(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}\right|=\left|\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}\right|\left|\boldsymbol{A}\right|$$

$$=\left|\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}\right|=\left|\boldsymbol{AA}^{-1}-\boldsymbol{AB}\right|=\left|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}\right|\neq 0.$$

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}$$

行列式的计算

（1）二三阶行列式：对角线法

（2）计算行列式的常用方法之一 —— “降阶法”

行列式展开定理重要意义在于：n阶行列式可将为低阶行列式来计算其值。

（3）计算行列式常用方法之二—— 化三角形法

利用运算$r_i + kr_j$把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{r_i + kr_j}{=} \cdots\cdots = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$