补充知识

一、贝塞尔函数

1.1 原始贝塞尔方程的来源

贝塞尔方程是数学物理中一类重要的常微分方程，最初源于**圆柱对称问题**（如圆形薄膜振动、圆柱体热传导、电磁波在波导中的传播等）。其推导过程通常通过**分离变量法**从偏微分方程中分离出径向部分，最终得到贝塞尔方程。以下以**圆形薄膜的振动问题**为例，详细说明贝塞尔方程的推导过程。

1.1.1 物理问题建模

考虑一个半径为 a 的圆形薄膜，其振动位移 $u(r,\theta,t)$ 满足二维波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u,$$

其中 c 为波速， ∇^2 是极坐标系下的拉普拉斯算子。 </br>

1.1.2 极坐标系下的拉普拉斯算子

在极坐标 (r,θ) 中，拉普拉斯算子展开为：

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

因此，波动方程变为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right].$$

1.1.3 分离变量法

假设解具有分离变量形式:

$$u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t).$$

代入波动方程后，分离得到三个常微分方程:

1. **时间部分**: $T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \quad (\lambda$ 为分离常数)。
2. **角向部分**: $\Theta''(\theta) + n^2\Theta(\theta) = 0 \quad (n$ 为整数，保证解的单值性)。
3. **径向部分**（关键步骤）:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)R(r) = 0.$$

1.1.4 推导贝塞尔方程

将径向方程整理为标准贝塞尔方程形式:

1. 展开导数项:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0.$$

2. 引入无量纲变量 $x = \sqrt{\lambda}r$，令 $y(x) = R(r)$，则:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0.$$

这就是**贝塞尔方程的标准形式**:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0.$$

其中 n 是方程的阶数（对应角向模态数）。 </br>

1.1.5 物理意义与边界条件

- **阶数** n：表示角向的振动模式数（如 $n=0$ 对应中心对称振动，$n=1$ 为单节点振动等）。

- **边界条件**： 对于固定边界的圆形薄膜，径向解在 $r=a$ 处满足 $R(a)=0$，即：

$$J_n(\sqrt{\lambda}a)=0 \implies \sqrt{\lambda}a=\alpha_{n,m},$$

  其中 $\alpha_{n,m}$ 是 $J_n(x)$ 的第 m 个零点，对应不同本征频率。 </br>

1.1.6 贝塞尔方程的通解

贝塞尔方程的通解由**第一类贝塞尔函数** $J_n(x)$ 和**第二类贝塞尔函数** $Y_n(x)$ 组成：

$$y(x)=AJ_n(x)+BY_n(x).$$

- **第一类解** $J_n(x)$：在 $x=0$ 处有限，适用于物理问题中的自然边界条件。
- **第二类解** $Y_n(x)$：在 $x=0$ 处发散，通常用于特定边值问题。 </br>1.2 贝塞尔方程的数学本质

贝塞尔方程属于**变系数线性二阶常微分方程**，其解的复杂性源于系数中的 $1/x$ 和 $1/x^2$ 项。通过变量替换 $y(x)=x^{\nu}f(x)$（其中 ν 为常数），可将方程转换为更易分析的形式，但最终仍需依赖特殊函数（贝塞尔函数）表达解析解。 </br>

1.3 应用示例：圆形鼓面的振动模式

- **本征频率**：由 $J_n(\alpha_{n,m})=0$ 确定，频率为 $f_{n,m}=\frac{c\alpha_{n,m}}{2\pi a}$。
- **振动模式**：$u_{n,m}(r,\theta,t)=J_n\left(\frac{\alpha_{n,m}r}{a}\right)\cos(n\theta)e^{i\omega_{n,m}t}$。
- **可视化**：不同 (n,m) 组合对应鼓面的不同振动图案（如中心对称、辐射状条纹等）。 </br>

1.4 总结

贝塞尔方程源自**圆柱对称问题**的分离变量过程，其本质是极坐标下波动方程、热传导方程等偏微分方程的径向部分。通过分析贝塞尔方程的解（贝塞尔函数），可以描述圆形或圆柱形系统中的振动、扩散、电磁场分布等物理现象。理解这一方程的来源，有助于在工程和物理建模中合理应用贝塞尔函数展开方法。

二、Sturm-Liouville理论

Sturm-Liouville理论是数学物理方程和工程应用中的核心工具，用于分析**线性二阶微分方程**的本征值问题。它为傅里叶级数、贝塞尔函数展开等正交基展开提供了严格的数学基础。以下从基本形式、关键定理到实际应用逐步解析：

2.1 Sturm-Liouville方程的标准形式

Sturm-Liouville方程的一般形式为：

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda w(x)]\, y = 0,$$

其中：

- $p(x)$、$q(x)$、$w(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的实函数，
- $p(x) > 0$、$w(x) > 0$（权重函数），
- λ 是本征值（常数）。

物理意义：

- $p(x)$: 反映介质的不均匀性（如材料刚度、密度变化），
- $q(x)$: 势能函数或阻尼项，
- $w(x)$: 权重函数，决定内积定义（如质量分布）。 </br>

2.2 Sturm-Liouville问题的分类

根据边界条件的不同，分为：

- **正则Sturm-Liouville问题**：区间 $[a, b]$ 有限，$p(x)$、$q(x)$、$w(x)$ 在区间内连续。
- **奇异Sturm-Liouville问题**：区间无限或端点处 $p(x) = 0$（如贝塞尔方程在 $x = 0$ 处奇异）。 </br>

2.3 正交性与完备性定理

正交性定理：若 $y_m(x)$ 和 $y_n(x)$ 是同一Sturm-Liouville问题对应于不同本征值 $\lambda_m \neq \lambda_n$ 的解，则它们在权重 $w(x)$ 下正交：

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)w(x)dx = 0 \quad (m \neq n).$$

完备性定理：所有本征函数 $\{y_n(x)\}$ 构成**完备正交基**，即任何分段光滑函数 $f(x)$ 可展开为：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x),$$

其中系数：

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)y_n(x)w(x)dx}{\int_a^b [y_n(x)]^2 w(x)dx}.$$

2.4 关键性质与推论

1. **实本征值**：所有本征值 λ 为实数。
2. **可数无穷本征值**：$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty$。
3. **节点定理**：第 n 个本征函数 $y_n(x)$ 在区间 (a, b) 内有 $n-1$ 个零点。 </br>

2.5 实例分析：贝塞尔方程

以零阶贝塞尔方程为例，说明如何将其转化为Sturm-Liouville形式：

原始贝塞尔方程：

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

转换为Sturm-Liouville形式：

1. 两边除以 x：

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + (x - \frac{\nu^2}{x})y = 0.$$

2. 整理为Sturm-Liouville标准形式：

$$\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx}) + (x - \frac{v^2}{x})y = 0.$$

对应：

$$p(x) = x, \quad q(x) = -\frac{v^2}{x}, \quad w(x) = x, \quad \lambda = 1.$$

正交性条件： 在区间 $[0, a]$ 上，贝塞尔函数满足：

$$\int_0^a J_v(k_m x) J_v(k_n x) x dx = 0 \quad (k_m \neq k_n),$$

其中 $k_m = \alpha_{v,m}/a$，$\alpha_{v,m}$ 是 $J_v(x)$ 的第 m 个零点。 `</br>`

2.6 应用场景与步骤

应用步骤：

1. **问题建模**：将物理问题（如振动、热传导）的偏微分方程分离变量，得到Sturm-Liouville型常微分方程。
2. **确定边界条件**：根据物理约束（如固定端点、自然边界条件）选择齐次边界。
3. **求解本征值问题**：找到满足方程和边界条件的本征值 λ_n 和本征函数 $y_n(x)$。
4. **函数展开**：将未知函数按本征函数展开，代入原问题求解系数。

典型应用案例：

- **振动弦的模态分析**：波动方程分离变量后导出Sturm-Liouville问题，本征函数为三角函数。
- **圆柱形热传导**：热方程在极坐标下导出贝塞尔方程，展开为傅里叶-贝塞尔级数。
- **量子力学粒子在势阱中**：薛定谔方程转化为Sturm-Liouville问题，本征函数描述能级。 `</br>`

2.7 数学工具与验证

1. **本征值计算**：
   - 解析解：仅对简单方程（如 $q(x) = 0$）可用。
   - 数值方法：打靶法、有限差分法（MATLAB `bvp4c` 函数）。
2. **正交性验证**：

    - 计算积分 $\int_a^b y_m y_n w dx$，检查是否接近零。
3. **收敛性测试**:
    - 截断级数 $f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n y_n(x)$，观察误差随 N 增大而减小。 </br>

2.8 总结

Sturm-Liouville理论为线性微分方程的本征值问题提供了统一框架:

- **正交性**：允许函数按本征函数展开（如傅里叶级数、贝塞尔展开）。
- **完备性**：确保展开式收敛到原函数（在均方意义下）。
- **物理对应**：本征值与本征函数反映系统的固有频率和模态形状。

通过这一理论，复杂的物理问题可分解为简单的模态叠加，成为工程和物理建模的基石。

三、傅里叶-贝塞尔级数展开

3.1 理论推导

傅里叶-贝塞尔级数展开是将一个定义在圆形或圆柱形区域上的函数，用贝塞尔函数作为基函数进行展开的方法。其推导过程基于贝塞尔方程的正交性和Sturm-Liouville理论，以下是详细步骤:

3.1.1 贝塞尔方程与解

贝塞尔方程是圆柱对称问题中的常见微分方程，标准形式为:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0,$$

其中 ν 是阶数（实数）。方程的解为**贝塞尔函数**:

- **第一类贝塞尔函数 $J_\nu(x)$**：在原点处有限（适用于物理问题中的自然边界条件）。

- **第二类贝塞尔函数 $Y_\nu(x)$**：在原点处发散（通常用于特定边值问题）。

3.1.2 正交性的建立

贝塞尔函数在特定区间和权重下满足正交性。考虑区间 $[0, a]$ 上的解，假设存在两个不同根的解 $J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu,m} r}{a}\right)$ 和 $J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu,n} r}{a}\right)$，其中 $\alpha_{\nu,m}$ 是 $J_\nu(x)$ 的第 m 个零点。 其正交性条件为：

$$\int_0^a r J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu,m} r}{a}\right) J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu,n} r}{a}\right) dr = \begin{cases} 0 & \text{若 } m \neq n, \\ \frac{a^2}{2}[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,m})]^2 & \text{若 } m = n. \end{cases}$$

这里的权重 r 来自极坐标系的面积元 $r\, dr\, d\theta$。

3.1.3 Sturm-Liouville理论的应用

贝塞尔方程可以写成Sturm-Liouville形式：

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dy}{dr}\right) + \left(\lambda r - \frac{\nu^2}{r}\right) y = 0,$$

其中 $\lambda = \left(\frac{\alpha_{\nu,m}}{a}\right)^2$ 是本征值。 根据Sturm-Liouville理论，贝塞尔函数构成**完备正交基**，任何满足边界条件的函数均可展开为贝塞尔函数的级数。

3.1.4 傅里叶-贝塞尔级数的形式

设函数 $f(r)$ 在区间 $[0, a]$ 上满足Dirichlet边界条件 $f(a) = 0$，则可展开为：

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu,m} r}{a}\right),$$

其中系数 A_m 由正交性计算：

$$A_m = \frac{2}{a^2 [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,m})]^2} \int_0^a r f(r) J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu,m} r}{a}\right) dr.$$

3.1.5 推导步骤详解

1. **分离变量法**：在极坐标下解波动方程或热传导方程时，径向部分导出贝塞尔方程，角度部分导出三角函数，最终解为 $R(r)\Theta(\theta)$。对于圆对称问题（$v = 0$），角度部分为常数，解简化为 $J_0(kr)$。

2. **边界条件的应用**：假设在 $r = a$ 处函数为零（Dirichlet条件），则要求：

$$J_v\left(\frac{\alpha_{v,m}a}{a}\right) = J_v(\alpha_{v,m}) = 0,$$

   即 $\alpha_{v,m}$ 是 $J_v(x)$ 的第 m 个零点。

3. **归一化系数计算**： 利用正交性积分和贝塞尔函数的递推关系，计算归一化因子 $\frac{a^2}{2}[J_{v+1}(\alpha_{v,m})]^2$。

3.1.6 物理意义与实例

例子：圆形薄膜的振动 薄膜的位移 $u(r, t)$ 可分解为：

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\alpha_{0,m} r}{a}\right)\cos\left(c\frac{\alpha_{0,m} t}{a}\right),$$

其中 c 为波速，每个模式对应一个本征频率 $f_m = \frac{c\alpha_{0,m}}{2\pi a}$。

3.2 关键公式总结

内容	公式
正交性条件	$\int_0^a rJ_v(k_m r)J_v(k_n r)dr = 0 \quad (m \neq n)$
归一化系数	$\int_0^a r[J_v(k_m r)]^2 dr = \frac{a^2}{2}[J_{v+1}(\alpha_{v,m})]^2$
傅里叶-贝塞尔系数	$A_m = \frac{2}{a^2[J_{v+1}(\alpha_{v,m})]^2}\int_0^a rf(r)J_v(k_m r)dr$

3.3 与其他展开方法的对比

方法	基函数	适用坐标	典型应用
傅里叶级数	$\sin(nx), \cos(nx)$	直角坐标系	周期性边界问题（如琴弦）
傅里叶-贝塞尔级数	$J_v(kr)$	极坐标系	圆形振动、圆柱形热传导
球谐函数展开	$Y_{lm}(\theta, \phi)$	球坐标系	量子力学、地球重力场

3.4 数学工具与验证

1. **贝塞尔函数表**：查找零点 $\alpha_{v,m}$ 和函数值（如《数学物理方法》附录）。
2. **数值验证**：
   - 用MATLAB计算积分：`integral(@(r) r.*f(r).*besselj(nu, k_m*r), 0, a)`。
   - 对比展开级数与原函数的误差，验证收敛性。 `</br>`

3.5 总结

傅里叶-贝塞尔级数的推导本质是：

1. 通过分离变量法得到贝塞尔方程。
2. 利用Sturm-Liouville理论证明正交性和完备性。
3. 通过正交投影计算展开系数。 这一方法为圆形或圆柱形区域内的物理问题（如振动、热扩散、电磁场）提供了天然的数学描述工具。

四、角度调制的贝塞尔展开

4.1 角度调制展开公式的详细讲解

角度调制主要包括 **频率调制（FM）** 和 **相位调制（PM）**，其数学表达式为：

$$s(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + \beta \cdot m(t)\right),$$

其中:

- A_c 是载波幅度,
- f_c 是载波频率,
- β 是调制指数,
- $m(t)$ 是调制信号（例如 $m(t) = \sin(2\pi f_m t)$）。

对于单频调制信号 $m(t) = \sin(2\pi f_m t)$，信号可写为:

$$s(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)\right).$$

4.2 基于贝塞尔函数的展开

4.2.1 贝塞尔函数的引入

角度调制的核心挑战是展开含调制项的余弦函数。利用贝塞尔函数的关键在于 **傅里叶-贝塞尔级数展开**，其公式为:

$$\cos(z \sin\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z) \cos(k\theta),$$

$$\sin(z \sin\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z) \sin(k\theta),$$

其中 $J_k(z)$ 是第 k 阶第一类贝塞尔函数。

4.2.2 角度调制信号的展开

对于调制信号 $s(t)$，通过三角恒等式和贝塞尔展开:

$$s(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)\right)$$

$$= A_c \left[\cos(2\pi f_c t) \cos(\beta \sin(2\pi f_m t)) - \sin(2\pi f_c t) \sin(\beta \sin(2\pi f_m t))\right].$$

应用贝塞尔函数展开:

$$\cos(\beta \sin\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cos(k\theta),$$

$$\sin(\beta\sin\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta)\sin(k\theta),$$

代入后得到:

$$s(t) = A_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta)\left[\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi k f_m t) - \sin(2\pi f_c t)\sin(2\pi k f_m t)\right].$$

进一步简化:

$$s(t) = A_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta)\cos\left(2\pi(f_c + k f_m)t\right).$$

4.3 频谱特性与贝塞尔函数的作用

1. **边带频率**: 信号包含无穷多个边带，频率为 $f_c \pm k f_m$，幅度由 $J_k(\beta)$ 决定。
2. **幅度分布**:
   - 小调制指数 ($\beta \ll 1$): 只有少数边带显著（如 $k = 0, \pm 1$）。
   - 大调制指数 ($\beta \gg 1$): 边带数量增多，幅度呈现振荡衰减（由贝塞尔函数特性决定）。
3. **能量守恒**: 总功率为 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(\beta) = 1$，表明能量分布在所有边带中。

4.4 其他角度调制展开方法

4.4.1 泰勒级数展开

- **适用条件**: 小调制指数（$\beta \ll 1$）。

- **展开形式**:

$$\cos(\beta\sin\theta) \approx 1 - \frac{\beta^2}{2}\sin^2\theta + \cdots,$$

  但无法准确描述大调制指数的无穷边带特性。

4.4.2 雅可比-安格尔展开（Jacobi-Anger Expansion）

- **公式**:

$$e^{iz\cos\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(z) e^{ik\theta},$$

  用于复数形式的信号展开，与贝塞尔展开等价。具体的推导见雅可比-安格尔展开推导

4.4.3 卡普兰-约克展开（Carson's Rule近似）

- **应用场景**：宽带调频（WBFM）的简化分析。
- **核心思想**：将调频信号近似为带宽 $B \approx 2(\beta + 1)f_m$，但无法提供精确边带幅度。

4.5 贝塞尔函数展开的数学推导

4.5.1 推导步骤

1. **傅里叶级数展开调制项**：将 $\cos(\beta\sin\theta)$ 和 $\sin(\beta\sin\theta)$ 展开为傅里叶级数，系数由贝塞尔函数定义。

2. **贝塞尔积分表达式**：利用贝塞尔函数的积分定义：

$$J_k(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\beta\sin\theta - k\theta)} d\theta,$$

   导出三角形式的展开式。

3. **正交性**： 贝塞尔函数满足正交性条件，使得展开系数唯一。

具体的推导步骤见贝塞尔函数展开公式推导，复数形式的贝塞尔展开（雅可比-安格尔展开）详细推导见雅可比-安格尔展开。

4.6 总结

- **贝塞尔函数展开** 是角度调制的核心工具，完美描述无限边带特性。
- **替代方法**（如泰勒展开）仅适用于特定简化场景，无法替代贝塞尔展开的普适性。
- **实际应用**：在通信系统设计、雷达信号处理中，贝塞尔展开用于计算频谱占用和干扰分析。