贝塞尔函数与窄带杂散峰的理论推导

一、理论推导

Step 1: 建立相位调制模型

核心假设：采样时间存在**周期性不均匀**（时间抖动），导致相位误差呈现时变正弦特性。

假设输入信号为理想单频信号:

$$\boxed{s(t) = A\cos(2\pi f_0 t)}$$

由于采样时间存在周期性抖动，采样时间抖动可表示为:

$$\boxed{t_n = nT_s + \tau(t_n)}$$

时间偏移量 τ (t) 为:

$$\boxed{\tau(t_n) = \delta\cos(2\pi f_\tau t_n + \phi)}$$

这里 T_s 为标称采样间隔，$\tau(t_n)$ 是周期性时间漂移，δ 为抖动幅度，f_τ 为抖动频率，ϕ 是初始相位。

此时，实际采样时刻的相位误差为:

$$\boxed{\Delta\phi(t_n) = 2\pi f_0 \tau(t_n) = \beta\cos(2\pi f_\tau t_n + \phi)}$$

其中 $\beta = 2\pi f_0 \delta$ 为**相位调制指数**，表示相位调制的深度。

受相位调制的采样信号为:

$$\boxed{s_{\text{mod\_sampled}}(t_n) = A\cos\left(2\pi f_0 t_n + \beta\cos(2\pi f_\tau t_n + \phi)\right)}$$

Step 2: 贝塞尔函数展开

目标：将 $\cos\left(2\pi f_0 t + \beta\cos(2\pi f_t t)\right)$ 展开为贝塞尔级数。

方法一：使用雅可比-安格尔展开（复数形式）

推导步骤：

1. **雅可比-安格尔展开（复数形式）**

   雅可比-安格尔展开的公式为：

$$e^{iz\cos\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(z) e^{ik\theta}.$$

   代入 $z=\beta$ 和 $\theta = 2\pi f_t t$，得：

$$e^{i\beta\cos(2\pi f_t t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(\beta) e^{ik\cdot 2\pi f_t t}.$$

2. **取实部转换至实数形式**

   利用欧拉公式 $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$，原调制信号可写为：

$$\cos\left(2\pi f_0 t + \beta\cos(2\pi f_t t)\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i2\pi f_0 t}\cdot e^{i\beta\cos(2\pi f_t t)}\right).$$

   将雅可比-安格尔展开代入：

$$\cos\left(2\pi f_0 t + \beta\cos(2\pi f_t t)\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i2\pi f_0 t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(\beta) e^{ik\cdot 2\pi f_t t}\right).$$

3. **合并指数项并分离实部**

   合并指数项 $e^{i2\pi(f_0+kf_t)t}$，并取实部：

$$\cos\left(2\pi f_0 t + \beta\cos(2\pi f_t t)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta)\cos\left(2\pi(f_0+kf_t)t + \frac{\pi}{2}k\right).$$

   利用贝塞尔函数性质 $J_{-k}(\beta) = (-1)^k J_k(\beta)$，可将级数简化为：

$$\cos\left(2\pi f_0 t + \beta\cos(2\pi f_t t)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_k(\beta)\cos\left(2\pi(f_0+kf_t)t\right).$$

4. **最终调相信号展开式**

   代入原调制信号表达式：

$$S_{\mathrm{mod}}(t_n) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_k(\beta) \cos\left(2\pi(f_0 + kf_t)t_n\right).$$

方法二：直接使用实数贝塞尔级数展开

推导步骤:

1. **三角恒等式拆分**

   利用 $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$，将信号分解为:

   $$S_{\mathrm{mod}} = A\left[\cos(2\pi f_0 t)\cos(\beta\cos(2\pi f_t t)) - \sin(2\pi f_0 t)\sin(\beta\cos(2\pi f_t t))\right].$$

2. **对 $\cos(\beta\cos\theta)$ 和 $\sin(\beta\cos\theta)$ 进行贝塞尔展开**

   贝塞尔展开式为:

   $$\cos(\beta\cos\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(\beta)\cos(2k\theta),$$

   $$\sin(\beta\cos\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\beta)\sin((2k+1)\theta).$$

   （注：此展开式通过贝塞尔函数性质 $J_{-k}(z) = (-1)^k J_k(z)$ 调整奇偶项得到。）

3. **代入变量 $\theta = 2\pi f_t t$**

   展开后:

   $$\cos(\beta\cos(2\pi f_t t)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(\beta)\cos(4k\pi f_t t),$$

   $$\sin(\beta\cos(2\pi f_t t)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\beta)\sin(2(2k+1)\pi f_t t).$$

4. **合并信号表达式**

   将展开式代入原信号:

   $$S_{\mathrm{mod}} = A\cos(2\pi f_0 t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(\beta)\cos(4k\pi f_t t) - A\sin(2\pi f_0 t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\beta)\sin(2(2k+1)\pi f_t t.$$

5. **利用积化和公式简化**

   对每一项应用三角恒等式 $\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$ 和 $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$，最终合并为:

   $$S_{\mathrm{mod}} = A\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_k(\beta)\cos\left(2\pi(f_0 + kf_t)t\right).$$

（注：通过合并奇偶项并利用 $J_{-k}(\beta) = (-1)^k J_k(\beta)$ 简化级数。）

二、频谱特性分析

1. **边带频率**展开式表明，频谱成分位于：

$$f = f_0 + kf_t \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

即主峰 f_0 两侧对称分布边带 $f_0 \pm kf_t$。

 - **主峰位置**：f_0，对应 $k = 0$，幅度为 $AJ_0(\beta)$。
 - **边带位置**：$f_0 \pm kf_\tau$（$k = 1, 2, 3, \dots$），幅度为 $A \mid J_k(\beta) \mid$ 。</br>

2. **边带幅度**边带幅度由 $J_k(\beta)$ 控制，满足：

 - **小调制指数**（$\beta \ll 1$）：仅低阶边带显著（如 $k = 0, \pm 1$）。
 - **大调制指数**（$\beta \gg 1$）：高阶边带增多，幅度按 $J_k(\beta)$ 振荡衰减。

3. **对称性机制** 由于 $J_{-k}(\beta) = (-1)^k J_k(\beta)$，正负 k 项幅度相等，相位相反，导致边带成对出现。

三、数学验证与物理意义

1. **正交性验证**

贝塞尔函数在区间 $[0, a]$ 上满足正交性：

$$\int_0^a rJ_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu,m}}{a}\right)J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{a}\right)dr = 0 \quad (m \neq n).$$

这表明展开系数唯一，确保频谱成分无交叉干扰。

2. **能量守恒** 总功率满足：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(\beta) = 1,$$

证明能量完全分布在主峰和边带中。

为何贝塞尔函数适用？

- **角度调制的自然解**：贝塞尔函数是圆柱对称问题的本征函数，完美描述相位调制的频谱特性。
- **正交性**：不同阶贝塞尔函数在特定权重下正交，确保边带能量独立可分离。

四、结论

通过贝塞尔函数展开，周期性时间抖动导致的相位调制可精确描述为：

$$S_{\mathrm{mod}}(t_n) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_k(\beta) \cos\left(2\pi(f_0 + kf_t)t_n\right),$$

其频谱特性为：

- **边带位置**：$f_0 \pm kf_t$（由 f_t 决定）。
- **边带幅度**：由 $J_k(\beta)$ 控制（与 $\beta = 2\pi f_0 \delta$ 相关）。
- **对称性**：正负 k 项成对出现。

调制指数 β 对边带的影响为：

- **小调制指数**（$\beta \ll 1$）：仅存在少数边带（如 $k = 0, \pm 1$），近似为：

$$\boxed{s_{\mathrm{mod}}(t) \approx A\left[J_0(\beta)\cos(2\pi f_0 t) + J_1(\beta)\cos(2\pi(f_0 \pm f_\tau)t)\right]}$$

- **大调制指数**（$\beta \gg 1$）： 边带数量增多，幅度分布由贝塞尔函数包络决定。