雅可比-安格尔展开的复数形式将复指数函数表示为贝塞尔函数的级数，其推导可通过生成函数或傅里叶级数方法完成。以下是详细推导过程：

推导方法一：生成函数法

贝塞尔函数的生成函数为：

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n$$

步骤：

1. **变量替换**：令 $t = ie^{i\theta}$，代入生成函数：

$$e^{\frac{z}{2}\left(ie^{i\theta}-\frac{1}{ie^{i\theta}}\right)}.$$

2. **化简指数部分**：

$$\begin{aligned} ie^{i\theta} - \frac{1}{ie^{i\theta}} &= ie^{i\theta} + ie^{-i\theta} \quad (\text{因 } 1/i = -i) \\ &= i\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = 2i\cos\theta. \end{aligned}$$

3. **代入生成函数**：

$$e^{iz\cos\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\left(ie^{i\theta}\right)^n.$$

4. **整理指数项**：

$$\left(ie^{i\theta}\right)^n = i^n e^{in\theta}.$$

5. **最终展开式**：

$$e^{iz\cos\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta}.$$

推导方法二：傅里叶级数法

将 $e^{iz\cos\theta}$ 展开为傅里叶级数：

$$e^{iz\cos\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta},$$

其中系数 c_n 为：

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\cos\theta} e^{-in\theta} d\theta.$$

步骤：

1. **积分表达式**：利用贝塞尔函数的积分定义：

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z\sin\phi - n\phi)} d\phi.$$

2. **变量替换**：令 $\phi = \theta - \pi/2$，则 $\cos\theta = \sin\phi$，积分变为：

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\sin\phi} e^{-in(\phi+\pi/2)} d\phi.$$

3. **化简指数**：

$$e^{-in(\phi+\pi/2)} = e^{-in\phi} e^{-in\pi/2}.$$

4. **关联贝塞尔函数**：

$$c_n = e^{-in\pi/2} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z\sin\phi - n\phi)} d\phi = e^{-in\pi/2} J_n(z).$$

5. **系数化简**：注意到 $e^{-in\pi/2} = (-i)^n = i^{-n}$，故：

$$c_n = i^{-n} J_n(z).$$

6. **代入级数**：

$$e^{iz\cos\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{-n} J_n(z) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{-in\theta}.$$

（通过替换 $n \to -n$ 可得标准形式）

最终结果

雅可比-安格尔展开的复数形式为:

$$e^{iz\cos\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta}.$$

关键点：通过生成函数或傅里叶级数，结合贝塞尔函数的积分定义，导出复指数展开式中的系数为 $i^n J_n(z)$。