贝塞尔函数展开公式推导

---

1. 贝塞尔函数展开公式

- **余弦项的展开式**:

$$\cos(\beta\cos\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(\beta)\cos(2k\theta),$$

  适用于将含 $\cos(\beta\cos\theta)$ 的表达式展开为偶对称贝塞尔级数。

- **正弦项的展开式**:

$$\sin(\beta\cos\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\beta)\sin((2k+1)\theta),$$

  适用于将含 $\sin(\beta\cos\theta)$ 的表达式展开为奇对称贝塞尔级数。

---

2. 推导步骤

步骤1：利用贝塞尔函数的生成函数

贝塞尔函数的生成函数为：

$$e^{\frac{\beta}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) z^k.$$

令 $z = e^{i\theta}$，则：

$$e^{i\beta\cos\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(\beta) e^{ik\theta}.$$

取实部和虚部分别对应余弦和正弦项的展开。

步骤2：分离实部与虚部

将生成函数分解为实数形式：

$$\cos(\beta\cos\theta) + i\sin(\beta\cos\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(\beta)\left(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)\right).$$

分离实部和虚部：

$$\cos(\beta\cos\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(\beta)\cos(2k\theta),$$

$$\sin(\beta\cos\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\beta)\sin((2k+1)\theta).$$

推导细节：

1. **索引替换**：将 k 替换为 $2k$（偶项）和 $2k+1$（奇项），利用 $J_{-k}(\beta) = (-1)^k J_k(\beta)$。
2. **符号调整**：通过 $i^k = e^{ik\pi/2}$ 和 $(-1)^k = e^{ik\pi}$，合并相位项后得到实数形式。

步骤3：具体推导（以余弦项为例）

1. **生成函数展开**：

$$\cos(\beta\cos\theta) = \mathrm{Re}\left(e^{i\beta\cos\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) i^k e^{ik\theta}\right).$$

2. **分离偶次项与奇次项**:

   - 偶次项（$k = 2m$）:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{2m}(\beta) i^{2m} e^{i2m\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(\beta) e^{i2m\theta}.$$

   - 奇次项（$k = 2m + 1$）:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{2m+1}(\beta) i^{2m+1} e^{i(2m+1)\theta} = i \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_{2m+1}(\beta) e^{i(2m+1)\theta}.$$

3. **取实部并合并**:

   - 偶次项实部为 $(-1)^m J_{2m}(\beta)\cos(2m\theta)$。
   - 奇次项实部为 $(-1)^m J_{2m+1}(\beta)\sin((2m+1)\theta)$，但因奇对称性在总和中抵消。
   - 最终仅保留偶次项:

$$\cos(\beta\cos\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(\beta)\cos(2m\theta).$$

步骤4：正弦项的推导

类似地，对虚部展开:

$$\sin(\beta\cos\theta) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) i^k e^{ik\theta}\right),$$

通过奇次项主导的展开，最终得到:

$$\sin(\beta\cos\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_{2m+1}(\beta)\sin((2m+1)\theta).$$

---

3. 数学验证

1. **正交性验证**： 贝塞尔函数满足正交性:

$$\int_0^{2\pi} \cos(2k\theta)\cos(2m\theta)d\theta = \begin{cases} 0 & (k \neq m), \\ \pi & (k = m \neq 0), \\ 2\pi & (k = m = 0). \end{cases}$$

展开系数 $(-1)^k J_{2k}(\beta)$ 通过正交投影唯一确定。

2. **特例验证（小 β）**:
   - 当 $\beta \ll 1$ 时，$J_0(\beta) \approx 1$，$J_{2k}(\beta) \approx 0$（$k \geq 1$），展开式退化为:

   $$\cos(\beta\cos\theta) \approx J_0(\beta) - 2J_2(\beta)\cos(2\theta) + \cdots ,$$

   与泰勒展开一致。

贝塞尔函数生成函数

贝塞尔函数的生成函数定义为:

$$e^{\frac{\beta}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta)z^k,$$

其中 $J_k(\beta)$ 是第 k 阶第一类贝塞尔函数。以下是其详细推导过程:

步骤1：从贝塞尔函数的积分表达式出发

第一类贝塞尔函数的积分定义为:

$$J_k(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\beta\sin\theta - k\theta)}d\theta.$$

通过分析指数函数的周期性，可以将其展开为傅里叶级数。

步骤2：构造生成函数

考虑如下指数函数:

$$e^{\frac{\beta}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = e^{\frac{\beta z}{2}} \cdot e^{-\frac{\beta}{2z}}.$$

将其展开为两个幂级数的乘积:

$$e^{\frac{\beta z}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\beta z/2)^m}{m!}, \quad e^{-\frac{\beta}{2z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta/(2z))^n}{n!}.$$

两式相乘后得到:

$$e^{\frac{\beta}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta/2)^m(-\beta/2)^n}{m!n!} z^{m-n}.$$

步骤3：变量替换与级数重组

令 $k = m - n$，则 $m = k + n$，级数可改写为:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta/2)^{k+n}(-\beta/2)^n}{(k+n)!n!} \right) z^k.$$

通过调整求和顺序，内层和式为:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\beta/2)^{k+2n}}{(k+n)!n!}.$$

步骤4：与贝塞尔函数的级数表达式对比

贝塞尔函数的级数定义为:

$$J_k(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(k+n)!} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{k+2n}.$$

对比步骤3中的内层和式，发现其与 $J_k(\beta)$ 的级数完全一致。因此:

$$e^{\frac{\beta}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) z^k.$$

步骤5：验证生成函数的物理意义

1. **对称性**：当 $z \to -1/z$，生成函数保持不变，对应贝塞尔函数的性质 $J_{-k}(\beta) = (-1)^k J_k(\beta)$。

2. **特例验证**：

   - 当 $z = e^{i\theta}$，生成函数退化为：

     $$e^{i\beta \sin\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) e^{ik\theta},$$

     这是贝塞尔函数的傅里叶级数展开，与积分定义一致。

总结

生成函数的推导通过以下关键步骤完成：

1. **构造指数形式的生成函数**：利用 z 和 $1/z$ 的对称性生成正负幂次项。
2. **级数展开与重组**：通过双重级数展开和变量替换匹配贝塞尔函数的级数定义。
3. **验证一致性**：对比级数系数与贝塞尔函数的表达式，确认生成函数的正确性。