

homework7

问题一

7.4 以下式子哪些是正确的？

- a. $False \models True$ 。
- b. $True \models False$ 。
- c. $(A \wedge B) \models (A \Leftrightarrow B)$ 。
- d. $A \Leftrightarrow B \models A \vee B$ 。
- e. $A \Leftrightarrow B \models \neg A \vee B$ 。
- f. $(A \wedge B) \Rightarrow C \models (A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)$ 。
- g. $(C \vee (\neg A \wedge \neg B)) \equiv ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$ 。
- h. $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee E) \models (A \vee B)$ 。
- i. $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee E) \models (A \vee B) \wedge (\neg D \vee E)$ 。
- j. $(A \vee B) \wedge \neg(A \Rightarrow B)$ 是可满足的。
- k. $(A \Leftrightarrow B) \wedge (\neg A \vee B)$ 是可满足的。
- l. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$ 与包含固定集合命题符号 A, B, C 的 $(A \Leftrightarrow B)$ 的模型数相等。

逻辑符号回顾

首先明确一下涉及到的主要逻辑符号含义：

- \models 表示逻辑后承 (logical consequence)，意思是在所有使左边式子为真的解释下，右边式子也一定为真。
- \wedge 表示逻辑与 (and)，只有当参与运算的两个命题都为真时，结果才为真。
- \vee 表示逻辑或 (or)，只要参与运算的两个命题中有一个为真，结果就为真。
- \rightarrow 表示逻辑蕴涵 (implication)，当前提为真时，若结论为假则整个蕴涵式为假，其余情况 (前提为假或者前提和结论都为真) 蕴涵式为真。
- \Leftrightarrow 表示逻辑等价 (equivalence)，要求两边命题的真值始终相同。
- \neg 表示逻辑非 (negation)，对命题的真值取反。

各选项分析

- a. $False \models True$:
 - 分析：根据逻辑后承的定义，虽然 $False$ 本身在任何解释下都不可能为真，但按照逻辑中“假前提可以蕴含任何结论”的规则 (因为不存在使 $False$ 为真的情况去违反右边结论的真值要求)，所以从逻辑后承角度可以说 $False \models True$ 是成立的。
 - 答案：正确。
- b. $True \models False$:
 - 分析： $True$ 作为前提，如果按照逻辑后承的要求，意味着在 $True$ 为真的所有解释下，右边的 $False$ 也得为真，但显然 $True$ 为真时无法保证 $False$ 为真呀，这不符合逻辑后承的定义。

- 答案：不正确。
- c. $(A \wedge B) \models (A \Leftrightarrow B)$:
 - 分析：当 $(A \wedge B)$ 为真时，意味着 A 和 B 同时为真。而对于 $(A \Leftrightarrow B)$ 为真要求 A 和 B 同真同假。仅由 A 和 B 同时为真这一情况（也就是 $(A \wedge B)$ 为真的情况）不能必然推出在所有解释下只要 A 和 B 取值就一定同真同假（比如可以出现 A 真 B 假等其他使 $(A \Leftrightarrow B)$ 为假的赋值情况），所以不满足逻辑后承关系。
 - 答案：不正确。
- d. $A \Leftrightarrow B \models A \vee B$:
 - 分析： $A \Leftrightarrow B$ 表示 A 和 B 有相同的真值，当 A 和 B 同为假时， $A \Leftrightarrow B$ 为真，但此时 $A \vee B$ 为假，也就是说存在使左边 $A \Leftrightarrow B$ 为真但右边 $A \vee B$ 不为真的情况，不符合逻辑后承定义。
 - 答案：不正确。
- e. $A \Leftrightarrow B \models \neg A \vee B$:
 - 分析：同样，当 A 和 B 都为假时， $A \Leftrightarrow B$ 为真，而此时 $\neg A \vee B$ 为假，存在这种左边为真右边不为真的赋值情况，不满足逻辑后承要求。
 - 答案：不正确。
- f. $(A \wedge B) \rightarrow C \models (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$:
 - 分析：
 - 先看左边式子 $(A \wedge B) \rightarrow C$ ，其等价于 $\neg(A \wedge B) \vee C$ ，也就是 $(\neg A \vee \neg B) \vee C$ 。
 - 再看右边式子 $(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$ ，等价于 $(\neg A \vee C) \vee (\neg B \vee C)$ ，整理后也是 $(\neg A \vee \neg B) \vee C$ 。
 - 可以发现左右两边式子是逻辑等价的，那么必然满足逻辑后承关系，因为只要左边为真右边肯定为真（它们真值始终一样）。
 - 答案：正确。
- g. $(C \vee (\neg A \wedge \neg B)) \equiv ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$:
 - 分析：
 - 左边式子 $(C \vee (\neg A \wedge \neg B))$ 等价于 $C \vee \neg(A \vee B)$ 。
 - 右边式子 $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$ 等价于 $((\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C))$ ，进一步可整理为 $(\neg A \wedge \neg B) \vee C$ ，也就是 $C \vee (\neg A \wedge \neg B)$ 。
 - 左右两边式子逻辑等价，所以满足逻辑后承关系，因为在所有使左边式子为真的解释下，右边式子必然也为真（二者真值相同）。
 - 答案：正确。
- h. $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee E) \models (A \vee B)$:
 - 分析：对于逻辑后承关系，如果左边式子 $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee E)$ 为真，由于逻辑与的性质，就要求 $(A \vee B)$ 和 $(\neg C \vee \neg D \vee E)$ 都为真，那必然意味着 $(A \vee B)$ 为真呀，所以满足逻辑后承定义。
 - 答案：正确。
- i. $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee E) \models (A \vee B) \wedge (\neg D \vee E)$:
 - 分析：当左边式子 $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee E)$ 为真时，只能保证 $(A \vee B)$ 和 $(\neg C \vee \neg D \vee E)$ 为真，但不能必然保证 $(A \vee B) \wedge (\neg D \vee E)$ 一定为真，比如存在 C 为假， D 为真等情况使得左边为真但右边的 $(\neg D \vee E)$ 部分不一定满足，不满足逻辑后承要求。
 - 答案：不正确。
- j. $(A \vee B) \wedge \neg(A \rightarrow B)$ 是可满足的：
 - 分析：式子 $(A \vee B) \wedge \neg(A \rightarrow B)$ 中， $\neg(A \rightarrow B)$ 等价于 $A \wedge \neg B$ ，那么原式子就相当于 $(A \vee B) \wedge (A \wedge \neg B)$ ，当 A 为真且 B 为假时，这个式子为真，所以它是可满足的，存在使其成立的赋值情况。

- 答案：正确。
- k. $(A \Leftrightarrow B) \wedge \neg(A \vee B)$ 是可满足的：
 - 分析：式子 $(A \Leftrightarrow B) \wedge \neg(A \vee B)$ 中， $\neg(A \vee B)$ 等价于 $\neg A \wedge \neg B$ ，原式子就变为 $(A \Leftrightarrow B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$ ，当 A 和 B 都为假时，该式子为真，所以存在使其满足的赋值情况，是可满足的。
 - 答案：正确。
- l. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$ 与包含固定集合命题符号 A、B、C 的 $(A \Leftrightarrow B)$ 的模型数相等：
 - 分析：
 - 对于 $(A \Leftrightarrow B)$ ，其有 4 种不同的真值组合情况 (A 真 B 真、A 真 B 假、A 假 B 真、A 假 B 假)。
 - 而对于 $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$ ，它一共有 8 种不同的真值组合情况，因为涉及到三个命题的取值组合了。
 - 显然二者的模型数 (也就是使其为真的不同赋值情况数量) 是不相等的。
 - 答案：不正确。

总结：正确的选项是 a、f、g、h、j、k。