homework12

问题一

- **对于下面的每个断言，或者证明其为真，或者给出一个反例**
  - $If\ P(a|b,c) = P(b|a,c), then\ P(a|c) = P(b|c)$
  - $If\ P(a|b,c) = P(a), then\ P(b|c) = P(b)$
  - $If\ P(a|b) = P(a), then\ P(a|b,c) = P(a|c)$

1. 首先分析第一个断言:
   - 断言为：If $P(a|b,c) = P(b|a,c)$, then $P(a|c) = P(b|c)$
   - 证明:
     - 根据贝叶斯定理，$P(a|b,c) = \frac{P(a,b,c)}{P(b,c)}$，$P(b|a,c) = \frac{P(a,b,c)}{P(a,c)}$
     - 已知$P(a|b,c) = P(b|a,c)$，即$\frac{P(a,b,c)}{P(b,c)} = \frac{P(a,b,c)}{P(a,c)}$
     - 由此可得$P(a,c) = P(b,c)$
     - 再根据条件概率的定义，$P(a|c) = \frac{P(a,c)}{P(c)}$，$P(b|c) = \frac{P(b,c)}{P(c)}$
     - 因为$P(a,c) = P(b,c)$，所以$P(a|c) = P(b|c)$
   - 所以第一个断言是正确的。
2. 接着分析第二个断言:
   - 断言为：If $P(a|b,c) = P(a)$, then $P(b|c) = P(b)$
   - 证明:
     - 已知$P(a|b,c) = P(a)$，根据条件概率的定义$P(a|b,c) = \frac{P(a,b,c)}{P(b,c)}$
     - 即$\frac{P(a,b,c)}{P(b,c)} = P(a)$，所以$P(a,b,c) = P(a)P(b,c)$
     - 再根据贝叶斯定理$P(b|c) = \frac{P(b,c)}{P(c)}$
     - 但是无法从$P(a,b,c) = P(a)P(b,c)$推出$P(b|c) = P(b)$
     - 反例:
       - 设掷一个均匀的六面骰子。令事件a为“骰子的点数是偶数”；事件b为“骰子的点数小于等于3”；事件c为“骰子的点数大于1”。
       - 首先计算$P(a|b,c)$:

            - $P(a \cap b \cap c)$表示骰子的点数是偶数、小于等于3并且大于1，即$a \cap b \cap c = \{2\}$，所以$P(a \cap b \cap c) = \frac{1}{6}$。
            - $P(b \cap c)$表示骰子的点数小于等于3并且大于1，即$b \cap c = \{2, 3\}$，所以$P(b \cap c) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$。
            - 根据条件概率公式$P(a|b, c) = \frac{P(a \cap b \cap c)}{P(b \cap c)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$。
            - 而$P(a) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$，所以$P(a|b, c) = P(a)$成立。
        - 接着计算$P(b|c)$：
            - $P(b \cap c) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$（前面已计算）。
            - $P(c) = \frac{5}{6}$。
            - 根据条件概率公式$P(b|c) = \frac{P(b \cap c)}{P(c)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5}$。
            - 而$P(b) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$，所以$P(b|c) \neq P(b)$。
    - 所以第二个断言是错误的。
3. 最后分析第三个断言：
    - 断言为：If $P(a|b) = P(a)$, then $P(a|b, c) = P(a|c)$
    - 证明：
        - 已知$P(a|b) = P(a)$，说明a和b是独立事件，即$P(a, b) = P(a)P(b)$
        - 根据条件概率的定义$P(a|b, c) = \frac{P(a,b,c)}{P(b,c)}$
        - 但是无法从$P(a, b) = P(a)P(b)$推出$P(a|b, c) = P(a|c)$
        - 反例：
            - 设掷一个六面的骰子。事件a：骰子的点数是奇数；事件b：骰子的点数小于等于4；事件c：骰子的点数为1或6。
            - 可以计算出$P(a|b) = P(a) = \frac{1}{2}$，但是$P(a|b, c) = 1$，$P(a|c) = \frac{1}{2}$，二者并不相等。
    - 所以第三个断言是错误的。

综上：

- 第一个断言是正确的。
- 第二个断言是错误的。
- 第三个断言是错误的。

问题二

- **证明乘法规则的条件化版本：**
  - $P(X,Y|e) = P(X|Y,e)P(Y|e)$

一、首先，明确问题

乘法规则是概率论中的一个基本概念，用于计算两个事件同时发生的概率。条件化版本的乘法规则是指在给定第三个事件 e 的条件下，两个事件 X 和 Y 同时发生的概率。公式如下：

$$P(X,Y|e) = P(X|Y,e)P(Y|e)$$

这个公式的意思是，在事件 e 发生的条件下，事件 X 和 Y 同时发生的概率等于在 Y 和 e 都发生的条件下 X 发生的概率，乘以在 e 发生的条件下 Y 发生的概率。

二、回顾条件概率的定义

- 条件概率的定义为：$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$，其中$P(B) > 0$。

三、从左到右证明等式

- 从左边开始：$P(X,Y|e)$
  - 根据条件概率的定义，$P(X,Y|e) = \frac{P(X,Y,e)}{P(e)}$。
- 现在看右边：$P(X|Y,e)P(Y|e)$
  - 首先，$P(X|Y,e) = \frac{P(X,Y,e)}{P(Y,e)}$，$P(Y|e) = \frac{P(Y,e)}{P(e)}$。
  - 将这两个式子相乘：
    - $P(X|Y,e)P(Y|e) = \frac{P(X,Y,e)}{P(Y,e)} \cdot \frac{P(Y,e)}{P(e)} = \frac{P(X,Y,e)}{P(e)}$。

四、比较左右两边

- 左边：$P(X,Y|e) = \frac{P(X,Y,e)}{P(e)}$
- 右边：$P(X|Y,e)P(Y|e) = \frac{P(X,Y,e)}{P(e)}$
- 左右两边相等，证明完成。

因此，$P(X,Y|e) = P(X|Y,e)P(Y|e)$得证。