

homework13

问题

- 袋子里面有3个有偏差的硬币a、b和c，抛掷硬币正面朝上的概率分别是20%、60%和80%。从袋子里随机取出一个硬币（3个硬币被取出的概率是相等的），并把取出的硬币抛掷3次，得到抛掷结果依次是 X_1 、 X_2 和 X_3 。
- a. 画出对应的贝叶斯网络并定义必要的CPT表。
- b. 如果抛掷结果是2次正面朝上，1次反面朝上，计算取出的硬币最可能是哪一个。

解答

一、贝叶斯网络及CPT表

• 贝叶斯网络：

- 首先构建一个简单的贝叶斯网络结构。有一个根节点表示“取出的硬币”，它有三个状态：a、b、c，且每个状态的先验概率相等，即 $P(\text{取出的硬币} = a) = P(\text{取出的硬币} = b) = P(\text{取出的硬币} = c) = \frac{1}{3}$ 。
- 从“取出的硬币”这个根节点分别引出三条有向边到三个子节点 X_1 、 X_2 、 X_3 ，这三个子节点分别表示三次抛掷硬币的结果，每个子节点的取值为正面（heads，简称H）或反面（tails，简称T）。

• CPT表（条件概率表）：

- 对于硬币a：
 - 当取出的硬币是a时，每次抛掷硬币正面朝上的概率为 $P(X_i = H | \text{取出的硬币} = a) = 0.2$ ，那么反面朝上的概率就是 $P(X_i = T | \text{取出的硬币} = a) = 1 - 0.2 = 0.8$ （这里的 $i = 1, 2, 3$ ，表示三次抛掷中的任意一次）。
- 对于硬币b：

- 同理，当取出的硬币是b时， $P(X_i = H | \text{取出的硬币} = b) = 0.6$ ， $P(X_i = T | \text{取出的硬币} = b) = 1 - 0.6 = 0.4$ 。
- 对于硬币c：
 - 当取出的硬币是c时， $P(X_i = H | \text{取出的硬币} = c) = 0.8$ ， $P(X_i = T | \text{取出的硬币} = c) = 1 - 0.8 = 0.2$ 。

二、计算取出的硬币最可能是哪一个（已知抛掷结果是2次正面朝上，1次反面朝上）

• 基本原理：

- 根据贝叶斯公式 $P(C|D) = \frac{P(D|C)P(C)}{P(D)}$ ，其中C表示“取出的硬币是某一种”（这里分别是a、b、c），D表示“抛掷结果是2次正面朝上，1次反面朝上”。由于分母 $P(D)$ 对于三种硬币的计算是相同的，所以我们可以先不计算分母，只计算分子 $P(D|C)P(C)$ ，最后通过比较它们的大小来确定哪种硬币的后验概率最大，即最有可能是取出的硬币。
- 又因为 $P(C) = \frac{1}{3}$ （三个硬币被取出的概率相等），所以实际上只需要比较 $P(D|C)$ 的大小即可。

• 计算过程：

◦ 对于硬币a：

- 要得到抛掷结果是2次正面朝上，1次反面朝上的情况，从三次抛掷结果中选2次正面朝上的组合数为 $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ 种。
- 当取出的硬币是a时，每次抛掷正面朝上的概率是0.2，反面朝上的概率是0.8。所以出现2次正面朝上，1次反面朝上的概率为：
- $P(2heads, 1tails | C = a) = C_3^2 \times 0.2^2 \times 0.8^1 = 3 \times 0.04 \times 0.8 = 0.096$

◦ 对于硬币b：

- 同样，从三次抛掷结果中选2次正面朝上的组合数为 $C_3^2 = 3$ 种。
- 当取出的硬币是b时，每次抛掷正面朝上的概率是0.6，反面朝上的概率是0.4。所以出现2次正面朝上，1次反面朝上的概率为：
- $P(2heads, 1tails | C = b) = C_3^2 \times 0.6^2 \times 0.4^1 = 3 \times 0.36 \times 0.4 = 0.432$

◦ 对于硬币c：

- 从三次抛掷结果中选2次正面朝上的组合数还是 $C_3^2 = 3$ 种。
- 当取出的硬币是c时，每次抛掷正面朝上的概率是0.8，反面朝上的概率是0.2。所以出现2次正面朝上，1次反面朝上的概率为：
- $P(2heads, 1tails | C = c) = C_3^2 \times 0.8^2 \times 0.2^1 = 3 \times 0.64 \times 0.2 = 0.384$

• 比较与结论：

- 比较 $P(2heads, 1tails | C = a) = 0.096$ ， $P(2heads, 1tails | C = b) = 0.432$ ， $P(2heads, 1tails | C = c) = 0.384$ 的大小，可得 $0.432 > 0.384 > 0.096$ 。
- 所以，当抛掷结果是2次正面朝上，1次反面朝上时，取出的硬币最可能是b。