homework14

问题一

- **有一位教授想知道学生是否睡眠充足。每天，教授观察学生在课堂上是否睡觉，并观察他们是否有红眼。教授获得如下的领域知识：**
  - 没有观察数据时，学生睡眠充足的先验概率为0.7。
  - 给定学生前一天睡眠充足为条件，学生在晚上睡眠充足的概率是0.8；如果前一天睡眠不充足，则是0.3。
  - 如果学生睡眠充足，则红眼的概率是0.2，否则是0.7。
  - 如果学生睡眠充足，则在课堂上睡觉的概率是0.1，否则是0.3。
- **将这些信息形式化为一个动态贝叶斯网络，使教授可以使用这个网络从观察序列中进行滤波和预测。然后再将其形式化为一个只有一个观察变量的隐马尔可夫模型。给出这个模型的完整的概率表。**

1. 首先，定义变量：
   - 令S表示学生睡眠充足事件，$\neg S$表示学生睡眠不充足事件。
   - 令R表示学生有红眼事件，$\neg R$表示学生没有红眼事件。
   - 令C表示学生在课堂上睡觉事件，$\neg C$表示学生在课堂上不睡觉事件。
2. 根据题目中的条件概率：
   - $P(S) = 0.7$（没有观察数据时，学生睡眠充足的先验概率）
   - $P(S|\text{前一天睡眠充足}) = 0.8$，$P(S|\text{前一天睡眠不充足}) = 0.3$
   - $P(R|S) = 0.2$，$P(R|\neg S) = 0.7$
   - $P(C|S) = 0.1$，$P(C|\neg S) = 0.3$
3. 构建HMM的概率表：
   - 初始状态概率：

    - $P(S) = 0.7$
    - $P(\neg S) = 1 - 0.7 = 0.3$
  - 状态转移概率：
    - $P(S_{t+1}|S_t) = 0.8$（如果前一天睡眠充足，当天睡眠充足的概率）
    - $P(S_{t+1}|\neg S_t) = 0.3$（如果前一天睡眠不充足，当天睡眠充足的概率）
    - $P(\neg S_{t+1}|S_t) = 1 - 0.8 = 0.2$
    - $P(\neg S_{t+1}|\neg S_t) = 1 - 0.3 = 0.7$
  - 观察概率：
    - $P(R|S) = 0.2$，$P(R|\neg S) = 0.7$
    - $P(C|S) = 0.1$，$P(C|\neg S) = 0.3$
4. 完整的概率表如下：
  - 初始状态概率：

状态	**概率**
S	0.7
$\neg S$	0.3

  - 状态转移概率：

从/到	S	$\neg S$
S	0.8	0.2
$\neg S$	0.3	0.7

  - 观察概率：

状态	R	$\neg R$	C	$\neg C$
S	0.2	0.8	0.1	0.9
$\neg S$	0.7	0.3	0.3	0.7

问题二

假定

- e_1=没有红眼，没有在课堂上睡觉
- e_2=有红眼，没有在课堂上睡觉
- e_3=有红眼，在课堂上睡觉。

执行下面的计算：

- 状态估计：针对每个$t = 1,2,3$，计算$P(EnoughSleep_t|e_{1:t})$
- 平滑：针对每个$t = 1,2,3$，计算$P(EnoughSleep_t|e_{1:3})$
- 针对$t = 1$和$t = 2$，比较滤波概率和平滑概率

（一）状态估计（滤波）

1. $t = 0$**时**:
    - 已知没有观察数据时，学生睡眠充足的先验概率$P(S_0) = \langle 0.7, 0.3\rangle$，这里0.7表示睡眠充足的概率，0.3表示睡眠不充足的概率。
2. $t = 1$**时**:
    - 根据前向算法，$P(S_1) = \sum_{s_0} P(S_1|s_0)P(s_0)$。
    - 给定学生前一天睡眠充足为条件，学生在晚上睡眠充足的概率是0.8；如果前一天睡眠不充足，则是0.3。所以$P(S_1|s_0)$有两种情况：当s_0为睡眠充足时，$P(S_1|s_0 = 充足) = 0.8$；当s_0为睡眠不充足时，$P(S_1|s_0 = 不充足) = 0.3$。
    - 计算可得:
        - $P(S_1) = \langle(0.8 \times 0.7 + 0.3 \times 0.3), (0.2 \times 0.7 + 0.7 \times 0.3)\rangle = \langle 0.65, 0.35\rangle$
    - 已知e_1 =没有红眼，没有在课堂上睡觉，且如果学生睡眠充足，则红眼的概率是0.2，否则是0.7；如果学生睡眠充足，则在课堂上睡觉的概率是0.1，否则是0.3。所以$P(e_1|S_1) = \langle 0.8 \times 0.9, 0.3 \times 0.7\rangle$（$0.9 = 1 - 0.1$，$0.7 = 1 - 0.3$）。
    - 则$P(S_1|e_1) = \alpha P(e_1|S_1)P(S_1)$，其中$\alpha$是归一化常数，使得概率之和为1。
        - 计算可得：$P(S_1|e_1) = \alpha\langle 0.8 \times 0.9 \times 0.65, 0.3 \times 0.7 \times 0.35\rangle = \alpha\langle 0.72 \times 0.65, 0.21 \times 0.35\rangle = \alpha\langle 0.468, 0.0735\rangle$
        - 归一化后：$P(S_1|e_1) = \langle \frac{0.468}{0.468+0.0735}, \frac{0.0735}{0.468+0.0735}\rangle = \langle 0.8643, 0.1357\rangle$

3. $t = 2$**时**:
   - $P(S_2|e_1) = \sum_{s_1} P(S_2|s_1)P(s_1|e_1)$
   - 同理，$P(S_2|s_1)$有两种情况：当s_1为睡眠充足时，$P(S_2|s_1 = \text{充足}) = 0.8$；当$s_1$为睡眠不充足时，$P(S_2|s_1 = \text{不充足}) = 0.3$。
   - 计算可得:
     - $P(S_2|e_1) = \langle(0.8 \times 0.8643 + 0.3 \times 0.1357), (0.2 \times 0.8643 + 0.7 \times 0.1357)\rangle = \langle 0.7321, 0.2679\rangle$
   - 已知$e_2 =$有红眼，没有在课堂上睡觉，所以$P(e_2|S_2) = \langle 0.2 \times 0.9, 0.7 \times 0.7\rangle$（$0.9 = 1 - 0.1$）。
   - 则$P(S_2|e_{1:2}) = \alpha P(e_2|S_2)P(S_2|e_1)$
     - 计算可得：$P(S_2|e_{1:2}) = \alpha\langle 0.2 \times 0.9 \times 0.7321, 0.7 \times 0.7 \times 0.2679\rangle = \alpha\langle 0.131778, 0.131271\rangle$
     - 归一化后：$P(S_2|e_{1:2}) = \langle \frac{0.131778}{0.131778+0.131271}, \frac{0.131271}{0.131778+0.131271}\rangle = \langle 0.5010, 0.4990\rangle$
4. $t = 3$**时**:
   - $P(S_3|e_{1:2}) = \sum_{s_2} P(S_3|s_2)P(s_2|e_{1:2})$
   - 同理可得:
     - $P(S_3|e_{1:2}) = \langle(0.8 \times 0.5010 + 0.3 \times 0.4990), (0.2 \times 0.5010 + 0.7 \times 0.4990)\rangle = \langle 0.5505, 0.4495\rangle$
   - 已知$e_3 =$有红眼，在课堂上睡觉，所以$P(e_3|S_3) = \langle 0.2 \times 0.1, 0.7 \times 0.3\rangle = \langle 0.02, 0.21\rangle$。
   - 则$P(S_3|e_{1:3}) = \alpha P(e_3|S_3)P(S_3|e_{1:2})$
     - 计算可得：$P(S_3|e_{1:3}) = \alpha\langle 0.02 \times 0.5505, 0.21 \times 0.4495\rangle = \alpha\langle 0.01101, 0.094395\rangle$
     - 归一化后：$P(S_3|e_{1:3}) = \langle \frac{0.01101}{0.01101+0.094395}, \frac{0.094395}{0.01101+0.094395}\rangle = \langle 0.1045, 0.8955\rangle$

（二）平滑

1. **计算Backwards信息**:
   - $P(e_3|S_3) = \langle 0.2 \times 0.1, 0.7 \times 0.3\rangle = \langle 0.02, 0.21\rangle$
   - $P(e_3|S_2) = \sum_{s_3} P(e_3|s_3)P(s_3|S_2)$
     - 计算可得：$P(e_3|S_2) = \langle(0.02 \times 0.8 + 0.21 \times 0.2), (0.02 \times 0.3 + 0.21 \times 0.7)\rangle = \langle 0.0588, 0.153\rangle$
   - $P(e_{2:3}|S_1) = \sum_{s_2} P(e_2|s_2)P(e_3|s_2)P(s_2|S_1)$
     - 计算可得：$P(e_{2:3}|S_1) = \langle(0.2 \times 0.9 \times 0.0588 + 0.7 \times 0.7 \times 0.153), (0.8 \times 0.9 \times 0.0588 + 0.3 \times 0.7 \times 0.153)\rangle = \langle 0.0233, 0.0556\rangle$
2. **将前向信息与后向信息合并并归一化**:
   - $P(S_1|e_{1:3}) = \alpha P(S_1|e_1)P(e_{2:3}|S_1)$

- 计算可得：$P(S_1|e_{1:3}) = \alpha\langle 0.8643 \times 0.0233, 0.1357 \times 0.0556\rangle = \alpha\langle 0.02013819, 0.00754492\rangle$
    - 归一化后：$P(S_1|e_{1:3}) = \langle\frac{0.02013819}{0.02013819+0.00754492}, \frac{0.00754492}{0.02013819+0.00754492}\rangle = \langle 0.7277, 0.2723\rangle$
- $P(S_2|e_{1:3}) = \alpha P(S_2|e_{1:2})P(e_3|S_1)$
    - 这里$P(e_3|S_1)$计算过程与前面类似，先计算$P(e_3|S_1) = \sum_{s_2} P(e_3|s_2)P(s_2|S_1)$，可得$P(e_3|S_1) = \langle 0.03776, 0.16339\rangle$
    - 则$P(S_2|e_{1:3}) = \alpha\langle 0.5010 \times 0.03776, 0.4990 \times 0.16339\rangle = \alpha\langle 0.01891776, 0.08153161\rangle$
    - 归一化后：$P(S_2|e_{1:3}) = \langle\frac{0.01891776}{0.01891776+0.08153161}, \frac{0.08153161}{0.01891776+0.08153161}\rangle = \langle 0.2757, 0.7243\rangle$
- $P(S_3|e_{1:3}) = \langle 0.1045, 0.8955\rangle$（与前面滤波计算结果相同）

（三）比较滤波概率和平滑概率（$t = 1$和$t = 2$）

- **$t = 1$时**:
    - 滤波概率$P(S_1|e_1) = \langle 0.8643, 0.1357\rangle$
    - 平滑概率$P(S_1|e_{1:3}) = \langle 0.7277, 0.2723\rangle$
    - 可以看出，滤波概率中睡眠充足的概率更高，而平滑概率相对更均衡一些。
- **$t = 2$时**:
    - 滤波概率$P(S_2|e_{1:2}) = \langle 0.5010, 0.4990\rangle$
    - 平滑概率$P(S_2|e_{1:3}) = \langle 0.2757, 0.7243\rangle$
    - 滤波概率中睡眠充足和不充足的概率较为接近，而平滑概率中睡眠不充足的概率更高。