homework12

问题一

- **有一位教授想知道学生是否睡眠充足。每天，教授观察学生在课堂上是否睡觉，并观察他们是否有红眼。教授获得如下的领域知识：**
  - 没有观察数据时，学生睡眠充足的先验概率为0.7。
  - 给定学生前一天睡眠充足为条件，学生在晚上睡眠充足的概率是0.8；如果前一天睡眠不充足，则是0.3。
  - 如果学生睡眠充足，则红眼的概率是0.2，否则是0.7。
  - 如果学生睡眠充足，则在课堂上睡觉的概率是0.1，否则是0.3。
- **将这些信息形式化为一个动态贝叶斯网络，使教授可以使用这个网络从观察序列中进行滤波和预测。然后再将其形式化为一个只有一个观察变量的隐马尔可夫模型。给出这个模型的完整的概率表。**

1. 首先，我们定义变量：
   - 令(S)表示学生睡眠充足事件，(\neg S)表示学生睡眠不充足事件。
   - 令(R)表示学生有红眼事件，(\neg R)表示学生没有红眼事件。
   - 令(C)表示学生在课堂上睡觉事件，(\neg C)表示学生在课堂上不睡觉事件。
2. 根据题目中的条件概率：
   - (P(S) = 0.7)（没有观察数据时，学生睡眠充足的先验概率）
   - (P(S|\text{前一天睡眠充足}) = 0.8)，(P(S|\text{前一天睡眠不充足}) = 0.3)
   - (P(R|S) = 0.2)，(P(R|\neg S) = 0.7)
   - (P(C|S) = 0.1)，(P(C|\neg S) = 0.3)
3. 我们要构建一个动态贝叶斯网络（DBN），并将其转化为隐马尔可夫模型（HMM）。
   - 动态贝叶斯网络（DBN）是一种概率图模型，用于表示随时间变化的随机过程。在这个问题中，我们可以将每天学生的睡眠情况、红眼情况和课堂睡觉情况看作是一个时间序列。
   - 隐马尔可夫模型（HMM）由两个部分组成：隐藏状态（在这个问题中是学生的睡眠情况(S)）和观察变量（在这个问题中是红眼情况(R)和课堂睡觉情况(C)）。

4. 构建HMM的概率表：
    - 初始状态概率：
        - (P(S) = 0.7)
        - (P(\neg S) = 1 - 0.7 = 0.3)
    - 状态转移概率：
        - (P(S_{t + 1}|S_t) = 0.8)（如果前一天睡眠充足，当天睡眠充足的概率）
        - (P(S_{t + 1}|\neg S_t) = 0.3)（如果前一天睡眠不充足，当天睡眠充足的概率）
        - (P(\neg S_{t + 1}|S_t) = 1 - 0.8 = 0.2)
        - (P(\neg S_{t + 1}|\neg S_t) = 1 - 0.3 = 0.7)
    - 观察概率：
        - (P(R|S) = 0.2), (P(R|\neg S) = 0.7)
        - (P(C|S) = 0.1), (P(C|\neg S) = 0.3)

5. 完整的概率表如下：
    - 初始状态概率：

状态	**概率**
(S)	0.7
(\neg S)	0.3

    - 状态转移概率：

从/到	**(S)**	**(\neg S)**
(S)	0.8	0.2
(\neg S)	0.3	0.7

    - 观察概率：

状态	**(R)**	**(\neg R)**	**(C)**	**(\neg C)**
(S)	0.2	0.8	0.1	0.9
(\neg S)	0.7	0.3	0.3	0.7

通过这些概率表，教授可以使用隐马尔可夫模型对学生的睡眠情况进行滤波和预测。

问题二

假定

- e_1=没有红眼，没有在课堂上睡觉
- e_2=有红眼，没有在课堂上睡觉
- e_3=有红眼，在课堂上睡觉。

执行下面的计算：

- 状态估计：针对每个$t = 1,2,3$，计算$P(EnoughSleep_t|e_{1:t})$
- 平滑：针对每个$t = 1,2,3$，计算$P(EnoughSleep_t|e_{1:3})$
- 针对$t = 1$和$t = 2$，比较滤波概率和平滑概率

1. 首先，我们回顾一下之前建立的隐马尔可夫模型（HMM）的概率表：

   - 初始状态概率：

状态	概率
(S)（睡眠充足）	0.7
(\neg S)（睡眠不充足）	0.3

   - 状态转移概率：

从/到	(S)	(\neg S)
(S)	0.8	0.2
(\neg S)	0.3	0.7

   - 观察概率：

状态	(R)（有红眼）	(\neg R)（无红眼）	(C)（课堂睡觉）	(\neg C)（课堂不睡觉）
(S)	0.2	0.8	0.1	0.9
(\neg S)	0.7	0.3	0.3	0.7

2. 我们要根据给定的观察序列计算概率：

   - 观察序列：
     - (e_1=)没有红眼，没有在课堂上睡觉

- (e_2=)有红眼，没有在课堂上睡觉
- (e_3=)有红眼，在课堂上睡觉

3. 计算状态估计 (P(\text{EnoughSleep}t|e{1:t}))：

   - 对于 (t = 1)：

     - (e_1=)没有红眼，没有在课堂上睡觉
     - (P(\text{EnoughSleep}_1|e_1) = \frac{P(e_1|\text{EnoughSleep}_1)P(\text{EnoughSleep}_1)}{P(e_1)})
     - (P(e_1|\text{EnoughSleep}_1) = P(\neg R|\text{EnoughSleep}_1)P(\neg C|\text{EnoughSleep}_1) = 0.8\times0.9 = 0.72)
     - (P(e_1|\neg \text{EnoughSleep}_1) = P(\neg R|\neg \text{EnoughSleep}_1)P(\neg C|\neg \text{EnoughSleep}_1) = 0.3\times0.7 = 0.21)
     - (P(\text{EnoughSleep}_1|e_1) = \frac{0.72\times0.7}{0.72\times0.7 + 0.21\times0.3} = \frac{0.504}{0.504 + 0.063} = \frac{0.504}{0.567} \approx 0.89)

   - 对于 (t = 2)：

     - (e_2=)有红眼，没有在课堂上睡觉
     - (P(\text{EnoughSleep}2|e{1:2}) = \frac{P(e_2|\text{EnoughSleep}_2)P(\text{EnoughSleep}_2|e_1)P(\text{EnoughSleep}1)}{P(e{1:2})})
     - (P(e_2|\text{EnoughSleep}_2) = P(R|\text{EnoughSleep}_2)P(\neg C|\text{EnoughSleep}_2) = 0.2\times0.9 = 0.18)
     - (P(e_2|\neg \text{EnoughSleep}_2) = P(R|\neg \text{EnoughSleep}_2)P(\neg C|\neg \text{EnoughSleep}_2) = 0.7\times0.7 = 0.49)
     - 先计算 (P(e_{1:2}|\text{EnoughSleep}_2) = P(e_1|\text{EnoughSleep}_2)P(e_2|\text{EnoughSleep}_2) = 0.72\times0.18 = 0.1296)
     - (P(e_{1:2}|\neg \text{EnoughSleep}_2) = P(e_1|\neg \text{EnoughSleep}_2)P(e_2|\neg \text{EnoughSleep}_2) = 0.21\times0.49 = 0.1029)
     - (P(\text{EnoughSleep}2|e{1:2}) = \frac{0.1296\times0.7}{0.1296\times0.7 + 0.1029\times0.3} = \frac{0.09072}{0.09072 + 0.03087} = \frac{0.09072}{0.12159} \approx 0.75)

   - 对于 (t = 3)：

     - (e_3=)有红眼，在课堂上睡觉
     - (P(\text{EnoughSleep}3|e{1:3}) = \frac{P(e_3|\text{EnoughSleep}_3)P(\text{EnoughSleep}3|e{1:2})P(\text{EnoughSleep}_2|e_1)P(\text{EnoughSleep}1)}{P(e{1:3})})
     - (P(e_3|\text{EnoughSleep}_3) = P(R|\text{EnoughSleep}_3)P(C|\text{EnoughSleep}_3) = 0.2\times0.1 = 0.02)
     - (P(e_3|\neg \text{EnoughSleep}_3) = P(R|\neg \text{EnoughSleep}_3)P(C|\neg \text{EnoughSleep}_3) = 0.7\times0.3 = 0.21)
     - 先计算 (P(e_{1:3}|\text{EnoughSleep}_3) = P(e_1|\text{EnoughSleep}_3)P(e_2|\text{EnoughSleep}_3)P(e_3|\text{EnoughSleep}_3) = 0.72\times0.18\times0.02 = 0.002592)

- $P(e_{1:3}|\neg \text{EnoughSleep}_3) = P(e_1|\neg \text{EnoughSleep}_3)P(e_2|\neg \text{EnoughSleep}_3)P(e_3|\neg \text{EnoughSleep}_3) = 0.21\times0.49\times0.21 = 0.021609$
- $P(\text{EnoughSleep}_3|e_{1:3}) = \frac{0.002592\times0.7}{0.002592\times0.7 + 0.021609\times0.3} = \frac{0.0018144}{0.0018144 + 0.0064827} = \frac{0.0018144}{0.0082971} \approx 0.22$

4. 计算平滑 $P(\text{EnoughSleep}_t|e_{1:3})$：

   - 对于 $t = 1$：

     - $P(\text{EnoughSleep}_1|e_{1:3}) = \sum_{s_2,s_3}P(\text{EnoughSleep}_1|e_1)P(s_2|s_1)P(s_3|s_2)P(e_2|s_2)P(e_3|s_3)$
     - 这里需要考虑所有可能的状态路径，计算较为复杂，但可以使用前向 - 后向算法来简化计算。

   - 对于 $t = 2$：

     - 同样需要使用前向 - 后向算法来计算 $P(\text{EnoughSleep}_2|e_{1:3})$。

   - 对于 $t = 3$：

     - $P(\text{EnoughSleep}_3|e_{1:3})$已经在状态估计中计算过，约为0.22。

5. 比较滤波概率和平滑概率：

   - 对于 $t = 1$：

     - 滤波概率 $P(\text{EnoughSleep}_1|e_1) \approx 0.89$
     - 平滑概率 $P(\text{EnoughSleep}_1|e_{1:3})$（需要使用前向 - 后向算法计算）

   - 对于 $t = 2$：

     - 滤波概率 $P(\text{EnoughSleep}_2|e_{1:2}) \approx 0.75$
     - 平滑概率 $P(\text{EnoughSleep}_2|e_{1:3})$（需要使用前向 - 后向算法计算）

   - 对于 $t = 3$：

     - 滤波概率 $P(\text{EnoughSleep}_3|e_{1:3}) \approx 0.22$
     - 平滑概率 $P(\text{EnoughSleep}_3|e_{1:3}) \approx 0.22$（已经计算过）

通过这些计算，教授可以根据观察到的学生表现来估计和预测学生的睡眠情况。

1. 计算平滑概率 $P(\text{EnoughSleep}_t|e_{1:3})$，对于 $t = 1$ 和 $t=2$，我们使用前向 - 后向算法。

   - 前向算法：

     - 定义前向变量 $\alpha_t(i)$，表示在时刻 t 处于状态 i 且观察到序列 $e_{1:t}$ 的概率。

     - 初始化：

       - 对于 $t = 1$：

            - $\alpha_1(S)=P(e_1|\text{EnoughSleep}_1)P(\text{EnoughSleep}_1)=0.72\times0.7 = 0.504$
            - $\alpha_1(\neg S)=P(e_1|\neg \text{EnoughSleep}_1)P(\neg \text{EnoughSleep}_1)=0.21\times0.3 = 0.063$
    - 归纳：
        - 对于 $t = 2$：
            - $\alpha_2(S)=\sum_{j} \alpha_1(j)P(S|j)P(e_2|S)$
                - $\alpha_2(S)=\alpha_1(S)P(S|S)P(e_2|S)+\alpha_1(\neg S)P(S|\neg S)P(e_2|S)$
                - $\alpha_2(S)=0.504\times0.8\times0.18 + 0.063\times0.3\times0.18$
                - $\alpha_2(S)=0.504\times0.8\times0.18+0.063\times0.3\times0.18 = 0.072576 + 0.003402=0.075978$
            - $\alpha_2(\neg S)=\sum_{j} \alpha_1(j)P(\neg S|j)P(e_2|\neg S)$
                - $\alpha_2(\neg S)=\alpha_1(S)P(\neg S|S)P(e_2|\neg S)+\alpha_1(\neg S)P(\neg S|\neg S)P(e_2|\neg S)$
                - $\alpha_2(\neg S)=0.504\times0.2\times0.49+0.063\times0.7\times0.49$
                - $\alpha_2(\neg S)=0.049392+0.021609 = 0.070999$
    - 对于 $t = 3$：
        - $\alpha_3(S)=\sum_{j} \alpha_2(j)P(S|j)P(e_3|S)$
            - $\alpha_3(S)=\alpha_2(S)P(S|S)P(e_3|S)+\alpha_2(\neg S)P(S|\neg S)P(e_3|S)$
            - $\alpha_3(S)=0.075978\times0.8\times0.02+0.070999\times0.3\times0.02$
            - $\alpha_3(S)=0.001215648 + 0.000425994=0.001641642$
        - $\alpha_3(\neg S)=\sum_{j} \alpha_2(j)P(\neg S|j)P(e_3|\neg S)$
            - $\alpha_3(\neg S)=\alpha_2(S)P(\neg S|S)P(e_3|\neg S)+\alpha_2(\neg S)P(\neg S|\neg S)P(e_3|\neg S)$
            - $\alpha_3(\neg S)=0.075978\times0.2\times0.21+0.070999\times0.7\times0.21$
            - $\alpha_3(\neg S)=0.003191076+0.010439833 = 0.013630909$
- 后向算法：
    - 定义后向变量 $\beta_t(i)$，表示在时刻 t 处于状态 i 且观察到序列 $e_{t + 1:3}$ 的概率。
    - 初始化：
        - 对于 $t = 3$：
            - $\beta_3(S) = 1$
            - $\beta_3(\neg S)=1$
    - 归纳：
        - 对于 $t = 2$：

        - (\beta_2(S)=\sum_{j}P(j|S)P(e_3|j)\beta_3(j))
            - (\beta_2(S)=P(S|S)P(e_3|S)\beta_3(S)+P(\neg S|S)P(e_3|\neg S)\beta_3(\neg S))
            - (\beta_2(S)=0.8\times0.02\times1 + 0.2\times0.21\times1=0.016 + 0.042 = 0.058)
        - (\beta_2(\neg S)=\sum_{j}P(j|\neg S)P(e_3|j)\beta_3(j))
            - (\beta_2(\neg S)=P(S|\neg S)P(e_3|S)\beta_3(S)+P(\neg S|\neg S)P(e_3|\neg S)\beta_3(\neg S))
            - (\beta_2(\neg S)=0.3\times0.02\times1+0.7\times0.21\times1 = 0.006+0.147 = 0.153)

    - 对于 (t = 1)：

        - (\beta_1(S)=\sum_{j}P(j|S)P(e_2|j)\beta_2(j))
            - (\beta_1(S)=P(S|S)P(e_2|S)\beta_2(S)+P(\neg S|S)P(e_2|\neg S)\beta_2(\neg S))
            - (\beta_1(S)=0.8\times0.18\times0.058+0.2\times0.49\times0.153)
            - (\beta_1(S)=0.008352+0.015042 = 0.023394)
        - (\beta_1(\neg S)=\sum_{j}P(j|\neg S)P(e_2|j)\beta_2(j))
            - (\beta_1(\neg S)=P(S|\neg S)P(e_2|S)\beta_2(S)+P(\neg S|\neg S)P(e_2|\neg S)\beta_2(\neg S))
            - (\beta_1(\neg S)=0.3\times0.18\times0.058+0.7\times0.49\times0.153)
            - (\beta_1(\neg S)=0.003132+0.052739 = 0.055871)

- 计算平滑概率：

    - 对于 (t = 1)：

        - (P(\text{EnoughSleep}*1*|*e*{1:3})=\frac{\alpha_1(S)\beta_1(S)}{\sum_{i}\alpha_1(i)\beta_1(i)})
        - (P(\text{EnoughSleep}*1*|*e*{1:3})=\frac{0.504\times0.023394}{0.504\times0.023394 + 0.063\times0.055871})
        - (P(\text{EnoughSleep}*1*|*e*{1:3})=\frac{0.011790776}{0.011790776+0.003520873})
        - (P(\text{EnoughSleep}*1*|*e*{1:3})=\frac{0.011790776}{0.015311649}\approx0.77)

    - 对于 (t = 2)：

        - (P(\text{EnoughSleep}*2*|*e*{1:3})=\frac{\alpha_2(S)\beta_2(S)}{\sum_{i}\alpha_2(i)\beta_2(i)})
        - (P(\text{EnoughSleep}*2*|*e*{1:3})=\frac{0.075978\times0.058}{0.075978\times0.058+0.070999\times0.153})
        - (P(\text{EnoughSleep}*2*|*e*{1:3})=\frac{0.004406724}{0.004406724 + 0.010862847})
        - (P(\text{EnoughSleep}*2*|*e*{1:3})=\frac{0.004406724}{0.015269571}\approx0.29)

通过上述详细计算，我们得到了 (t = 1) 和 (t = 2) 的平滑概率。