

②

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

Dot product

$$\begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 & 1 \times 5 + 2 \times 6 + 3 \times 7 + 4 \times 8 & 1 \times 9 + 2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 \\ 5 \times 1 + 6 \times 2 + 7 \times 3 + 8 \times 4 & 5 \times 5 + 6 \times 6 + 7 \times 7 + 8 \times 8 & 5 \times 9 + 6 \times 1 + 7 \times 2 + 8 \times 3 \\ 9 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 & 9 \times 5 + 1 \times 6 + 2 \times 7 + 3 \times 8 & 9 \times 9 + 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 \\ 4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 3 + 7 \times 4 & 4 \times 5 + 5 \times 6 + 6 \times 7 + 7 \times 8 & 4 \times 9 + 5 \times 1 + 6 \times 2 + 7 \times 3 \end{bmatrix}$$

↓

$$\begin{bmatrix} 1+4+9+16 & 5+12+21+32 & 9+2+6+12 \\ 5+12+21+32 & 25+36+49+64 & 45+6+14+24 \\ 9+2+6+12 & 45+6+14+24 & 81+1+4+9 \\ 4+10+18+26 & 20+30+42+56 & 36+5+12+21 \end{bmatrix}$$

↓

$$\begin{bmatrix} 30 & 70 & 29 \\ 70 & 174 & 89 \\ 29 & 89 & 95 \\ 60 & 148 & 74 \end{bmatrix}$$

Column product

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

col-1 $1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$\text{col-2} \begin{matrix} 5 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{col-3} \begin{matrix} 9 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

col-1 + col-2 + col-3

$$\begin{bmatrix} 1+4+9+16 & 5+12+21+32 & 9+2+6+12 \\ 5+12+21+32 & 25+36+49+64 & 45+6+14+24 \\ 9+2+6+12 & 45+6+14+24 & 81+1+4+9 \\ 4+10+16+28 & 20+30+42+56 & 36+5+12+21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 & 70 & 29 \\ 70 & 174 & 89 \\ 29 & 89 & 95 \\ 60 & 148 & 74 \end{bmatrix}$$

Row method

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \quad 1 \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 12 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 21 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 32 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1+4+9+16 & 5+12+21+32 & 9+2+6+12 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R_2} \quad 5 \times [1 \ 5 \ 9] + 6 \times [2 \ 6 \ 1] + 7 \times [3 \ 7 \ 2] \\ + 8 \times [4 \ 8 \ 3]$$

$$\downarrow [5 \ 25 \ 45] + [12 \ 36 \ 6] + [21 \ 49 \ 14] + [32 \ 64 \ 24]$$

$$\downarrow [5+12+21+32 \quad 25+36+49+64 \quad 45+6+14+24]$$

$$\underline{R_3} \quad 9 \times [1 \ 5 \ 9] + 1 \times [2 \ 6 \ 1] + 2 \times [3 \ 7 \ 2] \\ + 3 \times [4 \ 8 \ 3]$$

$$\downarrow [9 \ 45 \ 81] + [2 \ 6 \ 1] + [6 \ 14 \ 4] + [12 \ 24 \ 9]$$

$$\downarrow [9+2+6+12 \quad 45+6+14+24 \quad 81+1+4+9]$$

$$\underline{R_4} \quad 4 \times [1 \ 5 \ 9] + 5 \times [2 \ 6 \ 1] + 6 \times [3 \ 7 \ 2] \\ + 7 \times [4 \ 8 \ 3]$$

$$\downarrow [4 \ 20 \ 36] + [10 \ 30 \ 5] + [18 \ 42 \ 12] + [28 \ 56 \ 21]$$

$$\downarrow [4+10+18+28 \quad 20+30+42+56 \quad 36+5+12+21]$$

$$\underline{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

$$\begin{bmatrix} 30 & 70 & 29 \\ 70 & 174 & 89 \\ 29 & 89 & 95 \\ 60 & 148 & 74 \end{bmatrix}$$

Outer product

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot [1 \ 5 \ 9] + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} [2 \ 6 \ 1] + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} [3 \ 7 \ 2] + \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} [4 \ 8 \ 3]$$

$$\begin{bmatrix} 1 \times 1 & 1 \times 5 & 1 \times 9 \\ 5 \times 1 & 5 \times 5 & 5 \times 9 \\ 9 \times 1 & 9 \times 5 & 9 \times 9 \\ 4 \times 1 & 4 \times 5 & 4 \times 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 6 & 2 \times 1 \\ 6 \times 2 & 6 \times 6 & 6 \times 1 \\ 1 \times 2 & 1 \times 6 & 1 \times 1 \\ 5 \times 2 & 5 \times 6 & 5 \times 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \times 3 & 3 \times 7 & 3 \times 2 \\ 7 \times 3 & 7 \times 7 & 7 \times 2 \\ 2 \times 3 & 2 \times 7 & 2 \times 2 \\ 6 \times 3 & 6 \times 7 & 6 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 4 \times 4 & 4 \times 8 & 4 \times 3 \\ 8 \times 4 & 8 \times 8 & 8 \times 3 \\ 3 \times 4 & 3 \times 8 & 3 \times 3 \\ 7 \times 4 & 7 \times 8 & 7 \times 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 5 & 25 & 45 \\ 9 & 45 & 81 \\ 4 & 20 & 36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 12 & 2 \\ 12 & 36 & 6 \\ 2 & 6 & 1 \\ 10 & 30 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 21 & 6 \\ 21 & 49 & 14 \\ 6 & 14 & 4 \\ 18 & 42 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 32 & 12 \\ 32 & 64 & 24 \\ 12 & 24 & 9 \\ 28 & 56 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 & 70 & 29 \\ 70 & 174 & 89 \\ 29 & 89 & 95 \\ 60 & 148 & 74 \end{bmatrix}$$

Block multiplication

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 9 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 32 & 12 \\ 32 & 64 & 24 \\ 12 & 24 & 9 \\ 28 & 56 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 5 + 2 \times 6 & 1 \times 9 + 2 \times 1 \\ 5 \times 1 + 6 \times 2 & 5 \times 5 + 6 \times 6 & 5 \times 9 + 6 \times 1 \\ 9 \times 1 + 1 \times 2 & 9 \times 5 + 1 \times 6 & 9 \times 9 + 1 \times 1 \\ 4 \times 1 + 5 \times 2 & 4 \times 5 + 5 \times 6 & 4 \times 9 + 5 \times 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 21 & 6 \\ 21 & 49 & 14 \\ 6 & 14 & 4 \\ 18 & 42 & 12 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 16 & 32 & 12 \\ 32 & 64 & 24 \\ 12 & 24 & 9 \\ 28 & 56 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 & 70 & 29 \\ 70 & 174 & 89 \\ 29 & 89 & 95 \\ 60 & 148 & 74 \end{bmatrix}$$