Cunoștințe minimale de analiză matematică

Regulile de derivare se presupun cunoscute

Teorema lui Rolle $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) și $f(a)=f(b)$ atunci există $c\in(a,b)$ astfel ca $f'(c)=0$

Consecințe ale teoremei lui Rolle

a) $f\in C^{(1)}[a,b]$. Între două rădăcini consecutive ale derivatei există cel mult o rădăcină a funcției

b) Între două rădăcini consecutive ale funcției există cel puțin o rădăcină a derivatei

c) Dacă f are n rădăcini în intervalul (a,b) atunci f' are cel puțin $n-1$ rădăcini în (a,b)

Teorema lui Lagrange

Dacă f este definită și continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) atunci există $c\in(a,b)$ astfel ca

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

Consecințe: a) Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ au derivate laterale în fiecare punct din $[a,b]$ egale și dacă sunt continue în a și b atunci $f-g$ este constantă pe $[a,b]$

b) dacă $f\in C^1[a,b]$ și f' este crescătoare atunci

$$f'(a)\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le f'(b)$$

Formula lui Taylor. Fie $f\in C^{(n+1)}[a,b]$, $x,y\in[a,b]$ $x\neq y$ a.î. atunci există $c\in(\min(x,y),\max(x,y))$

$$f(y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(y-x)^k}{k!}f^{(k)}(x)+\frac{(y-x)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

(formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange)

Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe $[a,b]$

Dacă f este monoton crescătoare resp. descrescătoare pe I atunci $f'(x) \geq 0$ resp. $f'(x) \leq 0$ pe $[a,b]$.

Reciproc dacă f este strict crescătoare pe $[a,b]$ nu rezultă, în general, că $f'(x) > 0$ pe (a,b).

Ex. $f:[-5,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. f este strict crescătoare dar $f'(0)=0$.

Regula lui Leibniz Fie $f,g \in C^{(n)}(I)$, I un interval al axei reale. Atunci

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

O formulă utilă Fie $a,b \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$, atunci

$$\left(\frac{1}{az+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(az+b)^{n+1}}, \quad \forall z \neq -\frac{b}{a}.$$

Funcții convexe Fie $f: I \to \mathbb{R}$. f se numește convexă pe I dacă au loc inegalitatea

$\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall x,y \in I$

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Din definiția funcției convexe, prin inducție, se arată că este adevărată următoarea afirmație: $\lambda_1, \dots \lambda_n \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ și $x_1, \dots x_n \in I$

$f: I \to \mathbb{R}$ convexă,

atunci $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

dacă f este convexă pe I atunci $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$

f este derivabilă la stânga și la dreapta în x_1, x_2.

și

$$f_s'(x_1) \leq f_d'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f_s'(x_2) \leq f_d'(x_2)$$

f_s' = derivata la stânga

f_d' = " dreapta

COROLAR 1 Fie $f \in C(I)$, $A \subset I$ submulțime numărabilă. Dacă f este derivabilă la dreapta pe $I \setminus A$ și f'_d este monoton crescătoare pe $I \setminus A$ atunci f este convexă pe I.

COROLAR 2 Fie $f \in C^{(2)}(I)$. f este convexă dacă și numai dacă $f'' \geq 0$

Polinoame cu coeficienți complecși ($\mathbb{C}(X)$)

Notații: Π mulțimea tuturor polinoamelor cu coeficienți complecși

Π_n: mulțimea tuturor polinoamelor de grad $\leq n$.

Un polinom de grad n, $P \in \Pi_n$ va fi de forma $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, iar valoarea lui în punctul x este

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Def Fie f o funcție olomorfă într-un domeniu $D \subseteq \mathbb{C}$. Punctul $z = a \in D$ se numește zerou de ordinul m al funcției f, dacă există g olomorfă într-o vecinătate a punctului a, $g(a) \neq 0$ astfel ca

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \quad (\text{a se vedea } MSI)$$

Dacă $f \in \Pi$, $f = P$, a este zerou de ordin m, $m \in \mathbb{N}^*$ dacă și numai dacă P se divide cu $(z-a)^m$ și nu se divide cu $(z-a)^{m+1}$

- a este zerou de ordin m pt funcția olomorfă f dacă $f(a) = f'(a) = \dots f^{(m-1)}(a) = 0$ și $f^{(m)}(a) \neq 0$, $m \in \mathbb{N}^*$.

- Un polinom $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ cu $a_m \neq 0$, are exact m rădăcini complexe. O rădăcină de ordin k, $k \in \mathbb{N}^*$ se numără de k ori

Dacă $P \in \Pi_m$, $a_m \neq 0$ și $z_1, .. z_s$ sunt rădăcinile lui P, de ordine de multiplicitate $k_1, .. k_s$, $k_i \in \mathbb{N}^*$ atunci $P(z)$ se scrie sub forma:

$$P(z) = a_m (z - z_1)^{k_1} .. (z - z_s)^{k_s}$$

Din ultima afirmație rezultă următoarele

a) Dacă $z_1, z_2 .. z_s$ sunt numere complexe distincte, $P \in \Pi_m$,

$$P^{(i)}(z_k) = 0, \text{ pt } k = 1, 2, .. s, \; i = 1, 2 .. i_k$$

și $i_1 + i_2 + .. + i_s \geq m+1$ atunci P este polinomul nul.

b) Dacă $P, Q \in \Pi_m$, $A \subset \mathbb{C}$ având cardinalul $\geq m+1$ și dacă $P(z) = Q(z)$ pentru $\forall z \in A$ atunci

$$P(z) = Q(z) \quad -''- \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ex Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ știind că

$$a + bn + c(n^2+1) = 5(n^2+4) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aici $A = \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $a + bz + c(z^2+1) = 5(z^2+4)$

$\Rightarrow c = 5,\; b = 0 \quad a = 20 - 5.$

Relațiile lui Viette

Fie $z_1, .. z_m$ rădăcinile polinomului P, $P \in \Pi_m$ și $S_k = \sum z_1 .. z_k$, suma simetrică de ordinul k a rădăcinilor. Atunci

$$S_k = (-1)^k \frac{a_{m-k}}{a_m}, \quad k = 1, 2, \dots m,$$

~~Proprietăți~~

Formule de medie pentru funcții integrabile Riemann;

Presupunem cunoscute, din liceu, noțiunea de funcție primitivabilă, primitive uzuale, metode de integrare; formula lui Leibniz-Newton.)

Formule de medie pentru integrala Riemann.

Prima formulă de medie.

Dacă f, g sunt integrabile pe $[a,b]$ iar $f \geq 0$ sau $f \leq 0$ atunci există un număr real $\gamma \in (\inf g, \sup g)$ astfel ca $\int_a^b f(x)g(x)dx = \gamma \int_a^b f(x)dx$

Dacă g este continuă pe $[a,b]$ atunci $\exists c \in [a,b]$ astfel ca $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(c)\int_a^b f(x)dx$

A doua formulă de medie. (formula lui Bonnet)

Fie f, g funcții reale, integrabile pe $[a,b]$ iar f o funcție pozitivă și monoton descrescătoare. Atunci există $c' \in [a,b]$ astfel ca

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx$$