Teoria sistemelor. Laborator 2: Funcţii de transfer. Răspunsul sistemelor. Scheme bloc

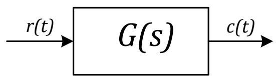
Obiectiv: La sfârşitul acestui laborator studenţii trebuie să poată să:

- Obţină funcţia de transfer pentru un sistem liniar.
- Calculeze şi să reprezinte grafic în Matlab răspunsul unui sistem liniar la o intrare impuls sau treaptă.
- Reducă scheme bloc

1 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 1.1 *Funcţia de transfer din semnalele de intrare şi ieşire*

Un semnal de intrare



$$r(t) = t$$

se aplică unui sistem cu funcţia de transfer $G(s)$. Semnalul de ieşire rezultat este:

$$c(t) = 1 - e^{-t},\ t \geq 0$$

Determinaţi $G(s)$ pentru acest sistem.

Soluţie.

Utilizaţi Tabelul 1 pentru a calcula transformatele Laplace pentru semnalele de intrare şi ieşire ($R(s)$ şi $C(s)$), apoi calculaţi funcţia de transfer $G(s) = \dfrac{C(s)}{R(s)}$.

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
$\delta(t)$	1	$\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$
1	$\dfrac{1}{s}$	$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	$e^{-at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(s+a)^2+b^2}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$	$e^{-at}\cos bt$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$

Tabela 1: Tabel cu transformate Laplace

$$r(t) = t \quad \Rightarrow \quad R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$c(t) = 1 - e^{-t} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{1}{s(s+1)}}{\dfrac{1}{s^2}} = \frac{s}{s+1}$$

Exerciţiul 1.2 *Funcţia de transfer din ecuaţie diferenţială. Răspunsul la impuls şi răspunsul la treaptă.*

Un sistem cu semnalul de intrare $r(t)$ şi semnalul de ieşire $y(t)$ este descris de ecuaţa diferenţială liniară:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = r(t) \tag{1}$$

1. Determinaţi funcţia de transfer, $H(s)$.
2. Determinaţi răspunsul sistemului la impuls, $y_i(t)$.
3. Determinaţi răspunsul sistemului la treaptă unitară, $y_s(t)$
4. Utilizaţi funcţiile Matlab *impulse* şi *step* pentru a reprezenta grafic răspunsul sistemului la semnale impuls şi treaptă. Comparaţi rezultatele cu reprezentarea grafică a funcţiilor $y_i(t)$ şi $y_s(t)$, pentru un interval de timp $t \in [0, 10]$.

Soluţie

1. Este utilă următoarea proprietate a transformatei Laplace: $\mathcal{L}\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\} = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(n-k)}(0)$.

   Se aplică transformata Laplace ecuaţiei diferenţiale (1), în condiţii iniţiale nule, şi se obţine:

   $$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = R(s) \quad \Rightarrow \quad (s^2 + 3s + 2)Y(s) = R(s)$$

   iar funcţia de transfer este:

   $$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

2. Pentru un semnal de intrare impuls ideal $r(t) = \delta(t)$, semnalul de ieşire este $Y_i(s) = H(s)R(s)$, iar $y_i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)R(s)\}$, unde $R(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$:

   $$y_i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2 + 3s + 2} \cdot 1\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\} = e^{-t} - e^{-2t}$$

3. Pentru un semnal de intrare treaptă unitară, $r(t) = 1$, semnalul de ieşire este $Y_s(s) = H(s)R(s)$, iar $y_s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)R(s)\}$, unde $R(s) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$:

   $$y_s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{1}{s}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)}\} = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

4. Răspunsul la impuls şi treaptă utilizând Matlab:
   - Creaţi funcţia de transfer în Matlab, utilizând funcţia *tf*, cu forma generală:

     ```
     sys = tf(numarator, numitor)
     ```

     unde `numarator` şi `numitor` sunt polinoamele de la numărătorul şi respectiv numitorul funcţiei de transfer. Acestea se introduc între paranteze pătrate şi conţin coeficienţii polinoamelor în ordinea descrescătoare a puterilor lui s. `sys` este numele sistemului şi se alege de utilizator.
     Un sistem cu funcţia de transfer:

     $$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

     se introduce ca:

     ```
     sys = tf(1, [1 3 2])
     ```

   - Reprezentaţi grafic răspunsul sistemului pentru un impuls ideal $r(t) = \delta(t)$ utilizând funcţia Matlab *impulse*. Funcţia de utilizează astfel:

     ```
     impulse(sys)
     ```

     Funcţia calculează si reprezintă grafic răspunsul sistemului `sys`, dacă intrarea este un semnal impuls: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot R(s)\}$ where $R(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$. Funcţia *impulse* va calcula:

     $$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot 1\}$$

     şi va reprezenta grafic rezultatul.

   - Reprezentaţi grafic răspunsul sistemului pentru o intrare treaptă unitară. Funcţia Matlab este:

     ```
     step(sys)
     ```

Pentru o intrare $r(t) = 1$ cu $R(s) = \frac{1}{s}$, funcţia *step* va calcula:

$$y(t) = \pounds^{-1}\{H(s) \cdot \frac{1}{s}\}$$

şi va reprezenta grafic rezultatul.

- Pentru a simula răspunsul sistemului pentru un interval de timp de la $t = 0$ la timpul final $t = 10$, scrieţi:

```
impulse(sys, 10)
```

  sau

```
step(sys, 10)
```

- Comparaţi rezultatele simulării cu reprezentarea grafică a funcţiilor $y_i(t)$ şi $y_s(t)$ obţinute la pasul 2 şi 3, pe un interval de timp $t \in [0,\ 10]$. Graficele trebuie să fie asemanătoare cu Figura 1.

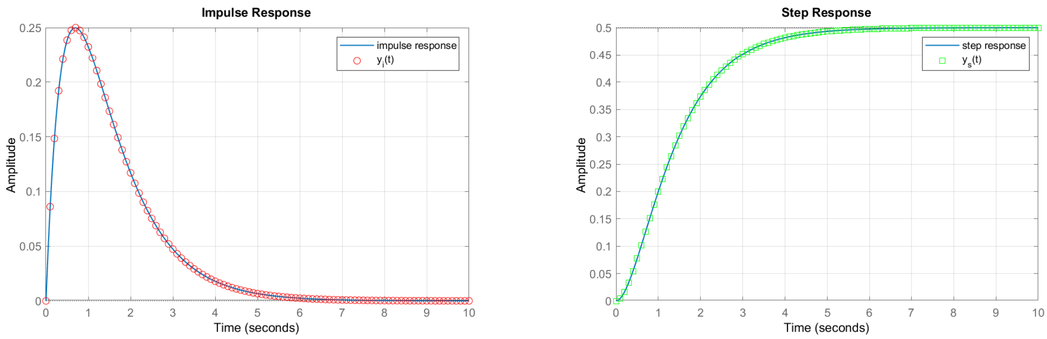


Figura 1: Răspuns la impuls şi treaptă

2 Exerciţii propuse

Exerciţiul 2.1 ***Funcţia de transfer in semnalele de intrare şi ieşire***

Un semnal de intrare $r(t) = e^{-t}$ se aplică unui sistem cu funcţia de transfer $G(s)$. Ieşirea rezultată este:

$$c(t) = 2 - 3e^{-t} + 3e^{-2t}cos2t,\ t \geq 0$$

Determinaţi $G(s)$ pentru acest sistem (pe hârtie).

Exerciţiul 2.2 ***Funcţia de transfer din ecuaţie diferenţială. Răspunsul sistemului la impuls şi treaptă.***

Un sistem cu intrarea $r(t)$ şi ieşirea $y(t)$ este descris de ecuaţia diferenţială:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = r(t)$$

1. Determinaţi funcţia de transfer, $H(s)$.
2. Determinaţi răspunsul sistemului la impuls, $y_i(t)$.
3. Determinaţi răspunsul sistemului la treaptă unitară, $y_s(t)$
4. Utilizaţi funcţiile Matlab *impulse* şi *step* pentru a reprezenta grafic răspunsul sistemului la semnale impuls şi treaptă. Comparaţi rezultatele cu reprezentarea grafică a funcţiilor $y_i(t)$ şi $y_s(t)$, pentru un interval de timp $t \in [0, 10]$.

Exerciţiul 2.3 ***Răspunsul sistemelor şi localizarea polilor***

Se consideră următoarele funcţii de transfer:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s-1}, \quad G_3(s) = \frac{1}{s^2-1}, \quad G_4(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$G_5(s) = \frac{1}{s^2+2s+17}, \quad G_6(s) = \frac{1}{s^2-2s+17}$$

- Reprezentaţi (în MATLAB) răspunsul la impuls şi la treaptă pentru un interval de timp $t \in [0, 10]$.
- Determinaţi polii fiecărei funcţii de transfer şi comentaţi forma răspunsului şi locaţia polilor în planul complex (utilizaţi Tabelul 1).

Exerciţiul 2.4 ***Pendulul simplu***

Consideraţi pendulul mecanic din Figura 2.

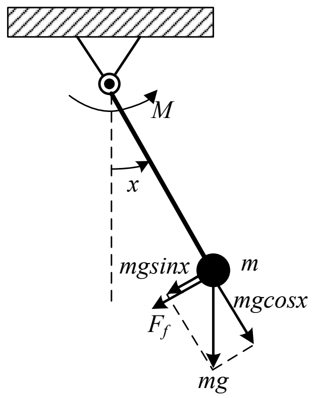


Figura 2: Pendul simplu

Pendulul constă dintr-un corp mic şi greu cu masa m suspendat de o tijă rigidă şi foarte uşoară de lungime l. Tija se poate roti în jurul axei orizontale. Ca urmare, bila se roteşte în plan vertical, cu poziţia determinată de o singură coordonată, de exemplu, deplasarea unghiulară, notată x în Figura 2. Mişcarea bilei este guvernată de forţa de greutate mg, forţa de frecare F_f şi de momentul (cuplul) forţelor externe aplicate în axa de rotaţie, $M(t)$.

Mişcarea pendulului în plan vertical este descrisă de ecuaţia diferenţială:

$$ml^2\ddot{x}(t) = M(t) - mgl\sin x(t) - bl\dot{x}(t) \tag{2}$$

Observaţi că $\sin x \approx x$ pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ iar ecuaţia (2) se poate aproxima ca o ecuaţie diferenţială liniară:

$$ml^2\ddot{x}(t) = M(t) - mglx(t) - bl\dot{x}(t) \tag{3}$$

unde

- $x(t)$ este poziţia unghiulară a pendulului (unghiul pendulului faţă de verticală)
- $M(t)$ este momentul forţei în punctul pivot
- m este masa bilei, $m = 0.5$ kg
- l este lungimea tijei, $l = 1$ m
- g este acceleraţia gravitaţională, $g = 9.8\ m/s^2$
- b este coeficientul de frecare, $b = 0.5$

Consideraţi pendulul ca un sistem cu intrarea $M(t)$ şi ieşirea $x(t)$ şi rezolvaţi următoarele probleme:

1. **Funcţia de transfer**. Consideraţi pendulul ca un sistem dinamic cu semnalul de intrare $M(t)$ şi semnalul de ieşire $x(t)$, cu transformatele Laplace $M(s)$ şi respectiv $X(s)$, după cum se arată în Figura 3. Condiţiile iniţiale sunt zero, adică la timpul iniţial pendulul se află în echilibru şi are viteza unghiulară zero.

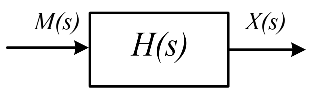


Figura 3: Sistem dinamic

Din ecuaţia diferenţială liniară (3) obţineţi funcţia de transfer de la intrarea $M(s)$ la ieşirea $X(s)$. Aplicaţi transformata Laplace ecuaţiei (3), în condiţii iniţiale zero şi determinaţi funcţia de transfer:

$$H(s) = \frac{X(s)}{M(s)} = ...$$

2. **Răspunsul sistemului din funcţia de transfer**. Obţineţi o reprezentare grafică a răspunsului sistemului, în Matlab, folosing funcţia de transfer:
   - Creaţi funcţia de transfer a pendulului în Matlab cu funcţia *tf*
   - Reprezentaţi răspunsul sistemului la o intrare impuls $M(t) = \delta(t)$ cu funcţia Matlab *impulse*.
   - Reprezentaţi răspunsul sistemului la o intrare treaptă unitară $M(t) = 1$ cu funcţia Matlab *step*.
   - Analizaţi şi comentaţi rezultatele.

Exerciţiul 2.5 ***Trenuri Maglev***

Trenurile are utilizează levitaţia magnetică (MagLev) sunt astăzi o soluţie promiţătoare pentru transport. Acestea obţin forţa de propulsie de la motoare liniare şi utilizează electromagneţi pentru sistemul de suspensie. Două tipuri de tehnologie de levitaţie [2] vor fi discutate în această problemă:

(I) *suspensia electromagnetică* (EMS), care utilizează forţa magnetică de *atracţie* pentru levitaţie (Figura 4),
(II) *suspensia electrodinamică* (EDS), care utilizează forţa magnetică de *respingere* pentru levitaţie (Figura 5).

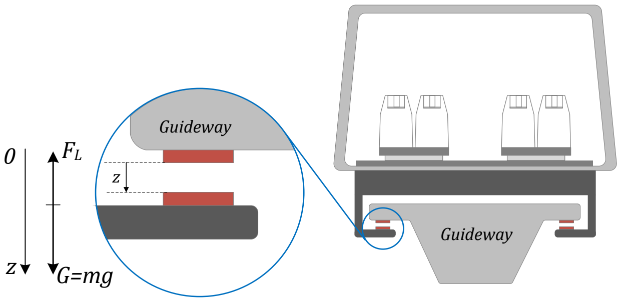


Figura 4: Suspensia electromagnetică (atracţie magnetică)

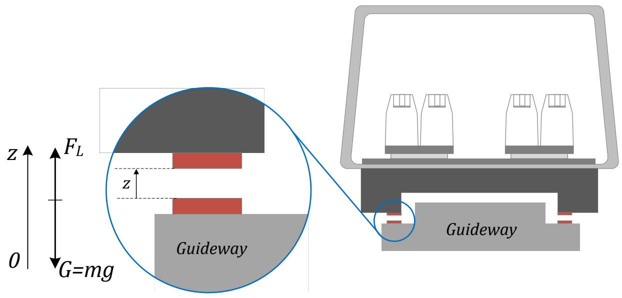


Figura 5: Suspensie electrodinamică (respingere magnetică)

Forţa de levitaţie F_L depinde de curentul $i(t)$ în bobinele de levitaţie şi de distanţa de levitaţie $z(t)$ şi poate fi aproximată prin, [1]:

$$F_L(t) = k \cdot \frac{i^2(t)}{z^2(t)}$$

unde k este o constantă. Această forţă este opusă forţei de greutate $G = mg$, unde m este masa trenului şi g - acceleraţia gravitaţională.

La echilibru, trenul levitează pe o distanţă de 1 cm.

Se consideră următoarele constante pentru model:

- Distanţa de levitaţie la echilibru $z_0 = 10^{-2}\ m$
- Masa trenului $m = 10^4\ kg$
- Constanta forţei de levitaţie $k = 10^{-3}\ Nm^2/A^2$
- Acceleraţia gravitaţională $g = 10\ m/s^2$

În ambele cazuri, sistemul de levitaţie are intrarea $i(t)$ - curentul în bobinele de levitaţie şi ieşirea $z(t)$ - distanţa de levitaţie între ten şi şinele de ghidare (vezi Figura 6).

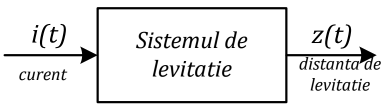


Figura 6: Sistemul de levitaţie: intrare - curent, ieşire - distanţa de levitaţie

Un model pentru acest sistem, sau o relaţie între $i(t)$ şi $z(t)$, poate fi obţinută din ecuaţia diferenţială care descrie mişcarea pe verticală a trenului:

$$masa \times acceleraţia = \sum forţe$$

unde *acceleraţia* se referă la acceleraţia mişcării pe verticală, obţinută ca a doua derivată a distanţei $z(t)$. Considerând orientarea forţelor şi sistemul de coordonate dupa cum sunt prezentate în Figurile 4 şi 5, se obţin următoarele modele neliniare:

(I) EMS:

$$m\ddot{z}(t) = mg - k\frac{i^2(t)}{z^2(t)} \tag{4}$$

(II) EDS:

$$m\ddot{z}(t) = k\frac{i^2(t)}{z^2(t)} - mg \tag{5}$$

1. Aproximarea ecuaţiilor diferenţiale în jurul unui punct de operare.
   Ecuaţiile (4) şi (5) sunt două ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul 2. Pentru a calcula funcţia de transfer în fiecare caz, se vor aproxima la ecuaţii diferenţiale liniare în jurul unui punct de operare. *Calculul detaliat este prezentat în Anexa (optională).*

   Trenul este în echilibru pentru o distanţa nominală de levitaţie $z_0 = 1\text{cm} = 0.01$ m. Curentul de echilibru (care menţine trenul în levitaţie la 1 cm) este $i_0 = 100A$.

   Dacă se notează: $\Delta z(t) = z(t) - z_0,\ \Delta i(t) = i(t) - i_0,\ \Delta\ddot{z}(t) = \ddot{z}(t) - \ddot{z}_0$, variaţiile în jurul punctului de operare $(z_0 = 0.01,\ \ddot{z}_0 = 0,\ i_0 = 100)$, aproximarea liniară a ecuaţiilor (4) şi (5) este:
   (I) EMS:

   $$m\Delta\ddot{z}(t) = 2k\frac{i_0^2}{z_0^3}\Delta z(t) - 2k\frac{i_0}{z_0^2}\Delta i(t) \tag{6}$$

   (II) EDS:

   $$m\Delta\ddot{z}(t) = -2k\frac{i_0^2}{z_0^3}\Delta z(t) + 2k\frac{i_0}{z_0^2}\Delta i(t) \tag{7}$$

   Modelul liniarizat, cu intrarea $\Delta i(t)$ şi ieşirea $\Delta z(t)$ este prezentat în Figura 7.

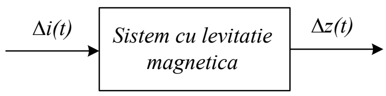


Figura 7: Sistemul de levitaţie magnetică: intrare - $\Delta i(t)$, ieşire - $\Delta z(t)$

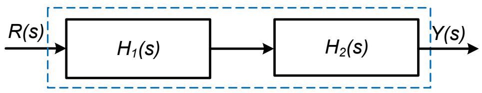
2. Funcţia de transfer
   (a) Determinaţi funcţia de transfer de la intrarea curent $\Delta i(t)$ la ieşirea poziţie $\Delta z(t)$ în ambele cazuri.
   (b) Reprezentaţi grafic răspunsul sistemului la intrare impuls pentru un timp de 0.1 secunde (cazul I) şi 1 secundă (cazul II).
   Utilizaţi funcţia Matlab *impulse* pentru a simula răspunsul la impuls în ambele cazuri
   Analizaţi şi explicaţi rezultatele.

Exerciţiul 2.6 ***Scheme bloc***

Se consideră sistemele descrise de schemele bloc din Figura 8. Determinaţi funcţia de transfer echivalentă pentru fiecare sistem.

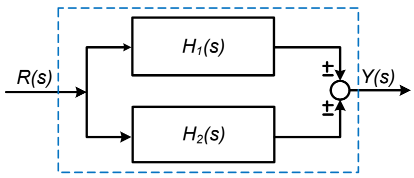
Obs. Reguli pentru conexiunile de bază

Serie



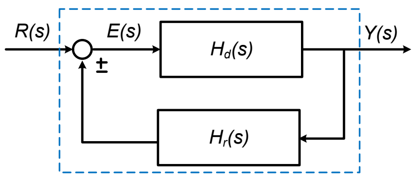
$H_{serie}(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$

Paralel



$H_{parallel}(s) = \pm H_1(s) \pm H_2(s)$

Cu reacţie



$$H_{reactie}(s) = \frac{H_d(s)}{1 \mp H_d(s)H_r(s)}$$

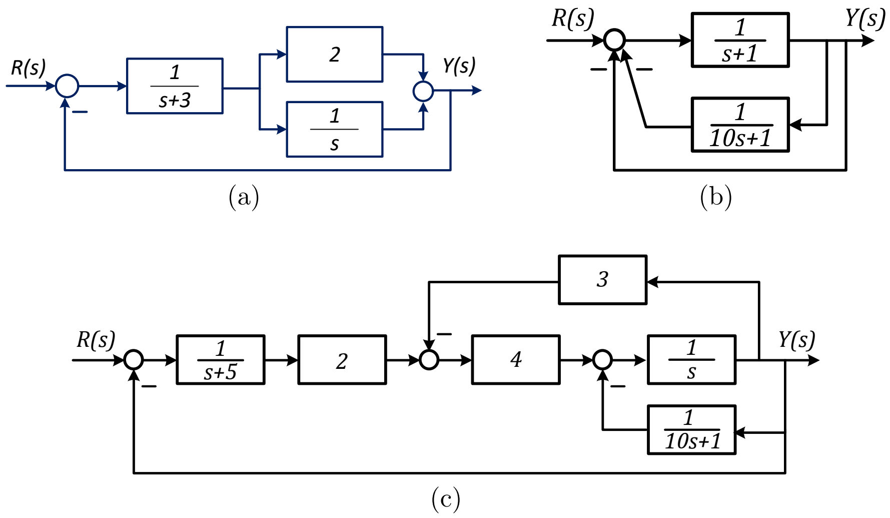


Figura 8:

3 Anexă. Aproximarea liniară a ecuaţiilor diferenţiale. Trenuri Maglev

O aproximare liniară a ecuaţiei diferenţiale care descrie sistemul dinamic Maglev (I) este prezentată mai jos. Cazul (II) poate fi obţinut într-o manieră asemănătoare.

Modelul trenului Maglev (I) este o ecuaţie diferenţială neliniară:

$$m\ddot{z}(t) = mg - k\frac{i^2(t)}{z^2(t)}$$

unde $\ddot{z}(t) = \frac{d^2z(t)}{dt^2}$. Din descrierea sistemului, semnalul de intrare este curentul în bobinele de levitatţie $i(t)$ iar semnalul de ieşire este $z(t)$ - distanţa de levitaţie (Figura 4, Figura 9).

Figura 9: Sistem de levitaţie magnetică. Intrare şi ieşire

Ecuaţia poate fi scrisă ca o funcţie de 3 variabile: acceleraţia $\ddot{z}(t)$, poziţia $z(t)$ şi curentul $i(t)$, egalată cu zero:

$$f(\ddot{z}(t), z(t), i(t)) = m\ddot{z}(t) - mg + k\frac{i^2(t)}{z^2(t)} = 0 \tag{8}$$

Primul pas în liniarizarea ecuaţiei este stabilirea punctului de operare. Dacă trenul este la echilibru pentru o distanţă z_0, atunci viteza şi acceleraţia (pentru mişcarea pe verticală) sunt zero pentru această distanţă: $\ddot{z}_0 = 0$. Curentul care menţine trenul în levitaţie la distanţa z_0 se obţine din ecuaţia neliniară pentru $z(t) = z_0$ şi $\ddot{z}(t) = \ddot{z}_0$:

$$m\ddot{z}_0 = mg - k\frac{i_0^2}{z_0^2}$$

sau

$$0 = mg - k\frac{i_0^2}{z_0^2}, \quad \Rightarrow i_0 = \sqrt{\frac{mg}{k}}z_0$$

Punctul de operare este atunci: $(\ddot{z}_0,\ z_0,\ i_0)$

Din aproximarea cu o serie Taylor trunchiată a funcţiei neliniare (8) în jurul punctului de operare $(\ddot{z}_0,\ z_0,\ i_0)$ se obţine:

$$\begin{aligned} 0 = f(\ddot{z}(t), z(t), i(t)) \quad &\approx \quad f(\ddot{z}_0, z_0, i_0) + \frac{\partial f}{\partial \ddot{z}}|_{(\ddot{z}_0,\ z_0,\ i_0)} \cdot (\ddot{z}(t) - \ddot{z}_0) + \\ &+ \quad \frac{\partial f}{\partial z}|_{(\ddot{z}_0,\ z_0,\ i_0)} \cdot (z(t) - z_0) + \frac{\partial f}{\partial i}|_{(\ddot{z}_0,\ z_0,\ i_0)} \cdot (i(t) - i_0) \end{aligned}$$

sau:

$$0 \approx 0 + m \cdot (\ddot{z}(t) - \ddot{z}_0) - 2k\frac{i_0^2}{z_0^3} \cdot (z(t) - z_0) + 2k\frac{i_0}{z_0^2} \cdot (i(t) - i_0)$$

Se notează $\Delta\ddot{z}(t) = \ddot{z}(t) - \ddot{z}_0$, $\Delta z(t) = z(t) - z_0$ and $\Delta i(t) = i(t) - i_0$ variaţia variabilelor în jurul punctului de operare. Prin re-aranjarea ecuaţiei de mai sus se obţine :

$$m\Delta\ddot{z}(t) = 2k\frac{i_0^2}{z_0^3}\Delta z(t) - 2k\frac{i_0}{z_0^2}\Delta i(t) \tag{9}$$

Ecuaţia diferenţială (9) este liniară şi exprimată în termenii lui $\Delta i(t)$, $\Delta z(t)$ şi $\Delta\ddot{z}(t)$. Aproximarea este valabilă doar pentru mici variaţii ale variabilelor în jurul punctului de operare $\ddot{z}_0$, z_0, i_0.

Bibliografie

[1] Richard C. Dorf and Robert H. Bishop. *Modern Control Systems.* Pearson, 2011.

[2] Hyung-Woo Lee, Ki-Chan Kim, and Ju Lee. Review of Maglev train technologies. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(7):1917–1926, July 2006.