Grupo cociente

Sésar

1. Congruencias

Definition 1. Sea G un grupo. Una **congruencia** es una RBE $\sim$ invariante por traslaciones, es decir:

$$\forall a, b, c \in G,\ a \sim b \Rightarrow ac \sim bc \text{ y } ca \sim cb.$$

Remark 1. Para todo $H \leq G$, la RBE $\mathcal{L}_H$ es invariante por la izquierda y $\mathcal{R}_H$ es invariante por la derecha, pero no son congruencias en general.

Proposition 1. Sea G un grupo y $\sim$ una congruencia en G. Definamos la siguiente operación en $G/\sim$ como

$$[x] * [y] = [xy].$$

Entonces $(G/\sim, *)$ es un grupo.

Demostración. En primer lugar, veamos que la operación está bien definida. Supongamos que $x \sim x'$ e $y \sim y'$. Entonces por un lado, por la invarianza por traslaciones de la RBE tenemos que $xy \sim x'y$ y $x'y \sim x\prime y'$. Por la transitividad de la RBE, $xy \sim x'y'$, luego $[x] * [y] = [xy] = [x'y'] = [x'] * [y']$.

La asociatividad de la operación en el conjunto cociente viene por la asociatividad de la operación en G. Por otro lado, demostremos que $[e]$ es el elemento neutro en $G/\sim$. Para todo $x \in G$, $[x]*[e] = [xe] = [x] = [ex] = [e]*[x]$. Finalmente, $[x]*[x'] = [xx^{-1}] = [e] = [x'x] = [x']*[x]$, luego todo elemento tiene un inverso y $[x]^{-1} = [x^{-1}]$. □

Proposition 2. Sea G un grupo y $\sim$ una congruencia. Entonces

$$\begin{aligned} \pi_\sim : G &\to G/\sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

es un epimorfismo.

Demostración. Por definición de la operación en $G/\sim$, tenemos que $\pi_\sim(xy) = [xy] = [x] * [y] = \pi_\sim(x) * \pi_\sim(y)$, luego es un homomorfismo y es claramente sobreyectiva. □

2. Grupo cociente

Lemma 1. Sea G grupo y $N \leq G$. Son equivalentes:

1. $\mathcal{L}_N$ es una congruencia.
2. $\mathcal{R}_N$ es una congruencia.
3. $N \trianglelefteq G$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{L}_N$ es una congruencia. En particular, para todo $a, b, c \in G$, $a\mathcal{R}_N b \Leftrightarrow a^{-1}\mathcal{L}_N b^{-1} \Rightarrow a^{-1}c^{-1} = (ca)^{-1}\mathcal{L}_N(cb)^{-1} = b^{-1}c^{-1} \Leftrightarrow ca\mathcal{R}_N cb$. Luego hemos demostrado que $\mathcal{R}_N$ es invariante por la izquierda. Como siempre es invariante por la derecha, en particular es invariante por traslaciones, luego es una congruencia.

Supongamos que $\mathcal{R}_N$ es una congruencia. Sean $n \in N$ y $g \in G$. Entonces $n\mathcal{R}_N e \Rightarrow gn\mathcal{R}_N g \Leftrightarrow gng^{-1} \in N$. Esto demuestra que $N \trianglelefteq G$.

Finalmente, supongamos que N es un subgrupo normal y sean $a, b, c \in G$. Si $a\mathcal{L}_N b$, entonces $a^{-1}b \in N$. Como $N \trianglelefteq G$, entonces $c^{-1}a^{-1}bc = (ac)^{-1}bc \in N \Leftrightarrow ac\mathcal{L}_N bc$. Esto demuestra que $\mathcal{L}_N$ es invariante por la derecha. Como siempre es invariante por la izquierda, entonces $\mathcal{L}_N$ es invariante por traslaciones y por tanto $\mathcal{L}_N$ es una congruencia. □

Remark 2. Recordemos que cuando $N \trianglelefteq G$, entonces $gN = Ng$ para todo $g \in N$. En otras palabras, $G/\mathcal{L}_N = G/\mathcal{R}_N$ y como ambos son congruencias, entonces obtenemos el mismo grupo.

Definition 2. Sea G grupo y $N \trianglelefteq G$. Definimos el **grupo cociente** G/N al grupo formado por $(G/\mathcal{L}_N, *)$:

$$xN * yN := xyN$$

Remark 3. $N = G$ si y solo si G/N es el grupo trivial.

Proposition 3. Sea G un grupo y $N \trianglelefteq G$. Entonces $\ker \pi_N = N$.

Demostración. Tenemos que $g \in \ker \pi_N$ si y solo si $gN = N$, es decir, $g \in N$. □

Remark 4. Como el núcleo de cualquier homomorfismo es normal, tenemos que junto a la proposición anterior la siguiente conclusión: un subgrupo es normal si y solo si es el núcleo de cierto homomorfismo.

Theorem 1 (Correspondencia del grupo cociente)**.** Sea G grupo y $N \trianglelefteq G$.

$$M \leq G/N \Leftrightarrow M = H/N \text{ donde } N \leq H \leq G.$$

Además, $H/N \trianglelefteq G/N$ si y solo si $H \trianglelefteq G$.

Demostración. Veamos primero que $H/N \leq G/N$ para $N \leq H \leq G$. Como $N \trianglelefteq G$, entonces por lema, $N \trianglelefteq H$, por lo que el grupo cociente H/N tiene sentido. De este modo, como π_N es un homomorfismo, en particular, $\pi_N(H) = H/N \leq \pi_N(G) = G/N$.

Por otro lado, sea $M \leq G/N$ y llamemos $H = \pi_N^{-1}(M)$. Entonces $H \leq G$. Por otro lado, como $\{e_{G/N}\} \leq M$, por lo que $N = \ker \pi_N = \pi_N^{-1}(\{e_{G/N}\}) \leq H$. Finalmente, como π_N es sobreyectiva, $M = \pi_N(\pi_N^{-1}(M)) = \pi_N(H) = H/N$.

Finalmente, como los homomorfismos preservan la normalidad de los subgrupos, si $H/N = \pi_N(H) \trianglelefteq G/N$, entonces $H = \pi_N^{-1}(\pi_N(H)) \trianglelefteq G$, luego $H \trianglelefteq G$. Si $H \trianglelefteq G$, entonces $\pi_N(H) = H/N \trianglelefteq \pi_N(G) = G/N$. □

Remark 5. Este teorema demuestra que existe una correspondencia biunívoca entre los subgrupos de G/N y los subgrupos que G que contienen a N.

Proposition 4. Sean G grupo y $N \trianglelefteq G$. Sea además $N \leq H, K \leq G$.

1. $\langle H \cup K\rangle/N = \langle H/N \cup K/N\rangle$.
2. $(H \cap K)/N = H/N \cap K/N$.

Demostración. En primer lugar, tenemos que $\langle H \cup K\rangle/N = \pi_N(\langle H \cup K\rangle) = \langle \pi_N(H \cup K)\rangle = \langle \pi_N(H) \cup \pi_N(K)\rangle = \langle H/N \cup K/N\rangle$.

Por otro lado, se cumple para toda aplicación que $(H \cap K)/N = \pi_N(H \cap K) \leq \pi_N(H) \cap \pi_N(K) = H/N \cap K/N$. Por otro lado, si $xN \in H/N \cap K/N$, entonces en particular $xN \in H/N$, por lo que $x \in H$ y de manera análoga, $xH \in K/N$, por lo que $x \in K$ y por tanto $x \in H \cap K$. Esto implica que $xN \in (H \cap K)/N$ y de ahí se tiene que $H/N \cap K/N \leq (H \cap K)/N$. □

Remark 6. En general, si $H \leq G$ y $N \trianglelefteq G$, entonces podemos tener que $N \not\leq H$ y por tanto la expresión H/N no tendría sentido. Sin embargo, el hecho de que $H \leq G$ hace que $\pi_N(H) \leq G/N$. Es decir, podríamos interpretar $\pi_N(H)$ como el subgrupo más pequeño que contiene a las clases laterales $\{hN\}_{h\in H}$.

Proposition 5. Sea G grupo, $N \trianglelefteq G$ y $H \leq G$. Entonces

$$\pi_N(H) = HN/N.$$

Demostración. En primer lugar, como $N \trianglelefteq G$, entonces $N \trianglelefteq HN \leq G$, por lo que podemos hacer el cociente HN/N. De esta manera, tenemos que $HN/N = \langle H \cup N\rangle/N = \pi_N(\langle H \cup N\rangle) = \langle \pi_N(H \cup N)\rangle = \langle \pi_N(H) \cup \pi_N(N)\rangle = \langle \pi_N(H) \cup \{e_{G/N}\}\rangle = \langle \pi_N(H)\rangle = \pi_N(H)$. □

3. Teoremas de isomorfía

Lemma 2 (Propiedad universal). Sea $f : G \to H$ un homomorfismo, $N \trianglelefteq G$ y $N \leq \ker f$. Entonces $\exists! \psi : G/N \to H$ homomorfismo tal que $\psi \circ \pi_N = f$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_N"'] & H \\ G/N \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

En este supuesto, $\ker \psi = \ker f / N$.

Demostración. Probemos primero la existencia. Definamos $\psi : G/N \to H$ tal que $\psi(gN) = f(g)$. Para ver que está bien definido, sea $g_1 N = g_2 N$. Entonces $g_1 g_2^{-1} \in N \leq \ker f$, luego $f(g_1 g_2^{-1}) = e_H$, por lo que $\psi(g_1 N) = f(g_1) = f(g_2) = \psi(g_2 N)$. Veamos ahora que ψ es un homomorfismo: $\psi(g_1 N * g_2 N) = \psi(g_1 g_2 N) = f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) = \psi(g_1 N)\psi(g_2 N)$. Finalmente, es fácil observar que para todo $g \in G$, $f(g) = \psi(gN) = \psi(\pi_N(g))$, luego $f = \psi \circ \pi_N$.

Para demostrar la unicidad, supongamos que $\widetilde{h} : G/N \to H$ es otro homomorfismo tal que $\widetilde{h} \circ \pi_N = f$. Entonces en particular para todo $g \in G$, $\widetilde{h}(gN) = \widetilde{g}(\pi_N(g)) = f(g) = \psi(gN)$, luego $\widetilde{h} = \psi$.

Finalmente, Tomando en consideración que $\ker f = \pi_N^{-1}(\ker \psi)$, tenemos que $\ker f/N = \pi_N(\ker f) = \ker \psi$. $\square$

Theorem 2 (Isomorfía I)**.** Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Entonces

$$G/\ker f \cong f(G).$$

Demostración. Por el lema anterior, existe un único homomorfismo $\psi : G/\ker f \to H$ tal que $\psi \circ \pi_{\ker f} = f$. En particular, la restricción $\psi : G/\ker f \to f(G)$ es un epimorfismo. Finalmente, $\ker \psi = \ker f / \ker f = \{e\}$, luego es monomorfismo. $\square$

Corollary 1. $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.

Demostración. Tomemos la aplicación

$$\begin{aligned} f : G &\to \mathrm{Inn}(G) \\ g &\mapsto \theta_g. \end{aligned}$$

Esta aplicación es claramente sobreyectiva, luego $f(G) = \mathrm{Inn}(G)$. Además, es también un homomorfismo. Calculemos pues el núcleo de este homomorfismo. $g \in \ker f$ si y solo si $\theta_g = \mathrm{id}_G$. Esto es equivalente a decir que para todo $x \in G$, $\theta_g(x) = gxg^{-1} = x$, es decir, $gx = xg$, luego $g \in Z(G)$. Por el Primer Teorema de Isomorfía se tiene. $\square$

Corollary 2. Si H y K son grupos. Entonces $(H \times K)/K' \cong H$ y $(H \times K)/H' \cong K$.

Demostración. Ambos casos son análogos, luego sólo demostraremos uno de ellos. En particular, la aplicación proyección $p_H : H \times K \to H$ es un epimorfismo. Además, $\ker p_H = \{(h,k) \in H \times K \mid p_H(h,k) = h = e_H\} = \{(e_H, k) \mid k \in K\} = K'$. $\square$

Corollary 3. Sea G un grupo y $\sim$ una congruencia. Entonces

$$G/[e] \cong G/\sim .$$

Demostración. Tomemos el epimorfismo canónico $\pi_\sim : G \to G/\sim$. Además, tenemos que $\ker \pi_\sim = \{g \in H \mid \pi_\sim(g) = [g] = [e]\} = \{g \in G \mid g \sim e\} = [e]$. $\square$

Remark 7. Este corolario muestra que todo grupo formado por una congruencia puede verse como el grupo cociente de un subgrupo normal adecuado. En otras palabras, ambas construcciones son equivalentes y por esta razón la teoría se centra particularmente en el estudio de los grupos cocientes.

Theorem 3 (Isomorfía II)**.** Sea G grupo, $H \leq G$ y $N \trianglelefteq G$. Entonces

$$HN/N \cong H/(H \cap N).$$

Demostración. Tomemos el homomorfismo canónico π_N. Entonces la restricción en H es también un homomorfismo $\pi_N|_H : H \to G/N$. En particular, $\pi_N(H) = HN/N$. Por lo tanto, por el Primer Teorema de Isomorfía, $H/\ker \pi_N|_H \cong HN/N$. Finalmente, $\ker \pi_N|_H = \ker \pi_N \cap H = N \cap H$. $\square$

Theorem 4 (Isomorfía III)**.** Sea G grupo y $N \trianglelefteq G$. Si $N \leq K \trianglelefteq G$, entonces

$$(G/N)/(K/N) \cong G/K.$$

Demostración. Tomemos el epimorfismo canónico $\pi_K : G \to G/K$. Como N es un subgrupo normal de G tal que $N \leq K = \ker \pi_K$, tenemos que por la propiedad universal existe un homomorfismo $\psi : G/N \to G/K$ tal que $\ker \psi = \ker \pi_K/N = K/N$. Como ψ es sobreyectivo, por el Primer Teorema de Isomorfía se tiene. $\square$