Grupos resolubles

Sésar

1. Definición

Definition 1. Un grupo G es **resoluble** si existe una **serie abeliana**, es decir, una serie normal finita
$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G,$$
tal que G_{i+1}/G_i es abeliano para todo $i = 0, \ldots, n-1$.

Remark 1. Todo grupo G abeliano es resoluble. Esto es porque $\{e\} \trianglelefteq G$ es una serie abeliana. Por otro lado, un grupo G simple no abeliano no es resoluble, ya que la única seria normal es $\{e\} \trianglelefteq G$ y su cociente no es abeliano.

Proposition 1. Sea G un grupo resoluble.

1. Si $H \leq G$, entonces H es resoluble.
2. Si $f : G \to K$ homomorfismo, entonces $f(G)$ es resoluble.
3. Si $N \trianglelefteq G$, entonces G/N es resoluble.
4. Si K es también resoluble, entonces $G \times K$ es resoluble.

Demostración. Como G es un grupo resoluble, entonces existe una serie abeliana $\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$.

En primer lugar, supongamos que $H \leq G$. Se puede demostrar fácilmente que se da la siguiente serie normal $\{e\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_n = H$ donde $H_i = G_i \cap H$. Además, por el segundo teorema de isomorfía, tenemos que $H_{i+1}/H_i = (G_{i+1} \cap H)/(G_i \cap H) \cong (G_i(G_{i+1} \cap H))/G_i \cong G_{i+1}/G_i \cap HG_i/G_i \leq G_{i+1}/G_i$. Como todo subgrupo de un grupo abeliano es abeliano, se tiene que la serie es abeliana.

Por otro lado, tenemos que $\{e\} = F_0 \trianglelefteq F_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq F_n = f(G)$ donde $F_i = f(G_i)$. Además, por el tercer teorema de isomorfía, $F_{i+1}/F_i = f(G_{i+1})/f(G_i) \cong (f(G_{i+1})/\ker f)/(f(G_i)/\ker f) \cong G_{i+1}/G_i$, por lo que es abeliano.

En particular, $G_i/N = \pi_N(G_i)$ donde $\pi_N : G_i \to G_i/N$ es el homomorfismo canónico.

Finalmente, sean G y K resolubles. En particular, existirá una cadena abeliana $\{e\} \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_m = K$ para K. Supongamos sin pérdida de generalidad que $m > n$. Entonces podemos construirnos la serie normal $\{e\} = G_0 \times K_0 \trianglelefteq G_i \times K_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G \times K_n \trianglelefteq G \times K_{n+1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G \times K$. Como $(G_{i+1} \times K_{i+1})/(G_i \times K_i) \cong G_{i+1}/G_i \times K_{i+1}/K_i$, es claro ver que es una serie abeliana. □

Theorem 1 (Propiedad extensiva)**.** Sea G un grupo y $N \trianglelefteq G$. Si N y G/N son resolubles, entonces G es resoluble.

Demostración. Por un lado, como N es resoluble, entonces existe una serie abeliana $\{e\} \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq N$. Por otro lado, como G/N es abeliana, entonces $\{e\} \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_n = G/N$. Como $K_i \leq G/N$, entonces existe un $G_i \leq G$ tal que $K_i = G_u/N$. Además, como esta correspondencia respeta los subgrupos normales, entonces tenemo una serie normal $N \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G$. Por el tercer teorema de isomorfía, tenemos que $G_{i+1}/G_i \cong (G_{i+1}/N)/(G_i/N) = K_{i+1}/K_i$ y, por tanto, G_{i+1}/G_i son abelianos. De esta la cadena $\{e\} \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq N \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G$ es una seria abeliana. □

Corollary 1. Sean $N, K \leq G$ resolubles. Si $N \trianglelefteq G$, entonces NK es resoluble

Demostración. Por construcción, $N \trianglelefteq NK$ que es resoluble y $NK/N \cong K/(N \cap K)$ que también es resoluble porque es cociente del grupo resoluble K. Por la propiedad extensiva, NK es resoluble. □

2. Conmutador

Definition 2. Sea G grupo. Definimos el **conmutador** como la aplicación $[\cdot, \cdot] : G \times G \to G$ tal que

$$[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}.$$

Proposition 2. Sea G un grupo y $x, y, z \in G$.

1. $[x, y]^{-1} = [y, x]$.
2. $z[x, y]z^{-1} = [zxz^{-1}, zyz^{-1}]$.
3. Si $f : G \to K$ es un homomorfismo, $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$.
4. Si $N \trianglelefteq G$, entonces $[xN, yN] = [x, y]N$ en G/N.
5. Si $G = H \times K$, entonces $[(h_1, k_1), (h_2, k_2)] = ([h_1, h_2], [k_1, k_2])$.

Demostración. En primer lugar, es fácil ver que $[x, y]^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x]$. Por otro lado, $[zxz^{-1}, zyz^{-1}] = zxz^{-1}zyz^{-1}zx^{-1}z^{-1}zy^{-1}z^{-1} = zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = z[x, y]z^{-1}$. Además, $f([x, y]) = f(xyx^{-1}y^{-1}) = f(x)f(y)f(x)^{-1}f(y)^{-1} = [f(x), f(y)]$. Como consecuencia, tomando el homomorfismo canónico $\pi_N : G \to G/N$ se obtiene que $[xN, yN] = [x, y]N$. Finalmente, $[(h_1, k_1), (h_2, k_2)] = (h_1, k_1)(h_2, k_2)(h_1^{-1}, k_1^{-1})(h_2^{-1}, k_2^{-1}) = (h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1}, k_1k_2k_1^{-1}k_2^{-1}) = ([h_1, h_1], [k_1, k_2])$. □

Definition 3. Sean $H, K \leq G$. Entonces definimos el **subgrupo conmutador** de H y K como

$$[H, K] := \langle [h, k] \mid h \in H,\ k \in K \rangle.$$

Remark 2. El subgrupo conmutador, por definición del generador, es el subgrupo más pequeño que contiene a todos los conmutadores $[h, k]$ con $h \in H$ y $k \in K$.

Proposition 3. Sean $H, K \leq G$.

1. Si $J \leq G$, entonces $[H \cap J, K \cap J] \leq [H, K] \cap J$.
2. Si $f : G \to L$ homomorfismo, entoncs $f([H, K]) = [f(H), f(K)]$.
3. Si $N \trianglelefteq G$, entonces $[HN/N, KN/N] = [H, K]N/N$.
4. Si $G = G_1 \times G_2$, $H_1, K_1 \leq G_1$ y $H_2, K_2 \leq G_2$, entonces $[H_1 \times H_2, K_1 \times K_2] = [H_1, K_1] \times [H_2, K_2]$.

Demostración. En primer lugar, sea $[h, k]$ con $h \in H \cap J$ y $k \in K \cap J$. En particular, $[h, k] \in [H, K] \cap J$, por lo que $[H \cap J, K \cap J] \leq [H, K] \cap J$. Por otro lado, por las propiedades de un subgrupo generado, obtenemos que $f([H, K]) = [f(H), f(K)]$. Como consecuencia, tomando el homomorfismo canónico $\pi_N : G \to G/N$ y sabiendo que $\pi_N(H) = HN/N$, entonces se tiene la igualdad. Finalmente, como $[(h_1, k_1), (h_2, k_2)] = ([h_1, h_2], [k_1, k_2])$, entonces también se deduce la igualdad. □

Proposition 4. Si $N_1, N_2 \trianglelefteq G$, entonces

1. $[N_1, N_2] \leq N_1 \cap N_2$.
2. $[N_1, N_2] \trianglelefteq G$.

Demostración. Tomemos $[n_1, n_2] = n_1 n_2 n_1^{-1} n_2^{-1}$ con $n_1 \in N_1$ y $n_2 \in N_2$. Como $N_1 \trianglelefteq G$, entonces $n_2 n_1^{-1} n_2^{-1} \in N_1$ y deducimos que $[n_1, n_2] \in N_2$. De la misma manera, $n_1 n_2 n_1^{-1} \in N_2$, por lo que $[n_1, n_2] \in N_2$. En resumen, $[n_1, n_2] \in N_1 \cap N_2$ para todo $n_i \in N_i$ y por tanto $[N_1, N_2] \in N_1 \cap N_2$.

Por otro lado, $x[N_1, N_2]x^{-1} = [xN_1x^{-1}, xN_2x^{-1}] = [N_1, N_2]$, por lo que es un subgrupo normal. □

Corollary 2. Si K_1, K_2 car G, entonces $[K_1, K_2]$ car G.

Demostración. Tomemos un $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ arbitrario. Entonces como φ es en particular un homomorfismo, $\varphi([K_1, K_2]) = [\varphi(K_1), \varphi(K_2)] = [K_1, K_2]$. □

Definition 4. Sea G grupo. Definimos el **subgrupo derivado** como

$$G' := [G, G].$$

Lemma 1. Sea G grupo. Entonces

1. G' car G.
2. $H \leq G \Rightarrow H' \leq G'$.

Demostración. Como G es un subgrupo característico de sí mismo, entonces $G' = [G, G]$ car G. Por otro lado, $H' = [H, H] \leq [G, G] = G'$. $\square$

Remark 3. El subgrupo derivado, por ser característico, es en particular normal: $G' \trianglelefteq G$.

Theorem 2. Sea G grupo y $N \trianglelefteq G$. Entonces

$$G/N \text{ abeliano } \Leftrightarrow G' \leq N.$$

En particular, G/G' es abeliano

Demostración. Decir que G/N es abeliano es equivalente a que para todo $x, y \in G$, $xyN = yxN$, escrito de otra manera, $[x, y]N = N$ y por definición de las clases laterales, $[x, y] \in N$. Como esto es cierto para todo $x, y \in G$, esto es lo mismo que decir que $G' \leq N$. $\square$

Remark 4. Lo que este teorema viene a decir es que el subgrupo derivado tiene la particularidad de ser el subgrupo normal más pequeño que hace abeliano su cociente.

3. Serie derivada

Definition 5. Sea G un grupo. Llamamos **serie derivada** a la siguiente serie normal

$$G = G^{(0)} \trianglerighteq G^{(1)} \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G^{(i)} \trianglerighteq \ldots$$

tal que $G^{(i+1)} = (G^{(i)})'$.

Remark 5. Notemos que, por definición de la serie derivada, $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ es abeliano para todo $i \in \mathbb{N}$.

Theorem 3. Un grupo G es resoluble si y solo si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $G^{(n)} = \{e\}$.

Demostración. En primer lugar si $G^{(n)} = \{e\}$, entonces en particular la serie derivada es finita y cumple con las condiciones de la abenialidad del cociente, por lo que G es resoluble.

Por otro lado, sea G resoluble. Entonces existe una serie normal finita

$$\{e\} = G_n \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0 = G,$$

con G_i/G_{i+1} es abeliano. Demostremos por inducción que $G^{(i)} \leq G_i$. Para $i = 0$, tenemos que G/G_1 es abeliano, lo que implica que $G' \leq G_1$. Supongamos que es verdad para un cierto i, tenemos que $G^{(i)} \leq G_i$. Por un lado, $G^{(i+1)} \leq G_i'$. Además, como G_i/G_{i+1} es abeliano, entonces $G_i' \leq G_{i+1}$. Por lo tanto, $G^{(i+1)} \leq G_{i+1}$. En particular, $G^{(n)} \leq G_n = \{e\}$, luego $G^{(n)} = \{e\}$. $\square$

Remark 6. Notemos que si $G^{(n)} = \{e\}$, entonces $G^{(i)} = \{e\}$ para todo $i \geq n$.

Definition 6. Sea G resoluble. La **longitud derivada** $d(G)$ es el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $G^{(n)} = \{e\}$.

Proposition 5. Si G es resoluble, entonces $d(G)$ es el mínimo sobre las longitudes de las series abelianas.

Demostración. Si una serie abeliana tiene longitud n, entonces por la demostración del teorema anterior, $G^{(n)} = \{e\}$, luego $d(G) \leq n$. La igualdad se da cuando la serie abeliana es en particular la serie derivada. $\square$

Proposition 6. Sea G resoluble.

1. Si $H \leq G$, entonces $d(H) \leq d(G)$.
2. Si $f : G \to K$ homomorfismo, entonces $d(f(G)) \leq d(G)$.
3. Si $N \trianglelefteq G$, entonces $d(G/N) \leq d(G)$.
4. Si K es también resoluble, $d(G \times K) = \max\{d(G), d(H)\}$.

Demostración. En primer lugar, vimos que podemos construir en H una serie abeliana de longitud $d(G)$, luego $d(H) \leq d(G)$. Por otro lado, lo mismo podemos decir de la serie abeliana en $f(G)$, luego $d(f(G)) \leq d(G)$ y, consecuentemente, tomando $f = \pi_N$ el homomorfismo canónico, $d(G/N) \leq d(G)$.

Finalmente, notemos que $G, K \leq G \times K$, luego $d(G), d(K) \leq d(G \times K)$, lo que dicho de otro modo, $\max\{d(G), d(K)\} \leq d(G \times K)$. Por otro lado, vimos en la demostración del teorema que podemos construir una serie abeliana en $G \times K$ de longitud $\max\{d(G), d(K)\}$, luego $d(G \times K) \leq \max\{d(G), d(K)\}$. $\square$

Remark 7. Notemos que el grupo trivial es el único grupo con longitud derivada 0.

Proposition 7. Un grupo G es abeliano si y solo si $d(G) \leq 1$.

Demostración. Si G es abeliano, entonces $\{e\} \trianglelefteq G$ es una serie abeliana de longitud 1, luego $d(G) \leq 1$. Por otro lado, si $d(G) \leq 1$, existen dos casos. Si $d(G) = 0$, entonces G es trivial y por tanto abeliano. Si $d(G) = 1$, entonces $G' = \{e\}$, por lo que $G/G' = G$ es abeliano. $\square$