Grupos nilpotentes

Sésar

1. Definición

Los grupos nilpotentes son una generalización de los p-grupos. Muchas de las propiedades que cumplen los p-grupos también se cumplen para los grupos nilpotentes. Por ejemplo, todo subgrupo propio está estrictamente contenido en su normalizador. Además, todo subgrupo maximal es normal.

Definition 1. Un grupo G es **nilpotente** si posee una **serie central**, es decir, una serie normal finita

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G,$$

tal que $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ para todo $i = 0, \ldots, n-1$.

Lemma 1. Sea $\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$ una serie normal finita. Para todo $i = 1, \ldots, n-1$ son equivalentes:

1. $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$.
2. $[G_{i+1}, G] \leq G_i$.

Demostración. Supongamos primero que $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$. Sean $g \in G_{i+1}$ y $x \in G$. Entonces $gG_i \in G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$. Por lo que $(gG_i)(xG_i) = (xG_i)(gG_i)$, lo que implica que $gxg^-1x^{-1} \in G_i$. Como es cierto para todo $g \in G_{i+1}$ y $x \in G$, entonces $[G_{i+1}, G] \leq G_i$.

Por otro lado, supongamos que $[G_{i+1}, G] \leq G_i$ y tomemos $g \in G_{i+1}$. Tomando un $x \in G$ arbitrario obtenemos que $gxg^{-1}x^{-1} \in [G_{i+1}, G] \leq G_i$, lo que quiere decir que $(gxg^{-1}x^{-1})G_i = eG_i$, es decir, $(gG_i)(xG_i) = (xG_i)(gG_i)$. Como se cumple para todo $x \in G$, entonces $gG_i \in Z(G/G_i)$. □

Definition 2. Sea G un grupo nilpotente. Llamamos **clase de nilpotencia** $c(G)$ a la mínima longitud de la serie central.

Por convención, el grupo trivial es nilpotente de clase de nilpotencia 0. Por otro lado, si $G \neq \{e\}$ es nilpotente, entonces $Z(G) \neq \{e\}$. Esto es porque, por un lado, como G no es trivial, entonces $c(G) \leq 1$ y podemos suponer que $G_1 \neq \{e\}$. Por otro lado, $G_1/G_0 \leq Z(G/G-0)$, es decir, $\{e\} \neq G_1 \leq Z(G)$.

Proposition 1. Un grupo G es no trivial y abeliano si y solo si G es nilpotente y $c(G) = 1$.

Demostración. Supongamos que es $G \neq 1$ es abeliano. Entonces pordemos formar la serie normal $\{e\} \trianglelefteq G$ y además, por ser abelinano, $G = G/\{e\} \leq Z(G) = Z(G/\{e\})$. Por tanto, $c(G) \leq 1$. Como además no es trivial, $c(G) = 1$.

Por otro lado, el hecho de que $c(G) = 1 > 0$ indica que $G \neq 1$. Y como es nilpotente, tenemos la serie central $\{e\} \leq G$ donde $G \leq Z(G)$, es decir, $G = Z(G)$, luego G es abeliano. □

Proposition 2. Todo grupo nilpotente es resoluble.

Demostración. Si G es un grupo nilpotente, existe una cadena central $\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$ tal que $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$. En particular, $G_{i+1}/G_i \leq Z(G_{i+1}/G_i)$, por lo que G_{i+1}/G_i es abeliano y por definición, G es resoluble. □

Theorem 1. Sean G y K grupos.

1. Si G nilpotente y $H \leq G$, entonces H es nilpotente con $c(H) \leq c(G)$.
2. Si G nilpotente y $f : G \to K$, entonces $f(G)$ nilpotente con $c(f(G)) \leq c(G)$.
3. Si G nilpotente y $N \trianglelefteq G$, entonces G/N nilpotente con $c(G/N) \leq c(G)$.
4. Si G y K nilpotentes, entonces $G \times K$ es nilpotente con $c(G \times K) = \text{máx}\{c(G), c(K)\}$.

Demostración. Como G es nilpotente, supondremos para todos los apartados de la demostración que existe una serie central $\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$.

1. Se puede demostrar fácilmente que se da la siguiente serie normal $\{e\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_n = H$ donde $H_i = G_i \cap H$. Por otro lado, como $[G_{i+1}, G] \leq G_i$, tenemos que $[H_{i+1}, H] = [G_{i+1} \cap H, G \cap H] \leq [G_{i+1}, G] \cap H \leq G_i \cap H = H_i$.
2. Tenemos que $\{e\} = F_0 \trianglelefteq F_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq F_n = f(G)$ donde $F_i = f(G_i)$. Además, $[F_{i+1}, F] = [f(G_{i+1}), f(G)] = f([G_{i+1}, G]) \leq f(G_i) = F_i$.
3. Podemos aplicar el apartado anterior con el homomorfismo natural $\pi : G \to G/N$.
4. Sea $\{e\} = K_0 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_m = K$ una serie central de K y supongamos $c(G) \leq c(K)$. Entonces $\{e\} = G_0 \times K_0 \trianglelefteq G_1 \times K_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n \times K_n = G \times K_n \trianglelefteq G \times K_{n+1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G \times K_m = G \times K$ es una serie central de $G \times K$, por lo que $c(G \times K) \leq c(K)$. En el supuesto de que $c(K) \leq c(K) = \text{máx}\{c(G), c(H)\}$, tomando una serie central análoga llegaríamos a la conclusión de que $c(G \times K) \leq c(G) = \text{máx}\{c(G), c(H)\}$. Habiendo demostrado que el producto directo es nilpotente y sabiendo que $G, K \leq G \times K$, entonces por el apartado anterior $c(G), c(K) \leq c(G \times K)$, es decir, $\text{máx}\{c(G), c(H)\} \leq c(G \times K)$. □

Lemma 2. Si $G/Z(G)$ es nilpotente, entonces G es nilpotente.

Demostración. Supongamos que $\{e\} = Z_0 \trianglelefteq Z_i \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq Z_n = G/Z(g)$ es una serie central. Como $Z_i \leq G/Z(G)$, entonces $Z_i = G_i/Z(G)$ donde $Z(G) \leq G_i \leq G$. De este modo, podemos considerar la siguiente serie normal $\{e\} \trianglelefteq Z(G) \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$. Por último, por el tercer teorema de isomorfía, tenemos que $G_{i+1}/G_i = Z_{i+1}/Z_i \leq Z(Z_n/Z_i) = Z(G/G_i)$. □

Hay que destacar que, en contraste con los grupos resolubles, los grupos nilpotentes con satisfacen la propiedad extensiva: en general si $N \trianglelefteq G$ y N y G/N son nilpotentes, G no tiene porqué ser nilpotente.

Theorem 2. Todo p-grupo finito es nilpotente.

Demostración. Sea G un p-grupo finito. Realizaremos inducción fuerte en la potencia del orden del grupo. El caso $G = \{e\}$ es trivial. Si $|G| = p^1$, entonces $G \cong C_p$ y por ser abeliano es nilpotente. Supongamos que se cumple para todo grupo con potencia p^k con $k \leq n$ y sea G un p-grupo con $|G| = p^{n+1}$. Como G es un p-grupo, entonces $Z(G) \neq \{e\}$, por lo que $|G/Z(G)| < |G|$. Por lo tanto, $|G/Z(G)| = p^{k_0}$ para un cierto $k_0 \leq n$. Por hipótesis de inducción, $G/Z(G)$ es nilpotente y por tanto, G es nilpotente. □

2. Caracterizaciones de nilpotencia

Definition 3. Sea G un grupo. La **serie central superior** es la serie normal

$$\{e\} = Z_0 \trianglelefteq Z_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq Z_i \trianglelefteq \ldots$$

tal que $Z_1 = Z(G)$ y $Z_{i+1}/Z_i = Z(G/Z_i)$.

Definition 4. Sea G un grupo. La **serie central inferior** es la serie normal

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G_i \trianglerighteq \ldots$$

tal que $[G_i, G] = G_{i+1}$.

Theorem 3 (Finitud de series centrales)**.** Sea G un grupo. Son equivalentes:

1. G es nilpotente.
2. G tiene una serie central superior y $\exists c \in \mathbb{N}$ tal que $Z_c = G$.
3. G tiene una serie central inferior y $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $G_k = G$.

En este supuesto, la longitud de la serie central superior e inferior coinciden con $c(G)$.

Demostración. Demostremos las implicaciones en el orden establecido.

(1⇒2) Supongamos que $\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$ es una serie central. Si demostramos que $G_i \leq Z_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $G = G_n = Z_n \leq G$, por lo quer $Z_n = G$. Demostremos entonces que $G_i \leq Z_i$ por inducción. Sabemos que $G_i \leq Z(G)$, luego es cierto para $i = 1$. Supongamos que $G_i \leq Z_i$ para un cierto i. En este caso, podemos definir un homomorfismo sobreyectivo $p_i : G/G_i \to G/Z_i$ tal que $p(gG_i) = gZ_i$. Como la imagen del centro del grupo está contenido en el centro de la imagen, entonces $p_i(G_{i+1}/G_i) \leq p_i(Z(G/G_i)) \leq Z(G/Z_i) = Z_{i+1}/Z_i$, por lo que $G_{i+1} \leq Z_{i+1}$.

(2⇒3) La misma serie central superior, visto en el orden inverso, es una serie central inferior finita.

(3⇒1) Es directo por la definición de nilpotencia

En el caso de la finitud de las series, sus longitudes coinciden, por lo que ambas son $c(G)$. □

Theorem 4. Sea G grupo finito. Son equivalentes:

1. G es nilpotente.
2. $H < G \Rightarrow H < N_G(H)$.
3. Si $M \leq G$ es maximal, entonces $M \trianglelefteq G$.
4. Todo subgrupo de Sylow de G es normal en G.
5. G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow.

Demostración. Demostraremos cada implicación en el orden establecido.

(1⇒2) Si G es abeliano, entonces $N_G(H) = G$. Supongamos que G no es abeliano. Si $Z(G) \nsubseteq H$, entonces $H \triangleleft HZ(G) \leq G$. De este modo, supongamos ahora que $Z(G) \subseteq H$ y usemos inducción en el orden del grupo. Entonces $H/Z(G) < G/Z(G)$ y este último grupo es nilpotente. De este modo, $H/Z(G) \triangleleft N_{G/Z(G)}(H/Z(G))$. De este modo, tomando las antiimágenes en el homomorfismo canónico, tenemos que $H < N_G(H)$.

(2⇒3) Como M es maximal, entonces $M < G$, por lo que $M \triangleleft N_G(M) \leq G$ y por el mismo motivo, $N_G(M) = G$.

(3⇒4) Sea $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ para un cierto p primo. Supongamos que $N_G(P) < G$. Entonces existe un subgrupo maximal M tal que $N_G(P) \leq M < G$. Como M es maximal, por hipótesis, $M \triangleleft G$. En particular, $P \in \mathrm{Syl}_p(M)$, por lo que por el argumento de Frattini, $G = MN_G(P) = M$, lo cual es una contradicción y viene de suponer que $N_G(P)$ es un subgrupo propio de G. Por lo tanto, $P \trianglelefteq N_G(P) = G$.

(4⇒5) Hagamos inducción en el número de productos directos. Sean $P_1, \dots P_n$ los grupos de Sylow para cada p_i —como son normales, equivalentemente son los únicos subgrupos de Sylow para cada primo—. Como $P_i \trianglelefteq G$, entonces $P_1 \dots P_n \leq G$. Sea $H = P_1 \dots P_{n-1}$. Entonces por inducción, $H \cong P_1 \times \dots \times P_{n-1}$. Por otro lado, luego $HP_n = G$. Por otro lado, $\mathrm{mcd}(|P_n|, |H|) = 1$, luego $P_n \cap H = \{e\}$. Por lo que $G \cong H \times P_n \cong P_1 \times \dots \times P_n$.

(5⇒1) Todo subgrupo de Sylow es un p-grupo, luego es nilpotente y el producto directo de nilpotentes es nilpotente. □

3. Subgrupos de Fitting y Frattini

Definition 5. Sea G un grupo y $p||G|$. Definimos

$$O_p(G) := \bigcap_{P \in \mathrm{Syl}_p(G)} P.$$

Remark 1. Como todos los p-subgrupos de Sylow son conjugados entre sí, tenemos que si $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, entonces $O_p(G) = \bigcap_{Q \in \mathrm{Syl}_p(G)} Q = \bigcap_{g \in G} gPg^{-1} = \mathrm{core}_G(P)$.

Proposition 3. $O_p(G)$ es el mayor p-subgrupo normal de G para todo $p||G|$.

Demostración. Por definición, es claro ver que $O_p(G)$ es un p-subgrupo. Por otro lado, como $O_p(G)$ es un core, entonces es el mayor subgrupo normal contenido en todo p-subgrupo de Sylow, luego es el mayor p-subgrupo normal. $\square$

Lemma 3. $O_p(G)$ car G.

Demostración. Sea $\varphi : \mathrm{Aut}(G)$ y sea $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Entonces $|\varphi(P)| = |P|$, por lo que $\varphi(P) \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Por otro lado, si $\varphi(P_1) = \varphi(P_2)$, por ser una aplicación biyectiva tenemos que $P_1 = P_2$. Por tanto, $\mathrm{Syl}_p(G)$ queda completamente definido por los subgrupos $\varphi(P)$. Entonces $\varphi(O_p(G)) = \varphi(\bigcap_{P\in\mathrm{Syl}_p(G)} P) = \bigcap_{P\in\mathrm{Syl}_p(G)} \varphi(P) = \bigcap_{P\in\mathrm{Syl}_p(G)} P = O_p(G)$. $\square$

Definition 6. Sea G un grupo. El **subgrupo de Fitting** de G es

$$F(G) := \prod_{p||G|} O_p(G).$$

Lemma 4. Sea G grupo.

1. $O_p(G) \in \mathrm{Syl}_p(F(G))$ para todo $p||G|$.
2. $F(G)$ car G.

Demostración. Demostraremos cada aprtado en el orden establecido.

1. De la definición, podemos deducir que $O_p(G)$ es un p-grupo. Además, $O_p(G) \leq F(G)$. Finalmente, por cómo se define el subgrupo de Fitting, el orden de $O_p(G)$ tiene potencia máxima en $F(G)$, luego es de Sylow.
2. Viene del hecho de que $O_p(G)$ car G y que el producto de subgrupos característicos es característico. $\square$

Theorem 5. $F(G)$ es el mayor subgrupo normal y nilpotente de G.

Demostración. En primer lugar, como cada $O_p(G)$ es un subgrupo de Sylow de $F(G)$, en particular $F(G)$ es producto directo de subgrupos de Sylow y por el teorema de caracterización, $F(G)$ es nilpotente. Además, como es un subgrupo característico, es en particular un grupo normal. Demostremos entonces que es el más grande. Sea $N \trianglelefteq G$ nilpotente. Como N es nilpotente, entonces es producto de sus subgrupos de Sylow $N = P_1 \dots P_n$. Además, $P_i \trianglelefteq N$ por ser N nilpotente, por lo que P_i car $N \trianglelefteq G$, lo que implica que $P_i \trianglelefteq G$. Por la caracterización de $O_{p_i}(G)$, $P_i \leq O_{p_i}(G)$. De ahí, se deduce que $N \leq F(G)$. $\square$

Corollary 1. Un grupo G es nilpotente si y solo si $F(G) = G$.

Demostración. Si G es nilpotente, entonces $G \trianglelefteq G$ es nilpotente y por la propiedad del subgrupo de Fitting, $G \leq F(G) \leq G$, luego $F(G) = G$. Por otro lado, si $F(G) = G$, como $F(G)$ es nilpotente, entonces G también lo es. □

Definition 7. Sea G un grupo. El **subgrupo de Frattini** $\Phi(G)$ es tal que si $G = \{e\}$, entonces $\phi(G) = \{e\}$ y en caso contrario:

$$\Phi(G) := \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(G)} M.$$

Proposition 4. $\Phi(G)$ car G.

Demostración. Sea $M < G$ un subgrupo maximal. Es claro ver que para todo $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\varphi(M)$ es también maximal en G por ser φ biyectiva. Con esto, deducimos que $\varphi(\Phi(G)) = \varphi(\cap M) = \cap(\varphi(M)) = \cap M = \Phi(G)$. □

Definition 8. Sea G grupo. Decimos que $x \in G$ es un **no-generador** si para todo $S \subseteq G$, $\langle S, x\rangle = G \Rightarrow \langle S\rangle = G$.

Proposition 5. $\Phi(G)$ es el conjunto de todos los no-generadores de G.

Demostración. Sea $x \in \Phi(G)$ y Sea $S \subseteq G$ tal que $\langle S, x\rangle = G$. Supongamos que $\langle S\rangle \neq G$. Entonces por el lemma de Zorn, existe un subconjunto maximal $M < G$ supeditado a que $\langle S\rangle \leq M$ y $x \notin M$. Si $M < H \leq G$, entonces $x \in H$ y por tanto $G = \langle S, x\rangle \leq \langle H, x\rangle = H$, es decir, $G = H$. Esto demuestra que M es un subgrupo maximal y como $x \notin M$, entonces $x \notin \Phi(G)$, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, supongamos que $x \in G$ es no-generador. Tomemos $M < G$ maximal. Entonces $M \leq \langle M, x\rangle \leq G$. Si suponemos que $\langle M, x\rangle = G$, entonces por ser x no-generador, $M = \langle M\rangle = G$, lo que contradice la maximalidad de M. Por tanto, $\langle M, x\rangle = M$ y $x \in M$. Como esto es cierto para todo maximal M, x pertenece a todos los subgrupos maximales de G, es decir, $x \in \Phi(G)$. □

Proposition 6. Sea G grupo y $N \trianglelefteq G$. Entonces

1. $\Phi(N) \leq \Phi(G)$.
2. $\Phi(G)N/N \leq \Phi(G/N)$.
3. Si $N \leq \Phi(G)$, entonces $\Phi(G)/N = \Phi(G/N)$.

Demostración. Demostremos en el orden establecido.

1. Sea $g \in \Phi(N)$, entonces $g \in M$ tal que $M \in \mathrm{Max}(N)$.

□