Subgrupos característicos

Sésar

1. Definición

Definition 1. Sea G un grupo. Un subgrupo $H \leq G$ es **característico**, $H \operatorname{car} G$, si

$$\varphi(H) = H, \ \forall \varphi \in \operatorname{Aut}(G).$$

Remark 1. Ser un subgrupo característico es equivalente a comprobar que $\varphi(H) \leq H$ para todo $\varphi \in \operatorname{Aut}(G)$. Esto es porque en particular, $\varphi^{-1}(G) \leq H$, por lo que $H \leq \varphi(H)$.

Example 1. Veamos algunos ejemplos de subgrupos característicos.

1. El centro de un grupo $Z(G) \operatorname{car} G$. Sea $g \in \varphi(Z(G))$ y $x \in G$. Si φ es un automorismo, entonces existe un $y \in G$ tal que $f(y) = x$. Por tanto, $\varphi(g)x = \varphi(g)\varphi(y) = \varphi(gy) = \varphi(yg) = \varphi(y)\varphi(g) = x\varphi(g)$, por lo que $\varphi(g) \in \varphi(Z(G))$.

2. Sea G un grupo cíclico finito. Entonces todo subgrupo es característico. Si $H \leq G$, entonces para todo $a \in H$, $\varphi(a) = a^k \in H$, luego $\varphi(H) \leq H$.

3. Sea $P \in \operatorname{Syl}_p(G)$. Si $P \trianglelefteq G$, entonces $P \operatorname{car} G$. Si $\varphi \in \operatorname{Aut}(G)$, entonces $|P| = |\varphi(P)|$, por lo que $\varphi(P) \in \operatorname{Syl}_p(G)$. Como $P \trianglelefteq$, en particular es el único p-subgrupo de Sylow, luego $\varphi(P) = P$.

Supongamos que $N \trianglelefteq G$. Entonces en particular esto significa que $gNg^{-1} = N$ para todo $g \in G$. Tomando en consideración que los elementos $\theta_g \in \operatorname{Inn}(G) \trianglelefteq \operatorname{Aut}(G)$ son los automorfismos conjugación, se tiene que $\theta_g(N) = N$ para todo $\theta_g \in \operatorname{Inn}(G)$.

Proposition 1. $H \operatorname{car} G \Rightarrow H \trianglelefteq G$

Demostración. Sea $H \operatorname{car} G$. En particular, para todo automorfismo interno $\theta_g(x) = gxg^{-1}$, tenemos que $\theta_g(H) = gHg^{-1} = H$, luego $H \trianglelefteq G$. □

Proposition 2 (Transitividad de subgrupos característicos)**.** Sea G un grupo y $H, K \leq G$. Entonces

1. $K \operatorname{car} H \operatorname{car} G \Rightarrow K \operatorname{car} G$.

2. $K \trianglelefteq H \operatorname{car} G \Rightarrow K \trianglelefteq G$.

3. $K \operatorname{car} H \trianglelefteq G \Rightarrow K \trianglelefteq G$.

Demostración. Demostremos a continuación el primer apartado. Sea $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Como $H \operatorname{car} G$, entonces $\varphi(H) = H$. Por lo tanto, $\varphi|_H \in \mathrm{Aut}(H)$, y como $K \operatorname{car} H$, $\varphi|_H(K) = K$. Como $K = K \cap H$, tenemos finalmente que $\varphi(K) = \varphi(K \cap H) = \varphi|_H(K) = K$.

Los dos apartados restantes son análogos y su demsotración se realza realizando los mismos pasos, por lo que sólo demostraremos el segundo apartado.

Sea $\theta \in \mathrm{Inn}(G)$. Entonces en particular $\theta \in \mathrm{Aut}(G)$. Como $H \operatorname{car} G$, entonces $\theta(H) = H$, por lo que $\theta|_H \in \mathrm{Inn}(H)$. Además, como $N \trianglelefteq H$, entonces $\theta|_H(K) = K$. Finalmente, como $K = K \cap H$, obtenemos que $\theta(K) = \theta(K \cap H) = \theta|_H(K) = K$. □

Proposition 3. Si H es el único subgrupo de G de un cierto orden o índice, entonces $H \operatorname{car} G$.

Demostración. Supongasmo primero que $H \leq G$ es el único con orden $|H|$. Sea $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Entonces por ser biyectiva, $|\varphi(H)| = |H|$ y como $\varphi(H) \leq G$, entonces $\varphi(H) = H$.

Por otro lado, ser el único de un cierto orden es equivalente a decir que es el único de un cierto índice por el Teorema de Lagrange. □

Theorem 1. Sea $H \operatorname{car} G$. Entonces existe un único $\Psi : \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(G/H)$ homomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_H"'] & G \arrow[d, "\pi_H"] \\ G/H \arrow[r, "\Psi(\varphi)"'] & G/H \end{tikzcd}$$

Demostración. Probemos primero la existencia. Sea $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, entonces llamando $\pi_H : G \to G/H$ al homomorfismo canónico, tenemos que $\pi_H \circ \varphi : G/H \to G/H$ es un homomorfismo sobreyectivo tal que $\ker(\pi_H \circ \varphi) = \ker(\pi_H) = H$, por lo que por el Teorema Fundamental de los homomorfismos, existe un único isomorfismo $\widetilde{\varphi} : G/H \to G/H$ tal que $\widetilde{\varphi} \circ \pi_H = \pi_H \circ \varphi$. En particular, $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Aut}(G/H)$.

Podemos definir la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathrm{Aut}(G) &\to \mathrm{Aut}(G/H) \\ \varphi &\mapsto \widetilde{\varphi}. \end{aligned}$$

En primer lugar, por cómo está definido Ψ, se puede comprobar inmediatamente que $\Psi(\varphi) \circ \pi_H = \pi_H \circ \varphi$ —es decir, el diagrama conmuta—. Basta ver que Ψ es un homomorfismo. Dados $\varphi_1 \varphi_2 \in \mathrm{Aut}(G)$, tenemos que $\Psi(\varphi_1 \circ \varphi_2)\pi_H = \pi_H \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = \Psi(\varphi_1) \circ \pi_H \circ \varphi_2 = \Psi(\varphi_1) \circ \Psi(\varphi_2) \circ \pi_H$, y por la unicidad de Ψ, se tiene que $\Psi(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \Psi(\varphi_1) \circ \Psi(\varphi_2)$.

La unicidad del homomorfismo Ψ viene dada por la unicidad del Teorema Fundamental de los homomorfismos. □