Producto directo

Sésar

1. Producto directo externo

Proposition 1. Sean H y K grupos. Entonces $H \times K$ junto con la operación siguiente:

$$(h_1, k_1) \odot (h_2, k_2) := (h_1 h_2, k_1 k_2)$$

forman un grupo.

Demostración. La asociatividad de la operación viene de la asociatividad de los grupos H y K. Por otro lado, demostremos que (e_H, e_K) es el elemento neutro de esta operación:

$$(h, k) \odot (e_H, e_K) = (he_H, ke_K) = (h, k) = (e_H h, e_K k) = (e_H, e_K) \odot (h, k).$$

Finalmente, para todo $(h, k) \in H \times K$, tenemos que $(h, k)^{-1} = (h^{-1}, k^{-1})$, puesto que

$$(h, k) \odot (h^{-1}, k^{-1}) = (hh^{-1}, kk^{-1}) = (e_H, e_K) = (h^{-1}h, k^{-1}k) = (h^{-1}, k^{-1}) \odot (h, k),$$

por lo que todo elemento tiene un inverso. □

Definition 1. Definimos el **producto directo externo** de H y K como el grupo

$$(H \times K, \odot).$$

Remark 1. Si H y K son finitos, entonces $H \times K$ es también finito y $|H \times K| = |H||K|$.

Proposition 2. Sean H y K grupos. Entonces

$$H \times K \cong K \times H.$$

Demostración. Definamos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f : H \times K &\to K \times H \\ (h, k) &\mapsto (k, h) \end{aligned}$$

Veamos que f es un isomorfismo. En primer lugar, veamos que es un homomorfismo.

$$f((h_1, k_1) \odot (h_2, k_2)) = f(h_1 h_2, k_1 k_2) = (k_1 k_2, h_1 h_2) = (k_1, h_1) \odot (k_2, h_2) = f(h_1, k_1) \odot f(h_2, k_2).$$

Ahora bien, es fácil observar que la aplicación es sobreyectiva, pues para todo $(k,h) \in K \times H$, tenemos que $f(h,k) = (k,h)$. Queda por tanto probar la inyectividad de f y como es un homomorfismo, basta con comprobar que el núcleo es trivial. Si $(h,k) \in \ker f$, entonces $f(h,k) = (k,h) = (e_K, e_H)$, luego $h = e_H$ y $k = e_K$, por lo que $\ker f = \{(e_H, e_K)\}$. $\square$

Theorem 1 (Isomorfía del producto directo)**.** Supongamos que $H \cong \widetilde{H}$ y $K \cong \widetilde{K}$.

$$H \times K \cong \widetilde{H} \times \widetilde{K}.$$

Demostración. Sean $\alpha : H \to \widetilde{H}$ y $\beta_K \to \widetilde{K}$ dichos isomorfismos. Definamos ahora la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f : H \times K &\to \widetilde{H} \times \widetilde{K} \\ (h,k) &\mapsto (\alpha(h), \beta(k)). \end{aligned}$$

En primer lugar, es fácil observar que la aplicación está bien definida. Por otro lado, como α y β son homomorfismos, en particular f es homomorfismos. Además, como α y β son biyectivas, entonces f es también biyectiva. $\square$

Definition 2. Sean H y K grupos.

1. Llamamos **proyecciones** de $H \times K$ en H y K a las respectivas aplicaciones

$$\begin{aligned} p_H : H \times K &\to H \\ (h,k) &\mapsto h \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p_K : H \times K &\to K \\ (h,k) &\mapsto k \end{aligned}$$

2. Llamamos **inyecciones** de H y K en $H \times K$ a las respectivas aplicaciones

$$\begin{aligned} q_H : H &\to H \times K \\ h &\mapsto (h, e_K) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q_K : K &\to H \times K \\ k &\mapsto (e_H, k) \end{aligned}$$

Lemma 1. Las proyecciones son epimorfismos y las inyecciones son monomorfismos.

Demostración. Se puede comprobar rutinariamente que las proyecciones y las inyecciones son homomorfismos. Por otro lado, tomando la proyección p_H, para todo $h \in H$, tenemos que $p_H(h, e_K) = h$, luego es un epimorfismo. Siguiendo con q_H, si $h \in \ker q_H$, entonces $q_H(h) = (h, e_K) = (e_H, e_K)$, luego $h = e : H$ demostrando el hecho de que q_H es un monomorfismo. $\square$

Remark 2. Por las definiciones de proyecciones e inyecciones, tenemos que $p_H \circ q_H = \mathrm{id}_H$ y $p_K \circ q_K = \mathrm{id}_K$.

Theorem 2. Sean H y K grupos. Sean $H' := H \times \{e_K\}$ y $K' := \{e_H\} \times K$.

1. $H' \cong H$ y $K' \cong K$.
2. $H', K' \trianglelefteq H \times K$.

Demostración. Las demostraciones son completamente análogas para ambos grupos, luego sólo escribiremos la demostración para el grupo H.

En primer lugar, notemos que $H' = q_H(H)$ y como q_H es un monomorfismo, en particular es un isomorfismo en la imagen de q_H, luego $H \cong q_H(H) = H'$. Por otro lado, como $H \trianglelefteq H$, tenemos que $H' = q_H(H) \trianglelefteq H \times K$ ya que los homomorfismos conservan los subgrupos normales. □

2. Producto directo interno

Definition 3. Sea G grupo y $H, K \trianglelefteq G$. Decimos que $G = H \circledast K$ es el **producto directo interno** de H y K si $G = HK$ y $H \cap K = \{e\}$.

Remark 3. Como $H, K \trianglelefteq G$, en particular tenemos que HK es un grupo y que $HK = KH$.

Lemma 2. Sea G grupo y $H, K \trianglelefteq G$ tales que $G = HK$. Son equivalentes

1. $G = H \circledast K$.
2. Para todo $g \in G$, existen unos únicos $h \in H$ y $k \in K$, tales que $g = hk$.
3. Si $hk = e$ donde $h \in H$ y $k \in K$, entonces $h = k = e$.

Demostración. Supongamos primero que $G = H \circledast K$. Entonces para todo $g = G = HK$, existen $h \in H$ y $k \in K$ tales que $g = hk$. Veamos que son únicos. Supongamos que $g = h'k'$, con $h' \in H$ y $k' \in K$. Entonces como $hk = h'k' \Rightarrow (h')^{-1}h = k'k^{-1} \in H \cap K = \{e\}$, lo que implica que $h = h'$ y $k = k'$.

Sea ahora $hk = e$ con $h \in H$ y $k \in K$. Como $e = ee$ donde $e \in H$ y $e \in K$, entonces por la expresión única del producto, $h = k = e$.

Finalmente, supongamos que $g \in H \cap K$. Como $H \cap K \leq G$, en particular, $g^{-1} \in H \cap K$. Por lo tanto, tenemos que $gg^{-1} = e$ donde $g \in H \cap K \leq H$ y $g^{-1} \in H \cap K \leq K$. Por hipótesis, $g = g^{-1} = e$, demostrando así que $H \cap K = \{e\}$. □

Proposition 3. Si $G = H \circledast K$, entonces $hk = kh$ para todo $h \in H$ y $k \in K$.

Demostración. Tomemos $h \in H$ y $K \in K$ y denotemos $g = hkh^{-1}k^{-1}$. Entonces $hkh^{-1}, k^{-1} \in K$, y por tanto $g \in K$. Por otro lado, $h, khk^{-1} \in H$, luego $g \in H$. Por lo tanto, $g \in H \cap K = \{e\}$, por lo que $hk = kh$. □

Theorem 3 (Caracterización del producto directo I)**.** Sean H y K grupos.

$$H \times K = H' \circledast K'$$

Demostración. En primer lugar, sabemos que $H', K' \trianglelefteq H \times K$. Veamos que $H \times K = H'K'$. Para todo $g \in G$, $g = (h,k) = (h, e_H) \odot (e_H, k) \in H'K'$. Finalmente, si $(h,k) \in H' \cap K'$, tenemos que $(h,k) \in H' \Rightarrow k = e_K$ y $(h,k) \in K' \Rightarrow h = e_H$. Luego $(h,k) = (e_H, e_K)$ lo que implica que $H' \cap K' = \{(e_H, e_K)\}$. □

Theorem 4 (Caracterización del producto directo II)**.** Sea G grupo y $H, K \trianglelefteq G$.

$$H \circledast K \cong H \times K.$$

Demostración. Definamos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f : H \circledast K &\to H \times K \\ hk &\mapsto (h,k). \end{aligned}$$

En primer lugar, veamos que la aplicación está bien definida. Si $h_1k_1 = h_2k_2$, entonces por el lemma de la expresión única, tenemos que $h_1 = h_2$ y $k_1 = k_2$ por lo que $f(h_1k_1) = (h_1, k_1) = (h_2, k_2) = f(h_2k_2)$.

Probemos ahora que f es un homomorfismo. Tenemos que $f((h_1k_1)(h_2k_2)) = f(h_1(k_1h_2)k_2) = f(h_1h_2k_1k_2) = (h_1h_2, k_1k_2) = (h_1, k_1) \odot (h_2, k_2) = f(h_1k_1) \odot f(h_2k_2)$.

Es fácil ver que f es un epimorfismo porque para todo $(h,k) \in H \times K$, $f(hk) = (h,k)$. Por lo que falta comprobar que f es un monomorfismo. Supongamos que $hk \in \ker f$. Entonces $f(hk) = (h,k) = (e,e)$, lo que implica que $hk = e$. Esto demuestra que $\ker f = \{e\}$ y por tanto f es un monomorfismo. □

Remark 4. La propiedad tercera del lema puede verse como una consecuencia directa del hecho de que $H \circledast H \cong H \times K$, ya que si $hk = e$, entonces $(h,k) = (e,e)$, por lo que $h = k = e$.

3. Producto finito

4. Producto infinito