Análisis Funcional

Sésar

Parte I

Espacios vectoriales topológicos

1. Definición

Definition 1. Un cuerpo $\mathbb{K}$ se dice que es un **cuerpo topológico** si viene dada con una topología tal que hace continuas a las siguientes aplicaciones:

1. La suma $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$,
2. la inversa de la suma $- : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$,
3. el producto $\times : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ y
4. la inversa del producto ${}^{-1} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

Example 1. Veamos algunos cuerpos topológicos.

1. $\mathbb{R}$ es un cuerpo topológico con la topología usual, es decir, dada por el valor absoluto $|\cdot|$.
2. $\mathbb{C}$ es un cuerpo topológico con la topología usual, es decir, dada por el módulo $|\cdot|$.

Remark 1. Notemos que por definición de cuerpo topolópgico, $\mathbb{K}$ con la suma es un grupo topológico conmutativo. De la misma manera, $\mathbb{K}^*$ con el producto es un cuerpo topológico conmutativo.

Definition 2. Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo topológico $\mathbb{K}$. Decimos que X es un **espacio vectorial topológico** si viene dada con una topología que hace continua a las siguientes aplicaciones:

1. La suma $+ : X \times X \to X$ y
2. el producto por un escalar $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$.

Remark 2. Como el producto por un escalar es continua, entonces $-1\cdot : X \to X$ es continua y como coincide con la aplicación inversa de la suma en X, se concluye que X con la suma es también un grupo topológico conmutativo. Por tanto, se cumplen las siguientes propiedades:

1. Las traslaciones y la opuesta de la suma son isomorfismos homeomorfos.
2. Toda aplicación lineal $f : X \to Y$ es continua si y solo si es continua en el origen.

3. Todo espacio vectorial topológico es completamente regular (y por tanto uniformizable) y es Hausdorff si y solo si el subespacio trivial es cerrado.

Definition 3. Sean X e Y espacios topológicos vectoriales. Denotamos el conjunto de **aplicaciones lineales y continuas** como

$$\mathcal{L}(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ es lineal y continua}\}.$$

Además, denotamos $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$.

Definition 4. Sea X un espacio vectorial topológico. Decimos que $S \subseteq X$ es **acotado** si para todo $V \in \mathcal{N}(0)$, existe un $t > 0$ tal que $E \subseteq tV$.

Proposition 1. Sean X e Y espacios vectoriales topológicos y $f : X \to Y$ lineal.

$$f(X) \text{ es acotado} \Rightarrow f \in \mathcal{L}(X,Y).$$

Demostración. Sea $V \in \mathcal{N}(0_Y)$. Entonces existe un $t > 0$ tal que $f(X) \subseteq tV$, es decir, $f(X) = f\left(\frac{1}{t}X\right) \subseteq V$. Como $X \in \mathcal{N}(0_X)$, queda demostrada la continuidad de f en el origen. $\square$

2. Propiedades topológicas

3. Aplicaciones lineales

Parte II

Espacios de Hilbert

4. Espacios de Hilbert y prehilbertianos

Definition 5. Sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un **producto interno** en $\mathcal{H}$ es una aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$$

tal que $\forall x, y, z \in \mathcal{H}$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ verifica lo siguiente:

1. (Lineal en la primera componente) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.
2. (Simetría conjugada) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
3. (Definida Positiva) $\langle x, x \rangle \geq 0$ y además $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Al par $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se le conoce como **espacio prehilbertiano**.

Proposition 2 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. Entonces para todo $x, y \in \mathcal{H}$,
$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$
Además, $|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \Leftrightarrow x$ e y son linealmente dependientes.

Demostración. Sean $x, y \in \mathcal{H}$. Supongamos primeramente que $y = 0$. Entonces por las propiedades elementales del producto interno
$$|\langle x, 0\rangle|^2 = 0 = \langle x, x\rangle\langle 0, 0\rangle.$$
De este modo, la desigualdad se cumple y siempre se alcanza la igualdad ya que $\{x, 0\}$ son linealmente dependientes para todo $x \in \mathcal{H}$.

Por tanto, supongamos ahora que $y \neq 0$. Denotemos por $z := \langle y, y\rangle x - \langle x, y\rangle y$. De este modo,
$$\begin{aligned}
0 \leq \langle z, z\rangle &= \langle y, y\rangle^2\langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle|\langle x, y\rangle|^2 - \langle x, y\rangle\overline{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle + |\langle x, y\rangle|^2\langle y, y\rangle \\
&= \langle y, y\rangle^2\langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle\overline{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle = \langle y, y\rangle^2\langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle\langle y, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle} \\
&= \langle y, y\rangle^2\langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle|\langle x, y\rangle|^2 = \langle y, y\rangle\left(\langle y, y\rangle\langle x, x\rangle - |\langle x, y\rangle|^2\right).
\end{aligned}$$
Como $y \neq 0$, se tiene que $\langle y, y\rangle > 0$, lo que implica que $0 \leq \langle y, y\rangle\langle x, x\rangle - |\langle x, y\rangle|^2$ obteniéndose la desigualdad deseada.

Demostemos ahora el caso en que se consigue la igualdad. Supongamos primero que x e y son linealmente dependientes. Entonces podemos escribir $x = \alpha y$ para un cierto $\alpha \in \mathbb{C}$. Así,
$$|\langle x, y\rangle|^2 = |\overline{\alpha}\langle x, x\rangle|^2 = |\alpha|^2\langle x, x\rangle^2 = \alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle\langle x, x\rangle = \langle x, x\rangle\langle \alpha x, \alpha x\rangle = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$
Por otro lado, si la igualdad se satisface, entonces se tiene que tomando z definida previamente se llega a que $\langle z, z\rangle = 0$ y por ser definida positiva, $z = 0$. Como z es una combinación lineal de x e y con la menos un coeficionete no nulo —$\langle y, y\rangle \neq 0$—, se tiene que x e y son linealmente dependientes. $\square$

Proposition 3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. Entonces
$$\begin{aligned}
\|\cdot\| : \mathcal{H} &\to \mathbb{R}_+ \\
x &\mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}
\end{aligned}$$
Es una norma.

Demostración. Veamos que se satisfacen los axiomas de una norma.

Por un lado, está claro que $\|x\| = 0$ si y solo si $\sqrt{\langle x, x\rangle} = 0$, equivalentemente, $\langle x, x\rangle = 0$. Como el producto interior es definida positiva, es equivalente a $x = 0$.

Por otro lado, sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2\langle x, x\rangle} = |\alpha|\,\|x\|$.

Finalmente, demostremos la desigualdad triangular. Se tiene que
$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y\rangle) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$
Por lo que se satisface que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. $\square$

Remark 3. La desigualdad de Cauchy puede reescribirse como $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Definition 6. Diremos que $\mathcal{H}$ es un **espacio de Hilbert** si $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Lemma 1 (Identidad de polarización)**.** Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. Entonces

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\right).$$

En particular, se tiene que $\operatorname{Re}(\langle x, y\rangle) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$.

Demostración. Desarrollando cada sumando, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y\rangle),\\
\|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle x, y\rangle),\\
\|x+iy\|^2 &= \langle x+iy, x+iy\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - i\langle x, y\rangle + i\langle y, x\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2i\operatorname{Im}(\langle x, y\rangle),\\
\|x-iy\|^2 &= \langle x-iy, x-iy\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + i\langle x, y\rangle - i\langle y, x\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2i\operatorname{Im}(\langle x, y\rangle).
\end{aligned}$$

Sumando las cuatro igualdades como indica el lema se llega al resultado. □

Proposition 4 (Ley del Paralelogramo)**.** Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Demostración. Realizando los mismos cálculos que en el lema anterior, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y\rangle),\\
\|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle x, y\rangle).
\end{aligned}$$

Sumando ambas igualdades se llega al resultado. □

Theorem 1 (Jordan-Von Neumann)**.** Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Si $\|\cdot\|$ sigue la Ley del Paralelogramo, entonces existe un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tal que $\forall x \in X$,

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle.$$

Demostración. Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno que define a la norma, entonces por la Proposición, se cumple la Ley del Paralelogramo. Supongamos entonces que la norma $\|\cdot\|$ sigue la ley del paralelogramo y definamos un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ mendiante la identidad de polarización del Lema. Es decir, se tiene que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\langle x, y\rangle) &:= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right),\\
\operatorname{Im}(\langle x, y\rangle) &:= \frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right).
\end{aligned}$$

En particular, se tiene por definición que $\operatorname{Im}(\langle x,y\rangle) = \operatorname{Re}(\langle x, iy\rangle)$. Por un lado, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle x,x\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x+x\|^2 - \|x-x\|^2 + i\|x+ix\|^2 - i\|x-ix\|^2\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\|2x\|^2 + i\|(1+i)x\|^2 - i\|(1-i)x\|^2\right) = \\ &= \frac{1}{4}\|x\|^2\left(4 + i|1+i|^2 - i|1-i|^2\right) = \|x\|^2 .\end{aligned}$$

Por lo que se satisface que $\langle x,x\rangle = \|x\|^2$ y, por los axiomas de la norma, se cumple de manera directa ser definida positiva. Por otro lado, podemos demostrar la simetría conjugada usando de nuevo la identidad de polarización como sigue:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\langle y,x\rangle) &= \frac{1}{4}\left(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \operatorname{Re}(\langle x,y\rangle)\\ \operatorname{Im}(\langle y,x\rangle) &= \operatorname{Re}(\langle y,ix\rangle) = \operatorname{Re}(\langle ix,y\rangle) = \operatorname{Re}(\langle ix,-iiy\rangle) = -\operatorname{Re}(\langle x,iy\rangle) = -\operatorname{Im}(\langle x,y\rangle).\end{aligned}$$

Por tanto, $\langle y,x\rangle = \operatorname{Re}(\langle y,x\rangle) + i\operatorname{Im}(\langle y,x\rangle) = \operatorname{Re}(\langle x,y\rangle) - i\operatorname{Im}(\langle x,y\rangle) = \overline{\langle x,y\rangle}$. □

Corollary 1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. X es prehilbertiano si y solo si todo subespacio de dimensión 2 es prehilbertiano.

Demostración. Si X es prehilbertiano, entonces naturalmente todo subespacio vectorial es prehilbertiano, en particular los de dimensión 2. Supongamos ahora que todo subespacio de dimensión 2 del espacio normado X es prehilbertiano. Notemos que para todo $x, y \in X$ linealmente independientes, se tiene que $\operatorname{span}\{x,y\} \subseteq X$ es un subespacio vectorial de dimensión 2, por lo que existe un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en el subespacio que concuerda con la norma $\|\cdot\|$. Definamos $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ como $\langle x,y\rangle := \langle x,y\rangle_Y$ donde $Y = \operatorname{span}\{x,y\}$. Basta comprobar que está bien definida, porque las propiedades de linealidad, antisimetría y ser definida positiva vienen dadas por el producto interno de los subespacios de dimensión 2. □

5. Ortogonalidad

Definition 7. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. Se dice que $x, y \in \mathcal{H}$ son **ortgonales**, denotado como $x \perp y$, si

$$\langle x,y\rangle = 0.$$

Proposition 5 (Teorema de Pitágoras)**.** Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano y $x, y \in \mathcal{H}$.

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Demostración. El hecho de que $x \perp y$ es equivalente a decir que $\langle x,y\rangle = 0$, lo que equivale a $\operatorname{Re}(\langle x,y\rangle) = \operatorname{Im}(\langle x,y\rangle) = 0$ y por la identidad de polarización se tiene lo deseado. □

Definition 8. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. Un subconjunto $M \subseteq \mathcal{H}$ es **ortogonal** si

$$\forall x, y \in M,\ x \neq y \Rightarrow x \perp y.$$

Proposition 6. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. Si $(x_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ es una familia ortogonal, entonces son LI.

Demostración. Supongamos que $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$ donde $\alpha_j \in \mathbb{C}$. Entonces para todo $i \in I$, se tiene que

$$0 = \langle x, x_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle x_j, x_i \rangle = \alpha_i \langle x_i, x_i \rangle = \alpha_j \|x_i\|^2 .$$

Como los x_i son linealmente independientes, en particular se tiene que $x_i \neq 0$ y, por tanto, $\|x_i\| > 0$, lo que se concluye que $\alpha_i = 0$. Como esto es cierto para todo $i \in \mathcal{I}$, entonces se tiene la tesis. □

Definition 9. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. Definimos el **orotgonal** de un subconjunto $M \subseteq \mathcal{H}$ como

$$M^\perp := \{x \in \mathcal{H} \mid x \perp y, \ \forall y \in M\}.$$

Lemma 2. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano y $M \subseteq \mathcal{H}$ un subconjunto.

$M^\perp$ es un subespacio cerrado.

Demostración. En primer lugar, veamos primero que es un subespacio. Es directo observar que $0 \perp x$ para todo $x \in M$, luego $0 \in M^\perp$. Tomemos entonces $x, y \in M^\perp$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Se tiene que para todo $z \in M$,

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle = 0,$$

por lo que se demuestra que $\alpha x + \beta y \in M^\perp$.

Por otro lado, notemos que podemos escribir el ortogonal de un subconjunto como la siguiente intersección:

$$M^\perp = \bigcap_{x \in M} \langle \cdot, x \rangle^{-1}(0).$$

La aplicación lineal $\langle \cdot, x \rangle$ es continua para todo $x \in M$, por lo que $\langle \cdot, x \rangle^{-1}(0)$ es un conjunto cerrado. Como $M^\perp$ es la intersección de cerrados, se tiene la tesis. □

Proposition 7. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano y $M, N \subseteq \mathcal{H}$ subconjuntos.

1. $M \subseteq N \Rightarrow N^\perp \subseteq M^\perp$.
2. $M \cap M^\perp = \{0\}$ si $0 \in M$.
3. $M \subseteq M^{\perp\perp}$.
4. $M^\perp = M^{\perp\perp\perp}$.

Demostración. Demostraremos cada apartado en el orden establecido por la Proposición.

1. Sea $x \in M^\perp$. Entonces $x \perp y$ para todo $y \in N$. Por lo que en particular, $x \perp y$ para todo $y \in M$, luego $x \in N^\perp$.

2. Es fácil obesrvar que $0 \in M \cap M^{\perp}$. Supongamos pues que $x \in M \cap M^{\perp}$. Como $x \in M^{\perp}$, entonces $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $y \in M$. En particular, podemos tomar $x \in M$, por lo que $\|x\|^2 = 0$ y esto sólo ocurre si $x = 0$.

3. Si $x \in M$, entonces por definición del ortogonal de M, $x \perp y$ para todo $y \in M^{\perp}$, es decir, $x \in M^{\perp\perp}$.

4. Por el apartado eanterior, se tiene que $M \subseteq M^{\perp\perp}$ y por el primer apartado, $M^{\perp\perp\perp} \subseteq M^{\perp}$. Por otro lado, por el apartado tercero, se tiene que $M^{\perp} \subseteq (M^{\perp})^{\perp\perp} = M^{\perp\perp\perp}$. □

6. Bases hilbertianas

Definition 10. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano y $B \subseteq \mathcal{H}$ un subconjunto

1. B es **ortonormal** si es ortogonal y $\forall x \in B$, $\|x\| = 1$.

2. B es una **base hilbertiana** si es ortonormal y maximal (con respecto a la inclusión).

Theorem 2. Todo espacio prehilbertiano $\mathcal{H} \neq \{0\}$ tiene una base hilbertiana. Además, si B_0 es un conjunto ortonormal, puede extenderse a una base hilbertiana.

Theorem 3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. Si $B \subseteq \mathcal{H}$ es una base hilbertiana, entonces

$$B^{\perp} = \{0\}.$$

7. Proyección

Definition 11. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano, $\varnothing \neq M \subseteq \mathcal{H}$ y $x \in \mathcal{H}$. Decimos que $\overline{x} \in \mathcal{H}$ es **de mejor aproximación** de x a M si

$$\|x - \overline{x}\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Theorem 4. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano y $C \subseteq \mathcal{H}$ convexo y completo.

$$\forall x \in \mathcal{H},\ \exists! \overline{x} \in \mathcal{H} \text{ de mejor aproximación de } x \text{ a } C.$$

Remark 4. En el teorema anterior, sis sustituimos la hipótesis de prehilbertiano por Hilbert y la hipótesis de completo para C por cerradom se obtiene la misma conlusión.

Proposition 8. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano, $V \subseteq \mathcal{H}$ un subespacio y $x \in \mathcal{H}$.

$$\exists \overline{x} \text{ mejor aproximación de } x \text{ a } Y \Leftrightarrow x - \overline{x} \perp Y.$$

En este contexto, se tiene que

1. Si existe punto de mejor aproximación, entonces es único.

2. Si Y es completo, entonces existe punto de mejor aproximación.

Definition 12. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano y $C \subsetneq \mathcal{H}$ convexo y completo. La **proyección** en C es la aplicación

$$P_C : \mathcal{H} \to C$$

tal que $P_C(x)$ es la mejor aproximación de x a C.

Proposition 9 (Propiedades de la proyección)**.** Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano y $C \subsetneq \mathcal{H}$ convexo y completo.

1. $P_C(x) = x \Leftrightarrow x \in C$.
2. $P_C \circ P_C = P_C$.
3. P_C es continua.

Demostración. Demostraremos cada apartado en el orden establecido por la Proposición.

1. Como $\operatorname{Im} P_C = C$, se tiene que $P_C(x) = x \in C$. Ahora, supongamos que $x \in C$. Entonces podemos tomar $y = x \in C$ tal que $\|x - y\| = 0$, es decir, $P_C(x) = x$.
2. Sea $x \in \mathcal{H}$. Entonces $P_C(x) \in C$ y por la primera propiedad, $P_C(P_C(x)) = P_C(x)$. Como esto se cumple para todo $x \in \mathcal{H}$, se tiene lo deseado.
3.

□

Theorem 5. Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hibert y $V \subsetneq \mathcal{H}$ un subespacio cerrado.

1. P_V es lineal.
2. $\ker(P_V) = V^\perp$.
3. $\operatorname{Im}(P_V) = V$.
4. Si $V \neq 0$, entonces $\|P_V\| = 1$.

Corollary 2. Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hibert y $V \subsetneq \mathcal{H}$ un subespacio cerrado.

$$\mathcal{H} = V \oplus V^\perp,$$

tomando en $V \oplus V^\perp$ la suma topológica.

Corollary 3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $V \subsetneq \mathcal{H}$ un subespacio.

$$V^{\perp\perp} = \overline{V}.$$

Demostración. Notemos que por la proposición anterior, $V \subsetneq V^{\perp\perp}$ y por la otra proposición, $V^{\perp\perp}$ es un conjunto cerrado, luego por la definición de clausura se tiene que $\overline{V} \subsetneq V^{\perp\perp}$. Por otro lado. $\square$

8. Familias sumables

Definition 13. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Se dice que $(x_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ es una **familia sumable** si existe un $x \in H$ tal que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists J_0 \subseteq I \text{ finito t.q. } \forall J \supseteq J_0 \text{ finito, } \left\| \sum_{j\in J} x_j - x \right\| < \varepsilon.$$

Llamamos al valor $x \in \mathcal{H}$ **suma** de $(x_i)_{i\in I}$ y lo denotamos como $\sum_{i\in I} x_i := x$.

Remark 5. La definición puede ser descrita en términos de redes como sigue: Sea $(x_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ y sea $\mathcal{J}$ la familia de subconjuntos finitos y no vacíos de I. Notemos que $\mathcal{J}$ es un conjunto dirigido con la inclusión. Se dice entonces que $(x_i)_{i\in I}$ es sumable si la red $(\sum_{j\in J} x_j)_{J\in\mathcal{J}}$ converge.

Proposition 10. Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{G}$ espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Si $(x_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ es una familia sumable, entonces $(T(x_i))_{i\in I}$ es una familia sumable tal que

$$\sum_{i\in I} T(x_i) = T\left(\sum_{i\in I} x_i\right).$$

Demostración. Por hipótesis, T es lineal y acotado, luego $\|T\| > 0$. Como $(x_i)_{i\in I}$ es una familia sumable, llamando x a la suma se tiene que existe un $J_0 \subseteq I$ finito tal que $\|\sum_J x_j - x\| < \frac{\varepsilon}{\|T\|}$ para todo $J \supseteq J_0$ finito. De este modo, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left\| \sum T(x_j) - T(x) \right\|_{\mathcal{G}} = \left\| T\left(\sum x_j - x\right) \right\|_{\mathcal{G}} \leq \left\| \sum x_j - x \right\|_{\mathcal{H}} \|T\| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, se demuestra que $(T(x_i))_{i\in I}$ es una familia sumable. $\square$

Remark 6. Notemos que para todo $y \in \mathcal{H}$, $T_y := \langle \cdot, y \rangle \in \mathcal{H}^*$. Por tanto, para toda familia sumable $(x_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$, se tiene que $\sum \langle x_i, y \rangle = \langle \sum x_i, y \rangle$.

Lemma 3. Sea $(\alpha_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{K}$. Son equivalentes:

1. La familia $(\alpha_i)_i$ es sumable.
2. $\sup\{\sum_{j\in J} |\alpha_j| \mid J \subseteq I, \ J \text{ finito}\} < \infty$.

Theorem 6 (Desigualdad de Bessel)**.** Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si $(x_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ es un sistema ortonormal, entonces $(|\langle x, x_i \rangle|^2)_{i\in I}$ es sumable $\forall x \in \mathcal{H}$ y

$$\sum_{i\in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Demostración. Por el lema anterior, $(|\langle x, x_i\rangle|^2)_i$ es sumable si y solo si $\sup\{\sum_{j\in J} |\langle x, x_i\rangle|^2 \mid J \subseteq I,\ J$ finito$\} < \infty$. De este modo, basta con demostrar que $\|x\|^2$ es una cota superior del conjunto descrito, es decir, $\sum_{j\in J} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ para todo $J \subseteq I$ finito. En efecto, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y por ser $(x_i)_i$ un sistema ortonormal, se tiene que

$$\sum_{j\in J} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \sum_{i\in J} \left(\|x\|^2 \|x_i\|^2\right) = \|x\|^2 \sum_{i\in J} \|x_i\|^2 = \|x\|^2 ,$$

demostrando de este modo que $\|x\|^2$ es una cota superior. $\square$

9. Representación de Riesz-Fischer

Definition 14. Sea $I \neq \varnothing$. Se define el espacio $\ell_2(I)$ como:

$$\ell_2(I) := \left\{(a_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{K} \mid (|a_i|^2)_{i\in I} \text{ es sumable}\right\}.$$

Remark 7. Recordemos que éste es un ejemplo de espacio prehilbertiano donde el producto interno se definía como $\langle (x_i)_i, (y_i)_i\rangle = \sum_{i\in I} x_i\overline{y_i}$. Se puede demostrar que este producto está bien definido y además satisface que $2|x_i\overline{y_i}| \leq |x_i|^2 + |y_i|^2$ para todo $i \in I$. De la misma manera, se puede observar que la norma asociada es $\|(x_i)_i\| = \sum_{i\in I} |x_i|^2$.

Proposition 11. Sea $I \neq \varnothing$. Entonces $\ell_2(I)$ es un espacio de Hilbert.

Theorem 7 (Representación de Riesz-Fischer)**.** Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ una base ortonormal, con $I \neq \varnothing$ un conjunto de índices.

$$H \cong \ell_2(I).$$

10. Espacio dual

Theorem 8 (Riesz-Fréchet, 1907)**.** Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ lineal. son equivalentes:

1. $f \in H^*$.
2. $\exists! y \in \mathcal{H}$ tal que $f = \langle \cdot, y\rangle$.

Además, $\|f\| = \|y\|$ y si $z \in \ker(f)^\perp \setminus \{0\} \Rightarrow y = \frac{\overline{f(z)}}{\langle z,z\rangle} z$.

Remark 8. el Teorema anterior tiene como consecuencia lo siguiente: Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, entonces $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^*$.

Proposition 12. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Tomemmos la aplicación

$$\begin{aligned} T : \mathcal{H}^* &\to \mathcal{H} \\ f &\mapsto y_f. \end{aligned}$$

1. T es biyectiva, isométrica y lineal conjugada.
2. $\mathcal{H}^*$ es un espacio de Hilbert con $\langle f, g \rangle_* := \langle y_f, y_g \rangle$.
3. $\mathcal{H}$ es reflexivo.