Medidas en $\mathbb{R}^n$

Sésar

1. Medida de Lebesgue

Definition 1. Un **rectángulo** es un conjunto $R \subseteq \mathbb{R}^n$ de la forma

$$R = [a_1, b_1] \times \ldots [a_n, b_n], \quad \text{donde } -\infty < a_i \leq b_i < +\infty.$$

Denotamos $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de rectángulos.

Remark 1. Por convención, $\varnothing \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2. Definimos el **volumen** en $\mathbb{R}^n$ como la aplicación

$$\begin{aligned} v : \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) &\to [0, +\infty) \\ R &\mapsto \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i). \end{aligned}$$

Example 1. Si $n = 1$, entonces el volumen mide la longitud de un intervalo. Si $n = 2$, el volumen mide el área de un rectángulo. Y si $n = 3$, mide el volumen de un ortoedro.

Remark 2. En la definición de rectángulo, podríamos haber usado rectángulos abiertos que el volumen no cambiaría y además los resultados posteriores serán análogos.

Definition 3. La **medida exterior de Lebesgue** es la aplicación $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$

$$\mu^*(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v(R_i) \;\middle|\; E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i,\ R_i \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Example 2. Sea $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Entonces $E = \{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ya que $\mathbb{Q}$ es numerable. Por tanto, sea $\varepsilon > 0$ y tomemos el rectángulo $R_i = [q_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, q_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}]$. Entonces por un lado $v(R_i) = \frac{\varepsilon}{2^i}$ y por otro lado, $E \subseteq \bigcup R_i$. Entonces obtenemos que $\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(R_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$. Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que $\mu^*(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$.

Remark 3. En general, todo conjunto numerable tiene medida exterior de Lebesgue cero.

Theorem 1. La medida exterior de Lebesgue es una medida exterior.

Demostración. En primer lugar, es fácil observar que $\mu^*(\varnothing) = 0$, pues $\varnothing \subseteq [0,0]$. Por otro lado, supongamos que $E \subseteq F$. Si $\{R_i\}$ recubre a F, en particular recubre a E, luego $\mu^*(E)$ es una cota inferior de los volúmenes de los rectángulos que recubren a F, por lo que por definición de ínfimo, $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$.

Finalmente, probemos la σ-subaditividad. Sea $\{E_i\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Si existe algún i_0 tal que $\mu^*(E_{i_0}) = \infty$, entonces no hay nada que probar. Supongamos pues que $\mu^*(E_i) < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, existe una colección de rectángulos $\{R_{i,j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ tal que $E_i \subseteq \bigcup R_{i,j}$ y $\sum_{j=1}^{\infty} v(R_{i,j}) < \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$. Por tanto, la colección numerable $\{R_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ satisface que $\bigcup E_i \subseteq \bigcup R_{i,j}$ y que $\mu^*(\bigcup E_i) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} v(R_{i,j}) < \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \varepsilon$. Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, se tiene la desigualdad deseada. □

Definition 4. Dos subconjuntos $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ son **casi disjuntos** si

$$S^\circ \cap T^\circ = \varnothing.$$

Denotamos la unión de conjuntos casi disjuntos como $S \overset{\circ}{\sqcup} T$.

Lemma 1. Supongamos que $R = I_1 \times \ldots \times I_n$ y que $I_i = \overset{\circ}{\bigsqcup}_{j=1}^{N_i} I_{i,j}$. Definamos $S_{j_1,\ldots,j_n} := I_{1,j_1} \times \ldots \times I_{n,j_n}$.

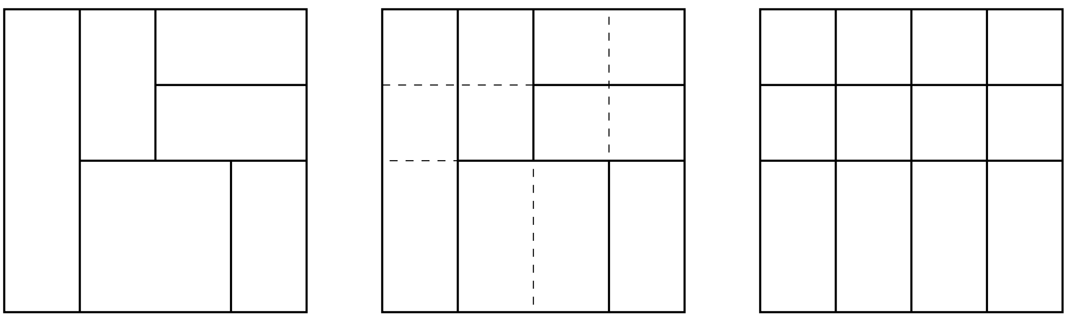
$$v(R) = \sum_{j_1=1}^{N_1} \ldots \sum_{j_n=1}^{N_n} v(S_{j_1,\ldots,j_n}).$$

Demostración. Observemos primeramente que $|I_i| = \sum_{j=1}^{N_i} |I_{i,j}|$. Por tanto, $v(R) = |I_1| \ldots |I_n| = (\sum |I_{1,j_1}|) \ldots (\sum |I_{n,j_n}|) = \sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} |I_{1,j_1}| \ldots |I_{n,j_n}| = \sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} v(S_{j_1,\ldots,j_n})$. □

Proposition 1. Sea $R \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$.

1. $R = \overset{\circ}{\bigsqcup}_{i=1}^{N} R_i \Rightarrow v(R) = \sum v(R_i)$.
2. $R \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} R_i \Rightarrow v(R) \leq \sum v(R_i)$.

Demostración. En primer lugar, si R es la unión finita de rectángulos casi disjuntos, entonces podemos refinar este recubrimiento mediante rectángulos $S_{j_1,\ldots,j_n}$ como en el lema anterior. Por tanto, $v(R) = \sum \ldots \sum v(S_{j_1,\ldots j_n}) = \sum v(R_i)$, donde en la última igualdad reordenamos los rectángulos $S_{j_1,\ldots j_n}$ dando lugar a sus respectivos R_i.



Por otro lado, siempre podemos encontrar una familia finita de rectángulos $\{S_j\}$ tales que $R = \bigsqcup^{\circ} S_j$ con la cualidad de que $S_j \subseteq R_i$ para un cierto $i = 1, \ldots, n$. De esta manera, $v(R) = \sum v(Sj) \leq \sum v(R_i)$. $\square$

Theorem 2. Para todo $R \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$, $\mu^*(R) = v(R)$.

Demostración. Como R es un recubrimiento de sí mismo, en particular, $\mu^*(R) \leq v(R)$. Por otro lado, sea $\{R_i\} \subseteq \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ un recubrimiento de R. Para todo i, y para todo $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un $S_i \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ tal que $R_i \subseteq S_i^\circ$ y $\mu(S_i) \leq \mu(R_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$. Por lo tanto $\{S_i^\circ\}$ es un recubrimiento por abiertos de R, que es compacto por ser cerrado y acotado. De este modo, existe un subrecubrmimiento $\{S_j\}_{i=1}^n$ de R. Por proposición, $v(R) \leq \sum v(S_j) \leq \sum v(R_i) + \frac{\varepsilon}{2^j} = \sum v(R_i) + \varepsilon$. Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, entonces $v(R) \leq \sum v(R_i)$, por lo que $v(R)$ es una cota inferior y por definición de ínfimo, $v(R) \leq \mu^*(R)$. $\square$

Definition 5. Denotemos $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ como la σ-álgebra de Carathéodory de la medida exterior de Lebesgue μ^*.

1. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es **medible de Lebesgue** si $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
2. La **medida de Lebesgue** $\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ es la medida asociada a la construcción de Carathéodory.

Remark 4. El espacio de medida de Lebesgue es completo por la construcción de Carathéodory.

Proposition 2. $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. $\square$

Remark 5. Se cumple que $\mu(R) = \mu^*(R) = v(R)$ para todo $R \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$.

Theorem 3. $N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tiene medida cero si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\{R_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ tal que $N \subseteq \bigcup_i R_i$ y $\sum_i \mu(R_i) < \varepsilon$.

Demostración. Es una consecuencia directa de la definición de la medida exterior de Lebesgue y de que $v(R_i) = \mu(R_i)$ para todo $i \in \mathbb{R}$. $\square$

Example 3. El conjunto de Cantor tiene medida de Lebesgue cero y es no numerable.

Example 4. $\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ tiene medida de Lebesgue cero. Tomemos la familia de rectángulos de la forma $R_i = [i, i+1] \times \left[-\frac{\varepsilon}{2^{|i|+2}}, \frac{\varepsilon}{2^{|i|+2}}\right]$. En particular, $\mu(R_i) = \frac{\varepsilon}{2^{|i|+1}}$, por lo que $\sum \mu_i(R_i) = \sum_i \frac{\varepsilon}{2^{|i|+1}} = \varepsilon$.

2. Regularidad de la medida de Lebesgue

Definition 6. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico y $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Sea $A \in \mathcal{A}$.

1. A es **regular interior** si $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A,\ K \in \mathcal{A},\ K \text{ compacto}\}$.
2. A es **regular exterior** si $\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(G) \mid A \subseteq G,\ G \in \mathcal{A} \cap \mathcal{T}\}$.
3. A es **regular** si es regular interior y exterior.

Decimos que la medida μ es **regular** si todo conjunto medible es regular.

Theorem 4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. $\mu^*(A) = \text{ínf}\{\mu(G) \mid A \subseteq G \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}\}$.
2. Si $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A,\ K \text{ compacto}\}$.

En particular, la medida de Lebesgue es regular.

Demostración. Probemos cada punto en el orden establecido.

1. Si $\mu^*(A) = \infty$, entonces todo G abierto tal que $A \subseteq G$ cumple que $\infty = \mu^*(G) \leq \mu^*(G) = \mu(G)$, luego se tiene la igualdad.

   Supongamos entonces que $\mu^*(A) < \infty$. Entonces para todo abierto G tal que $A \subseteq G$, $\mu^*(A) \leq \mu(G)$, luego $\mu^*(A)$ es una cota inferior de este conjunto y $\mu^*(A) \leq \text{ínf}_{A \subseteq G \in \mathcal{T}} \mu(G)$. Ahora, tomemos $\varepsilon > 0$, existe una familia $\{R_i\}$ de rectángulos que recubren a A y tales que $\sum \mu(R_i) \leq \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}$. Por otro lado, para todo R_i, podemos refinarlo con un $S_i \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mu(S_i) \leq \mu(R_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. Denotando $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i^\circ$, tenemos que $A \subseteq G \in \mathcal{T}$, de manera que $\mu(G) \leq \sum \mu(S_i) \leq \sum \mu(R_i) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \mu^*(A) + \varepsilon$. Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que $\mu^*(A) = \text{ínf}\, \mu(G)$.

2. En general, si $K \subseteq A$, entonces $\mu(K) \leq \mu(A)$, por lo que $\mu(A)$ es una cota superior y por tanto, $\sup \mu(K) \leq \mu(A)$.

   Supongamos primero que A está acotado. Esto implica que $\mu(A) < \infty$. Tomemos $F \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto tal que $A \subseteq F$. Por el punto anterior, para todo $\varepsilon > 0$, existe un abierto $G \in \mathcal{T}$ tal que $F \setminus A \subseteq G$ y $\mu(G) < \mu(F \setminus A) + \varepsilon$. Denotemos $K = F \setminus G$, que también es compacto y $K \subseteq A$. En particular se cumple que $F \subseteq K \cup G$ y $F = A \sqcup F \setminus A$. Por lo que $\mu(F) \leq \mu(K) + \mu(G)$ y $\mu(F) = \mu(A) + \mu(F \setminus A)$. Por lo tanto, $\mu(A) = \mu(F) - \mu(F \setminus A) < \mu(K) + \mu(G) + \varepsilon - \mu(G) = \mu(K) + \varepsilon$. Por tanto, se tiene que $\mu(A) = \sup \mu(K)$.

   Supongamos ahora que A es no acotado. Para todo $k \in \mathbb{N}$ definamos $A_k = \{x \in A \mid \|x\| \leq k\}$. Entonces $\{A_k\}$ es una cadena creciente tal que $\bigcup A_k = A$, luego $\mu(A_k) \to \mu(A) = \infty$. Si $\mu(A) = \infty$, entonces por el resultado anterior, como $\mu(A_k) < \infty$, podemos encontrar un $K_k \subseteq A_k$ compacto tal que $\mu(A_k) \leq \mu(K_k) + 1$, de tal manera que $\mu(K_k) \to \infty$ y $\sup \mu(K) = \infty$. Si $\mu(A) < \infty$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A) \leq \mu(A_k) + \frac{\varepsilon}{2}$. Como cada A_k es acotado, entonces existe un $K \subseteq A_k$ compacto tal que $\mu(A_k) \leq {}^\circ mu(K) + \frac{\varepsilon}{2}$, por lo que $\mu(A) \leq \mu(K) + \varepsilon$. $\square$

Theorem 5. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \subseteq G \in \mathcal{T}$ t.q. $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$.

Demostración. Supongamos primeramente $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Si $\mu(A) < \infty$, entonces por la regularidad de la medida, para todo $\varepsilon > 0$, existe un abierto $G \supseteq A$, tal que $\mu(G) < \mu(A) + \varepsilon$, es decir, $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$. Por otro lado, si $\mu(A) = \infty$, tomando los conjuntos A_k definidos previamente, tenemos que $A_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y que $\mu(A_k) < \infty$. Por tanto, por el comentario anterior, existe un $G_k \supseteq A_k$ abierto tal que $\mu(G_k \setminus A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Sea $G = \bigcup G_k$, que es abierto y contiene a A. Entonces $\mu(G \setminus A) = \mu(\bigcup G_k \setminus A_k) \leq \sum \mu(G_k \setminus A_k) < \varepsilon$.

Ahora, tomemos $\varepsilon > 0$. Entonces existe un $G \supseteq A$ tal que $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$. De este modo, tomemos $E \subseteq \mathbb{R}^n$ arbitrario. De este modo, $\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus G) + \mu^*(E \cap G \setminus A) \leq \mu^*(E \cap G) + \mu^*(E \setminus G) + \mu^*(G \setminus A) < \mu^*(E) + \varepsilon$. Por lo tanto, se da la desigualdad deseada. ☐

Corollary 1. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists G \in \mathcal{T}$ y $\exists F \in \mathcal{C}$ t.q. $F \subseteq A \subseteq G$ y $\mu^*(G \setminus F) < \varepsilon$. En particular, si $\mu(A) < \infty$, podemos tomar F compacto.

Demostración. Supongamos que A es medible de Lebesgue. Entonces en particular $X \setminus A$ también es medible. Aplicando la caracterización en ambos conjuntos, obtenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existen abiertos G, G' tales que $A \subseteq G$, $X \setminus A \subseteq G'$ y $\mu(G \setminus A), \mu(G' \setminus (X \setminus A)) < \frac{\varepsilon}{2}$. En particular, llamando $F = X \setminus G' \in \mathcal{F}$, tenemos que $F \subseteq A$ y que $\mu(G' \setminus (X \setminus A)) = \mu(A \setminus F)$. Como $G \setminus F = G \setminus A \bigsqcup A \setminus F$, se tiene que $\mu(G \setminus F) \leq \mu(G \setminus A) + \mu(A \setminus F) < \varepsilon$.

Si se satisface la parte de la derecha de la coimplicación, se tiene que $\mu^*(G \setminus A) \leq \mu(G \setminus F) < \infty$ y por teorema se tiene.

Si $\mu(A) < \infty$, entonces por la regularidad de la medida de Lebesgue, para todo ε, existe un compacto $K \subseteq A$ tal que $\mu(A) < \mu(K) + \frac{\varepsilon}{2}$, es decir, $\mu(A \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como también existe un $G \supseteq A$ abierto tal que $\mu(G \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$, tenemos que $\mu(G \setminus K) < \varepsilon$. ☐

Corollary 2. Si $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existen familias numerables $\{G_i\} \subseteq \mathcal{T}$ y $\{F_i\} \subseteq \mathcal{C}$ tales que si $G = \bigcap G_i$ y $F = \bigcup F_i$, tenemos que $F \subseteq A \subseteq G$ y $\mu(G \setminus A) = \mu(A \setminus F) = 0$.

Demostración. Para todo $k \in \mathbb{N}$, existen $G_k \in \mathcal{T}$ y $F_k \in \mathcal{C}$ tales que $F_k \subseteq A \subseteq G_k$ y $\mu(G_k \setminus F_k) < \frac{1}{k}$. En particular, llamanso $G = \bigcap G_k$ y $F = \bigcup F_k$, tenemos que como $G/F \subseteq G_k \setminus F_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\mu(G \setminus F) \leq \frac{1}{k}$, luego $\mu(G \setminus A), \mu(A \setminus F) \leq \mu(G \setminus F) = 0$. ☐

3. El espacio de Borel

Definition 7. Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **conjunto de Borel** si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 3. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ está generada por conjuntos compactos.

Demostración. En general, toda σ-álgebra de Borel está generada por cerrados, pues el complementario es cerrado en las σ-álgebras. Por otro lado, $\mathbb{R}^n$ cumple con la propiedad topológica de ser σ-compacto, es decir, ser unión numerable de conjuntos compactos. Por tanto, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ está generada por compactos. $\square$

Lemma 2. Todo abierto en $\mathbb{R}^n$ es unión numerable de rectángulos casi disjuntos.

Demostración. Sea $G \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. Definamos una familia de subconjuntos $\mathcal{Q}$ mediante el siguiente procedimiento: particionemos $\mathbb{R}^n$ en una familia numerable de cubos $\{Q_i\}$ —podemos suponerlo porque $\mathbb{R}^n$ es σ-compacto—. Si $Q_i \subseteq G$, entonces $Q_i \in \mathcal{Q}$. Si $G \cap Q_i = \varnothing$, entonces $Q_i \notin \mathcal{Q}$. Si Q_i no cumple alguna de estas dos propiedades, entonces bisecamos Q_i en otros dos cubos y repetimos el proceso. De esta manera, obtenemos que $\mathcal{Q} \subseteq \{Q_i\}$ es una familia numerable tal que $\bigcup_{Q_i \in \mathcal{Q}} Q_i \subseteq G$. Por otro lado, si $x \in G$, como G es abierto, existe un $Q_i \in \mathcal{Q}$ tal que $x \in Q_i \subseteq G$. $\square$

Theorem 6. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{R}(\mathbb{R}^n))$. En particular, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Es claro ver que $\sigma(\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Por otro lado, por el lemma anterior, $\mathcal{T} \subseteq \sigma(\mathcal{R}(\mathbb{R}^n))$, por lo que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \sigma(\mathcal{R}(\mathbb{R}^n))$. Finalmente, como $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Remark 6. Sea μ la medida de Lebesgue y $G \in \mathcal{T}$. Si $G = \bigsqcup^\circ R_i$, entonces $\bigsqcup R_i^\circ \subseteq G$, por lo que $\sum \mu(R_i^\circ) = \mu(\bigsqcup R_i^\circ) \leq \mu(G) = \mu(\bigsqcup^\circ R_i) \leq \sum \mu(R_i)$. Como $\mu(R_i^\circ) = \mu(R_i)$, se tiene que $\mu(G) = \sum \mu(R_i)$.

Example 5. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ la medida de Cantor y $g(y) = \text{ínf}\{x \in [0,1] \mid f(x) = y\}$. Entonces g es creciente, inyectiva y $g([0,1]) = C$. Como g es creciente, entonces g es medible de Borel, por lo que $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}([0,1])$ para todo $B \in \mathcal{B}([0,1])$. Sea $E \notin \mathcal{L}([0,1])$. Entonces $F = g(E) \subseteq C$ y como $\mathcal{L}([0,1])$ es completo, $F \in \mathcal{L}([0,1])$. Si $F \in \mathcal{B}([0,1])$, entonces $g^{-1}(F) = E \in \mathcal{B}([0,1]) \subseteq \mathcal{L}([0,1])$, lo cual es una contradicción, luego $F \notin \mathcal{B}([0,1])$.

Example 6. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ con la medida de Lebesgue no es completo. Sabemos que en el espacio de Lebesgue existen conjuntos no medibles. Sea $E \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Sea $N = E \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$ que tiene medida cero, luego por ser $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1})$ completo, $N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1})$. Si $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$, entonces como toda sección es medible (véase producto de medidas), entonces $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $N \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Theorem 7. $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Como $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es completo, tenemos que $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Por otro lado, sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe una familia $\{F_i\}$ numerable de cerrados tal que $F = \bigcup_i F_i \subseteq A$ y $M = A \setminus F$ es de medida cero. Por tanto, existe una familia $\{G_i\}$ numerable de abiertos tal que, llamando $N = \bigcup G_i$, $\mu(N) = 0$ y $M \subseteq N$. De aquí se deduce que $A = F \cup M$, donde $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $M \subseteq N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mu(N) = 0$. $\square$

4. Transformaciones lineales

Theorem 8 (Invarianza bajo traslaciones)**.** Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\mu^*(x+E) = \mu^*(E).$$

En particular, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ si y solo si $x + A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Primero veamos que la medida exterior de Lebesgue es invariante bajo traslaciones. Es fácil comprobar por la definición de volumen que $v(x+R) = v(R)$ para todo $R \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$. De este modo, supongamos que $\{R_i\}$ es un recubrimiento finito de rectángulos para un cierto subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^\ltimes$. Entonces $\{x+R_i\}$ es un recubrimiento por rectángulos de $x+E$. Por tanto, $\mu^*(x+E) \leq \sum v(x+R_i) = \sum v(R_i)$. Como esto es cierto para todo recubrimiento por rectángulos, entonces $\mu^*(x+E)$ es una cota inferior, luego por definición, $\mu^*(E) \leq \mu^*(x+E)$. De esta inecuación, obtenemos que $\mu^*(x+E) \leq \mu^*(-x+x+E) = \mu^*(E)$. Por lo tanto, la igualdad se mantiene obteniendo así la invarianza en la medida exterior.

Veamos ahora que un conjunto es medible si y solo si su traslación también lo es. Supongamos que A es medible. Entonces $\mu^*(E \cap x+A) + \mu^*(E \setminus (x+A)) = \mu^*(-x+E\cap A) + \mu^*(-x+E \setminus A) = \mu^*(-x+E) = \mu(E)$, luego $x+A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. De aquí se deduce que $A = -x+(x+A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Como la media de Lebesgue es simplemente la restricción de la medida exterior en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces ya hemos demostrado que $\mu(x+A) = \mu(A)$. □

Example 7 (Construcción de un conjunto no medible de Lebesgue)**.** Tomemos el grupo aditivo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Construyamos $E \subseteq [0,1]$ como el conjunto de representantes de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. En particular, como las clases laterales forman una partición, $\mathbb{R} = \bigsqcup_{x\in E} x+\mathbb{Q}$. Supongamos que $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Denotemos $\mathbb{Q} \cap [-1,1] = \{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $E_i = q_i + E$. Por un lado, $E_i \cap E_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$ —si existe un $x_0 \in E_i \cap E_j$, entonces $x_0 - q_i, x_0 - q_j \in E$ que son dos elementos distintos y relacionados por $\sim$, lo que contradice la definición de E—. Además, $[0,1] \subseteq \bigsqcup_i E_j \subseteq [-1,2]$. Como E es medible, en particular las traslaciones E_i son también medibles de manera que $\mu(E_i) = \mu(E)$. Finalmente, $1 \leq \sum \mu(E) \leq 3$. Pero esto es una contradicción ya que sólo pueden haber dos casos: $\sum \mu(E) = 0$ si $\mu(E) = 0$ o $\sum \mu(E) = \infty$ si $\mu(E) > 0$.

Nos centramos ahora en la invarianza de rectángulos bajo transformaciones ortogonales, es decir, bajo aplicaciones lineales $Q \in \mathrm{O}(n)$. Por definición conservan el producto escalar y, por tanto, distancias y ángulos. Por lo tanto, es fácil obtener que $v(R) = v(Q(R))$, donde $v(Q(R))$ es el producto de las longitudes de sus lados medidos en una base ortogonal adecuada.

Lemma 3. Si $Q \in \mathrm{O}(n)$ y $\bigsqcup^{\circ N}_{i=1} R_i \subseteq Q(R)$, entonces $\sum_{i=1}^{N_0} v(R_i) \leq v(Q(R))$.

Lemma 4. Sea $Q \in \mathrm{O}(n)$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ recubrimiento de $Q(R)$ tal que $\sum v(R_i) \leq v(Q(R)) + \varepsilon$.

Demostración. Para todo rectángulo R, podemos construir un rectángulo S tal que $R \subseteq S^\circ$ con $v(R) \leq v(S) + \varepsilon$. Tomando la aplicación ortogonal, $Q(R) \subseteq Q(S^\circ) = Q(S)^\circ$ —las aplicaciones ortogonales son en particular isometrías, luego son homeomorfismos—. Como $Q(S)^\circ$ es abierto, en particular, $Q(S)^\circ = \bigsqcup^\circ R_i \subseteq Q(S)$. Por lema anterior, $\sum_{i=1}^N v(R_i) \leq v(Q(S))$. Como esto es cierto para todo N, entonces $\sum v(R_i) \leq v(Q(S)) \leq v(Q(R)) + \varepsilon$. Finalmente, $\{R_i\}$ recubren a $Q(R)$ ya que $Q(R) \subseteq Q(S)^\circ = \bigcup R_i$. $\square$

Theorem 9 (Invarianza bajo transformaciones ortogonales)**.** Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y $Q \in \mathrm{O}(n)$.

$$\mu^*(Q(E)) = \mu^*(E).$$

En particular, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ si y solo si $Q(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Por un lado, por definición de la medida exterior de Lebesgue, para todo $\varepsilon > 0$, existe un recubrimiento $\{R_i\}$ de $Q(R)$ tal que $\sum v(R_i) \leq \mu^*(Q(E)) + \frac{\varepsilon}{2}$. Para cada R_i del recubrimiento, aplicamos el lema anterior, por lo que existe un recubrimiento $\{R_{i,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $Q(R_i)$ tal que $\sum v(R_{i,j}) \leq v(Q(R_i)) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. En particular, $\sum v(R_{i,j}) \leq \sum \left(v(Q(R_i)) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right) = \sum v(R_i) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \mu^*(Q(E)) + \varepsilon$. Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que $\sum v(R_{i,j}) \leq \mu^*(Q(R))$. Además, como $\{R_{i,j}\}$ recubre a $Q(E)$, entonces $\{Q^T(R_{i,j})\}$ recubre a E, por lo que $\mu^*(E) \leq \sum v(Q^T(R_{i,j}) = \sum v(R_{i,j}) \leq \mu^*(Q(R))$. Obteniendo de esta manera la desigualdad $\mu^*(E) \leq \mu^*(Q(E))$. De la misma manera, tomando $E' = Q(E)$, entonces $E = Q^T(E')$ y de ahí se obtiene la otra desigualdad.

Finalmente, si A es medible de Lebesgue, entonces para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$, tenemos que $\mu^*(E \cap Q(A)) + \mu^*(E \setminus Q(A)) = \mu^*(Q^T(E) \cap A) + \mu^*(Q^T(E) \setminus A) = \mu^*(Q^T(E)) = \mu^*(E)$, luego $Q(A)$ es medible. La otra implicación se realiza de manera análoga. $\square$

Corollary 3. La medida de Lebesgue es invariante bajo isometrías

Demostración. Toda isometría puede escribirse como $f(x) = Q(x) + b$, donde $Q \in \mathrm{O}(n)$. $\square$

Lemma 5. Supongamos que D es una transformación lineal diagonal positiva y $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$\mu^*(D(E)) = \det(D)\mu^*(E).$$

En particular, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ si y solo si $D(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Es fácil comprobar que si R es un rectángulo, entonces $v(D(R)) = \det(D)v(R)$. Por lo tanto, por las propiedades del ínfimo, $\mu^*(D(E)) = \det(D)\mu^*(E)$. Finalmente, si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ satisface el criterio de Caratheodory, entonces $D(A)$ también lo hace. $\square$

Theorem 10. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal y $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$\mu^*(T(E)) = |\det T|\mu^*(E).$$

En particular, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ si y solo si $T(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Si $\det T = 0$, entonces $T(E)$ está contenido en un subespacio de dimensión menor que n, por lo que su medida es cero y la igualdad se cumple trivialmente. Si $\det T \neq 0$, entonces podemos escribir $T = QU$, donde Q es ortogonal y U es simétrica y definida positiva, por lo que es diagonalizable y por tanto existe un Q' ortogonal tal que $U = Q'D(Q')^T$ con D positiva. De esta manera, tenemos que $\mu^*(T(E)) = \mu^*(U(E)) = \mu(D(Q')^T(E)) = (\det D)\mu^*(E)$. Finalmente, como $|\det Q| = 1$, entonces $|\det T| = \det D$.

Finalmente, por la invarianza de las transformaciones ortogonales y diagonales, es fácil ver que un conjunto es medible de Lebesgue si y solo si su imagen por la aplicación lineal es medible. □

5. La medida de Lebesgue-Stieltjes

Theorem 11. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y continua por la derecha. Existe una única medida de Borel $\mu_F : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ tal que para todo $a < b$,

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$$

Demostración. Mediante la misma metodología que hemos usado para definir la medida de Lebesgue, podemos definir una aplicación $\mu_F^*(E) := \text{ínf}\{\sum |F(b_i) - F(a_i)| \mid E \subseteq \bigcup (a_i, b_i]\}$ y comprobar que μ_F^* es una medida exterior. De esta manera, mediante el criterio de Carathéodory, existe una σ-álgebra $\mathcal{A}$ tal que $\mu_F = \mu_F^*$ es una medida en $\mathcal{A}$ y además $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$. □

Remark 7. La familia de intervalos de la forma $(a, b]$ forman un álgebra.

Example 8. La continuidad por la derecha es necesaria. Tenemos que $\varnothing = \bigcap (a, a + \frac{1}{k}]$, luego $\mu_F(a, a + \frac{1}{k}] \to 0$, lo que implica que $\text{lím}_{k\to 0} F(a + \frac{1}{k}) - F(a) = \text{lím}_{x\to a^+} F(x) - F(a) = 0$

Example 9. Si $F = \text{id}_{\mathbb{R}}$, entonces μ_F es la medida de Lebesgue.

Example 10. Si $F(x) = 1$ si $x \geq 0$ y $F(x) = 0$ si $x < 0$, entonces $\mu_F(A) = \chi_A(0)$.

Example 11. Si F es la función de Cantor, entonces $\mu_F(C) = 1$ y $\mu_F(X \setminus C) = 0$. En general, todo conjunto numerable tiene μ_F-medida cero.