Espacios uniformes

Sésar

1. Vecindades

Definition 1. Sea $X \neq \varnothing$ arbitrario y $U, V \subseteq X \times X$. Definimos lo siguiente.

1. La **diagonal:** $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$.
2. La **inversa:** $U^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in U\}$.
3. La **composición:** $V \circ U := \{(z, x) \in X \times X \mid \exists y \in X \text{ t.q. } (y, x) \in U \text{ y } (z, y) \in V\}$.

De estas primeras definiciones, podemos deducir algunas propiedades que justifican el uso de esta notación para los subconjuntos:

- $(U^{-1})^{-1} = U$.
- $\Delta^{-1} = \Delta$.
- $(V \circ U)^{-1} = U^{-1} \circ V^{-1}$.
- $U \circ \Delta = U = \Delta \circ U$.
- $V \subseteq U \Rightarrow V^{-1} \subseteq U^{-1}$.
- $V_1 \subseteq V_2$ y $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow V_1 \circ U_1 \subseteq V_2 \circ U_2$.

Definition 2. Sea $X \neq \varnothing$. $U \subseteq X \times X$ es **simétrico** si $U^{-1} = U$.

Lemma 1. Sea $U \in \mathcal{U}$. Entonces $U_0 := U \cap U^{-1}$ es el conjunto simétrico más grande contenido en U.

Demostración. En primer lugar, demostremos que U_0 es simétrico. Basta con demostrar la inclusión $U_0^{-1} \subseteq U_0$. Supongamos que $(x, y) \in U_0^{-1}$. Entonces $(y, x) \in U_0 = U \cap U^{-1}$. Por lo tanto, como $(y, x) \in U^{-1}$, entonces $(x, y) \in U$. Pero además, $(y, x) \in U$, por lo que $(x, y) \in U^{-1}$. Esto implica que $(x, y) \in U \cap U^{-1} = U_0$.

Es fácil observar que $U_0 \subseteq U$. Falta probar que es el simétrico más grande contenido en U. Supongamos que $V \subseteq U$ es simétrico. En particular, obtenemos la inclusión $V = V^{-1} \subseteq U^{-1}$ y juntando ambas inclusiones obtenemos que $V \subseteq U \cap U^{-1} = U_0$. $\square$

Definition 3. Una **uniformidad** en X es un filtro $\mathcal{U}$ en $(\mathcal{P}(X \times X), \subseteq)$ tal que $\forall U \in \mathcal{U}$:

U1) $\Delta \subseteq U$.

U2) $\exists V \in \mathcal{U}$ t.q. $V^{-1} \subseteq U$.

U3) $\exists V \in \mathcal{U}$ t.q. $V \circ V \subseteq U$.

Decimos en este caso que $(X,\mathcal{U})$ es un **espacio uniforme**.

Example 1. La familia $\mathcal{U}_t = \{X \times X\}$, que se corresponde con el filtro trivial en $\mathcal{P}(X \times X)$, es una uniformidad. Se la conoce como **uniformidad trivial**.

Example 2. La familia $\mathcal{U}_d = \uparrow \Delta$ es una uniformidad. Se la conoce como **uniformidad discreta**.

Proposition 1. Sea $\mathcal{U}$ un filtro en $\mathcal{P}(X \times X)$. Son equivalentes:

1. La propiedad U2).
2. $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}$.
3. $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U_0 \in \mathcal{U}$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}$ cumple U2). Entonces si $U \in \mathcal{U}$, entonces existe un $V \in \mathcal{U}$ de manera que $V^{-1} \subseteq U$ lo que es equivalente a $V \subseteq U^{-1}$. Como $V \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es un filtro, se tiene que $U^{-1} \in \mathcal{U}$. Supongamos ahora que se cumple la segunda propiedad. Si $U \in \mathcal{U}$, entonces $U^{-1} \in \mathcal{U}$ y por las propiedades del filtro, $U_0 = U \cap U^{-1} \in \mathcal{U}$. Finalmente, supongamos que se cumple la tercera propiedad. Si $U \in \mathcal{U}$, entonces podemos tomar $V = U_0 \in \mathcal{U}$ que es simétrica de tal manera que $V^{-1} = V \subseteq U$. □

Proposition 2. Las propiedades U2) y U3) son equivalentes a la siguiente propiedad:

$$\forall U \in \mathcal{U}, \exists V \in \mathcal{U} \text{ t.q. } V \circ V^{-1} \subseteq U.$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}$ es un filtro en $\mathcal{P}(X \times X)$. Supongamos que $\mathcal{U}$ cumple con las propiedades U2) y U3). Si $U \in \mathcal{U}$, entonces por U3), existe un $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \circ V \subseteq U$. Además, se cumple U2), entonces por la Proposición 1, $V_0 \in \mathcal{U}$. Esto implica que $V_0 \circ V_0 \subseteq V \circ V \subseteq U$ y como V_0 es simétrica, $V_0 \circ V_0^{-1} \subseteq U$. Por otro lado, supongamos que se cumple con la hipótesis de la proposición. Sea $U \in \mathcal{U}$, entonces existe un $V \in \mathcal{U}$ de manera que $V \circ V^{-1} \subseteq U$. Por un lado, tenemos que $V^{-1} = \Delta \circ V^{-1} \subseteq V \circ V^{-1} \subseteq U$, por lo que se cumple U2) Además, por la Proposición 1, $V_0 \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $V_0 \circ V_0 \subseteq V \circ V^{-1} \subseteq U$, cumpliéndose U3). □

Definition 4. Un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es **separante** si $\bigcap_{\mathcal{U}} U = \Delta$.

Definition 5. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ uniformidades en X. Decimos que $\mathcal{U}$ es **más fina** que $\mathcal{V}$ o $\mathcal{V}$ es **más gruesa** que $\mathcal{U}$ si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$

Example 3. Si $\mathcal{U}$ es cualquier uniformidad, se tiene que $\mathcal{U}_t \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_d$. Por tanto, las uniformidad es trivial y discreta son las uniformidades más fina y gruesa respectivamente.

2. Bases de la uniformidad

Definition 6. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ es una **base de la uniformidad** si es una base del filtro $\mathcal{U}$:

$$\forall U\mathcal{U},\ \exists B \in \mathcal{B} \text{ t.q. } B \subseteq U.$$

Example 4. La familia $\mathcal{B} = \{\Delta\}$ presenta una base para la uniformidad discreta.

Example 5 (Base simétrica)**.** Para toda uniformidad, el conjunto de vecindades simétricas conforma una base. Denotemos por $\mathcal{U}_S := \{U \in \mathcal{U} \mid U = U^{-1}\}$. Si $U \in \mathcal{U}$, entonces por la Proposición 1, $U_0 \in \mathcal{U}_S$ y además $U_0 \subseteq U$. Por lo tanto, $\mathcal{U}_S$ es una base de $\mathcal{U}$.

Notemos que si $\mathcal{B}$ es una base para la uniformidad $\mathcal{U}$, entonces por definición de la base y por la propiedad de ser un filtro se tiene que $\mathcal{U} = \{U \subseteq X \times X \mid \exists B \in \mathcal{B} \text{ t.q. } B \subseteq U\}$. Por otro lado, al igual que con las bases topológicas y con las bases de un filtro, podemos caracterizar una familia de conjuntos cual sea para determinar si es base de una cierta uniformidad.

Proposition 3. Sea $\mathcal{B} \subseteq X \times X$. Entonces $\mathcal{B}$ es base de cierta uniformidad $\mathcal{U}$ si y solo si $\mathcal{B}$ cumple U1), U2) y U3) y es base de cierto filtro. En este contexto

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq X \times X \mid \exists B \in \mathcal{B} \text{ t.q. } B \subseteq U\}.$$

Demostración. Si $\mathcal{B}$ es una base de una cierta uniformidad $\mathcal{U}$, por el hecho de que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ se tiene que las tres propiedades de la uniformidad se cumplen. Además, por definición de la base, es una base del filtro $\mathcal{U}$ y por el comentario anterior, podemos describir $\mathcal{U}$ mediante la base como indica la proposición.

Ahora, supongamos que se cumplen las hipótesis de la proposición. En particular, como $\mathcal{B}$ es base para un cierto filtro $\mathcal{U}$, en particular $\mathcal{U}$ se puede expresar como indica la proposición. Falta ver que $\mathcal{U}$ satisface las tres condiciones de la uniformalidad. No obstante, como todo elemento de la base satisface las tres propiedades y toda vecindad contiene a los elementos de la base, se tiene que las vecindades también cumplen con U1), U2) y U3). ☐

Example 6 (Uniformidad pseudométrica)**.** Demostremos que todo espacio métrico define una uniformidad natural. Sea (X, ρ) un espacio pseudométrico y para todo $\varepsilon > 0$, denotemos por $\mathbb{B}_\varepsilon := \{(x, y) \in X \times X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$. Veamos que $\mathcal{B} = \{\mathbb{B}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ forma una base de una cierta uniformidad que la denominaremos **uniformidad pseudométrica**.

Veamos primero que es base de cierto filtro. Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Entonces tomando $\varepsilon := \text{mín}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ se tiene de manera directa que $\mathbb{B}_\varepsilon \subseteq \mathbb{B}_{\varepsilon_1} \cap \mathbb{B}_{\varepsilon_2}$. Esto demuestra que $\mathcal{B}$ es una base para un cierto filtro.

Comprobemos ahora que se cumplen las tres propiedades de la uniformidad. En primer lugar, como $\rho(x, x) = 0$ para todo $x \in X$, esto es equivalente a decir que $\Delta \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Esto demuestra U1). Por otro lado, por la simetría de la métrica, es trivial observar que todas las bolas son simétricas y de manera natural se cumple U2). Finalmente, mediante la desigualdad triangular, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $\mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{3}} \circ \mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{3}} \subseteq \mathbb{B}_\varepsilon$, cumpliéndose de esta manera U3).

Example 7. En $\mathbb{R}^2$ definamos las siguientes conjuntos: $B_a := \Delta \cup (a, \infty)^2$. La familia $\mathcal{B} = \{B_a\}_{a\in\mathbb{R}}$ forma una base de una uniformidad en $\mathbb{R}$. Esto es ya que por un lado $B_a \cap B_b = B_{\text{mín}\{a,b\}}$

luego forma una base para un cierto filtro. Además, B_a es simétrico, $\Delta \subseteq B_a$ y $B_a \circ B_a \subseteq B_a$, por lo que cumple con las propiedades de la uniformidad.

El ejemplo de la uniformidad pseudométrica es un ejemplo claro de cómo la uniformidad se presenta como una generalización de la pseudométrica y además, como veremos a continuación, la uniformidad posee menos estructura que la pseudométrica. Con este último enunciado nos referimos a lo siguiente: dos pseudométricas distintas ρ_1 y ρ_2 en X pueden dar lugar a la misma uniformidad pseudométrica. En particular, sea $\rho_2 = k\rho_1$ donde $k > 0$. Se tiene que $\rho_2 \neq \rho_1$ siempre y cuando $k \neq 1$. Sin embargo, denotando $\mathbb{B}^i_\varepsilon$ la vecindad de ρ_i para $i = 1, 2$, se tiene que $\mathbb{B}^2_\varepsilon = \mathbb{B}^1_{\frac{\varepsilon}{k}}$. Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.

3. Continuidad uniforme

Definition 7. Sean $(X,\mathcal{U}_X)$ y $(Y,\mathcal{U}_Y)$ dos espacios uniformes. Una aplicación $f : X \to Y$ es **uniformemente continua** si

$$\forall V \in \mathcal{U}_Y,\ \exists U \in \mathcal{U}_X \text{ t.q. } (x, y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V.$$

Podemos reescribir la definición de continuidad uniforme sin hacer uso de los puntos como sigue: $\forall V \in \mathcal{U}_Y$, $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X$.

Example 8. La continuidad uniforme en espacios métricos es equivalente a la continuidad uniforme en espacios uniformes. una aplicación $f : X \to Y$ entre espacios métricos es uniformemente continua si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que si $d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. En particular, en notación de vecindades se tiene que $(x, y) \in \mathbb{B}^X_\delta \Rightarrow (f(x), f(y)) \in \mathbb{B}^Y_\varepsilon$.

Example 9. Si $\mathcal{U}_X$ es la uniformidad discreta, entonces toda aplicación $f : X \to Y$ es uniformemente continua. En efecto, sea $V \in \mathcal{U}_Y$ y tomemos $U = \{(x, y) \in X \times X \mid (f(x), f(y)) \in V\}$. En particular se tiene que $\Delta \subseteq U$ y como $\Delta \in \mathcal{U}_X$ por ser la uniformidad discreta, U es también una vecindad que, por definición, $(x, y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V$.

Example 10. La aplicación identidad es uniformemente continua. En efecto, $\mathrm{id}_X : X \to X$ es uniformemente continua ya que para todo $V \in \mathcal{U}$, podemos tomar $U = V$ de manera que si $(x, y) \in U \Rightarrow (\mathrm{id}_X(x), \mathrm{id}_X(y)) = (x, y) \in U = V$.

Example 11. Toda aplicación constante es uniformemente continua. En efecto, para un cierto $c \in Y$, denotemos $c : X \to Y$ tal que $c(x) = c$. Para cualquier $V \in \mathcal{U}_Y$, puedo tomar $U = X \times X$ de manera que si $(x, y) \in X \times X \Rightarrow (c(x), c(y)) = (c, c) \in \Delta \subseteq V$.

Proposition 4. La composición de aplicaciones uniformemente continuas en uniformemente continua.

Demostración. Supongamos que $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son dos aplicaciones uniformemente continuas. Sea $W \in \mathcal{U}_Z$. Como g es uniformemente continua, entonces existe un $V \in \mathcal{U}_Y$ tal que g conserva tales vecindades. De la misma manera, como f es uniformemente continua, entonces existe un $U \in \mathcal{U}_X$ que conserva tales vecindades. Por tanto, si $(x, y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V \Rightarrow (g(f(x)), g(f(y)) \in W$. Esto demuestra que $g \circ f$ es uniformemente continua. $\square$

Definition 8. Sean $(X,\mathcal{U}_X)$ y $(Y,\mathcal{U}_Y)$ dos espacios uniformes. Una aplicación $f : X \to Y$ es **uniformemente isomorfa** si f es biyectiva y f y f^{-1} son uniformemente continuas.

Proposition 5. Se cumplen las siguientes propiedades sobre isomorfismos uniformes:

1. La aplicación identidad es un isomorfismo uniforme.
2. La inversa de un isomorfismo uniforme es un isomorfismo uniforme.
3. La composición de isomorfismos uniformes es un isomorfismo uniforme.

Demostración. Ver que la aplicación identidad es un isomorfismo uniforme es directo pues demostramos que la identidad es uniformemente continua. Como es biyectiva y su inversa es ella misma, concluimos que la inversa es también uniformemente continua y por tanto isomorfismo.

Por otro lado, sea $f : X \to Y$ isomorfismo uniforme. Entonces f es biyectiva y por tanto f^{-1} es biyectiva. Además, f^{-1} es uniformemente continua y $f = (f^{-1})^{-1}$ es también uniformemente continua, luego f^{-1} es un isomorfismo continuo.

Finalmente, supongamos que $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son isomorfismos continuos. Por la proposición, $g \circ f$ es uniformemente continua. Además, como f y g son biyectivos, entonces $g \circ f$ es biyectiva de manera que $(g \circ f)^{-1}) = f^{-1} \circ g^{-1}$ que es composición de aplicaciones uniformemente continuas, por lo que $g \circ f$ es un isomorfismo uniforme. □

La proposición anterior tiene como consecuencia directa que la relación «ser uniformemente isomorfo» entre la clase de espacios uniformes es una RBE.

Definition 9. Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre espacios uniformes.

1. La **uniformidad inicial** $\mathcal{U}_X(f)$ es la uniformidad en X más gruesa que hace a f uniformemente continua.
2. La **uniformidad final** $\mathcal{U}_Y(f)$ es la uniformidad en Y más fina que hace a f uniformemente continua.

Proposition 6. Sea $f : X \to Y$ y $(X,\mathcal{U}_X)$ un espacio uniforme. Entonces la uniformidad final puede describirse como sigue:

$$\mathcal{U}_Y(f) = \{V \subseteq X \times X \mid (f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X\}.$$

Demostración. En primer lugar, veamos que esta colección de subconjuntos realmente conforma una uniformidad. Veamos previamente que se trata de un filtro. Supongamos primero que $V \in \mathcal{U}_Y(f)$ y $V \subseteq W$. Entonces en particular $(f \times f)^{-1}(V) \subseteq (f \times f)^{-1}(W)$ y por definición, $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X$. Como $\mathcal{U}_X$ es un filtro, entonces $(f \times f)^{-1}(W) \in \mathcal{U}_X$ y de aquí tenemos que $W \in \mathcal{U}_Y(f)$. Por otro lado, si $V, W \in \mathcal{U}_Y(f)$, entonces $(f \times f)^{-1}(V \cap W) = (f \times f)^{-1}(V) \cap (f \times f)^{-1}(W) \in \mathcal{U}_X$, por lo que $V \cap W \in \mathcal{U}_Y(f)$ y por tanto es un filtro.

Ahora veamos que se cumplen con las condiciones de uniformidad. En primer lugar, sea $V \in \mathcal{U}_Y(f)$, entonces $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X$. En primer lugar, $\Delta_X \subseteq (f \times f)^{-1}(V)$ o lo que es equivalente, $(f \times f)(\Delta_X) = \Delta_Y \subseteq V$, con lo que se cumple U1). Por otro lado, existe un $U \in \mathcal{U}_X$

tal que $U^{-1} \subseteq (f \times f)^{-1}(V)$, equivalentemente, $(f \times f)(U^{-1}) \subseteq V$. Se puede demostrar que para todo $U \in \mathcal{U}_X$, $(f \times f)(U) \in \mathcal{U}_Y(f)$ y que el inverso de esta vecindad es $(f \times f)(U^{-1})$, luego se cumple U2). Finalmente, existe un $U \in \mathcal{U}_X$ tal que $U \circ U \subseteq (f \times f)^{-1}(V)$ o, equivalentemente, $(f \times f)(U \circ U) = (f \times f)(U) \circ (f \times f)(U) \subseteq V$ y de esta manera se cumple U3).

Finalmente, veamos que esta es la uniformidad final. Por definición, f es una aplicación uniformemente continua, luego $\{V \subseteq X \times X \mid (f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X\} \subseteq \mathcal{U}_Y(f)$. Supongamos que $V \in \mathcal{U}_Y(f)$. Como f es uniformemente continua en esta uniformidad, $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X$ y por tanto se obtiene la igualdad. □

4. Topología uniforme

Definition 10. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Para todo $U \in \mathcal{U}$, definimos la **vecindad alrdedor de** $x \in X$ como

$$U_x := \{y \in X \mid (y,x) \in U\}.$$

Denotamos el conjunto de todas estas vecindades como $\mathcal{U}(x) := \{U_x\}_{U \in \mathcal{U}}$.

Proposition 7. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces $\mathcal{U}(x)$ genera una base local de entornos para todo $x \in X$.

Demostración. En primer lugar, sea $U_x \in \mathcal{U}(x)$. Como $\mathcal{U}$ es una uniformidad, entonces $\Delta \subseteq U$, es decir, $(x,x) \in U$, luego $x \in U_x$. Ahora bien, sean $U_x, V_x \in \mathcal{U}(x)$. Entonces $U, V \in \mathcal{U}$ y por tanto, $U \cap V \in \mathcal{U}$ y $(U \cap V)_x = U_x \cap V_x \in \mathcal{U}(x)$. Finalmente, sea $U_x \in \mathcal{U}(x)$. Entonces existe un $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \circ V \subseteq U$. Sea $y \in V_x$. Entonces podemos comprobar que $V_y \subseteq U_x$. Si $z \in V_y \Rightarrow (z,y) \in V$. Por otro lado, como $y \in V_x \Rightarrow (y,x) \in V$. Por definición de la composición, $(z,x) \in V \circ V \subseteq U$, luego $z \in U_x$. □

Definition 11. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. La **topología uniforme** $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ es la topología definida por las vecindades al rededor de cada punto.

De esta definición, podemos deducir claramente una caracterización de conjunto abierto para este topología: tenemos que $A \in \mathcal{T}(\mathcal{U})$ si y slo si $\forall x \in A$, $\exists U \in \mathcal{U}$ tal que $U_x \subseteq A$.

Corollary 1. Si $\mathcal{B}$ es una base de una uniformidad $\mathcal{U}$, entonces $\mathcal{B}(x) := \{B_x\}_{B \in \mathcal{B}}$ es una base local de entornos de $\mathcal{T}(\mathcal{U})$.

Demostración. Basta con ver que para todo $U \in \mathcal{U}$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $B_x \subseteq U_x$ para todo $x \in X$. Pero esto es trivialmente cierto por ser $\mathcal{B}$ una base de la uniformidad. □

Como en toda uniformidad podemos tomar como base el conjunto de vecindades simétricas, entonces podemos definir el espacio topológico generado usando meramente las vecindades simétricas.

Example 12. Veamos que la topología de la uniformidad métrica es la topología métrica usual. Vimos que la uniformidad métrica se definía como aquella que tenía como base las bolas abiertas $\mathbb{B}_\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Como la base genera la mismo topología que la uniformidad total, basta con tomar como base de entornos las bolas abiertas y, por definición, es la topología de la métrica usual.

Proposition 8. Toda aplicación uniformemente continua es continua.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una aplicación uniformemente continua entre espacios uniformes. Por la caracterización de continuidad mediante la base local de entornos, tomemos $V_{f(x_0))} \in \mathcal{U}_Y(f(x_0))$. En particular, $V \in \mathcal{U}_Y$ y por continuidad uniforme, existe un $U \in \mathcal{U}_X$ tal que $(f \times f)(U) \subseteq V$. Por tanto, si $x \in U_{x_0}$, entonces $(x, x_0) \in U \Rightarrow (f(x), f(x_0)) \in V$, luego $f(x) \in V_{f(x_0)}$. Por tanto, se demuestra que $f(U_{x_0}) \subseteq V_{f(x_0)}$. □

Proposition 9. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Son equivalentes:

1. $(X,\mathcal{U})$ es separante.
2. $(X, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$ es Hausdorff.

Demostración. Supongamos que el espacio uniforme es separante. Entonces si $x \neq y$, tenemos que $y \notin \bigcap U_x$, luego existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $y \notin U_x$. De la misma manera, existe un $V \in \mathcal{U}$ tal que $x \notin V_y$. Supongamos que $U_x \cap V_y \neq \varnothing$. Entonces □

5. Sucesiones de Cauchy

6. Compleción

A. Filtros

Definition 12. Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que $F \subseteq P$ es un **filtro** si

F1) $F \neq \varnothing$.

F2) $x, y \in F \Rightarrow \exists z \in F$ t.q. $z \leq x, y$.

F3) $x \leq y$ y $x \in F \Rightarrow y \in F$.

En particular, los ejemplos más ilustrativos y usados de filtros se definen en el espacio parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, es decir, la partes de un conjunto con el orden la inclusión. En particular, en este espacio podemos redefinir la propiedad F2) de la siguiente manera: Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un filtro, entonces para todo $F, G \in \mathcal{F}$, $F \cap G \in \mathcal{F}$. En general, esta caracterización se cumple para cualquier retículo, como vemos a continuación.

Proposition 10. Sea $(L, \leq)$ un retículo y sea $F \subseteq L$ que cumple F1) y F3). Son equivalentes:

1. F es un filtro.
2. $\forall x, y \in F$, $x \wedge y \in F$.

Demostración. Supongamos que F es un filtro. Entonces si $x, y \in F$, tenemos que existe un $z \in F$ tal que $z \leq x, y$. Esto significa que z es una cota inferior de $\{x, y\}$ y por definición del ínfimo, $z \leq x \wedge y$. Como $z \in F$, entonces por F3), se tiene que $x \wedge y \in F$. Contrariamente, probemos que F es un filtro. Si $x, y \in F$, entonces basta tomar $z = x \wedge y \in F$ ya que, como el ínfimo es una cota inferior de $\{x, y\}$, en particular $z \leq x, y$. $\square$

Example 13. Para cualquier $(P, \leq)$ parcialmente ordenado no vacío, $F_d = P$ es un filtro conocido como **filtro discreto**. Además, si $(L, \leq)$ es un retículo completo podemos caracterizarlo de la siguiente manera: un filtro F en L es discreto si y solo si $\bigwedge L \in F$.

Example 14. De nuevo, sea $(L, \leq)$ un retículo completo. Entonces $F_t = \{\bigvee L\}$ es el **filtro trivial**.

Example 15. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Todo sistema de entornos $\mathcal{N}(x) = \{U \subseteq X \mid U \text{ is a neighbourhood of } x\}$ para todo $x \in X$ es un filtro. Esto es debido por las propiedades elementales de los entornos en un punto: toda intersección de entornos de un mismo punto es un entorno de ese punto y todo superconjunto de un entorno es un entorno.

De manera similar a cómo se define una base de entornos para una topología, podemos realizar el mismo trabajo para los filtros y definir una base para un filtro cualquiera

Definition 13. Sea $(P, \leq)$ parcialmente ordenado y sea $F \subseteq P$ un filtro. Entonces $B \subseteq F$ es una **base de filtro** si

$$\forall x \in F,\ \exists b \in B \text{ s.t. } b \leq x.$$

Example 16. Las bases para un sistema de entornos en un espacio topológico son en particular bases de filtro del sistema de entornos.

Siguiendo con la misma analogía, una colección de conjuntos puede considerarse una base para una topología dada si satisface ciertas propiedades. Es natural plantearse la misma pregunta en el contexto de los filtros, es decir, qué propiedades debe satisfacer una colección de subconjuntos para ser base de algún filtro. Estas propiedades se recogen en la siguiente proposición.

Proposition 11 (Filter base for some filter)**.** Sea $(P, \leq)$ parcialmente ordenado y sea $\varnothing \neq B \subseteq P$. Son equivalentes

i) B es una base de filtro para un cierto filtro F.

ii) $\forall b_1, b_2 \in B$, $\exists b_3 \in B$ t.q. $b_3 \leq b_1, b_2$.

En este contexto, $F = \{x \in P \mid \exists b \in B \text{ t.q. } b \leq x\}$.

Demostración. En primer lugar, supongamos que F es un filtro cuya base es B. Tomemos dos elementos de la base $b_1, b_2 \in B \subseteq F$. Por la propiedad F2), existe un $z \in F$ tal que $z \leq b_1, b_2$ y por definición de la base, existe un $b_3 \in B$ tal que $b_3 \leq z \leq b_1, b_2$ por lo que por transitividad se tiene. Ahora, es fácil comprobar por definición de la base que $F \subseteq \{x \in P \mid \exists b \in B \text{ t.q. } b \leq x\}$. Además, si $x \in P$ es un elemento tal que existe un elemento de la base $b \in B$ con $b \leq x$, entonces en particular $b \in B \subseteq F$ y por F3), se tiene que $x \in F$, dándose en este caso la igualdad entre conjuntos.

Ahora, supongamos que B es un conjunto que satisface la segunda propiedad de la Proposición y definamos el conjunto $F := \{x \in P \mid \exists b \in B \text{ t.q. } b \leq x\}$. Veamos primero que F es un filtro. Observemos en primer lugar que, por cómo está definido F, $B \subseteq F$ y como B no es vacío, entonces se cumple F1). Por otro lado, sean $x, y \in F$, entonces existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $b_1 \leq x$ y $b_2 \leq y$. Por hipótesis, existe un $b \in B \subseteq F$ tal que $b \leq b_1, b_2 \leq x, y$, cumpliéndose de esta manera la propiedad F2). Finalmente, Si $x \in F$ y $x \leq y$, entonces existe un $b \in B$ tal que $b \leq x \leq y$ y por la transitividad se tiene F3). Por último, debemos comprobar que, en efecto, B es una base de F, pero por definición de F se cumple de manera natural. □

Observemos que en el caso de que $(L, \leq)$ sea un retículo, podemos reescribir la segunda propiedad mediante el ínfimo de la siguiente manera: $\forall b_1, b_2 \in B, \exists b_3 \in B$ t.q. $b_3 \leq b_1 \wedge b_2$.

Example 17. Sea $(P, \leq)$ parcialmente ordenado y sea $B = \{b\}$ para un $b \in P$ dado. Entonces se cumple de manera natural la hipótesis de la proposición anterior. Por tanto, todo elemento $b \in P$ permite definir un filtro $\uparrow b := \{x \in P \mid b \leq x\}$ denominado **filtro principal**.

Example 18. Si $(L, \leq)$ es un retículo completo, entonces $\uparrow \bigwedge L$ es el filtro discreto y $\uparrow \bigvee L$ es el filtro trivial.

Definition 14. Sea $(P, \leq_P, F)$ y $(Q, \leq_Q, G)$ espacios filtrados. Decimos que $f : Q \to P$ es **filtradamente continua** si:

1. Es isótona: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$.
2. $\forall y \in G$, $\exists x \in F$ t.q. $f(x) \leq y$.

Example 19. La aplicación identidad $\mathrm{id}_P : P \to P$ es filtradamente continua. Esto es ya que para todo $x \in F$, $\mathrm{id}_P(x) = x \leq x$.

Proposition 12. La composición de funciones filtradamente continuas es filtradamente continua.

Demostración. Es sabido que la composición de funciones isótonas es isótona. Falta demostrar la segunda propiedad. Sean $f : (P, F) \to (Q, G)$ y $g : (Q, G) \to (R, H)$ aplicaciones filtradamente continuas. entre espacios filtrados espacios filtrados. Para todo $z \in H$, se tiene que existe un $y \in G$ tal que $g(y) \leq z$. Ahora bien, como $y \in G$, entonces existe un $x \in F$ tal que $f(x) \leq y$. Como g es isótona, $g(f(x)) \leq g(y) \leq z$. □

Proposition 13. Sea $f : P \to Q$ una aplicación isótona y (P, F) un espacio filtrado. Entonces

$$F_Q(f) := \{y \in Y \mid \exists x \in F \text{ s.t. } f(x) \leq y\},$$

es el mayor filtro en Q que hace a f filtradamente continua.

Demostración. Primero probaremos que $F_Q(f)$ es un filtro. En primer lugar, $F_Q(f)$ no es vacío ya que $F \neq \varnothing$ y $f(F) \subseteq F_Q(f)$. Por otro lado, si $y \in F_Q(f)$ e $y \leq y_0$, entonces es natural observar que $y_0 \in F_Q(f)$. Finalmente, supongamos que $y_1, y_2 \in F_Q(f)$. Entonces existen $x_1, x_2 \in F$ tales que $f(x_i) \leq y_i$ para $i = 1, 2$. Como F es un filtro, existe un $x \in F$ tal que $x \leq x_i$ y como f es isótona, $f(x) \leq f(x_i) \leq y_i$ y naturalmente $y = f(x) \in F_Q(f)$ es tal que $y \leq y_i$ para $i = 1, 2$.

Por otro lado, por definición de $F_Q(f)$, es natural observar que f es filtradamente continua en este filtro. Supongamos ahora que G es un filtro en Q haciendo que f sea filtradamente continua. Entonces si $y \in G$, como f es filtradamente continua, $\exists x \in F$ tal que $f(x) \leq y$, es decir, $y \in F_Q(f)$, lo que demuestra que $G \subseteq F_Q(f)$. □

Definition 15. Decimos que $f : P \to Q$ es un **isomorfismo filtrado** si f es biyectiva y f y f^{-1} son filtradamente continuas.