Teoría de grupos topológicos

Sésar

1. Definiciones y propiedades básicas

Sea G un conjunto no vacío. Sabemos que podemos definir en él una topología τ si cumple con los axiomas, o podemos definir, dada una operación binaria $+_G \times G \to G$ que cumple con la asociatividad, elemento neutro 0 y, dado un $x \in G$, su elemento opuesto $-x$; un grupo. Nuetsro objetivo es definir un objeto que a la vez sea un grupo y un espacio topológico.

Para que su definición sea coherente, debemos tener una conexión entre su topología con sus operaciones. En este sentido, denotemos por $\mathfrak{m} : G \times G \to G$ a la aplicación $\mathfrak{m}(x, y) = x * y$ y $\mathfrak{i} : G \to G$ tal que $\mathfrak{i}(x) = x^{-1}$, entonces estas aplicaciones deben ser continuas para que actúen de forma consistente. Además, $G \times G$ es otro espacio topológico con la topología producto, por lo que tiene sentido discutir su continuidad.

Definition 1. Decimos que G es un **grupo topológico** si

1. $(G, +)$ es un grupo
2. (G, τ) es un espacio topológico
3. $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{i}$ son continuas.

Podemos definir para todo $a \in G$ la **traslación a la izquierda** como la aplicación $l_a : G \to G$ donde $l_a(x) = a * x$. Podemos definir análogamente la **traslación por la derecha** como $r_a(x) = x * a$.

Proposition 1. Sea G un grupo topológico. Entonces

1. Toda traslación por la izquierda / derecha es un homeomorfismo.
2. La aplicación $\mathfrak{i}$ es un homeomorfismo.

Demostración. En primer lugar, se tiene que l_a es biyectiva y $(l_a)^{-1} = l_{-a}$, por lo que basta probar que l_a es continua para todo $a \in G$. Podemos escribir $l_a = \mathfrak{m} \circ \mathrm{em}_a$, donde $\mathrm{em}_a(x) := (a, x)$. Como $\mathfrak{m}$ es continua y em_a es continua por la topología producto, se tiene lo deseado. Probar que r_a es un homeomorfismo es completamente análogo al caso l_a. Por otro lado, $\mathfrak{i}$ es continua y como $\mathfrak{i} \circ \mathfrak{i} = \mathrm{id}_G$, entonces $\mathfrak{i}^{-1} = \mathfrak{i}$. □

Para todo conjunto $S \subseteq G$ y para todo $x \in G$, denotamos por $x * S := l_x(S) = \{x * s \mid s \in S\}$. De la misma manera, $S * x := r_x(S) = \{s * x \mid s \in S\}$.

Proposition 2. Sea G un grupo topológico. U es un entorno de $a \in G$ si y solo si $U = a * U_e$, donde U_e es un entorno de la identidad e.

Demostración. Es aplicación directa de que l_a es un homeomorfismo. □

Dados dos conjuntos arbitrarios $S_1, S_2 \subseteq G$, entonces denotamos $S_1 * S_2 := \bigcup_{s_1 \in S_1} s_1 * S_2 = \bigcup_{s_2 \in S_2} S_1 * s_2 = \{s_1 * s_2 \mid s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2\}$. Recordemos que si $H, K \leq G$, entonces $H * K \leq G$ si y solo si $H * K = K * H$. En particular, si $N \trianglelefteq G$, entonces $H * N \leq G$.

Proposition 3. Sea G un grupo topológico y sea $S \subseteq G$.

1. Si $A \in \mathcal{T}$, entonces $A * S, S * A \in \mathcal{T}$.
2. Si $C \in \mathcal{C}$ y S es finito, entonces $C * S, S * C \in \mathcal{C}$.

Demostración. Como A es abierto, por Proposición 1, se tiene que $s * A$ y $A * s$ son abiertos para todo $s \in S$. De este modo, $S * A = \bigcup_{s \in S} s * A$ y $A * s = \bigcup_{s \in S} A * s$ son la unión arbitraria de abiertos, luego son abiertos. Por otro lado, $S * C = \bigcup_{s \in S} s * C$ y $C * S = \bigcup_{s \in S} C * s$ son la unión finita de cerrados, luego son cerrados. □

Proposition 4. Sea G un grupo topológico, $x \in G$ y $S, T \subseteq G$.

1. $\overline{S} * \overline{T} \subseteq \overline{S * T}$.
2. $\overline{\{x\}} * \overline{S} = \overline{x * S}$ y $\overline{S} * \overline{\{x\}} = \overline{S * x}$

Demostración. Como $\mathfrak{m}$ es continua, $\overline{S} * \overline{T} = \mathfrak{m}(\overline{S} \times \overline{T}) = \mathfrak{m}\left(\overline{S \times T}\right) \subseteq \overline{\mathfrak{m}(S \times T)} = \overline{S * T}$. Finalmente, se tiene que $\overline{x * S} = x * \overline{S} \subseteq \overline{\{x\}} * \overline{S} \subseteq \overline{x * S}$. □

Remark 1. Como las traslaciones son homeomorfismos, se tiene que $\overline{\{x\}} = x * \overline{\{e\}} = \overline{\{e\}} * x$.

Definition 2. Sean G, H dos grupos topológicos y $f : G \to H$. Decimos que f es un **homomorfismo de grupos topológicos** si es un homomorfismo de grupos continuo.

Proposition 5. Sean G y H grupos topológicos y $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Entonces f es continua si y solo si f es continua en la identidad.

Demostración. Si es continua, en particular es continua en e_G. Tomemos ahora $x \in G$ arbitrario y sea V entorno de $f(x)$, entonces $V' = f(x)^{-1} * V$ es un entorno de la identidad en H, por lo que existe un entorno U_e de la identidad en G tal que $f(U_0) \subseteq V'$. De este modo, $l_{f(x)}(f(U_0)) \subseteq l_{f(x)}(V') = V$. Como f es un homomorfismo, $l_{f(x)}(f(U_0)) = f(x) * f(U_0) = f(x * U_0)$, donde $x * U_0$ es un entorno de x. □

Definition 3. Sean G y H grupos topológicos. Decimos que $f : G \to H$ es un **isomorfismo homeomorfo** si es a la vez isomorfismo de grupos y homeomorfismo de espacios topológicos. En este caso, se dice que G y H son **homeomórficamente isomorfos** y se denota por $G \cong H$.

Remark 2. Notemos que f es un isomorfismo homeomorfo si f es biyectiva, f es homomorfismo y f es continua y abierta. En particular, denotamos por $G \simeq H$ la isomorfía de grupos y por $G \approx H$ la homeomorfía de espacios topológicos. Así, $G \cong H \Rightarrow G \simeq H$ y $G \approx H$, pero el recíproco no es cierto en general, pues no asegura que ambas relaciones se den mediante la misma aplicación.

2. topologías de grupo

3. Subgrupos topológicos

Proposition 6. Sea G un grupo topológico y $H \leq G$.

1. $H \in \mathcal{T}$ si y solo si $\operatorname{int}(H) \neq \varnothing$.
2. Si $H \in \mathcal{T}$, entonces $H \in \mathcal{C}$.
3. Si $H \in \mathcal{C}$ y $[G : K] < \infty$, entonces $H \in \mathcal{T}$

Demostración. Es fácil observar que si H es abierto, entonces $\operatorname{int}(H) = H \neq \varnothing$. Por otro lado, supongamos que $\operatorname{int}(H) \neq \varnothing$. Entonces existe un $x \in \operatorname{int}(H)$ y, por tanto, $H \in \mathcal{N}(x)$. Así, para todo $h \in H$, $(h * x^{-1}) * H = H \in \mathcal{N}(h)$. Como H es entorno de todos sus puntos, es en particular abierto.

Ahora supongamos que H es abierto. Notemos que $G \setminus H = \cup_{x \notin H} x * H$. Como $G \setminus H$ está expresado como una unión arbitraria de abiertos, se tiene que $G \setminus H$ es abierto, luego H es cerrado.

Contrariamente, supongamos que H es cerrado con índice finito. Entonces $G \setminus H$ es la unión finita de cerrados, luego $G \setminus H$ es cerrado y, por tanto, H es abierto. □

Proposition 7. Sea G un grupo topológico.

1. Si $H \leq G$, entonces $\overline{H} \leq G$.
2. Si $N \trianglelefteq G$, entonces $\overline{N} \trianglelefteq G$.

Demostración. Por un lado, es fácil observar que $e \in H \subseteq \overline{H}$. Por otro lado, sea $h \in \overline{H}$. Como $\mathfrak{i}$ es un isomorfismo homeomorfo, se tiene que $h^{-1} = \overline{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} = \overline{H}$. Finalmente, como $\mathfrak{m}$ es continua, se tiene que $h_1 * h_2 \in \overline{H} * \overline{H} \subseteq \overline{H * H} = \overline{H}$. Basta comprobar que $\overline{N} \trianglelefteq G$. Para todo $x \in G$, se tiene que $x * \overline{N} = \overline{x * N} = \overline{N * x} = \overline{N} * x$. □

Proposition 8. Todo subgrupo de un grupo topológico con la topología inducuda es un grupo topológico.

Demostración. Sea G un grupo topológico y $H \leq G$. Como G es un subgrupo, entonces $\mathfrak{m}_H = \mathfrak{m} \circ \imath_{H\times H}$ y $\mathfrak{i}_H = \mathfrak{i} \circ \imath_H$. Por la topología inducida, $\mathfrak{m}_H$ y $\mathfrak{i}_H$ son continuas, luego H es un grupo topológico. $\square$

Definition 4. Sea G un grupo topológico. Un **subgrupo topológico** de G es un subgrupo $H \leq G$ con la topología inducida.

4. Producto de grupos topológicos

5. Grupo topológico cociente

Proposition 9. Sea G un grupo topológico y $N \trianglelefteq G$. Entonces G/N con la topología cociente es un grupo topológico.

Demostración. Basta demostrar que el producto y la inversa en G/N son continuas en la topología cociente. Sea $\pi_N : G \to G/N$ la aplicación proyección. Por definición de la topología cociente, π_N es continua. De este modo, $\mathfrak{m}_{G/N} \circ \pi_N = \pi_N \circ \mathfrak{m}$ e $\mathfrak{i}_{G/N} \circ \pi_N = \pi_N \circ \mathfrak{i}$ son continuas y por la caracterización de la aplicación cociente, $\mathfrak{m}_{G/N}$ e $\mathfrak{i}_{G/N}$ son continuas. $\square$

Definition 5. Sea G un grupo topológico y $N \trianglelefteq G$. Llamamos **grupo cociente topológico** al grupo G/N dotado de la topología cociente.

Remark 3. Si G y H son grupos (sin posible topología definida) y sea $f : H \to G$ un homomorfismo, entonces por la propiedad universal si $N \trianglelefteq G$ y $N \leq \ker(f)$, entonces existe un único homomorfismo $f_N : G/N \to H$ tal que $f = f_N \circ \pi_N$ y, consecuentemente, $\ker(f_N) = \ker(f)/N$.

Proposition 10. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo y $N \trianglelefteq G$ tal que $N \leq \ker(f)$.

1. f es continua si y solo si f_N es continua.
2. f es abierta si y solo si f_N es abierta.

Demostración. Consecuencia directa de la topología cociente. $\square$

Proposition 11. Sean G y H grupos topológicos. Si $f : G \to H$ es un homomorfismo continuo y abierto, entonces

$$G/\ker(f) \cong f(G).$$

Demostración. Tomando $N = \ker(f)$ es la propiedad universal, se tiene que f_N es un monomorfismo, continuo y abierto. La restricción de f_N en la imagen $f(G)$ mantiene la continuidad y la abertura y además es un isomorfismo. $\square$

Proposition 12. Sea G un grupo topológico. Sea $H \leq G$ abierto y $N \trianglelefteq G$. Entonces

$$(H * N)/N \cong H/(H \cap N).$$

Demostración. Tomemos el homomorfismo abierto y continuo $f = \pi_N$. Como H es abierto, entonces $\imath_H$ es una aplicación abierta y por tanto $f|_H$ es también un homomorfismo continuo y abierto. Aplicando la propiedad universal se llega. $\square$

Proposition 13. Sea G un grupo topológico, $N \trianglelefteq G$ y $N \leq K \trianglelefteq G$. Entonces

$$(G/N)/(K/N) \cong G/K.$$

Demostración. Tomemos $f = \pi_K : G \to G/K$. Como f es un epimorfismo, continuo y abierto, $f_N : G/N \to G/K$ también lo es. Como $\ker(f_N) = \ker(f)/N = K/N$, aplicando el Primer Teorema de Isomorfía se tiene. $\square$

6. Axiomas de separación

Proposition 14. Todo grupo topológico es regular.

Demostración. Sea $C \in \mathcal{C}$ tal que $e \notin C$. Entonces existe un $U \in \mathcal{N}(e)$ tal que $U \cap C = \varnothing$. En particular, podemos tomar $U = V^{-1}V$, con $V \in \mathcal{N}(e)$. Además, $V^{-1} * V \cap C = \varnothing \Leftrightarrow V \cap V * C = \varnothing$. Como V es un entorno del elemento neutro y $V * C \in \mathcal{N}(C)$, se tiene la separación deseada.

Ahora, sea $C \in \mathcal{C}$ y sea $x \notin C$ arbitrario. Entonces $e \notin x^{-1} * C$, donde $x^{-1} * C$ es cerrado. Por el párrafo anterior, existen entornos $U \in \mathcal{N}(e)$ y $V \in \mathcal{N}(x^{-1} * C)$ tales que $U \cap V = \varnothing$. Por tanto, $x * (U \cap V) = x * U \cap x * V = \varnothing$. Como $x * U \in \mathcal{N}(e)$ y $x * V \in \mathcal{N}(C)$, se tiene lo deseado. $\square$

Remark 4. En particular, todo grupo topológico es completamente regular, se tiene por Topología General que ser Hausdorff (T_2), Fréchet (T_1) o Kolgomorov (T_0) son equivalentes. Además, G es también uniformizable.

Proposition 15. Sea G un grupo topológico. Son equivalentes:

1. G es Hausdorff
2. El subgrupo trivial $\{e\}$ es cerrado.
3. Para todo grupo topológico H y para todo $f : G \to H$ homomorfismo continuo, $\ker f$ es cerrado.

Demostración. Supongamos primero que G es Hausdorff. En particular, G es Fréchet y $\{e\}$ es cerrado. Por otro lado, supongamos que $\{e\}$ es cerrado. Entonces $\{x\} = x * \{e\}$ es cerrado para todo $x \in G$, luego G es Fréchet. Como G es regular, ser Fréchet es equivalente a ser Hausdorff.

Supongamos ahora que $\{e\}$ es cerrado. Sea $x \notin \ker f$. Entonces $f(x) \neq e_H$, equivalentemente, $f(x) \notin \{e_H\}$. Como H es Hausdorff, en particular, $\{e_H\}$ es cerrado y por tanto existe un $V \in \mathcal{N}(f(x))$ tal que $\{e_H\} \cap V = \varnothing$. Como f es continua, entonces $U = f^{-1}(V) \in \mathcal{N}(x)$ y además $\varnothing = f^{-1}(\{e_H\} \cap V) = f^{-1}(\{e_H\}) \cap f^{-1}(V) = \ker f \cap U$. Finalmente, Tomando $H = G$ y $f = \mathrm{id}_G$, se tiene que $\ker \mathrm{id}_G = \{e\}$ es cerrado. □

Proposition 16. Sea G un grupo topológico y $N \trianglelefteq G$.

1. G/N es Hausdorff si y solo si N es cerrado.
2. Si N y G/N son Hausdorff, entonces G es Hausdorff.

Demostración. Tomemos la proyección $\pi_N : G \to G/N$ que es un homomorfismo continuo. Entonces G/N es Hausdorff si y solo si $\ker \pi_N = N$ es cerrado. Supongamos ahora que G/N y N son Hausdorff. Por un lado, $\{e\} \leq N$ es un conjunto cerrado en la topología relativa de N, luego existe un cerrado C en la topología de G tal que $\{e\} = C \cap N$. Ahora, como G/N es Hausdorff, entonces N es también cerrado, luego $\{e\}$ es la intersección finita de cerrados en G, luego es cerrado en G y, por equivalencias, G es Hausdorff. □

Remark 5. Definamos el conjunto $G_0 := \overline{\{e\}}$. Entonces $G_0 \trianglelefteq G$ y además G/G_0 es Hausdorff. En particular, la RBE que se define coincide con el cociente de Kolgomorov.

7. Conexión y compacidad

Proposition 17. Un grupo conexo no tiene subgrupos abiertos propios ni subgrupos cerrados propios con índice finito.

Demostración. Si un subgrupo tiene alguna de estas características, en particular sería un subgrupo clopen propio, contradiciendo la condición de conexión. □

Proposition 18. Todo grupo conexo está generado por cualquier abierto propio.

Demostración. Sea $\varnothing \neq A \in \mathcal{T}$. Entonces $\langle A \rangle \leq G$ contiene al abierto $A \neq \varnothing$, por lo que $\mathrm{int}\langle A \rangle \neq \varnothing$ y por tanto $\langle A \rangle$ es abierto y, de este modo, cerrado. Como es un clopen no vacío en un espacio conexo, $\langle A \rangle = G$. □

Proposition 19. La componentes conexas de la identidad N_e de un grupo conexo G es un subgrupo normal y cerrado. Toda componente conexa es una traslación de N_e.

Demostración. En primer lugar, $e \in N_e$. Por otro lado, sean $x, y \in N_e$. Entonces $e \in N_e{*}y^{-1}$. Por definición de la componente conexa, $N_e{*}y^{-1} \subseteq N_e \Leftrightarrow N_e \subseteq N_e{*}y$. Por tanto, $x \in N_e \subseteq N_e{*}y \Leftrightarrow x{*}y^{-1} \in N_e$, demostrando así que N_e es un subgrupo. Finalmente, si $x \in G$, entonces $x^{-1}{*}Ne{*}x$ es también conexo por la homeomorfía de la traslación, luego $x^{-1} * N_e * x \subseteq N_e$, demostrando la normalidad del subgrupo. N_e es cerrado porqur toda componente conexa es cerrada. Finalmente, por la homeomorfía de la traslación, para todo $x \in G$, $x * N_e$ es la componente conexa que contiene a x. ☐

Proposition 20. Sea G un grupo topológico, $K \subseteq G$ compacto.

1. Si $A \in \mathcal{T}(K)$, entonces existe un $U \in \mathcal{T}(e)$ tal que $U * K \subseteq A$.
2. Si $C \in \mathcal{C}$, entonces $K * C \in \mathcal{C}$.
3. Si $L \subseteq G$ es compacto, entonces $K * L$ es compacto.

Demostración. ☐

8. Grupos topológicos metrizables

9. Característica

Sabemos que $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ junto con la multiplicación usual de números complejos forma un grupo.

Definition 6. Dado un grupo topológico G, una **característica** es un homomorfismo continuo $\xi : G \to \mathbb{T}$

Denotaremos como $\widehat{G}$ al conjunto de características de un grupo topológico G.

En primer lugar, debemos darnos cuenta de que podemos definir la siguiente operación binaria entre características: dados $\xi, \phi \in \widehat{G}$, entonces $(\xi \cdot \phi)(x) := \xi(x)\phi(x)$, con la multiplicación usual de números complejos.

Veamos que esta operación está bien definida. En primer lugar, comprobamos que la multiplicación es otra aplicación cuya imagen está en $\mathbb{T}$. Así, para todo $\xi, \phi \in \widehat{G}$ y para todo $x \in G$, $|(\xi \cdot \phi)(x)| = |\xi(x)||\phi(x)| = 1$. Por otro lado, veamos que es un homomorfismo de grupos: $(\xi \cdot \phi)(x+y) = \xi(x+y)\phi(x+y) = \xi(x)\xi(y)\phi(x)\phi(y) = (\xi \cdot \phi)(x)(\xi \cdot \phi)(y)$. Por último, comprobaremos que es continua usando la Proposición 5. Sea N_0 entorno del 0 en $\mathbb{T}$, entonces existen N' y N'' entornos del 0 en G tales que $\xi(N') \subseteq N_0$ y $\phi(N'') \subseteq N_0$. Tomando $N = N' \cap N''$, entonces $\xi(N), \phi(N) \subseteq N_0$

Proposition 21. $(\widehat{G}, \cdot)$ es un grupo.

Demostración. La asociatividad viene de la asociatividad de los números complejos. Por otro lado, la aplicación $i(x) = 1$ es el elemento neutro de $\widehat{G}$. Finalmente, dado un $\xi \in \widehat{G}$, el elemento inverso viene dado por $\xi^{-}(x) = \frac{1}{\xi(x)}$. ☐

Como consecuencia directa, como $0 = \xi(0) = \xi(x - x) = \xi(x)\xi(-x)$, entonces $\xi^{-}(x) = \xi(-x)$.