General Topology
A complete introduction

Sellers

16 de octubre de 2024

Índice general

Capítulo 1

Espacios topológicos

1.1. Definición y ejemplos

Definition 1. Sea $X \neq \varnothing$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Decimos que $\mathcal{T}$ es una **topología** si:

A1) $X, \varnothing \in \mathcal{T}$.

A2) Si $A_\alpha \in \mathcal{T}$ para todo $\alpha \in \mathcal{J}$, entonces $\cup_{\alpha \in \mathcal{J}} A_\alpha \in \mathcal{T}$.

A3) Si $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.

De este modo, dado un conjunto X no vacío arbitrario y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una topología de X, decimos que el par $(X, \mathcal{T})$ es un **espacio topológico**. En este contexto, los elementos $x \in X$ se les llama **puntos** del espacio topológico y cualquier subconjunto $A \in \mathcal{T}$ se le llama **abierto**.

La tercera condición, además, es equivalente a decir que la intersección finita de abiertos es abierto. Esto se puede comprobar como sigue. Si toda intersección finita de abiertos es abierto, entonces en particular la intersección de dos abierto es una intersección finita. Por otro lado, si toda intersección de dos abiertos es abierto, entonces por inducción en el número de abiertos que se intersecan se demuestra la otra implicación.

Con esta nueva terminología, podemos expresar de manera más resumida la Definición 1 de la siguiente manera:

a1) El conjunto total y el vacío son abiertos.

a2) Toda unión arbitraria de abiertos es abierto.

a3) Toda intersección finita de abiertos es abierto.

Example 1. Dado un conjunto $X \neq \varnothing$ arbitrario, definimos la **topología trivial** como

$$\mathcal{T}_t := \{\varnothing, X\}.$$

veamos que, en efecto, se cumplen los tres axiomes de la Definición 1.

A1) Por definición, $\varnothing, X \in \mathcal{T}_t$.

A2) Tomemos ahora una familia arbitraria de abiertos $\{A_\alpha\} \subseteq \mathcal{T}_t$. Si existe un α_0 tal que $A_{\alpha_0} = X$, entonces $\cup A_\alpha = X \in \mathcal{T}_t$. Por el contrario, si $A_\alpha \neq X$ para todo α, en particular $A_\alpha = \varnothing$, por lo que $\cup A_\alpha = \varnothing \in \mathcal{T}_t$.

A3) Finalmente, dados dos $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_t$. Si $A_1 = X$, entonces $A_1 \cap A_2 = A_2 \in \mathcal{T}_t$. En el caso contrario, $A_1 = \varnothing$ y por tanto, $A_1 \cap A_2 = \varnothing \in \mathcal{T}_t$.

Example 2. Dado un conjunto $X \neq \varnothing$ arbitrario, definimos la **topología discreta** como

$$\mathcal{T}_d := \mathcal{P}(X).$$

Veamos que se cumplen las condiciones de la Definición 1.

A1) Como el vacío y X son subconjuntos de X, entonces $\varnothing, X \in \mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_d$.

A2) Si $\{A_\alpha\} \subseteq \mathcal{T}_t$ es una familia de abiertos. por definición es una familia de subconjuntos de X, por lo que la unión será otro subconjunto de X, es decir, $\cup A_\alpha \in \mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_d$.

A3) Dados dos abiertos A_1 y A_2, es decir, dos subconjuntos de X, la intersección de ambos es otro subconjunto de X. Por lo que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_d$.

Example 3. Dado un conjunto $X = \{a, b\}$, definimos la **topología de Sierpiński** como

$$\mathcal{T}_S := \{\varnothing, \{a\}, X\}.$$

Comprobemos que se cumplen las tres hipótesis de una topología.

A1) Por definición, $\varnothing, X \in \mathcal{T}_S$.

A2) Por otro lado, como $\varnothing \subseteq \{a\} \subseteq X$, para toda familia de abiertos A_α, existirá un α_0 tal que $\cup A_\alpha = A_{\alpha_0}$, por lo que la unión es un abierto.

A3) Por el mismo razonamientos, si A_1 y A_2 son dos abiertos, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A_1 \subseteq A_2$, y por tanto, $A_1 \cap A_2 = A_1 \in \mathcal{T}_S$.

1.1.1. Cerrados

Definition 2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se dice que un conjunto $C \subseteq X$ es **cerrado** si

$$X \setminus C \in \mathcal{T}.$$

Denotamos como $\mathcal{C}$ el conjunto de cerrados de X.

Podemos ver además que $C \in \mathcal{C}$ si y solo si existe un abierto $A \in \mathcal{T}$ tal que $C = X \setminus A$. En efecto, si C es un cerrado, entonces $X \setminus C \in \mathcal{T}$ y llamando $A = X \setminus C$, tenemos que $C = X \setminus (X \setminus C) = X \setminus A$. Por el contrario, si $C = X \setminus A$ con $A \in \mathcal{T}$, entonces $X \setminus C = X \setminus (X \setminus A) = A \in \mathcal{T}$, por lo que $C \in \mathcal{C}$.

Example 4. Para la topología trivial, es decir, aquella cuyos únicos abiertos son X y el vacío, los cerrados de esta topología son los complementarios de estos dos conjuntos. En particular, $X \setminus X = \varnothing$ y $X \setminus \varnothing = X$. Por tanto, X y $\varnothing$ son a la vez abiertos y cerrados.

Example 5. De manera similar, estudiemos ahora los cerrados de la topología discreta. Sea $C \subseteq X$ un subconjunto cualquiera de X, entonces su complementario $X \setminus C \subseteq X$, por lo que $X \setminus C \in \mathcal{T}$ y por tanto, C es cerrado. Vemos entonces que cualquier subconjunto es un cerrado, luego $\mathcal{C} = \mathcal{P}(X) = \mathcal{T}$.

Example 6. Para la topología de Sierpiński, como $\mathcal{T}_S = \{\varnothing, \{a\}, X\}$, entonces $\mathcal{C} = \{X \setminus \varnothing, X \setminus \{a\}, X \setminus X\} = \{X, \{b\}, \varnothing\}$. El único subconjunto que no es cerrado es $\{a\}$.

Como podemos comprobar en los anteriores ejemplos, ser cerrado no implica no ser abierto ni viceversa. Es decir, no son dos nociones opuestas. En los ejemplos anteriores hemos podido comprobar situaciones donde un subconjunto no es ni abierto ni cerrado —si $X = \{a, b\}$, entonces $\{a\}$ no es ni abierto ni cerrado en la topología trivial—, donde es abierto pero no cerrado —$\{a\}$ en la topología de Sierpiński—, donde es cerrado pero no abierto —$\{b\}$ en la topología de Sierpiński— y donde un conjunto es a la vez abierto y cerrado —cualquier subconjunto en la topología discreta—.

Definition 3. Un conjunto en un espacio topológico es **clopen** si es abierto y cerrado a la vez.

Proposition 1. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces

C1) $X, \varnothing$ son cerrados.

C2) Toda intersección arbitraria de cerrados es cerrado.

C3) La unión finita de cerrados es cerrado.

Demostración. Para demostrar C1), fijémonos que $X = X \setminus \varnothing$, donde $\varnothing$ es abierto, luego X es cerrado. De forma análoga, como $\varnothing = X \setminus X$ y como X es abierto, entonces $\varnothing$ es también cerrado.

Para ver C2), tomemos una familia arbitraria de cerrados C_α. Entonces existen una familia de abiertos A_α tales que para todo α, $C_\alpha = X \setminus A_\alpha$. Finalmente, tomando la intersección de estos cerrados tenemos que $\cap_\alpha C_\alpha = \cap_\alpha X \setminus A_\alpha = X \setminus \cup_\alpha A_\alpha$ por las leyes de Morgan y como por A2) tenemos que $\cup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}$, se tiene que $\cap_\alpha C_\alpha$ es cerrado.

Finalmente, demostremos C3). Sean $C_i \in \mathcal{C}$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces existen abiertos $A_i \in \mathcal{T}$ tales que $C_i = x \setminus A_i$. Por tanto, $\cup_i C_i = \cup_i X \setminus A_i = X \setminus \cap_i A_i$ por las leyes de Morgan y por A3) tenemos que $\cap_i A_i \in \mathcal{T}$, entonces $\cup_i C_i \in \mathcal{C}$. □

La Proposición 1 nos enumera una lista de propiedades que cumplen los cerrados que, si las comparamos con los axiomas que cumple una topología según la Definición 1, mantienen cierta similitud cercana. Podríamos intuir que es posible definir conjuntos cerrados en un conjunto arbitrario sin tener que especificar previamente los abiertos de tal conjunto. La siguiente proposición nos asegura que esta intuición es correcta. Más concretamente, si podemos definir un conjunto que satisfacen las condiciones C1), C2) y C3), entonces podemos construir una topología cuyos cerrados sea exactamente estos conjuntos previamente establecidos.

Proposition 2 (Topología mediante cerrados)**.** Sea $X \neq \varnothing$ un conjunto arbitrario y $\mathbf{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Si $\mathbf{C}$ cumple C1)-C3), entonces existe una topología cuya familia de cerrados es $\mathbf{C}$.

Demostración. Vamos a demostrar que la familia de subconjuntos de X

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid X \setminus A \in \mathbf{C}\}$$

es una topología. Para ello, veremos que se cumplen A1)-A3).

Veamos A1). Como $\mathbf{C}$ cumple C1), entonces $X, \varnothing \in \mathbf{C}$. Como $X = X \setminus \varnothing \in \mathbf{C}$, entonces $\varnothing \in \mathcal{T}$. Análogamente, $\varnothing = X \setminus X \in \mathbf{C}$, por lo que $X \in \mathcal{T}$.

Probemos ahora A2). Sean $A_\alpha \in \mathcal{T}$ una familia arbitraria de abiertos. Entonces por definición de $\mathbf{T}$, tenemos que $X \setminus A_\alpha \in \mathbf{C}$. Como $\mathbf{C}$ cumple C2) y por las leyes de Morgan, tenemos que $\cap_\alpha X \setminus A_\alpha = X \setminus \cup_\alpha A_\alpha \in \mathbf{C}$. Finalmente, deducimos que $\cup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}$.

Finalmente, demostremos A3). Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$, entonces $X \setminus A_1, X \setminus A_2 \in \mathbf{C}$. Por lo tanto, tenemos que $(X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_1) = X \setminus (A_1 \cap A_2) \in \mathbf{C}$, concluyendo que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.

Por tanto, acabamos de demostrar que $\mathcal{T}$ es una topología por que cumple con las condiciones de la Definición 1. Como es una topología, entonces por la Definición 2 define una familia de subconjuntos cerrados $\mathcal{C}$. Veamos por último que $\mathbf{C} = \mathcal{C}$.

Si $C \in \mathbf{C}$, entonces por la definición de $\mathcal{T}$, tenemos que $X \setminus C \in \mathcal{T}$, pero entonces su complementario $X \setminus (X \setminus C) = C$ es un cerrado de la topología $\mathcal{T}$, luego $C \in \mathcal{C}$. Contrariamente, si $C \in \mathcal{C}$, entonces por definición de conjunto cerrado, $X \setminus C \in \mathcal{T}$, pero por definición de $\mathcal{T}$, $X \setminus (X \setminus C) = C \in \mathbf{C}$. □

Veamos ahora unos ejemplos de topologías que se pueden definir mediante la descripción de sus cerrados.

Example 7. Sea $X = \varnothing$ arbitrario. Definimos la **topología cofinita** $\mathcal{T}_{\text{cf}}$ como aquella tal que $\mathcal{C}$ está formada por conjuntos finitos y X.

Veamos entonces que $\mathcal{C}$ satisface las condiciones de la Proposición 2. Por definición. $X \in \mathcal{C}$ y $\varnothing$ es un conjunto finito, luego $\varnothing \in \mathcal{C}$. Por otro lado, la intersección arbitraria de conjuntos finitos es también finita. Finalmente, la unión finita de conjuntos finitos es también finita (el cardinal de la unión es menor o igual que la suma finita de los cardinales de éstos, que es finita). Por tanto, $\mathcal{C}$ satisface las propiedades de la Proposición 2 y la topología que define viene dada por la siguiente forma:

$$\mathcal{T}_{\text{cf}} = \{\varnothing\} \cup \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ es finita}\}.$$

Example 8. De manera análoga al ejemplo anterior, definimos la **topología conumerable** $\mathcal{T}_{\text{cn}}$ como aquella tal que $\mathcal{C}$ está formada por conjuntos numerables y X.

La comprobación de que $\mathcal{C}$ satisface C1)-C3) es similar al ejemplo anterior. Vemos que tanto $X \in \mathcal{C}$ por definición de $\mathcal{C}$ y como $\varnothing$ es numerable, entonces $\varnothing \in \mathcal{C}$. Por otro lado, la intersección arbitraria de numerables es un conjunto numerable y la unión finita de numerables es también numerable. Por tanto, en virtud de la Proposición 2, la topología conumerable viene descrita de la siguiente forma:

$$\mathcal{T}_{\text{cn}} = \{\varnothing\} \cup \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ es numerable}\}.$$

1.2. Bases de una topología

El concepto de base es utilizado en muchas áreas de las matemáticas y en una donde se considera una idea fundamental es en el Álgebra Lineal. Recordemos que una base en un espacio vectorial era un conjunto de vectores que eran linealmente independientes y que generaban cualquier vector del espacio. Lo que se consigue a través de este concepto de base de un espacio vectorial es poder describir cualquier vector del espacio utilizando solamente un conjunto de estos elementos, y puede describirlos mediante una operación entre estos vectores de la base: podemos expresar cualquier vector como una combinación lineal entre los vectores de la base.

La idea subyacente del concepto base es que, para un espacio determinado (espacio vectorial), podamos ser capaces de describir todas sus componentes solamente con unos cuantos elementos (vectores de la base), de manera que realizando operaciones entre ellos (combinaciones lineales), podamos alcanzar tal descripción. en el caso de la topología, también queremos ser capaces de poder describir todos los abiertos mediante unos unos cuantos abiertos —que compondrán la futura base—. En este caso, falta por determinar la operación entre estos elementos de la base para poder describir todos los abiertos de la topología. Como, por el axioma A2) de la topología, la unión arbitraria de abiertos genera un abierto, sería la operación más razonable de hacer entre los abiertos para describir los demás abiertos.

Definition 4. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Decimos que $\mathcal{B}$ es una **base** de $\mathcal{T}$ si para todo $A \in \mathcal{T}$,

$$A = \bigcup_{\alpha} B_\alpha, \text{ donde } B_\alpha \in \mathcal{B}.$$

Es decir, una base de una topología es una colección de abiertos que permiten describir a cualquier abierto mediante uniones de los de la base. Para el caso en particular del conjunto vacío, éste se podrá expresar siempre como una unión vacía de abiertos. Por tanto, que una base contenga el conjunto vacío o no es indiferente, por lo que en este libro se tomarán las bases sin conjunto vacío.

Example 9. En la topología trivial, la única base que podemos tomar es $\mathcal{B} = \{X\}$.

Example 10. En la topología discreta todo subconjunto es abierto. Podemos considerar la familia $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$. Es una colección de abiertos de tal manera que cualquier abierto no vacío (es decir, cualquier subconjunto no vacío) A puede expresarse como $A = \cup_{x \in A}\{x\}$, por lo que $\mathcal{B}$ es una base.

Example 11. En la topología de Sierpiński, la única base que podemos tomar es $\mathcal{B} = \{\{a\}, X\}$.

En el caso de los espacios topológicos, a diferencia de los espacios vectoriales, no tienen una única base para cierta topología. De manera general, para una topología existen diferentes bases que permiten describir la topología. Concretamente, sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico determinado y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ una base, entonces para cualquier familia $\mathcal{B}'$ tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{T}$, se tiene que $\mathcal{B}'$ es también una base.

Proposition 3 (Caracterización de la base)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{T}$ si y solo si para todo $A \in \mathcal{T}$ y para todo $x \in A$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$.

Demostración. Supongamos primero que $\mathcal{B}$ es una base y tomemos un $A \in \mathcal{T}$ y un $x \in A$ arbitrarios. Entonces como $\mathcal{B}$ es base, podemos escribir $A = \cup_\alpha B_\alpha$ donde $B_\alpha \in \mathcal{B}$. Por tanto, $x \in A = \cup_\alpha B_\alpha$, por lo que existirá un cierto α_0 tal que $x \in B_{\alpha_0} \subseteq \cup_\alpha B_\alpha = A$.

Por otro lado, tomemos un $A \in \mathcal{T}$ arbitrario. Entonces para cualquier $x \in A$, existe un $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq A$. En este caso, obtenemos la siguiente cadena de inclusiones: $A = \cup_{x\in A}\{x\} \subseteq B_x \subseteq \cup_{x\in A} A = A$. Por lo tanto, $A = \cup_{x\in A} B_x$. Como hemos demostrado que cualquier abierto puede expresarse como unión arbitraria de elementos de $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$. □

Example 12. Vamos a demostrar que, dado un $n \in \mathbb{N}$, una base para la topología cofinita puede describirse como $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{T} \mid |X \setminus A| \geq n\}$ donde $n < |X|$. Sea $A \in \mathcal{T}_{\text{cf}}$ y llamemos $m = |X \setminus A|$. Si $m \geq n$, entonces $A \in \mathcal{B}$, por lo que para todo $x \in A$, tomando $B = A$, tenemos que $x \in B \subseteq A$. Ahora, si $m < n$, entonces $|A| > n - m$. Si tomamos cualquier $x \in A$, entonces $|A \setminus \{x\}| \geq n - m$ por lo que podremos tomar un subconjunto $A' \subseteq A \setminus \{x\}$ tal que $|A'| = n - m$. Llamemos $B = A \setminus A'$. En primer lugar, $|X \setminus B| = |X \setminus (A \setminus A')| = |X \setminus A| - |A'| = m - m + n = n$, por lo que es un abierto de la topología finita y $B \in \mathcal{B}$. Finalmente, Como $A' \subseteq A \setminus \{x\}$, entonces $x \in A \setminus A' = B \subseteq A$. En virtud de la Proposición 3, $\mathcal{B}$ es una base.

Hasta ahora se ha descrito el concepto de base cuando la topología venía definida de antemano. No obstante, al igual que con los conjuntos cerrados se ha podido definir una topología que coincidiese con esa familia de cerrados, lo mismo ocurre con la base. Es decir, dada una familia de subconjuntos, es posible estudiar qué características hace que se pueda construir una topología cuya base sea la susodicha familia de subconjuntos.

Proposition 4 (Topología mediante una base)**.** Sea $X \neq \varnothing$ arbitrario y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Entonces $\mathcal{B}$ es base de cierta topología si y solo si se satisfacen las siguientes propiedades:

B1) Para todo $x \in X$, existe un $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.

B2) Para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$ y para todo $x \in B_1 \cap B_2$, existe un $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B1 \cap B_2$.

Demostración. En primer lugar, supongamos que existe una topología $\mathcal{T}$ en X tal que $\mathcal{B}$ es una base de tal topología. Veamos que se satisfacen las dos propiedades.

Para ver B1), tomemos $x \in X$. Como $X \in \mathcal{T}$, entonces por Proposición 3, existe un $b \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq X$.

Demostremos B2). Tomemos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ cuya intersección es no vacía y sea $x \in B_1 \cap B_2$. Como en particular, $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$, entonces por A3), $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ y por la Proposición 3, existe un $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B2$.

Ahora supongamos que se cumplen B1) y B2) y construyamos la siguiente familia de subconjuntos:

$$\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \{A \subseteq X \mid \text{para todo } x \in A, \text{ existe un } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subseteq A\}.$$

Demostremos que $\mathcal{T}$ es una topología y que $\mathcal{B}$ es una base de esta topología.

Veamos que se cumple A1). Por definición $\varnothing \in \mathcal{T}$ y vemos que, por B1), para todo $x \in X$ existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq X$, por lo que $X \in \mathcal{T}$.

Demostremos A2). Sea $A_\alpha \in \mathcal{T}$ una familia arbitraria y sea $x \in \cup_\alpha A_\alpha$. entonces existe un α_0 tal que $x \in A_{\alpha_0}$ y como $A_{\alpha_0} \in \mathcal{T}$, entonces existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A_{\alpha_0} \subseteq \cup_\alpha A_\alpha$. Por lo tanto, $\cup_\alpha \in \mathcal{T}$.

Probemos finalmente A3). Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$. Entonces para todo $x \in A_i$, existe un $B_i \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_i \subseteq A_i$ para $i = 1, 2$. Si $x \in A_1 \cap A_2$, entonces $x \in B_1 \cap B2 \subseteq A_1 \cap A_2$. Por B2), existe un $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq A_1 \cap A_2$. Por lo tanto, $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.

Queda probado entonces que $\mathcal{T}$ es una topología y por la definición de $\mathcal{T}$ y la Proposición 3, $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$. □

Los ejemplos que hemos mostrado hasta ahora eran de topologías que se podían definir en conjuntos arbitrarios. A continuación, se mostrarán algunos ejemplos de topologías en $\mathbb{R}$ y para definirlas, se hará uso de la Proposición 4.

Example 13. Definimos la **topología usual** $\mathcal{T}_u$ en $\mathbb{R}$ como la topología generada por la base $\mathcal{B}$ formada por intervalos abiertos (a, b) con $a < b$.

De este modo, para ver que $\mathcal{B}$ define una topología, se deberá comprobar que satisfacen las condiciones de la Proposición 4. En primer lugar, para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $x \in (x-1, x+1) \subseteq \mathbb{R}$, luego $\mathcal{B}$ satisface B1). Por otro lado, Dados dos intervalos abiertos $(a_1, b_1), (a_2.b_2) \in \mathcal{B}$ que no tienen intersección vacía. Suponiendo sin pérdida de generalidad que $a_2 < b_1$ y que $b_1 < a_b$, entonces es fácil comprobar que $(a_1, b_1) \cap (a_2.b_2) = (b_1, a_2) \in \mathcal{B}$, por lo que se satisface de manera directa la condición B2).

Example 14. Definimos la **topología del límite inferior** $\mathcal{T}_l$ en $\mathcal{R}$ como la topología generada por la base $\mathcal{B}$ formada por los intervalos semiabiertos $[a, b)$ con $a < b$.

Veamos que, efectivamente, satisface las condiciones de la Proposición 4. Para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $x \in [x, x+1) \subseteq \mathbb{R}$, cumpliéndose B1). Ahora, sean $[a_1, b_1), [a_2, b_2) \in \mathcal{B}$ cuya intersección es no vacía. Entonces, suponiendo sin pérdida de generalidad que $a_2 < b_1$ y que $a_1 < b_2$, entonces $[a_1, b_1) \cap [a_2, b_2) = [a_2, b_1) \in \mathcal{B}$, por lo que satisface B2).

De la misma manera que nos hemos preguntado de qué manera podemos describir los abiertos de una topología mediante un conjunto más pequeño de abiertos y operando con la unión de éstos, también nos podemos preguntar qué abiertos permiten generar una base. En este caso, debemos buscar una operación alternativa que genere los elementos de una base. Mientras que la unión ha sido utilizada para la base, como una topología también se comporta bien ante intersecciones finitas de abiertos, podemos pensar que podemos generar una base mediante intersecciones finitas de un conjunto todavía más pequeño de abiertos.

1.2.1. Subbases

Definition 5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{T}$. Decimos que $\mathcal{B}_0$ es una **subbase** de $\mathcal{T}$ si

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} B_i \;\middle|\; B_i \in \mathcal{B}_0 \right\} \text{ es una base de } \mathcal{T}.$$

Definition 6. Sea $X \neq \varnothing$ y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$. La **topología generada** por $\mathcal{S}$ es la topología que tiene como subbase a $\mathcal{S}$.

Proposition 5 (Topología mediante subbase)**.** Sea $X \neq \varnothing$ arbitrario y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Entonces $\mathcal{S}$ es una subbase de una cierta topología si y solo si para todo $x \in X$, existe un $B \in \mathcal{S}$ tal que $x \in B$.

Demostración. Supongamos que existe una topología $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{S}$ es una subbase. Entonces $\mathcal{B} = \{\cap_{i=1}^n B_i \mid B_i \in \mathcal{S}\}$ es una base de $\mathcal{T}$ y por B1), para todo $x \in X$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$. Como $B \in \mathcal{B}$, entonces $B = \cap_i B_i$ donde $B_i \in \mathcal{S}$. Por lo tanto, $x \in B = \cap_i B_i$, por lo que en particular, $x \in B_{i_0}$ para un cierto i_0.

Supongamos ahora que se cumple que para todo $x \in X$, existe un elemento B de la subbase tal que $x \in B$. Definamos ahora la siguiente familia:

$$\mathcal{B} = \{\cap_{i=1}^n B_i \mid B_i \in \mathcal{S}\}.$$

Si demostramos que $\mathcal{B}$ satisfacen las condiciones B1) y B2), entonces por la Proposición 4, existirá una topología cuya base es precisamente $\mathcal{B}$ y, en este caso, por cómo se ha definido $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{S}$ es una subbase de $\mathcal{B}$.

Veamos entonces que $\mathcal{B}$ cumplen las condiciones B1) y B2). Notemos primero que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$. Así pues, veamos B1). Sea $x \in X$, entonces por hipótesis de $\mathcal{S}$, existe un elemento de la subbase tal que $x \in B$, pero $B \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$. Para probar B2), sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ con intersección no vacía y sea $x \in B_1 \cap B_2$. Como $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces $B_1 = \cap_i V_i$ y $B_2 = \cap_j W_j$ donde $V_i, W_j \in \mathcal{S}$ y por tanto $B_1 \cap B_2 = \cap_{i,j}(V_i \cap W_j) \in \mathcal{B}$. □

Corollary 1. Toda familia de subconjuntos $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ define una subbase de una cierta topología.

Demostración. Basta con considerar el conjunto $\mathcal{B}_0 = \mathcal{S} \cap \{X\}$ y ver que cumple con las hipótesis de la Proposición 5. □

Corollary 2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Son equivalentes:

1. $\mathcal{T}$ está generada por $\mathcal{S}$
2. $\mathcal{T}$ es la topología más pequeña que contiene a $\mathcal{S}$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{S}$ es una subbase. Entonces por definición, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Supongamos que existe otra topología $\mathcal{T}'$ tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}'$. Demostremos que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Como $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}'$, entonces todas las intersecciones finitas de los elementos de $\mathcal{S}$ estarán contenidos en $\mathcal{T}'$ por las Propiedades de la topología, luego $\mathcal{B} = \{\cap_{i=1}^n B_i \mid B_i \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{T}'$. Finalmente, como la unión arbitraria de elementos de $\mathcal{B}$ están contenidos en $\mathcal{T}$, finalmente tenemos que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

Supongamos que $\mathcal{T}$ es la topología más pequeña que contiene a $\mathcal{S}$. Por la Proposición 5, entonces existe una topología $\mathcal{T}'$ tal que $\mathcal{S}$ es una subbase de $\mathcal{T}'$. Como $\mathcal{T}$ es la topología más pequeña que contiene a $\mathcal{S}$ y por definición de $\mathcal{T}'$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}'$ entonces $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. No obstante, como $\mathcal{T}'$ está generada por $\mathcal{S}$, entonces por el párrafo anterior, $\mathcal{T}'$ es la topología más pequeña que contiene a $\mathcal{S}$, por lo que $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. De esto se deduce que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, por tanto, $\mathcal{T}$ está generada por $\mathcal{S}$. □

1.3. Entornos

En las secciones anteriores hemos podido comprobar cómo las nociones de abiertos, cerrados, bases y subbases en una topología y vimos como, como consecuencia de las Proposiciones 2, 4 y 5, estos conceptos estaban interrelacionados de tal manera que uno podía definir al otro. Ahora bien, estos conceptos podían considerarse como «globales», en el sentido de que siempre se utiliza dar información de todos los elementos de la topología. Es decir, describen a todos los abiertos de una topología. Sin embargo, podemos dar una descripción de esta topología a un nivel «local». En este contexto, nos referimos a cómo actúa la topología alrededor de punto determinado del espacio. Es decir, cómo son los abiertos que contienen a este punto.

Introducimos entonces la noción de entorno junto con la connotación «local» que van intrínsecamente relacionados uno con el otro. Por tanto, primero detallaremos la definición de entorno.

Definition 7. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $x \in X$. Decimos que un subconjunto $U \subseteq X$ es un **entorno** de X si

$$\text{existe un } A \in \mathcal{T} \text{ tal que } x \in A \subseteq U.$$

Denotamos como $\mathcal{N}(x)$ al conjunto de entornos de x.

Es decir, un entorno de un punto es un subconjunto que contiene a un abierto que contenga a su vez a ese punto. En definitiva, se trata de una idea que intenta capturar la esencia de la topología cuando nos restringimos al caso de los abiertos que contienen o están «alrededor» de ese punto. Es por tanto que los entornos son estudios de la topología «locales», pues no se focalizan en toda la totalidad, sino en un caso en específico.

Como advertencia, algunos autores definen los entornos exclusivamente como los abiertos que contienen a ese punto. La definición que aquí se propone es más amplia pues también considera cualquier tipo de subconjunto que pueda contener a un abierto. Ambas están igualmente de extendidas y aceptadas pues casi la totalidad de resultados donde intervengan los entornos serán ciertos si se supone cualquiera de las dos definiciones, incluso cuando no se consideran definiciones equivalentes. Aún así, en este libro se ha optado por la definición más amplia por tratarse de una definición más generalista.

En la siguiente proposición se mostrará una manera de rebajar la definición de entornos considerando simplemente los abiertos de una base dada. Esta será una técnica que veremos en muchos resultados posteriores y es poder dar una caracterización de una definición únicamente usando los abiertos de una base.

Proposition 6. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\mathcal{B}$ una base y $x \in X$. $U \in \mathcal{N}(x)$ si y solo si existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Demostración. Si U es entorno de x, entonces por Definición 7, existe un $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq U$. Como $A \in \mathcal{T}$, por Proposición 3, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A \subseteq U$.

Por otro lado, si existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$, como en particular $B \in \mathcal{T}$, se tiene que U es entorno de x. $\square$

Proposition 7. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$. $U \in \mathcal{N}(x)$ si y solo si existe un $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \notin C$ y $X \setminus U \subseteq C$.

Demostración. $U \in \mathcal{N}(x)$si y solo si existe un $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq U$. Por tanto, esto es equivalente a decir que $C = X \setminus A \in \mathcal{C}$, donde tenemos que $x \notin C$ y $X \setminus U \subseteq X \setminus A = C$. $\square$

Example 15. Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología usual y tomemos el conjunto $[1, 2)$. Entonces para todo $1 < x < 2$, tenemos que $[1, 2)$ es un entorno de x, ya que podemos tomar el abierto $(1, 2)$ de tal manera que $x \in (1, 2) \subseteq [1, 2)$. Sin embargo, si $x = 1$, entonces $[1, 2)$ no es entorno de x. Para comprobarlo, supongamos que sí que es entorno, entonces existirá un elemento de la base (a, b) tal que $1 \in (a, b) \subseteq [1, 2)$. Como $1 \in (a, b)$, entonces en particular $a < \frac{a+1}{2} < 1$. Pero esto significa que $\frac{a+1}{2} \in (a, b)$, pero $\frac{a+1}{2} \notin [1, 2)$, por lo que $(a, b) \nsubseteq [1, 2)$

Proposition 8 (Propiedades de los entornos)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$.

N1) Si $U \in \mathcal{N}(x)$, entonces $x \in U$.

N2) Si $U, V \in \mathcal{N}(x)$, entonces $U \cap V \in \mathcal{N}(x)$.

N3) Para todo $U \in \mathcal{N}(x)$, existe un $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que para todo $y \in V$, $U \in \mathcal{N}(y)$.

N4) Si $U \in \mathcal{N}(x)$ y $U \subseteq V$, entonces $V \in \mathcal{N}(x)$.

Demostración. Para demostrar N1), es fácil observar que si U es un entorno de x, existirá un abierto A tal que $x \in A \subseteq U$, por lo que $x \in U$.

Veamos N2). como $U, V \in \mathcal{N}(x)$, existirán abiertos A_U y A_V tales que $x \in A_U \subseteq U$ y $x \in A_V \subseteq V$. Por tanto, $x \in A_U \cap A_V \subseteq U \cap V$. Como $A_U \cap A_V \in \mathcal{T}$ por A3), entonces $U \cap V \in \mathcal{N}(x)$.

Probemos N3). Sea $U \in \mathcal{N}(x)$, entonces existe un abierto A tal que $x \in A \subseteq U$. Como $A \in \mathcal{N}(x)$, entonces tomando $V = A$, tenemos que para todo $y \in V$, $y \in V \subseteq U$, luego $U \in \mathcal{N}(y)$.

Finalmente, veamos ahora N4). Si U es entorno de x, entonces existe un $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq U$. Como $V \subseteq U$, en particular, $x \in A \subseteq U \subseteq V$, luego $x \in A \subseteq V$, es decir, $V \in \mathcal{N}(x)$. □

Proposition 9. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico. $A \in \mathcal{T}$ si y solo si $A \in \mathcal{N}(x)$ para todo $x \in A$.

Demostración. Supongamos que $A \in \mathcal{T}$, entonces si $x \in A$, tenemos que $x \in A \subseteq A$, por lo que $A \in \mathcal{N}(x)$.

Por otro lado, supongamos que $A \in \mathcal{N}(x)$ para todo $x \in A$. Entonces para cada punto $x \in A$, existe un $A_x \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A_x \subseteq A$. de este modo, tenemos la siguiente cadena de inclusiones: $A = \cup_{x \in A}\{x\} \subseteq \cup_{x \in A} A_x \subseteq \cup_{x \in A} A = A$. Por lo tanto, $A = \cup_{x \in A} A_x$. Es decir, podemos escribir A como una unión arbitraria de abiertos, luego $A \in \mathcal{T}$. □

Corollary 3. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico. $C \in \mathcal{C}$ si y solo si para todo $x \notin C$, existe un $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $U \cap C = \varnothing$.

Demostración. Supongamos que $C \in \mathcal{C}$, entonces $X \setminus C \in \mathcal{T}$. Tomemos cualquier $x \notin C$, es decir, $x \in X \setminus C$. Por Proposición 9, $X \setminus C \in \mathcal{N}(x)$. Por definición, existe un abierto $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq X \subseteq C$. Por un lado, como $x \in A$ y A es abierto, entonces $A \in \mathcal{N}(x)$. Tomemos $U = A$. Finalmente, $U \subseteq X \setminus C$ es equivalente a decir que $U \cap C = \varnothing$.

Por otro lado, demostremos que C es cerrado. Es decir, debemos demostrar que $X \setminus C$ es abierto. Por la Proposición 9, debemos probar que para todo $x \in X \setminus C$, $X \setminus C \in \mathcal{N}(x)$. De esta manera, sea $x \in X \setminus C$, es decir, $x \notin C$, entonces existe un $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $U \cap C = \varnothing$. Esta expresión es equivalente a decir que $U \subseteq X \setminus C$. Por N4 de la Proposición 8, $X \setminus C \in \mathcal{N}(x)$. □

Proposition 10 (Topología mediante entornos)**.** Supongamos que $X \neq \varnothing$ y que para todo $x \in X$, existe una colección $\mathbf{N}_x \neq \varnothing$ tales que cumplan las condiciones N1)-N4). Entonces existe una topología tal que sus familias de entornos son precisamente $\mathbf{N}_x$.

Demostración. Definamos la siguiente familia de conjuntos:

$$\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \{A \subseteq X \mid A \in \mathbf{N}_x \text{ para todo } x \in X\}.$$

Veamos que $\mathcal{T}$ es una topología y que si $\mathcal{N}(x)$ son las familias de entornos de $x \in X$, entonces $\mathcal{N}(x) = \mathbf{N}_x$.

Veamos A1). El vacío está contenido en $\mathcal{T}$ por definición. Ahora, sea $x \in X$. Como $\mathbf{N}_x \neq \varnothing$, entonces existe un $U \in \mathbf{N}_x$ y como $U \subseteq X$, por N4) tenemos que $X \in \mathbf{N}_x$. Como esto es cierto para todo $x \in X$, entonces $X \in \mathcal{T}$.

Demostremos A2). Sean $A_\alpha \in \mathcal{T}$ una familia de abiertos. Entonces si $x \in \cup_\alpha A_\alpha$, entonces existe un α_0 tal que $x \in A_{\alpha_0}$ y como $A_{\alpha_0} \in \mathcal{T}$, entonces $A_{\alpha_0} \in \mathbf{N}_x$. De este modo, como $A_{\alpha_0} \cup_\alpha A_\alpha$, entonces por N4), $\cup_\alpha A_\alpha \in \mathbf{N}_x$. Como esto es cierto para todo $x \in \cup_\alpha A_\alpha$, entonces $\cup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}$.

Finalmente, probemos A3). Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$. Tomando $x \in A_1 \cap A_2$, tenemos que $A_1, A_2 \in \mathbf{N}_x$. Por N2), $A_1 \cap A_2 \in \mathbf{N}_x$. Como esto es cierto para cualquier $x \in A_1 \cap A_2$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.

De este modo, acabamos de probar que $\mathcal{T}$ es, en efecto, una topología y por tanto define unas familias de entornos $\mathcal{N}(x)$. Veamos que estas familias coinciden con nuestras familias $\mathbf{N}_x$, es decir, $\mathcal{N}(x) = \mathbf{N}_x$ para todo $x \in X$.

Si $U \in \mathcal{N}(x)$, entonces existe un abierto $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq U$. Como $x \in A$, entonces por definición de $\mathcal{T}$, $A \in \mathbf{N}_x$. Como $A \subseteq U$, por N4), tenemos que $U \in \mathbf{N}_x$.

Supongamos ahora que $U \in \mathbf{N}_x$. Entonces por N2), existe un $V_x \in \mathbf{N}_x$ tal que para todo $y \in V$, $U \in \mathbf{N}_y$. Otra forma de expresar esta afirmación es diciendo que $V_x \subseteq W = \{y \in X \mid U \in \mathbf{N}_y\}$. En primer lugar, observamos que como $V_x \in \mathbf{N}_x$, por N1), $x \in V_x$. Por otro lado, para todo $y \in W$, tenemos que $U \in \mathbf{N}_y$ y de nuevo por N1), $y \in U$. Luego hemos demostrado la siguiente cadena de inclusiones: $x \in V_x \subseteq W \subseteq U$. Si demostramos que $W \in \mathbf{N}_y$ para todo $y \in W$, entonces tendríamos que $W \in \mathcal{T}$, probando finalmente que $U \in \mathcal{N}(x)$. Por tanto, sea $y \in W$, entonces $U \in \mathbf{N}_y$ y aplicando N3), tenemos que existe un $V_y \in \mathbf{N}_y$ tal que $V_y \subseteq W$. Aplicando N4), obtenemos finalmente que $W \in \mathbf{N}_y$. □

Notemos cómo en la proposición anterior, para definir la topología, no se ha usado la propiedad N3). En efecto, con las otras tres propiedades bastaban para poder crear tal topología. Sin embargo, esto resultaría en una definición patológica, pues la familia de entornos que generaría no sería exactamente las $\mathbf{N}_x$. Es más, la condición N3) se ha usado solamente para probar la inclusión $\mathbf{N}_x \subseteq \mathcal{N}(x)$. Luego si no se impusiese N3), obtendríamos una topología cuyas familias de entornos serían potencialmente más pequeñas que las familias $\mathbf{N}_x$.

1.3.1. Base local de entornos

Definition 8. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{N}(x)$. Decimos que $\mathcal{B}(x)$ es una **base local de entornos** de x si

$$\text{para todo } \mathcal{U} \in \mathcal{N}(x), \text{ existe un } B_x \in \mathcal{B}(x) \text{ tal que } B_x \subseteq U.$$

Example 16. Si denotamos por $\mathcal{T}(x) = \{A \in \mathcal{T} \mid x \in A\}$, entonces $\mathcal{T}(x)$ es una base local de entornos. Esto es así por que para todo $U \in \mathcal{N}(x)$, por definición existe un $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq U$ o, equivalentemente, $A \subseteq U$ donde $A \in \mathcal{T}(x)$.

Proposition 11. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico y $\mathcal{B}(x)$ un abase local de entornos para todo $x \in X$.

1. $A \in \mathcal{T}$ si y solo si para todo $x \in A$, existe un $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B_x \subseteq A$.

2. $C \in \mathcal{C}$ si y solo si para todo $x \notin C$, existe un $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B_x \cap C = \varnothing$.

Demostración. Veamos primero i). Si A es un abierto, por la Proposición 9, $A \in \mathcal{N}(x)$ para todo $x \in A$. Como $\mathcal{B}(x)$ es una base de entornos, entonces existe un $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in B_x \subseteq A$. Por otro lado, supongamos que para todo $x \in A$, existe un $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in B_x \subseteq A$. Como en particular, $B_x \in \mathcal{N}(x)$ y $B_x \subseteq A$, entonces por N4) tenemos que $A \in \mathcal{N}(x)$, y este es cierto para todo $x \in A$, luego por la Proposición 9, $A \in \mathcal{T}$.

La prueba de ii) es una reinterpretación de i) para cerrados. Se sigue que C es cerrado si y solo si $X \setminus C \in \mathcal{T}$ por la definición de cerrado y por i), esto es equivalente a decir que para todo $x \in X \setminus C$, existe un $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in B_x \subseteq X \setminus C$. Como $B_x \subseteq X \setminus C$ es equivalente a decir que $B_x \cap C = \varnothing$, se tiene la prueba. □

Proposition 12. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base si y solo si $\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ es una base local de entornos para todo $x \in X$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B}$ una base de la topología. Sea $x \in X$ arbitrario y $U \in \mathcal{N}(x)$. Entonces existe un $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq U$. Como $\mathcal{B}$ es una base y $x \in A$, entonces por Proposición 3, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A \subseteq U$. Concluimos que para todo $U \in \mathcal{N}(x)$, $x \in B \subseteq U$ y por lo tanto $b \in \mathcal{B}(x)$, luego $\mathcal{B}(x)$ es una base de entornos.

Por el contrario, supongamos que $\mathcal{B}(x)$ es una base de entornos para todo $x \in X$. Tomemos $A \in \mathcal{T}$ y $x \in A$. Entonces por Proposición 9, $A \in \mathcal{N}(x)$ y por tanto, existe un $B \in \mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$. En virtud de la Proposición 3, $\mathcal{B}$ es una base. □

Proposition 13 (Propiedades de las bases locales)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico y $\mathcal{B}(x)$ una base local de entornos para todo $x \in X$.

BN1) Si $B_x \in \mathcal{B}(x)$, entonces $x \in \mathcal{B}_x$.

BN2) Si $V_x, W_x \in \mathcal{B}(x)$, entonces existe un $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B_x \subseteq V_x \cap W_x$.

BN3) Si $B_x \in \mathcal{B}(x)$, existe un $V_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que para todo $y \in V_x$, existe un $W_y \in \mathcal{B}(y)$ tal que $W_y \subseteq B_x$.

Demostración. Veamos BN1). Si $B_x \in \mathcal{B}(x)$, como en particular $B_x \in \mathcal{N}(x)$, entonces por N1), $x \in B_x$.

Probemos BN2). Si $V_x, W_x \in \mathcal{B}(x)$, entonces como ambos son entornos de x, por N2), $V_x \cap W_x \in \mathcal{N}(x)$, pero como $\mathcal{B}(x)$ es una base local de entornos, existe un $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in B_x \subseteq V_x \cap W_x$.

Finalmente, demostremos BN3). Sea $B_x \in \mathcal{B}(x)$. Como es, en particular, entorno de x, por N3), existe un $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que para todo $y \in V$, $B_x \in \mathcal{N}(y)$. En particular, como V es entorno de x, entonces existe un $V_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V_x \subseteq V$. Tomando cualquier $y \in V_x \subseteq V$, tenemos que $U \in \mathcal{N}(y)$ y, de la misma manera, existe un $W_y \in \mathcal{B}(y)$ tal que $W_y \subseteq B_x$. □

Proposition 14 (Topología mediante bases locales)**.** Supongamos que $X \neq \varnothing$ y que para todo $x \in X$, existe una colección $\mathbf{B}_x \neq \varnothing$ tales que cumplan las condiciones BN1)-BN3). Entonces existe una topología tal que una base local de entornos las conforman $\mathbf{B}_x$.

Demostración. Definamos la siguiente familia de subconjuntos de X para todo $x \in X$:

$$\mathbf{N}_x = \{U \subseteq X \mid \text{existe un } B_x \in \mathbf{B}_x \text{ tal que } B_x \subseteq U\}.$$

Notemos primeramente que $\mathbf{B}_x \subseteq \mathbf{N}_x$ para todo $x \in X$. Si demostramos que para todo $x \in X$, $\mathbf{N}_x$ satisface las propiedades N1-N4), entonces por la Proposición 10, existe una topología cuya familia de entornos son $\mathcal{N}(x) = \mathbf{N}_x$. Por tanto, por definición de $\mathcal{B}_x$, tenemos que para todo $U \in \mathcal{N}(x)$, existe un $B_x \in \mathbf{B}_x$ tal que $B_x \subseteq U$, por lo que $\mathbf{B}_x$ satisface la definición de base local de entornos.

Para ver N1), vemos que si $U \in \mathbf{N}_x$, entonces existe un $B_x \in \mathbf{B}_x$ tal que $B_x \subseteq U$ y por BN1) tenemos que $x \in B_x \subseteq U$.

Demostremos N2). Sean $U, V \in \mathbf{N}_x$. Entonces existen $U_x, V_x \in \mathbf{B}_x$ tales que $U_x \subseteq U$ y $V_x \in V$. Por tanto, $U_x \cap V_x \subseteq U \cap V$ y por BN2), tenemos que existe un $B_x \in \mathbf{B}_x$ tal que $B_x \subseteq U_x \cap V_x \subseteq U \cap V$, luego $U \cap V \in \mathbf{N}_x$.

Probemos N3). Sea $U \in \mathbf{N}_x$. Entonces existe un $B_x \in \mathbf{B}_x$ tal que $B_x \subseteq U$. Por BN3), existe un $V_x \in \mathbf{B}_x$ tal que para todo $y \in V_x$, existe un $W_y \in \mathbf{B}_y$ tal que $W_y \subseteq B_x$. Por un lado, denotemos $V = V_x \in \mathbf{B}_x \subseteq \mathbf{N}_x$. Por otro lado, como $W_y \subseteq B_x \subseteq U$, entonces por definición $U \in \mathbf{N}_y$. Concluimos que para todo $U \in \mathbf{N}_x$, existe un $V \in \mathbf{N}_x$ tal que para todo $y \in V$, $U \in \mathbf{N}_y$.

Veamos finalmente N4). Sea $U \in \mathbf{N}_x$ y $U \subseteq V$. Entonces como $U \in \mathbf{N}_x$, existe un $\mathbf{B}_x$ tal que $B_x \subseteq U$ y como $U \subseteq V$, entonces $B_x \subseteq V$, por lo que $V \in \mathbf{N}_x$. □

1.4. Topologías comparables

Vistos ya todas las principales nociones que podemos estudiar en una topología, veremos cómo podemos comparar dos topologías definidas en un mismo conjunto. Como los espacios topológicos no tiene más estructura que la que proporciona la teoría de conjuntos, una manera natural de comparar dos topologías es observar si una está contenida en la otra. En términos de abiertos, esta la necesidad de esta comparación se muestra de manera fundamental cuando necesitemos definir nuevas topologías o especificar algunas propiedades más en detalle. El hecho de que una topología tenga más abiertos puede causar que una pueda satisfacer ciertas propiedades que la otra no podría.

Una visión más intuitiva del significado de esta comparación es que, al incluir una topología a la otra, podríamos interpretarlo como un «afinamiento» de la otra. Es decir, los abiertos son mucho más concretos y por tanto la noción de entorno se amplía en esta topología más grande. Por otro lado, Como utilizamos la inclusión como la herramienta para comparar y dado que la inclusión es un orden parcial, no todo par de topologías son comparables, pero ello no supone un problema en la definición.

Definition 9. Sea $X \neq \varnothing$ arbitrario y $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ topologías en X. Decimos que $\mathcal{T}_2$ es **más fina** que $\mathcal{T}_1$ (o equivalentemente, $\mathcal{T}_1$ es **más gruesa** que $\mathcal{T}_2$) si

$$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2.$$

Example 17. Sea $\mathcal{T}$ una topología cualquiera en un conjunto arbitrario X, por A1) tenemos que $\varnothing, X \in \mathcal{T}$, luego $\mathcal{T}_t \subseteq \mathcal{T}$. Por otro lado, como una topología es, en particular, una familia de subconjuntos de X, entonces $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(x) = \mathcal{T}_d$. De este modo, hemos probado que para cualquier topología $\mathcal{T}$, tenemos que $\mathcal{T}_t \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_d$. Dicho en otras palabras, la topología trivial es la topología más gruesa que se puede definir en un conjunto y la topología discreta es la más fina que se puede definir.

Example 18. Es claro que la topología conumerable es más fina que la topología cofinita. Esto es así ya que si tomamos cualquier abierto de la topología cofinita, entonces su complementario es finito, luego en particular es numerable, por lo que será también abierto en la topología conumerable.

Proposition 15. Sea $X \neq \varnothing$ arbitrario y $\{\mathcal{T}_\beta\}_\beta$ una familia de topologías en X. Entonces $\cap_\beta \mathcal{T}_\beta$ es la topología más fina contenida en $\mathcal{T}_\beta$ para todo β.

Demostración. Primero probaremos que es una topología. Como $\varnothing, X \in \mathcal{T}_\beta$ para todo β, entonces $\varnothing, X \in \cap_\beta \mathcal{T}_\beta$, probando así A1). Tomemos ahora $A_\alpha \in \cap_\beta \mathcal{T}_\alpha$ una familia de abiertos para todo α. Entonces $A_\alpha \in \mathcal{T}_\beta$ para todo α, β. Por tanto, $\cup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}_\beta$ para todo β, por lo que $\cup_\alpha A_\alpha \in \cap_\beta \mathcal{T}_\beta$, cumpliéndose A2). Finalmente, sean $A_1, A_2 \in \cap_\beta \mathcal{T}_\beta$. Entonces $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_\beta$ para todo β y por A3), $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_\beta$ para todo β, por lo que $A_1 \cap A_2 \in \cap_\beta \mathcal{T}_\beta$, demostrando A3).

Falta demostrar que es la más fina de está contenida en $\mathcal{T}_\beta$ para todo β. Es fácil ver que $\cap_\beta \mathcal{T}_\beta \subseteq \mathcal{T}_\beta$, luego está contenida en cada una de las topologías. Para ver que es la más fina, supongamos que existe una topología $\mathcal{T}'$ que está contenida en cada $\mathcal{T}_\beta$. Entonces tenemos que comprobar que $\mathcal{T}' \subseteq \cap_\beta \mathcal{T}_\beta$. Sea $A \in \mathcal{T}'$. Como $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_\beta$, entonces $A \in \mathcal{T}_\beta$ para todo β, por lo que $A \in \cap_\beta \mathcal{T}_\beta$. $\square$

Proposition 16. Sean $(X, \mathcal{T}_1)$ y $(X, \mathcal{T}_2)$ dos espacios topológicos y $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases de los respectivos espacios. $\mathcal{T}_2$ es más fina que $\mathcal{T}_1$ si y solo si para todo $B_1 \in \mathcal{B}_1$, existe un $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in B_2 \subseteq B_1$ para todo $x \in B_1$.

Demostración. Supongamos primero que $T_1 \subseteq T_2$ y sea $B_1 \in \mathcal{B}_1$. En particular, $B_1 \in \mathcal{T}_1 \subseteq T_2$ y como $\mathcal{B}_2$ es una base de $\mathcal{T}_2$, para todo $x \in B_1$, existe un $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in B_2 \subseteq B_1$.

Por otro lado, demostremos que $\mathcal{T}_2$ es más fina que $\mathcal{T}_1$ suponiendo que se cumple la condición del enunciado. Sea $A \in \mathcal{T}_1$. Como $\mathcal{B}_1$ es una base de $\mathcal{T}_1$, para todo $x \in A$, existe un $B_1 \in \mathcal{B}_1$ tal que $x \in B_1 \subseteq A$. Como $x \in B_1$, entonces por hipótesis, existe un $B_2 \in \mathcal{B}_2$ de manera que $x \in B_2 \subseteq B_1 \subseteq A$. Por la Proposición 6 para todo $x \in A$, A es un entorno en la topología $\mathcal{T}_2$ y por la Proposición 9, $A \in \mathcal{T}_2$. $\square$

Example 19. Veamos que la topología del límite inferior en $\mathbb{R}$ es más fina que la topología usual en $\mathbb{R}$. Para ello, haremos uso de la Proposición 16. Sea $\mathcal{B}_u$ y $\mathcal{B}_l$ la base de la topología usual (la formada por intervalos abiertos) y la del límite inferior (la formada por intervalos semi-abiertos) respectivamente. Entonces

Proposition 17. Sean $\mathcal{B}_x^1(x)$ y $\mathcal{B}_x^2(x)$ bases locales de entornos de las topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ respectivamente. $\mathcal{T}_2$ es más fina que $\mathcal{T}_2$ si y solo si para todo $x \in X$ y para todo $B_1 \in \mathcal{B}_x^1$, existe un $B_2 \in \mathcal{B}_x^2$ tal que $B_2 \subseteq B_1$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{T}_2$ es más fina que $\mathcal{T}_1$. Tomemos $x \in X$ y $B_1 \in \mathcal{B}_x^1$. Entonces en particular, es un entorno en la topología $\mathcal{T}_1$, por lo que existe un $A \in \mathcal{T}_1$ tal que $x \in A \subseteq B_x^1$. Como $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, entonces $A \in \mathcal{T}_2$ y por Proposición 9, A es un entorno de x en la topología $\mathcal{T}_2$, por lo que existe un $B_2 \in \mathcal{B}_x^2$ tal que $B_2 \subseteq A \subseteq B_1$. En resumen, para toso $x \in X$ y $B_1 \in \mathcal{B}_x^1$, existe un $B_2 \in \mathcal{B}_x^2$ tal que $B_2 \subseteq B_1$.

Supongamos ahora que se satisface la condición del enunciado de la proposición. Veamos que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Sea $A \subseteq \mathcal{T}_1$, entonces por Proposición 9, A es un entorno de x en $\mathcal{T}_1$. De esta manera, existe un $B_1 \in \mathcal{B}_x^1$ tal que $B_1 \subseteq A$. Ahora, por hipótesis, existe un $B_2 \in \mathcal{B}_x^2$ tal que $B_2 \subseteq B_1 \subseteq A$. Como B_2 es un entorno de x en $\mathcal{T}_2$ y $B_2 \subseteq A$, entonces por N4), A es un entorno en $\mathcal{T}_2$ para todo $x \in A$ y como consecuencia de la Proposición 9, $A \in \mathcal{T}_2$. $\square$

Capítulo 2

Espacios métricos

2.1. Definición y ejemplos

En el capítulo anterior pudimos conocer todos los conceptos básicos que se podían definir a través de una topología y vimos cómo éstos permitían definir topologías que mantuviesen las propiedades que estos objetos cumplían. Ahora, presentaremos una nuevo tipo de espacios que, como veremos más adelante, permiten generar de forma natural una topología. Estos son los espacios métricos y, de forma resumida, son conjuntos dotados de una aplicación que dota un significado de distancia a cada par de puntos. Podríamos decir por los comentarios anteriores que los espacios métricos son un caso concreto de espacios topológicos. Estudiamos, por tanto, estos espacios en un capítulo específico para, en primer lugar, introducir todas las nociones propias de estos espacios, proveer de ejemplos en concreto y de mostrar que, en particular, algunas propiedades topológicas adicionales se satisfacen.

Definition 10. Sea $X \neq \varnothing$ arbitrario y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una aplicación. Decimos que d es una **métrica** o **distancia** si

D1) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

D2) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$. (Simetría)

D3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$. (Desigualdad triangular)

Decimos entonces que el par (X, d) se le conoce como **espacio métrico**. Notemos además que como consecuencia de la desigualdad triangular, obtenemos que $d(x, y) \geq 0$ para todo par de puntos $x, y \in X$. En efecto, tomando $z = x$ de la Definición 10 D3) tenemos que $d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x)$. Por la simetría de la métrica, tenemos que $d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$ y por D1), tenemos que $d(x, x) = 0$. Por tanto, $2d(x, y) \geq 0$ que implica directamente que $d(x, y) \geq 0$.

Las tres propiedades de la Definición 10 son fácilmente interpretables a nivel geométrico. D1) significa que todo par de puntos distintos van a tener siempre una distancia mayor que cero. Esto nos hace referencia a, por ejemplo, el pano euclídeo. En efecto, para todo par de puntos distintos en el plano podemos construir un vector no nulo que una tales puntos y calcular su módulo —que será mayor que cero— con el fin de calcular esta distancia. La propiedad D2), la de simetría, especifica que la distancia entre un punto y otro es exactamente la misma que medir la distancia del segundo con el primero. Así es, la distancia, tal y como la conocemos intuitivamente, es una medición escalar que no depende del orden en que se mida. Volviendo al plano euclídeo, el vector que une un punto con otro tendrá mismo módulo que el que una el segundo con el primero, pues el vector resultante será el mismo con el signo cambiado. Finalmente, la característica más complicada de deducir por uno mismo es D3) o la desigualdad triangular. Ésta nos permite dar una interpretación a lo que entendemos por distancia: el camino más corto entre un punto y otro. En definitiva, realizaremos más camino pasando por un punto intermedio que si viajamos directamente a nuestro destino. En plano euclídeo se representa muy bien de esta manera: el camino más corto entre un punto y otro es el segmento de recta que los une. Por tanto, tomando otro punto —fuera de esta línea— observamos que el camino recorrido pasando por este punto intermedio es más largo que el que se realizaría en línea recta. Ambas posibilidades se representan en el plano como un triángulo (de ahí, el nombre de la propiedad).

Example 20. Sea $X \neq \varnothing$. La **distancia discreta** se describe de la siguiente manera:

$$d_d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq 1 \end{cases}.$$

Veamos que se satisfacen las tres condiciones de una métrica. Por como está definida la métrica, es fácil observar que se cumple D1). Veamos que se cumple la simetría. Basta observar cuando $x \neq y$. Tenemos que $d(x,y) = 1$, pero como también es equivalente a decir $y \neq x$, entonces $1 = d(y,x)$, teniendo entonces que $d(x,y) = d(y,x)$. Para probar la desigualdad triangular, tomemos $x, y, z \in X$. Si $x = z$, entonces $d(x,z) = 0 \leq d(x,y) + d(y,z)$. Por otro lado, si $x \neq zy$ pero $y = z$ o $y = x$, entonces $d(x,z) = 1$ y $d(y,z) + d(x,y) = 1$, por lo que $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$. Finalmente, si los tres puntos son distintos, tenemos que $d(x,z) = 1 < 2 = d(x,y) + d(y,z)$.

Example 21. El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ puede ser dotado de la **métrica euclídea** de manera que si $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces se define como

$$d_2(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Aunque lo conveniente sería poder demostrar que esta función define una métrica en $\mathbb{R}^n$, lo cierto es que este ejemplo, junto con los dos siguientes, forman parte de una colección de espacios métricos concretos que veremos en la última sección de este capítulo, donde sí que demostraremos que las propiedades de una métrica de satisfacen.

Example 22. Siguiendo con el ejemplo de $\mathbb{R}^n$, podemos definir una métrica, conocida como la **distancia del taxi** definida como sigue:

$$d_1(x,y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

De la misma manera que comentamos en el ejemplo anterior, la demostración de que es una métrica se dejará para la última sección del capítulo.

Example 23. Otra métrica que podemos definir en $\mathbb{R}^n$, es la **distancia del ajedrez** definida como sigue:

$$d_\infty(x, y) := \sup_{i=1,\dots,n} \{|x_i - y_i|\}.$$

Se comprobará su demostración para la última sección.

Notemos que la distancia euclídea, la del taxi y la del ajedrez en $\mathbb{R}$ son exactamente iguales. En este caso, dados $x, y \in \mathbb{R}$, tenemos que $d_2(x, y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$, $d_1(x-y) = \sum_{i=1}^{1} |x-y| = |x-y|$ y $d_\infty(x, y) = \sup\{|x-y|\} = |x-y|$. Por tanto, cuando tratemos con alguna de estas tres distancias en $\mathbb{R}$ podemos simplemente referenciar a cualquiera de ellas bajo el nombre de distancia euclídea.

Veamos ahora varios métodos para definir nuevas métricas a partir de métricas ya definidas en un conjunto.

Proposition 18. Sea $X \neq \varnothing$ arbitrario y d y d' métricas en X. Las siguientes aplicaciones son también métricas.

1. $ad + bd'$ para todo $a, b \geq 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$.
2. $\max\{d, d'\}$.
3. $\min\{d, 1\}$.
4. $\frac{d}{d+1}$.

Demostración. Probemos primero 1. Es fácil ver que $ad(x, x) + bd'(x, x) = 0$ para todo $x \in X$. Por otro lado, si $ad(x, y) + bd'(x, y) = 0$, entonces suponiendo sin pérdida de generalidad que $a > 0$, tenemos que $ad(x, y) = -bd'(x, y) \leq 0$, luego $ad(x, y) = 0$, por lo que $d(x, y) = 0$ y como d es una métrica, se tiene que $x = y$. La simetría en este caso es una comprobación rutinaria y trivial. Finalmente, veamos que se cumple la desigualdad triangular. Dados $x, y, z \in X$, tenemos que $ad(x, z) + bd'(x, z) \leq a(d(x, y) + d(y, z)) + b(d'(x, y)d'(y, z)) = (ad(x, y) + bd'(x, y)) + (ad(y, z) + bd'(y, z))$.

Veamos ahora 2. Vemos que $\max\{d(x, x), d'(x, x)\} = \max\{0, 0\} = 0$ y, por otro lado, si $\max\{d(x, y), d'(x, y)\} = 0$, entonces tenemos que $d(x, y) = 0$ o $d'(x, y)$ que en cualquiera de los casos obtenemos que $x = y$. La simetría, de nuevo, es una comprobación sencilla. Demostremos que satisface la desigualdad triangular. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\max\{d(x, z), d'(x, z)\} = d(x, z)$. Entonces obtenemos las desigualdades $\max\{d(x, z), d'(x, z)\} = d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq \max\{d(x, y), d'(x, y)\} + \max\{d(y, z), d'(y, z)\}$.

Comprobemos 3. Es fácil observar que $\min\{d(x, x), 1\} = \min\{0, 1\} = 0$ y si $\min\{d(x, y), 1\} = 0$ entonces $d(x, y) = 0$ por lo que $x = y$. Comprobar la simetría es rutinario. Veamos la desigualdad triangular. Si $\min\{d(x, z), 1\} = d(x, z)$, entonces $\min\{d(x, z), 1\} = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Ahora bien, como en este caso $d(x, z) \leq 1$, entonces $d(x, z) \leq \min\{d(x, y), 1\} + \min\{d(y, z), 1\}$, por lo que $\min\{d(x, z), 1\} \leq \min\{d(x, y), 1\} + \min\{d(y, z), 1\}$. Ahora, si $\min\{d(x, z), 1\} = 1$, entonces en particular $\min\{d(x, z), 1\} = 1 \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ y por tanto tenemos de la misma manera que $\min\{d(x, z), 1\} \leq \min\{d(x, y), 1\} + \min\{d(y, z), 1\}$.

Finalmente, veamos 4. En primer lugar, $\frac{d(x,x)}{d(x,x)+1} = \frac{0}{1} = 0$ y si $\frac{d(x,y)}{d(x,y)+1} = 0$, entonces como $d(x, y) + 1 > 0$ para todo par $x, y \in X$, tenemos que $d(x, y) = 0$, por lo que $x = y$. La simetría, de nuevo, es rutinario. Comprobemos la desigualdad triangular. En primer lugar, notemos que la función $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que $\phi(t) = \frac{t}{1+t}$ es creciente (basta con derivar ϕ y ver que la derivada es positiva). Por tanto, $\frac{d(x,z)}{d(x,z)+1} \leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}$. □

Gracias a que podemos definir distancias entre puntos de un conjunto arbitrario, podemos generalizar esta idea y calcular distancias entre dos subconjuntos cualesquiera. Si la idea intuitiva que subyace la definición de métrica era aquel valor que se interpretase como la distancia del camino más corto entre dos puntos, esto nos lleva a pensar que la definición de distancia entre dos conjunto también satisfacerá tal principio geométrico. En este caso, será la menos distancia entre los puntos de un conjunto y los puntos de otro.

Definition 11. Sea (X, d) un espacio métrico. La **distancia entre dos conjuntos** $A, B \subseteq X$ es

$$d(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \{d(x, y)\}.$$

Como consecuencia de esta definición, podemos definir la **distancia entre un punto y un conjunto** como $d(x, A) := d(\{x\}, A) = \inf_{y \in A}\{d(x, y)\}$.

Proposition 19. Sea $(X.d)$ u espacio métrico y $A, B \subseteq X$ no vacíos. Entonces si $A \cap B \neq \varnothing$, entonces $d(A, B) = 0$.

Demostración. Si $A \cap B \neq \varnothing$, entonces existe un $x \in A \cap B$. De este modo, $0 \leq d(A, B) \leq d(x, x) = 0$, por lo que la $d(A, B) = 0$. □

Corollary 4. Si $x \in A$, entonces $d(x, A) = 0$.

Demostración. Si $x \in A$, entonces $\{x\} \cap A \neq \varnothing$ y por la Proposición 19, $d(x, A) = d(\{x\}, A) = 0$. □

2.2. Topologías métricas

Acabamos de ver las definiciones, ejemplos y propiedades más elementales de los espacios métricos. En esta siguiente sección, comprobaremos y demostraremos aquella aserción del principio del capítulo: «los espacios métricos son casos concretos de espacios topológicos». Como veremos a continuación, técnicamente a lo que nos referimos es que esta métrica permite definir de manera natural conjuntos abiertos solamente con la noción de métrica.

Definition 12. Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos la **bola abierta** de centro $a \in X$ y radio $r > 0$ como

$$\mathbb{B}(a; r) := \{x \in X \mid d(x, a) < r\}.$$

Es decir, una bola abierta recoge todos los puntos que están «alrededor» de a cuya distancia sea menor que r. Lo importante de estas bolas abiertas es la idea subyacente de un conjunto de puntos que están «relativamente cerca» de a o que «envuelven» a dicho punto, ya que de manera directa, estas cualidades se asemejan a las ideas de entorno de un punto en un espacio topológico. Efectivamente, estas bola abiertas actuarán como bases de entornos de una cierta topología. es más, como veremos a continuación, determinarán una base de esa topología. Por tanto, como veremos en la siguiente proposición, podremos usar la Proposición 4 para, mediante las bolas abiertas, generar una topología cuya base sea el conjunto de esas bolas.

Proposition 20. Sea (x, d) un espacio métrico. Entonces $\mathcal{B} = \{\mathbb{B}(a; r) \mid a \in X,\ r > 0\}$ es una base de una cierta topología.

Demostración. Utilizaremos la Proposición 4 y comprobaremos que, efectivamente, se cumplen B1) y B2).

Para ver B1), basta con observar que para todo $x \in X$, podemos tomar $x \in \mathbb{B}(x; 1)$. Veamos que se cumple B2). Tomemos dos bolas abiertas de manera que $\mathbb{B}(a; r) \cap \mathbb{B}(b; s) \neq \varnothing$ y tomemos un $x \in \mathbb{B}(a; r) \cap \mathbb{B}(b; s)$. Definamos $\varepsilon = \min\{r - d(x, a), s - d(x, b)\}$. Notemos que como x pertenece a la intersección de ambas bolas, $d(x, a) < r$ y $d(x, b) < s$, por lo que $r - d(x, a), s - d(x, b) > 0$ y por tanto, $\varepsilon > 0$. Así pues, si demostramos que $\mathbb{B}(x; \varepsilon) \subseteq \mathbb{B}(a; r) \cap \mathbb{B}(b; s)$, como $x\mathbb{B}(x; \varepsilon)$, B2) quedará probada. Tomemos $z \in \mathbb{B}(x; \varepsilon)$, entonces $d(z, x) < \varepsilon$. Por un lado, tenemos que $d(z, a) \leq d(z, x) + d(x, a) < \varepsilon + d(x, a) \leq r - d(x, a) + d(a, x) = r$. Luego $d(z, a) < r$ que implica que $z \in \mathbb{B}(a; r)$. Análogamente, vemos que $d(z, b) \leq d(z, x) + d(x, b) < \varepsilon + d(x, b) \leq s - d(x, b) + d(b, x) = s$, por lo que $d(z, b) < s$, es decir, $z \in \mathbb{B}(b, s)$. En definitiva, se ha demostrado que para todo $z \in \mathbb{B}(x; \varepsilon)$, $z \in \mathbb{B}(a; r)$ u $z \in \mathbb{B}(b; s)$, es decir, $\mathbb{B}(x; \varepsilon) \subseteq \mathbb{B}(a; r) \cap \mathbb{B}(b; s)$. □

Definition 13. Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos la **topología métrica** $\mathcal{T}_d$ a la topología definida por las bolas abiertas.

Example 24. La topología usual en $\mathbb{R}$ puede verse como la topología métrica inducida por la distancia euclídea en $\mathbb{R}$ $d(x, y) = |x - y|$. En efecto, la topología usual venía descrita como aquella que generaba la base formada por intervalos abiertos. No obstante, podemos interpretar cualquier intervalo abierto (a, b) como bolas abiertas como $\mathbb{B}\left(a + \frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$. Veamos que es así: $x \in \mathbb{B}\left(a + \frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$ es equivalente a decir que $\left|x - a - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{a+b}{2}$ que, por las propiedades de los números reales, se puede reescribir como $-\frac{a+b}{2} < x - a - \frac{a+b}{2} < \frac{a+b}{2}$, equivalentemente, $a = a + \frac{a+b}{2} - \frac{a+b}{2} < x < a + \frac{a+b}{2}\frac{a+b}{2} = b$ o lo que es lo mismo, $x \in (a, b)$.

Example 25. Por otro lado, existe topologías que no pueden venir inducidas por ninguna métrica. Este es el caso de la topología trivial. Para demostrarlo, supongamos que $|X| \leq 2$ y que existe tal métrica d que la genera. Fijado un $x \in X$, entonces para cualquier $r > 0$, obtenemos que $\mathbb{B}(x; r)$ es un elemento no vacío (ya que $x \in \mathbb{B}(x; r)$) de la base de $\mathcal{T}_t$. Por Ejemplo 9, $\mathbb{B}(x; r) = X$ para todo $r > 0$. Como el cardinal de X es mayor que dos, podemos tomar un $y \in X$ tal que $x \neq y$. Ahora, como $y \in X = \mathbb{B}(x; r)$, entonces $d(x, y) < 0$ para todo $r > 0$, lo que implica que $0 = d(x, y)$ y por D1), $x = y$, lo que nos lleva a una contradicción.

Proposition 21. Sea (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{T}_d$ la topología métrica asociada. Entonces

1. $\mathcal{B}(x) = \{\mathbb{B}(x; r) \mid r > 0\}$ es una base local de entornos para todo $x \in X$.

2. $A \in \mathcal{T}_d$ si y solo si para todo $x \in X$, existe un $r > 0$ tal que $\mathbb{B}(x;r) \subseteq A$.

3. $C \in \mathcal{C}_d$ si y solo si para todo $x \notin C$, existe un $r > 0$ tal que $\mathbb{B}(x;r) \cap C = \varnothing$.

4. $U \in \mathcal{N}_d(x)$ si y solo si existe un $r > 0$ tal que $\mathbb{B}(x;r) \subseteq U$.

Demostración. En primer lugar, como $\mathcal{B} = \{\mathbb{B}(x;r) \mid x \in X,\ r > 0\}$ es una base, entonces por la Proposición 12, $\mathcal{B}(x) = \{\mathbb{B}(x;r) \mid r > 0\}$ es una base local de entornos para todo $x \in X$, probando así 1.

Ahora, por la Proposición 11 1., $A \in \mathcal{T}_d$ si y solo si existe un $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B_x \subseteq A$ para todo $x \in A$. Por la primera parte de la demostración, la base local está formada por bolas abiertas, luego existe un $r > 0$ tal que $\mathbb{B}(x;r) \subseteq A$, demostrando 2.

De nuevo, por la Proposición 11 2., C es cerrado si y solo si para todo $x \notin C$ existe un elemento de la base local B_x tal que $B_x \cap C = \varnothing$, equivalentemente, existe un $r > 0$ tal que $\mathbb{B}(x;r) \cap C = \varnothing$, probando así 3.

Finalmente, probemos 4. Si $U \in \mathcal{N}_d(x)$, como las bolas abiertas forman una base local de entornos, existirá un $r > 0$ tal que $\mathbb{B}(x;r) \subseteq U$. Por otro lado, supongamos que $\mathbb{B}(x;r) \subseteq U$ para un cierto $r > 0$. Como $\mathbb{B}(x;r)$ es un elemento de la base local de entornos, es en particular un entorno y como U contiene a la bola, por N4), U es también un entorno de x. □

Por lo tanto, las bolas abiertas, por conformar la base de una topología —y por tanto también la base local de entornos— permite describir cualquier objeto topológico fundamental (aquellos que vimos en el primer capítulo) sólo en función de estas bolas. Además, hemos de darnos cuenta que la elección del nombre «bola abierta» es totalmente acertada. Al componer la base de tal topología, en concreto son abiertos de esa topología. En definitiva, las bola abiertas son abiertos. Con esta cuestión, podríamos plantearnos algo similar para los conjuntos cerrados. Es decir, ya que las bolas abiertas son abiertas, podríamos definir un tipo de «bola» cuya característica fundamental sea que fuesen cerrados. En este caso, podemos realizar tal empresa observando la Definición 12. Las bolas abiertas se definieron de tal manera que la distancia fuese menor estricto que un cierto valor. Esto nos da una idea de la interpretación geométrica del concepto «abierto»: no está encerrado por ninguna borde o «frontera», podemos aproximarnos a tal valor tanto como queramos. Como ese menor estricto es lo que le da sentido a la bola ser abierta, para poder definir una bola que sea cerrada, deberíamos incluir, siguiendo con nuestra interpretación geométrica, tal frontera que «encierre» a la bola. Para este objetivo, lo más adecuado sería proponer una definición similar a la de bola abierta pero con un menor o igual.

Definition 14. Sea (X,d) un espacio métrico. Definimos la **bola cerrada** de centro $a \in X$ y radio $r \geq 0$ como

$$\overline{\mathbb{B}}(a;r) := \{x \in X \mid d(x,a) \leq r\}.$$

A diferencia de las bolas abiertas, podemos tomar $r = 0$ y seguir teniendo una bola no vacía. Esto es ya que $d(x,x) = 0$, por lo que $x \in \overline{\mathbb{B}}(x;0)$. Es más, por la propiedad D1), tenemos que se cumple la igualdad $\overline{\mathbb{B}}(x;0) = \{x\}$.

Proposition 22. Toda bola cerrada en un espacio métrico es un cerrado en la topología métrica.

Demostración. Utilicemos la Proposición 21 3. Sea $a \in X$ y $r \leq 0$. Tomando un $x \notin \overline{\mathbb{B}}(a; r)$, tenemos que $d(x, a) > r$. Tomemos ahora $s = d(x, a) - r > 0$. Si demostramos que $\mathbb{B}(x; s) \cap \overline{\mathbb{B}}(a; r) = \varnothing$, entonces por la Proposición 21, tendremos que $\overline{\mathcal{B}}(a; r)$ es un cerrado. Supongamos que $\mathbb{B}(x; s) \cap \overline{\mathbb{B}}(a; r) \neq \varnothing$, entonces existe un $y \in \mathbb{B}(x; s) \cap \overline{\mathbb{B}}(a; r)$. Como $y \in \mathbb{B}(x; s)$, entonces $d(x, y) < s$ y como $y \in \overline{\mathbb{B}}(a; r)$, entonces $d(y, a) \leq r$. Por tanto, por la desigualdad triangular, tenemos que $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \leq d(x, y) + r < s + r = d(x, a) - r + a = d(a, x)$. Es decir, $d(x, a) < d(x, a)$, luego llegamos a una contradicción que viene de suponer que $\mathbb{B}(x; s) \cap \overline{\mathbb{B}}(a; r) \neq \varnothing$, luego $\mathbb{B}(x; s) \cap \overline{\mathbb{B}}(a; r) = \varnothing$. □

2.3. Métricas equivalentes

Ya hemos visto como las métricas permiten generar topologías en un espacio métrico mediante las bolas abiertas. Además, tomando como ejemplo $\mathbb{R}^n$, es posible definir varias métricas en un mismo conjunto. Como, a priori, son métricas distintas, las topologías por lo general no deben por qué ser iguales. Es por tanto que debemos realizar un análisis comparativo de las topologías asociadas a las métricas en ese conjunto dado. Es más, estamos interesados en las métricas cuyas topologías asociadas concuerdan, pues para este tipo de casos, podremos relacionar ambas métricas con las propiedades topológicas que nos proporcione ambas topologías asociadas. Las propiedades concretas y el porqué de tales, se explicarán en capítulos posteriores.

Definition 15. Sean d_1 y d_2 dos métricas definidas en $X \neq \varnothing$. Decimos que d_1 y d_2 son **equivalentes** si las topologías asociadas a cada distancia son iguales, es decir,

$$\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}.$$

En primer lugar, aunque pueda ser evidente la siguiente afirmación, debemos asegurarnos que la nomenclatura es acorde con las propiedades que cumplen tales métricas. Es decir, como estamos hablando de métricas equivalentes, debemos cerciorarnos de que la propiedad de ser métricas equivalentes es, en efecto, una relación binaria de equivalencia.

Proposition 23. La equivalencia de métricas es una RBE.

Demostración. En primer lugar, es redundante observar que una métrica d genera la misma topología que la misma métrica d, es decir, $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_d$, luego se cumple la propiedad reflexiva. Por otro lado, Dadas dos métricas que son equivalentes d_1 y d_2, tenemos que $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$ que es idéntico a escribir $\mathcal{T}_{d_2} = \mathcal{T}_{d_1}$, por lo que se satisface la propiedad reflexiva. Por último, sean d_1, d_2 y d_3 tales que $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$ y $\mathcal{T}_{d_2} = \mathcal{T}_{d_3}$, entonces de manera inmediata se consigue que $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_3}$ cumpliéndose así la transitividad. □

Como en esta sección nos interesa comparar ambas topologías, debemos hacer uso de las herramientas que vimos en la Sección 1.4 sobre topologías comparables para poder caracterizar las métricas equivalentes utilizando nada más que las bolas abiertas. Como vimos en la Proposición 17, podemos utilizar las bases locales para caracterizar las inclusiones y, por tanto, la igualdad de conjuntos y como las bases locales en los espacios métricos son las bolas abiertas por la Proposición 21, tenemos lo deseado.

Proposition 24. Sean d_1 y d_2 dos métricas de $X \neq \varnothing$. Entonces d_1 y d_2 son equivalentes si y solo si para todo $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ se cumplan las siguientes afirmaciones:

I) existe un $\delta_1 > 0$ tal que $\mathbb{B}_{d_1}(x;\delta_1) \subseteq \mathbb{B}_{d_2}(x;\varepsilon)$.

II) existe un $\delta_2 > 0$ tal que $\mathbb{B}_{d_2}(x;\delta_2) \subseteq \mathbb{B}_{d_1}(x;\varepsilon)$.

Demostración. Que dos métricas d_1 y d_2 sean equivalentes es lo mismo que decir que $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$. En particular, esto es equivalente a decir que $\mathcal{T}_{d_1} \subseteq \mathcal{T}_{d_2}$ y $\mathcal{T}_{d_2} \subseteq \mathcal{T}_{d_1}$

Ahora bien, centrémonos en $\mathcal{T}_{d_1} \subseteq \mathcal{T}_{d_2}$ y tomemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por la Proposición 17, esto es equivalente a decir que para todo $x \in X$, $B_1 \in \mathcal{B}_1(x)$, existe un $B_2 \in \mathcal{B}_2(x)$ tal que $B_1 \subseteq B_2$. Como $\mathbb{B}_{d_2}(x;\varepsilon) \in \mathcal{B}_2(x)$, entonces existirá un $\mathbb{B}_{d_1}(x;\delta_1) \in \mathcal{B}_1(x)$ con $\delta_1 > 0$ tal que $\mathbb{B}_{d_1}(x;\varepsilon) \subseteq \mathbb{B}_{d_2}(x;\varepsilon)$. Por lo que hemos probado la equivalencia en I).

Para demostrar la equivalencia de II), se realiza exactamente con los mismo pasos que en el párrafo anterior, cambiado pertinentemente la notación. $\square$

Ahora bien, esta proposición, se podría considerar una «traducción» de la Proposición 17 al caso de los espacios métricos. Es decir, no ha habido ningún avance en el cálculo ni comprobación de estas comparaciones, simplemente se ha reescrito y reinterpretado lo que ya sabíamos de la comparación de topologías pero para el caso de las topologías métricas. En este sentido, el siguiente corolario sí nos proporciona una comprobación mucho más liviana y práctica. Sin embargo, como veremos a continuación, la desventaja que encontramos en este nuevo resultado es que sólo determina una condición suficiente y no una equivalencia como en la anterior proposición.

Corollary 5. Si existen $m, M > 0$ tales que $md_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq Md_1(x,y)$, entonces d_1 y d_2 son equivalentes.

Demostración. Tomemos $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Por un lado, tomemos $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{M}$, entonces si $y \in \mathbb{B}_{d_1}(x;\delta_1)$, tenemos que $d_2(x,y) \leq Md_1(x,y) < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, por lo que $y \in \mathbb{B}_{d_2}(x;\varepsilon)$, es decir, $\mathbb{B}_{d_1}(x;\delta_1) \subseteq \mathbb{B}_{d_2}(x;\varepsilon)$.

Por otro lado, tomemos $\delta_2 = m\varepsilon$. Si $y \in \mathbb{B}_{d_2}(x;\varepsilon_2)$, entonces $d_1(x,y) \leq \frac{1}{m}d_2(x,y) < \frac{m\varepsilon}{m} = \varepsilon$, por lo que $y \in \mathbb{B}_{d_1}(x;\varepsilon)$, es decir, $\mathbb{B}_{d_2}(x;\varepsilon_2) \subseteq \mathbb{B}_{d_1}(x;\varepsilon)$.

En virtud de la Proposición 24, tenemos que d_1 y d_1 son equivalentes. $\square$

2.4. Acotación

En esta sección, estudiaremos cómo la propiedad de acotación —concepto ampliamente estudiado en el caso de un conjunto con una estructura con orden— podemos definirla en cualquier espacio métrico. Para entender la idea detrás de esta noción, basta con observar el caso concreto de un conjunto acotado en $\mathbb{R}$. En particular, un conjunto acotado es aquel que tiene una cota tanto superior como inferior, es decir, dos valores los cuales no pueden ser rebasados ni por la derecha ni por la derecha por los elementos de tal conjunto. Es por ello que, una forma equivalente de interpretar la acotación es observar si podemos encerrar tal conjunto en un intervalo acotado, preferentemente abierto. Ahora bien, con esta interpretación podemos dar el paso a describir la acotación mediante las métricas pues como ya vimos en el Ejemplo 24, los intervalos abiertos acotados pueden ser descritos como una bola (en la distancia euclídea). Es decir, un conjunto es acotado si existe una bola abierta que la contenga. Por tanto, hemos podido extraer el significado de acotación usando simplemente las herramientas que nos proporciona los espacios métricos.

Definition 16. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que un subconjunto $S \subseteq X$ está **acotado** si existe un $a \in X$ y un $r > 0$ tal que

$$S \subseteq \mathbb{B}(a; r).$$

En particular, el conjunto vacío y cualquier bola abierta o cerrada son siempre conjuntos acotados en cualquier métrica. En particular par las bolas abiertas, siempre podemos tomar $\overline{\mathbb{B}}(a; r) \subseteq \mathbb{B}(a; r + \varepsilon)$ para cualquier $\varepsilon > 0$.

Proposition 25. La unión finita de conjuntos acotados es acotada.

Demostración. Por inducción, basta probar que la unión de dos conjuntos acotados es acotado. Supongamos que $S_1, \ldots, S_{n+1} \subseteq X$ son acotados. Si suponemos que la unión de n conjuntos acotados es acotado, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ es acotado y como la unión de dos conjuntos acotados también lo es, entonces $\bigcup_{i=1}^{n+1} S_i = (\bigcup_{i=1}^{n} S_i) \cup S_{n+1}$ es acotado.

Sean $S_1, S_2 \subseteq X$ acotados. Entonces existen $a_1, a_2 \in X$ y $r_1, r_2 > 0$ tales que $S_1 \subseteq \mathbb{B}(a_1; r_1)$ y $S_2 \subseteq \mathbb{B}(a_2; r_2)$. De este modo, como $S_1 \cup S_2 \subseteq \mathbb{B}(a_1; r_1) \cup \mathbb{B}(a_2; r_2)$, basta con ver que $\mathbb{B}(a_1; r_1) \cup \mathbb{B}(a_2; r_2)$ es acotado. Denotemos por $\delta = d(a_1, a_2)$ y $r = r_1 + r_2 + \delta$.

Veamos en primer lugar que $\mathbb{B}(a_1; \delta) \cap \mathbb{B}(a_2; \delta) \neq \varnothing$. Si se cumple que $\mathbb{B}(a_1; \delta) \cup \mathbb{B}(a_2; \delta) = \varnothing$, entonces esto es equivalente a decir que para todo $x \in \mathbb{B}(a_1; \delta)$ —es decir, $d(x, a_1) < \delta$—, $x \notin \mathbb{B}(a_2; \delta)$ —es decir, $d(x, a_2) \geq \delta$— . Como $a_1 \in \mathbb{B}(a_1, \delta)$, entonces tenemos que $d(a_1, a_2) < \delta$, pero esto es una contradicción. Luego $\mathbb{B}(a_1; \delta) \cap \mathbb{B}(a_2; \delta) \neq \varnothing$. De esta manera, tomando cualquier $a \in \mathbb{B}(a_1; \delta) \cap \mathbb{B}(a_2; \delta)$, obtenemos que para cualquier $i = 1, 2$, $d(x, a) \leq d(x, a_i) + d(a_i, a) < r_i + \delta \leq r$. □

En el caso particular de tener un conjunto acotado, tomando cualquier bola que la contenga, entonces podemos tomar otra bola más grande de tal forma que aseguraremos que la última contendrá al conjunto. Sin embargo, esto no pasa cuando intentamos reducir la bola. Es decir, llegará un cierto momento en que, cuando reduzcamos el radio de la bola, ya no contendrá al conjunto acotado. Por tanto, es natural preguntarse cuál es la bola más pequeña que puede contener al conjunto. De manera general, esta pregunta no es posible responderla sin estudiar cada caso con sus particularidades. Otra solución que podemos garantizar es cuál es la distancia suprema que pueda existir entre los elementos del conjunto acotado.

Definition 17. Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subseteq X$ acotado. El **diámetro** de S es

$$\delta(S)_{=} \sup_{x,y \in S} \{d(x, y)\}.$$

Proposition 26. Sea (X, d) un espacio métrico y $S_1, S_2 \subseteq X$ acotados. Si $S_1 \subseteq S_2$, entonces $\delta(S_1) \leq \delta(S_2)$.

Demostración. Tomemos $x, y \in S_1$, entonces $x, y \in S_2$ y por definición de diámetro, $d(x, y) \leq \delta(S_2)$. Como esto es cierto para todo par de puntos de S_1, entonces $\delta(S_1) \leq \delta(S_2)$. $\square$

Example 26. Para todo $x \in X$ en un espacio métrico, entonces $\delta(\{x\}) = 0$. Ya que todo par de puntos de este conjunto será x y $\sup d(x, x) = 0$.

Example 27. Para cualquier espacio métrico en X y para todo $a \in X$ y $r > 0$, tenemos que $\delta(\mathbb{B}(a; r)) \leq \delta\left(\overline{\mathbb{B}}(a; r)\right) \leq 2r$. En primer lugar, como $\mathbb{B}(a; r) \subseteq \overline{\mathbb{B}}(x; r)$, entonces por la Proposición 26, $\delta(\mathbb{B}(a; r)) \leq \delta\left(\overline{\mathbb{B}}(a; r)\right)$. Ahora bien, como para todo par de puntos $x, y \in \overline{\mathbb{B}}(x; r)$ tenemos que $d(x, y) \leq d(x, a) + d(y, b) \leq r + r = 2r$, entonces se tiene que $2r$ es una cota superior, luego $\delta\left(\overline{\mathbb{B}}(a; r)\right) \leq 2r$.

En algunos casos, la igualdad no se llega a satisfacer. Tomemos la métrica discreta en un conjunto $X \neq \varnothing$ arbitrario donde $|X| \geq 2$. Tomemos cualquier $x \in X$ y $r = 1$. En primer lugar, como la métrica discreta solo toma los valores 0 y 1, entonces si $d(x, y) < 1$, necesariamente $d(x, y) = 0$ y por ser una métrica, $x = y$. Es decir, $\mathbb{B}(x; 1) = \{x\}$ y por el Ejemplo 26, $\delta(\mathbb{B}(x; 1)) = 0$. Por otro lado, como particularidad de la métrica discreta, $d(x, y) \leq 1$ para todo par de puntos de X y la igualdad se alcanza cuando los puntos son distintos, luego $\delta\left(\overline{\mathbb{B}}(a; r)\right) = 1$ y, finalmente, $2r = 2$.

Una manera también de estudiar la acotación es no solamente observando los conjuntos que son acotados, si no comprobando que la propia distancia está acotada, es decir, que no haya par de puntos cuya distancia supere una cota superior.

Definition 18. Decimos que un espacio métrico (X, d) es **acotado** si para todo $x, y \in X$, existe un $k > 0$ tal que

$$d(x, y) \leq k.$$

En este caso decimos que la métrica está **acotada**.

Example 28. Dada una métrica d cualquiera, entonces las métricas $\text{mín}\{d, 1\}$ y $\frac{d}{d+1}$ definidas en la Proposición 18 son distancia acotadas. Podemos observar sin mucha dificultad que $\text{mín}\{d(x, y), 1\} \leq 1$ para todo $x, y \in X$ y, de la misma manera, como $d(x, y) \leq d(x, y) + 1$, entonces $\frac{d(x,y)}{d(x,y)+1} \leq 1$.

Proposition 27. Un espacio métrico (X, d) es acotado si y solo si X es un conjunto acotado.

Demostración. Supongamos que la métrica d está acotada, entonces fijados un $a \in X$, existe un $k > 0$ tal que $d(a, x) \leq k$ para todo $x \in X$, es decir, $X = \mathbb{B}(a; k)$. Supongamos ahora que X está acotado, entonces existe un $a \in X$ y un $r > 0$ tal que $X = \mathbb{B}(x; r)$. Por tanto, dados dos $x, y \in X$, tenemos que $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < r + r = 2r$. Luego tomando $k = 2r$ hemos demostrado que para todo par de puntos $x, y \in X$, $d(x, y) \leq k$, luego la métrica d está acotada. $\square$

Corollary 6. Todo subconjunto de un espacio métrico acotado es acotado.

Demostración. Como (X, d) es una espacio métrico acotado, por la Proposición 27, $X = \mathbb{B}(a; r)$ para un cierto $a \in X$ y $r > 0$. Por tanto, para todo subconjunto tenemos que $S \subseteq X = \mathbb{B}(a; r)$, por lo que S es acotado. $\square$

Por último, vamos a demostrar que toda distancia es equivalente a una distancia a acotada. Para ello, vamos a ver en primer lugar cómo podemos definir una distancia a cotada a través de una distancia dada y, a continuación, demostraremos que son equivalentes. Mostraremos dos maneras de realizar tal equivalencia.

Proposition 28. Toda métrica es equivalente a una métrica acotada. En particular, d es equivalente a $\text{mín}\{d, 1\}$ y a $\frac{d}{d+1}$.

Demostración. Veamos que d es equivalente a $\text{mín}\{d, 1\}$. Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como $\text{mín}\{d, 1\} \leq d$, entonces $\mathbb{B}_d(x; \varepsilon) \subseteq \mathbb{B}_{\text{mín}}(x; \varepsilon)$. Por otro lado, tomemos $\delta = \text{mín}\{\varepsilon, 1\}$. Entonces si $y \in \mathbb{B}_{\text{mín}}(x; \delta)$, tenemos que $\text{mín}\{d(x, y), 1\} < \delta = \text{mín}\{\varepsilon, 1\}$. Como $\delta \leq 1$, entonces $\text{mín}\{d(x, y), 1\} < 1$ por lo que $d(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\} < \delta \leq \varepsilon$, por lo que $y \in \mathbb{B}_d(x; \varepsilon)$. Hemos demostrado entonces que $\mathbb{B}_{\text{mín}}(x; \delta) \subseteq \mathbb{B}_d(x; \varepsilon)$. Por la Proposición 24, se tiene que d es equivalente a $\text{mín}\{d, 1\}$.

Miremos ahora el caso de la equivalencia entre d y $\frac{d}{d+1}$. Como $\frac{d}{d+1} \leq d$, entonces $\mathbb{B}_d(x; \varepsilon) \subseteq \mathbb{B}_{\frac{d}{d+1}}(x; \varepsilon)$. Ahora, tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$. Si $y \in \mathbb{B}_{\frac{d}{d+1}}(x; \delta)$, entonces $\frac{d}{d+1}) < \delta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$ y simplificando la expresión obtenemos $d(x, y) < \varepsilon$, por lo que $\mathbb{B}_{\frac{d}{d+1}}(x; \delta) \subseteq \mathbb{B}_d(x; \varepsilon)$. de nuevo, por la Proposición 24, d es equivalente a $\frac{d}{d+1}$. $\square$

2.5. Espacios normados

Definition 19. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$. Se dice que $\| \cdot \|$ es una **norma** si se cumplen las siguientes propiedades:

N1) $\|v\| = 0$ si y solo si $v = 0$ (No degeneración).

N2) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y para todo $v \in V$ (Homogeneidad).

N3) $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$ para todo $v, u \in V$ (Desigualdad triangular).

En este caso, al par $(V, \| \cdot \|)$ se le conoce como **espacio normado**.

Example 29. Como todo espacio vectorial real finito-dimensional es isomorfo a $\mathbb{R}^n$, podemos considerar normas en $\mathbb{R}^n$ sin pérdida de generalidad. Por tanto, dado un $p \geq 1$, definimos la **p-norma** como

$$\|v\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Veamos que, en efecto, satisface la Definición 19. Es directo observar que $\|0\|_p = 0$ y si $\|v\|_p = 0$, entonces elevando ambos miembros de la igualdad por p obtenemos que $\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p = 0$ y como cada sumando es mayor o igual que cero, entonces $|v_i|^p = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y esto sólo puede darse cuando $|v_i| = 0$ o equivalentemente, $v_i = 0$. Por tanto, $v = 0$. La comprobación de la homogeneidad es fácil como sigue: $\|\alpha v\|_p = (\sum |\alpha v_i|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum |\alpha|^p |v_i|^p)^{\frac{1}{p}} =$

$(|\alpha|^p \sum |v_i|^p)^{\frac{1}{p}} = (|\alpha|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum |v_i|^p)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|v\|_p$. La desigualdad triangular se cumple en esencia por la desigualdad de Minkowski.

Example 30. En $\mathbb{R}^n$ podemos definir además otra norma llamada la **∞-norma** definida como

$$\|v\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} \{|v_i|\}.$$

Veamos que ésta también es una norma. En primer lugar, es fácil observar que $\|0\|_\infty = 0$ y que si $\|v\|_\infty = 0$, entonces como $0 \leq |v_i| \leq \|v\|_\infty = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, entonces $|v_i| = 0$, por lo que $v_i = 0$ para todo i. Por otro lado, $\|\alpha v\|_\infty = \max_i \{|\alpha v_i|\} = \|\alpha v\|_\infty = \max_i \{|\alpha||v_i|\} = |\alpha| \|v\|_\infty$. Finalmente, comprobemos la desigualdad triangular. Tenemos que para todo $i = 1, \dots, n$, $|v_i + u_i| \leq |v_i| + |u_i| \leq \|v\|_\infty + \|u\|_\infty$. Como se cumple para todo $i = 1, \dots, n$ entonces $\|v\|_\infty + \|u\|_\infty$ es una cota superior, luego por definición del máximo, $\|u + v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$.

Example 31. Denotemos como $\mathcal{C}[a, b]$ el espacio vectorial real de funciones continuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Notemos que como son funciones continuas definidas en un intervalo cerrado y acotado, entonces por el Teorema de Weierstrass, toda función de $\mathcal{C}[a, b]$ alcanza un máximo y un mínimo. En este espacio también podemos definir las p-normas y la ∞-norma de manera muy similar a como hicimos con $\mathbb{R}^n$. En este caso, la **p-norma** se define como

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por otro lado, la **∞-norma** se define como

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} \{|f(x)|\}.$$

La prueba de que ambas son, efectivamente, normas, es completamente análoga al caso del espacio $\mathbb{R}^n$, excepto la comprobación de la desigualdad triangular en la p-norma de $\mathcal{C}[a, b]$, pues necesitamos herramientas del Análisis Funcional que exceden a los contenidos de este libro.

Vamos a comprobar que, en el caso de los espacios vectoriales de dimensión finita, los nombres de p-norma y ∞-norma son adecuados, pues entre estas dos normas guardan una relación estrecha. De una manera más simple, podría decirse que la ∞-norma realmente sigue la misma fórmula que la p-norma cuando evaluamos $p \to \infty$.

Proposition 29. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ fijado.

$$\lim_{p \to \infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty.$$

Demostración. Observamos que se cumplen las siguientes desigualdades: $\|v\|_\infty^p \leq \|v\|_p^p \leq n \|v\|_\infty^p$, por lo que se tiene que $\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|v\|_\infty$. Tomando límites cuando $p \to \infty$ tenemos lo deseado. □

Una vez hemos vista algunos ejemplos clásicos de normas en espacios vectoriales, veamos cómo estas normas pueden definir métricas como hemos estado estudiando durante todo este capítulo.

Proposition 30. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y definamos $d : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que

$$d(x, y) := \|x - y\|,$$

entonces (V, d) es un espacio métrico.

Demostración. Basta con observar que se cumplen las propiedades de la Definición 10. En primer lugar, $d(x, y) = 0$ si y solo si $\|x - y\| = 0$ si y solo si $x - y = 0$, es decir, $x = y$. Por otro lado, $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = d(y, x)$, cumpliéndose así la simetría. Finalmente, veamos que se cumple la desigualdad triangular. Sean $x, y, z \in V$. Entonces $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|(x - y)\| + \|(y - z)\| \leq d(x, y) + d(y, z)$. □

Example 32. En el caso de espacios vectoriales de dimensión finita, observamos que la métrica definida por la 2-norma es concretamente la distancia euclídea, por la 1-norma la distancia del taxi y por la ∞-norma la distancia del ajedrez.

Por tanto, todo espacio normado es métrico ya que la norma define de forma natural una distancia. Como la métrica define, a su vez, una topología mediante sus bolas, entonces podemos generar bolas abiertas a partir de las normas y estudiar la topología que generan. Comparando las topologías generadas por espacios métricos y espacios normados, estos últimos se comportan de una manera más previsible a nuestra intuición geométrica que en el caso de los espacios métricos. Ya hemos visto algunos ejemplos donde ocurres resultados patológicos si sólo consideramos la métrica.

Example 33. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado, entonces las bolas cerradas y abiertas se expresan de la siguiente manera: $\mathbb{B}(v_0; r) = \{v \in V \mid \|v - v_0\| < r\}$ y $\overline{\mathbb{B}}(v_0; r) = \{v \in V \mid \|v - v_0\| \leq r\}$. Como vimos en el Ejemplo 27, vimos que en el caso general delos espacios métricos $\delta(\mathbb{B}(a; r)) \leq \delta\left(\overline{\mathbb{B}}(a; r)\right) \leq 2r$ habiendo algunos casos donde no se llegaba a alcanzar la igualdad. Veamos en el caso de los espacios normados, la igualdad siempre se alcanza en toda la cadena.

Para verlo, basta con demostrar la igualdad en $\delta(\mathbb{B}(a; r)) = 2r$ y como la desigualdad $\delta(\mathbb{B}(a; r)) \leq 2r$ es siempre cierta, es suficiente con demostrar $\delta(\mathbb{B}(a; r)) \geq 2r$. Sea $e \in V$ un vector normal (es decir, $\|e\| = 1$) y $\varepsilon \in (0, r)$. Entonces $a + (r - \frac{\varepsilon}{2})e, a - (r - \frac{\varepsilon}{2})e \in \mathbb{B}(a; r)$ puesto que, tomando el primer vector como ejemplo, $\|a + (r - \frac{\varepsilon}{2})e - a\| = \|(r - \epsilon)e\| = |r - \frac{\varepsilon}{2}|\|e\| = r - \frac{\varepsilon}{2} < r$ y de manera análoga se comprueba para $a - (r - \frac{\varepsilon}{2})e$. Por otro lado, $d(a + (r - \frac{\varepsilon}{2})e, a - (r - \frac{\varepsilon}{2})e) = \|a + (r - \frac{\varepsilon}{2})e - (a - (r - \frac{\varepsilon}{2})e)\| = \|a + re - \frac{\varepsilon}{2}e - a + re - \frac{\varepsilon}{2}e\| = \|(2r - 2\frac{\varepsilon}{2})e\| = 2r - \varepsilon$. Por tanto, por definición del diámetro, tenemos que $2r - \varepsilon \leq \delta(\mathbb{B}(a; r))$. Como se cumple para todo $\varepsilon \in (0, r)$, en particular $2r \leq \delta(\mathbb{B}(a; r))$.

Finalmente, vamos a demostrar que, para el caso de espacios vectoriales de dimensión finita, toda distancia definida por p-norma y la ∞-norma son equivalentes entre sí. Esta afirmación tiene una consecuencia muy interesante tanto a nivel interpretativo como a nivel práctico. En primer lugar, nos dice que, cualquier norma que cojamos, nos describirá la misma topología. De esta manera, como vimos que las bolas tenían un significado geométrico dependiendo del tipo de norma que cojamos, este hecho nos permite afirmar que cualquier bola pertenecerán a la misma topología y que podemos generar unas a partir de las otras. Por otro lado, como la topología que se define es independiente de la norma que escojamos, esto nos permitirá resolver cuestiones geométricas y topológicas con una mayor facilidad ante la posibilidad de poder escoger previamente una norma que se adecue mejor al planteamiento del problema.

Proposition 31. Toda métrica definida por las p-normas y la ∞-norma en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.

Demostración. Basta con demostrar que existen $m, M > 0$ tales que $m\|v\|_\infty \leq \|v\|_p\| \leq M\|v\|_\infty$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Si esto es cierto, entonces tomando las distancias $d_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty$ y $d_p(x,y) = \|x-y\|_p$ tenemos que $md_\infty(x,y) \leq d_p(x,y) \leq Md_\infty(x,y)$ y por el Corolario 5, tenemos que la distancia d_p es equivalente a d_∞ y como esto es cierto para todo $p \leq 1$, por ser la equivalencia de métricas una RBE por la Proposición 23, las métricas d_p para todo $p \geq 1$ son también equivalentes entre sí.

De este modo, veamos que $m\|v\|_\infty \leq \|v\|_p\| \leq M\|v\|_\infty$ para unos ciertos $m, M > 0$. En primer lugar, podemos observar que para todo $j = 1, \ldots, n$, $|v_j|^p \leq \sum_{i=1}^n |v_i|^p$ y elevando todo a $\frac{1}{p}$ tenemos que $|v_j| \leq \|v\|_p$ para todo $j = 1, \ldots, n$, por tanto, $\|v\|_\infty \leq \|v\|_p$ y entonces $m = 1$. Por otro lado, como $|x_i| \leq \|v\|_\infty$, entonces en particular, $\sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq n\|v\|_\infty^p$, por lo que $\|v\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}\|v\|_\infty$, por lo que $M = n^{\frac{1}{p}}$. □

Capítulo 3

Operadores topológicos

3.1. Clausura

En este capítulo nos detendremos en las cuestiones topológicas de abiertos y cerrados pero con respecto a cualquier conjunto del espacio. En particular, querremos concretar cuáles serían los conjuntos abierto y cerrado más «parecidos» a un subconjunto arbitrario dado. Contextualizaremos el uso del término «parecido» con la cuestión de los cerrados en un espacio normado. En $\mathbb{R}^2$, tenemos que dada una bola abierta $\mathbb{B}(x;r)$, observaremos más adelante que es su bola cerrada la que satisface las cualidades más significativas de todos los cerrados que podríamos tomar como el candidato al más «parecido». En particular, y como veremos más adelante, es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a la bola abierta. Es decir, si intentásemos encontrar otro cerrado que contiene a esa bola, entonces ésta a su vez contendría a la susodicha bola cerrada. Mirándolo desde otro punto de vista, tomando ahora la bola cerrada como el conjunto arbitrario, observamos que la bola abierta es el conjunto abierto más grande en el que está contenido. Si bien, son propiedades bastante fuertes, hemos de cerciorarnos que, aunque es habitual, definir el concepto de «cerrado más pequeño que contiene a un conjunto» implicaría suponer de la existencia de tal conjunto; luego sería una definición que, a priori, nos limita el resultado. Veremos más adelante que dicho conjunto siempre existe. Empezaremos, en primer lugar, definiendo el conjunto candidato a ser tal cerrado.

Definition 20. Sea $X \neq 0$ arbitrario y $S \subseteq X$. Decimos que $x \in X$ es un **punto de adherencia** de S si

$$\text{para todo } U \in \mathcal{N}(x),\ U \cap S \neq \varnothing.$$

Definimos entonces la **clausura** como el conjunto de puntos adherentes de S, denotado por $\overline{S}$ o $\mathrm{cl}(S)$.

El tipo de notación para la clausura de un conjunto dado dependerá del contexto en el que trabajemos. Si estamos trabajando en un mismo espacio topológico o se entiendo por contexto dónde trabajamos, entonces utilizaremos la notación $\overline{S}$. De lo contrario, utilizaremos la notación $\mathrm{cl}_X(S)$ e indicaremos como subíndice el espacio donde se calcula la clausura.

Esta definición dista mucho de ser intuitiva, clara o incluso fácil de entender de primeras. Se ha escogido esta definición por varias razones: la primera es que con esta definición no se supone la existencia del cerrado más pequeño, es decir, la existencia de un mínimo elemento de la familia de conjuntos cerrados que contiene al subconjunto. Por otro lado, esta definición es más generalista y podremos realizar el cálculo siempre, para cualquier subconjunto que escojamos. Además, la clausura puede verse como una función u operador de las partes de X en sí mismo, es decir: $\mathrm{cl} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tal que $S \mapsto \mathrm{cl}(S) = \overline{S}$. En las siguientes secciones de este capítulo veremos operadores similares a la clausura.

Veamos que, como uno podría pensar, esta definición está caracterizada por las bases de entornos.

Proposition 32. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico, $S \subseteq X$ y $\mathcal{B}(x)$ una base de entornos para $x \in X$. Entonces $x \in \overline{S}$ si y solo si

$$\text{para todo } B_x \in \mathcal{B}(x),\ B_x \cap S \neq \varnothing.$$

Demostración. Supongamos que $x \in \overline{S}$, entonces para cualquier entorno $U \in \mathcal{N}(x)$, $U \cap S \neq \varnothing$. En particular, como $B_x \in \mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{N}(x)$, entonces $B_x \cap S \varnothing$.

Por otro lado, supongamos que la definición se cumple para la base de entornos. Tomemos un $U \in \mathcal{N}(x)$. Por definición de base de entornos, existe un $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B_x \subseteq U$. Por lo tanto, $\varnothing \neq B_x \cap S \subseteq U \cap S$, es decir, $U \cap S \neq \varnothing$, luego $x \in X$. □

En particular, vimos en el Ejemplo 16 que los abiertos que contienen a un punto determinado forma una base de entornos de la topología. Por tanto, la Definición 20 sería equivalente a usar abiertos que contienen al punto.

Antes de enunciar las propiedades más básicas de la clausura, veremos cómo podremos caracterizar la clausura de un conjunto en el contexto de los espacios métricos, de manera que podamos llegar a una equivalencia solamente usando conceptos y terminología métrica.

Lemma 1. Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subseteq X$. Entonces $x \in \overline{S}$ si y solo si

$$\text{para todo } r > 0,\ \mathbb{B}(x; r) \cap S \neq \varnothing.$$

Demostración. Por Proposición 32, $x \in \overline{S}$ si y solo si dado una base de entornos $\mathcal{B}(x)$, entonces para todo $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tenemos que $B_x \cap S \neq \varnothing$. Por Proposición 21, podemos tomar como base de entornos $\mathcal{B}(x) = \{\mathcal{B}(x; r) \mid r > 0\}$. Por tanto, esto es equivalente a que para todo $r > 0$, $\mathbb{B}(x; r) \cap S \neq \varnothing$. □

Proposition 33. Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subseteq X$. Entonces $x \in \overline{S}$ si y solo si $d(x, S) = 0$.

Demostración. Supongamos que $x \in \overline{S}$. Entonces por Lema 1, para todo $r > 0$, $\mathcal{B}(x, r) \cap S \neq \varnothing$. Por tanto, para todo $r > 0$, existe un $y_r \in S$ tal que $y_r \in \mathcal{B}(x; r)$, es decir, $d(x, y_r) < r$. Por Definición 11, $d(x, S) \leq d(x, y_r) < r$ para todo $r > 0$, por lo que $d(x, S) = 0$.

Sea ahora $d(x, S) = 0$. Entonces para todo $r > 0$, existe un $y \in S$ tal que $d(x, y) < r$, es decir, $y \in \mathbb{B}(x; r)$. Así, para todo $r > 0$, $y \in \mathbb{B}(x; r) \cap S$. En resumen, para todo $r > 0$, $\mathbb{B}(x; r) \cap S \neq 0$ y por el Lema 1, $x \in \overline{S}$. □

A continuación, veremos las propiedades más básicas de la clausura.

Proposition 34 (Propiedades elementales de la clausura)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S, T \subseteq X$. Tenemos que

Cl1) $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

Cl2) $S \subseteq \overline{S}$.

Cl3) $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$.

Cl4) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$.

Demostración. En primer lugar, supongamos que existe un $x \in \overline{\varnothing}$, entonces para cualquier entorno $U \in \mathcal{N}(x)$, tendremos que $U \cap \varnothing \neq \varnothing$. Pero esto es una contradicción, por lo que $\overline{\varnothing} = \varnothing$, probando así Cl1).

Ahora, sea $x \in S$ y tomemos $U \in \mathcal{N}(x)$. Por Proposición 8 1., $x \in U$, luego $x \in U \cap S \neq \varnothing$. Por lo tanto, $x \in \overline{S}$, demostrando Cl2).

Fijémonos que por la demostración anterior, tenemos que $\overline{S} \subseteq \overline{\overline{S}}$. Demostremos pues la inclusión restante. Sea $x \in \overline{\overline{S}}$. Entonces podemos tomar en particular un abierto $A \in \mathcal{T}(x)$ de manera que $A \cap \overline{S} \neq \varnothing$. Por tanto, existe un $y \in A \cap \overline{S}$. Como A es abierto, entonces por Proposición 9, $A \in \mathcal{N}(y)$. Como $y \in \overline{S}$, entonces tenemos que $A \cap S \neq \varnothing$ y esto es cierto para todo $\mathcal{T}(x)$. Como $\mathcal{T}(x)$ es una base de entornos por el Ejemplo 16, entonces por la Proposición 32, tenemos que $x \in \overline{S}$. De esta manera, probamos Cl3).

Finalmente, tomemos $x \in \overline{S \cup T}$, tenemos que para cualquier entorno $U \in \mathcal{N}(x)$, $U \cap (S \cup T) = (U \cap S) \cup (U \cap T) \neq \varnothing$. Esto es equivalente a que, o bien $U \cap S \neq \varnothing$, teniendo que $x \in \overline{S}$; o bien $U \cap T \neq \varnothing$, teniendo que $x \in \overline{T}$. Por lo que en definitiva, $x \in \overline{S} \cup \overline{T}$, demostrando así Cl4). □

Es la propiedad Cl2) la que nos esclarece por un lado la elección del término clausura. Aparte de ser así porque será nuestro mejor cerrado para el subconjunto dado, la clausura contiene a tal subconjunto o, dicho de otro modo, «encierra» al subconjunto. Es, en palabras más literarias, el cerrado que mejor envuelve, que mejor encierra al subconjunto. La justificación de «ser el mejor» vendrá posteriormente.

Otras propiedades que nos son de interés son las siguientes. En primer lugar, vamos a ver cómo la clausura se mantiene por inclusiones.

Proposition 35. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico y $S, T \subseteq X$. Si $S \subseteq T$, entonces $\overline{S} \subseteq \overline{T}$.

Demostración. Sea $x \in \overline{S}$. Entonces para todo $U \in \mathcal{N}(x)$, tenemos que $\varnothing \neq U \cap S \subseteq U \cap T$, es decir, $U \cap T \neq \varnothing$ para todo $U \in \mathcal{N}(x)$, luego $x \in \overline{T}$. □

Esta propiedad se puede demostrar usando sólo la propiedad Cl3), sin embargo, se ha escogido esta forma de demostrarlo por su simplicidad en el desarrollo.

Por otro lado, hemos visto en Cl4) que la clausura también preserva uniones finitas. Sin embargo, esto no pasa con las intersecciones. De manera general, sólo tendremos una inclusión.

Proposition 36. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico y $S, T \subseteq X$. Entonces $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$.

Demostración. Como $S \cap T \subseteq S, T$, entonces por la Proposición 35, tenemos que $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S}, \overline{T}$. Por tanto, $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. □

Example 34. Veamos un ejemplo donde $\overline{S \cap T} \subsetneq \overline{S} \cap \overline{T}$. En $\mathbb{R}$ con la topología usual, tomemos $S = (0,1)$ y $T = (1,2)$. Podemos calcular fácilmente que $\overline{S \cap T} = \overline{\varnothing} = \varnothing$. Por otro lado, $\overline{S} = [0,1]$ y $\overline{T} = [1,2]$, por lo que tenemos que $\overline{S} \cap \overline{T} = [0,1] \cap [1,2] = \{1\}$.

Todas las propiedades que hemos enunciado son las básicas y las suficientes con las que uno puede trabajar con la clausura sin depender completamente de la definición que presentamos al principio del capítulo. En esta segunda parte de la sección, nos dedicaremos a demostrar lo que se afirmó en la introducción: la clausura era el cerrado más pequeño que contiene a tal conjunto. Para ello, iremos paso a paso demostrando los resultados más relevantes los cuales podremos referenciar a esa particular propiedad en un futuro.

La primera proposición que demostraremos ahora nos permite también explicar el porqué de esa definición. Probaremos ahora que la clausura de un conjunto es siempre un conjunto cerrado —como era de esperar—. Para probarlo, haremos uso de la Proposición 11, donde caracterizábamos los cerrados mediante bases locales de entornos.

Proposition 37. La clausura de cualquier conjunto es un cerrado.

Demostración. Sea $x \notin \overline{C} = \overline{\overline{C}}$, entonces por definición de la clausura, existe un $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $U \cap \overline{C} = \varnothing$. Como $\mathcal{N}(x)$ puede considerarse una base local de él mismo, por la Proposición 11, tenemos que $\overline{C}$ es un cerrado. □

La elección de esa definición de la clausura viene motivada por la Proposición 11 de la siguiente manera: la definición de de la clausura recoge los puntos que satisface lo opuesto de la parte de la derecha de la coimplicación de esa proposición. De tal manera que, por la propia construcción, nos aseguramos que el conjunto creado por la clausura sea cerrado.

Corollary 7. Un conjunto C es un cerrado si y solo si $C = \overline{C}$.

Demostración. Supongamos que C es cerrado. Por Cl2) tenemos que $C \subseteq \overline{C}$. Demostremos que se cumple la otra inclusión. Si $x \notin C$, entonces por la Proposición 11, existe un $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $U \cap C \neq 0$, por tanto, por definición de la clausura, $x \notin \overline{C}$. De este modo, $C = \overline{C}$.

Por otro lado, si $C = \overline{C}$, por la Proposición 37, C es cerrado. □

Finalmente, enunciaremos la propiedad que caracteriza y da sentido a todo el trabajo que hemos realizado sobre la clausura.

Theorem 1. La clausura $\overline{S}$ es el cerrado más pequeño que contiene a S.

Demostración. En primer lugar, por la Proposición 37, $\overline{S}$ es un cerrado y por Cl2), $S \subseteq \overline{S}$, luego la clausura contiene al conjunto S.

Falta por demostrar que es el más pequeño. Es decir, si existe un conjunto $F \in \mathcal{C}$ tal que $S \subseteq F$, entonces $\overline{S} \subseteq F$. No obstante, esto es cierto ya que si $S \subseteq F$, entonces por la Proposición 35 $\overline{S} \subseteq \overline{F} = F$ y esto último por el Corolario 7 ya que F es un cerrado. □

Para ultimar con esta sección sobre la clausura como el cerrado más pequeño que contiene al conjunto, gracias a esta propiedad podemos expresar la clausura en términos de los cerrados que contienen al conjunto de la siguiente forma.

Corollary 8. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$. Entonces

$$\overline{S} = \bigcap_{F \in \mathcal{C}_S} F,$$

donde $\mathcal{C}_S = \{F \in \mathcal{C} \mid S \subseteq F\}$.

Demostración. En primer lugar, para todo $F \in \mathcal{C}_S$ tenemos que $S \subseteq F$. Entonces $\overline{S} \subseteq \overline{F} = F$. Por tanto, $\overline{S} \subseteq \cap F$. Por otro lado, $\overline{S}$ es un cerrado que contiene a S por el Teorema 1, por lo tanto $\overline{S} \in \mathcal{C}_S$, lo que implica que, $\cap F \subseteq \overline{S}$. □

Finalmente, para acabar con esta sección, queremos revisar una de las ideas más importantes del primer capítulo y aplicarlo a este concepto de la clausura. Estamos hablando de definir topologías mediante conceptos que potencialmente tenga un significado topológico. En efecto, las propiedades que dedujimos de la Proposición 34 no son casuales. Al igual que vimos en el Capítulo 1 que los conceptos de abierto, cerrado, base, entorno y base de entornos eran equivalentes porque definían y caracterizaban topologías, la clausura también puede definir topologías de la misma manera. En concreto, este operador con las propiedades vistas en la Proposición 34 define el conjunto de cerrados de una cierta topología como uno se esperaría: haciendo uso del Corolario 7.

Proposition 38. Sea $X \neq \varnothing$ arbitrario y $\mathfrak{c} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ un operador satisfaciendo Cl1)-Cl4). Entonces $\mathcal{C} = \{C \subseteq X \mid \mathfrak{c}(C) = C\}$ define una familia de cerrados para una topología dada de manera que $\mathfrak{c}(S) = \overline{S}$.

Demostración. Veamos primero que $\mathfrak{c}$ permite definir una topología mediante sus cerrados y para ello recurriremos a la Proposición 2.

Observamos que por Cl1), $\mathfrak{c}(\varnothing) = \varnothing$, luego $\varnothing \in \mathcal{C}$. Por otro lado, por Cl2), $X \subseteq \mathfrak{C}(X) \subseteq X$, luego $X = \mathfrak{c}(X)$ y por ende, $X \in \mathcal{X}$, cumpliéndose así C1).

Por otro lado, dada una familia arbitraria $\{C_\alpha\}_\alpha \subseteq \mathcal{C}$, tenemos que por Cl2), $\cap_\alpha C_\alpha \subseteq \mathfrak{c}\left(\cap_\alpha C_\alpha\right)$. Por otro lado, $\cap_\alpha C_\alpha \subseteq C_\alpha$ para todo α y aplicando de nuevo Cl2), $\mathfrak{c}\left(\cap_\alpha C_\alpha\right) \subseteq \mathfrak{c}(C_\alpha)$ para todo α, es decir, $\mathfrak{c}\left(\cap_\alpha C_\alpha\right) \subseteq \cap_\alpha \mathfrak{c}(C_\alpha)$. Por tanto, $\mathfrak{c}\left(\cap_\alpha C_\alpha\right) = \cap_\alpha \mathfrak{c}(C_\alpha)$ cumpliéndose C2).

Ahora, dada una familia finita $\{C_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{C}$, por Cl4) vemos que $\mathfrak{c}\left(\cup_{i=1}^n C_i\right) = \cup_{i=1}^n \mathfrak{c}(C_i) = \cup_{i=1}^n C_i$, luego $\cup_{i=1}^n C_i \in \mathcal{C}$, cumpliéndose así C3.

Por otro lado, veamos que usando Cl4) podemos deducir la preservación de la inclusión. Dados $S \subseteq T$. Tenemos que $\mathfrak{c}(T) = \mathfrak{c}(T \setminus S \cup S) = \mathfrak{c}(T \setminus S) \cup \mathfrak{c}(S)$. Por tanto, se deduce que $\mathfrak{c}(S) \subseteq \mathfrak{c}(T)$.

De este modo, por la Proposición 2, $\mathcal{C}$ es la familia de cerrados de una cierta topología $\mathcal{T}$. Es fácil comprobar que, por Cl3), $\overline{S}, \mathfrak{c}(S) \in \mathcal{C}$. Dado un $S \subseteq X$ arbitrario, demostremos que $\overline{S} = \mathfrak{c}(S)$. En primer lugar, por Cl2), tenemos que $S \subseteq \mathfrak{c}(S)$ y por la Proposición 35, $\overline{S} \subseteq \overline{\mathfrak{c}(S)} = \mathfrak{c}(S)$ ya que $\mathfrak{c}(S)$ es un cerrado por Cl3). Por otro lado, por Cl2), tenemos que $S \subseteq \overline{S}$ y como $\mathfrak{c}$ preserva inclusiones, $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c}(\overline{S}) = \overline{S}$ porque $\overline{S} \in \mathcal{C}$. Por tanto, $\overline{S} = \mathfrak{c}(S)$. □

3.1.1. Densidad

Definition 21. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$. Decimos que S es **denso** si $\overline{S} = X$.

Proposition 39. *S es denso si y solo si para todo $A \in \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$, $A \cap S \neq \varnothing$.*

Demostración. Supongamos que S es denso. Tomemos $A \in \mathcal{T}$ no vacío y sea $x \in A \subseteq X = \overline{S}$. Entonces, como $A \in \mathcal{N}(x)$, tenemos que $A \cap S \neq \varnothing$.

Por otro lado, veamos que S es denso. La inclusión $\overline{S} \subseteq X$ es trivial. Sea $x \in X$ y tomemos $A \in \mathcal{T}(x)$, entonces $A \cap S \neq \varnothing$. Como se cumple para todo $A \in \mathcal{T}(x)$ y éste es una base local de entornos de x, por la Proposición 32, tenemos que $x \in \overline{S}$, por lo que S es denso. $\square$

3.2. Acumulación

Definition 22. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$. Decimos que $x \in X$ es un **punto de acumulación** si

$$\text{para todo } U \in \mathcal{N}(x),\ (U \setminus \{x\}) \cap S \neq \varnothing.$$

Definimos la **acumulación** de S como el conjunto de puntos de acumulación, denotado por S' o $\mathrm{ac}(S)$.

Proposition 40. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $S \subseteq X$, $x \in X$ y $\mathcal{B}(x)$ una base de entornos de x. $x \in S'$ si y solo si

$$\text{para todo } B_x \in \mathcal{B}(x),\ (B_x \setminus \{x\}) \cap S \neq \varnothing.$$

Demostración. Si $x \in S'$, entonces como $B_x \in \mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{N}(x)$, tenemos que $(B_x \setminus \{x\}) \cap S \neq \varnothing$. por otro lado, dado $U \in \mathcal{N}(x)$, existe un $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B_x \subseteq U$. De este modo, tenemos que $\varnothing \neq (B_x \setminus \{x\}) \cap S \subseteq (U \setminus \{x\}) \cap S$. Como esto es cierto para todo entorno U, entonces $x \in S'$. $\square$

La acumulación de un conjunto, por la forma de definirse, guardan una estrecha relación con la clausura del mismo.

Proposition 41. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $S \subseteq X$. Entonces

$$\overline{S} = S \cup S'.$$

Demostración. En primer lugar, por Cl2), tenemos que $S \subseteq \overline{S}$. Por otro lado, vemos que si $x \in S'$, entonces para todo $U \in \mathcal{N}(x)$, tenemos que $\varnothing \neq (U \setminus \{x\}) \cap S \subseteq U \cap S$, luego $x \in \overline{S}$ y por tanto, $S \cup S' \subseteq \overline{S}$.

Basta con demostrar que $\overline{S} \setminus S \subseteq S'$. Sea $x \in \overline{C} \setminus C$ y tomemos $U \in \mathcal{N}(x)$ arbitrario. Entonces, $U \cap S \neq \varnothing$. Como $x \notin S$, entonces $(U \cap S) \setminus \neq \varnothing$ y como $(U \cap S) \setminus \{x\} = (U \setminus \{x\}) \cap (S \setminus \{x\}) = (U \cap S) \setminus \{x\} = (U \setminus \{x\}) \cap S$, entonces $x \in S'$. $\square$

Corollary 9. C es cerrado si y solo si $C' \subseteq C$.

Demostración. C es cerrado si y solo si $C = \overline{C} = C \cup C'$ que es equivalente a decir que $C' \subseteq C$. $\square$

Por otro lado, podemos definir la acumulación de un conjunto a través de su clausura como sigue.

Proposition 42. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $S \subseteq X$. Entonces $x \in S'$ si y solo si $x \in \overline{S \setminus \{x\}}$.

Demostración. Tenemos que $x \in S'$ si y solo si para todo $U \in \mathcal{U}$, $\varnothing \neq (U \setminus \{x\}) \cap S = U \cap (S \setminus \{x\})$, es decir, $x \in \overline{S \setminus \{x\}}$. $\square$

3.2.1. Puntos aislados

Definition 23. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$. Un punto $x \in x$ es un **punto aislado** de S si

$$\text{existe un } U \in \mathcal{N}(x) \text{ tal que } U \cap S = \{x\}$$

Notemos primeramente que todo punto aislado está contenido en el subconjunto. Si $x \in X$ es aislado, entonces existe un entorno U de x tal que $U \cap S = \{x\}$ lo que, concretamente, tenemos que $x \in S$.

La siguiente proposición nos dice que, efectivamente, las nociones de punto aislado y punto de acumulación son opuestas.

Proposition 43. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$. Un punto $x \in S$ es aislado si y solo si no es de acumulación.

Demostración. Decir que $x \in S$ es aislado es decir que existe un entorno U tal que $U \cap S = \{x\}$, por lo que $U \setminus \{x\} \cap S = \varnothing$ lo cual es equivalente a $x \notin S'$. □

Si estudiamos los puntos aislados no de un subconjunto sino del espacio total, podemos obtener diferentes caracterizaciones bastante interesantes.

Proposition 44. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$. Son equivalentes:

1. x es un punto aislado de X.
2. $\{x\} \in \mathcal{N}(x)$.
3. $x \notin \overline{X \setminus \{x\}}$

Demostración. Supongamos que x es un punto de acumulación. Entonces existe un entorno U de x tal que $U = U \cap X = \{x\}$, luego $\{x\} \in \mathcal{N}(x)$.

Ahora, si suponemos que $U = \{x\} \in \mathcal{N}(x)$, entonces $U \cap X \setminus \{x\} = \varnothing$, luego por definición de clausura, $x \notin \overline{X \setminus \{x\}}$.

Finalmente, si $x \notin \overline{X \setminus \{x\}}$ que, por la Proposición 42, x no es un punto de acumulación y por tanto, por la Proposición 43, tenemos que x es aislado. □

3.3. Interior

Mientras que la clausura de un subconjunto permitía obtener el cerrado más pequeño que contenía a dicho subconjunto, es natural querer realizar una operación similar con abiertos. En este caso, no siempre existirá un abierto mínimo que contenga a cualquier conjunto. En un espacio métrico por ejemplo, siempre tenemos que $\overline{\mathbb{B}}(x;1) \subseteq \mathbb{B}(x;1+\varepsilon)$ para todo $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. No obstante, $\mathbb{B}(x;1) \subseteq \overline{\mathbb{B}}(x;1)$. Por tanto, podemos aproximarnos por arriba tanto a la bola cerrada como queramos, sin obtener un abierto mínimo que lo contenga. No obstante, tomando el caso contrario, es decir, estudiar los abiertos que están contenidos en un subconjunto, sí que podemos encontrar tal abierto máximo. De este modo, el interior de un subconjunto se tratará del abierto más grande que esté contenido en dicho subconjunto. De la misma manera que hicimos con la clausura, definiremos el concepto de punto interior mediante los entornos para, más adelante, deducir todas las propiedades necesarias.

Definition 24. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$. Un punto $x \in X$ es un **punto interior** si

$$S \in \mathcal{N}(x).$$

Definimos entonces el **interior** como el conjunto de puntos interiores de S, denotado por $\mathring{A}$ o $\text{int}(S)$.

Como estamos acostumbrados a hacer en este libro, procederemos a enunciar la caracterización de la definición de interior para bases de entornos.

Proposition 45. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $S \subseteq X$ y $\mathcal{B}(x)$ una base local de entornos para todo $x \in X$. Tenemos que $x \in \mathring{S}$ si y solo si

$$\text{existe un } B_x \in \mathcal{B}_x \text{ tal que } B_x \subseteq S.$$

Demostración. Si $x \in X$ es un punto interior de S, esto es por definición que S es un entorno de x y como $\mathcal{B}(x)$ es una base local, por definición existirá un $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B_x \subseteq S$. $\square$

Corollary 10. Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subseteq X$. Entonces $x \in \mathring{S}$ si y solo si existe un $r > 0$ tal que $\mathbb{B}(x; r) \subseteq S$.

Demostración. La Proposición 45 nos dice que x es un punto interior de S si y solo si $B_x \subseteq S$ para un $B_x \in \mathcal{B}(x)$. Como por la Proposición 21, las bolas abiertas forman una base local de entornos para la topología métrica, $B_x = \mathbb{B}(x; r)$ para un cierto $r > 0$. $\square$

Esta Proposición nos servirá como punto de partida para poder demostrar las propiedades más elementales del interior y llegar hasta nuestro objetivo de demostrar que es el abierto más grande contenido en el conjunto. Empecemos por las propiedades más básicas.

Proposition 46 (Propiedades elementales del interior)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S, T \subseteq X$. Entonces

I1) $\mathring{X} = X$.

I2) $\mathring{S} \subseteq S$

I3) $\mathring{\mathring{S}} = \mathring{S}$.

I4) $\text{int}(S \cap T) = \mathring{S} \cap \mathring{T}$.

Demostración. En primer lugar, como $\mathring{X}$ es un subconjunto, entonces $\mathring{X} \subseteq X$ se cumple trivialmente. Veamos la otra inclusión. Sea $x \in X$. Entonces como X es abierto, tenemos que por Proposición 9, $X \in \mathcal{N}(x)$, es decir, $x \in \mathring{X}$ y probamos de esta manera I1).

Sea ahora $x \in \mathring{S}$. Entonces $S \in \mathcal{N}(x)$ y por N1) de la Proposición 8, $x \in S$, por lo que probamos I2).

El párrafo anterior nos demuestra que $\mathring{\mathring{S}} \subseteq \mathring{S}$. Veamos la inclusión contraria. Sea $x \in \mathring{S}$. Entonces existe un $A \in \mathcal{T}(x)$ tal que $A \subseteq S$. Como A es abierto, entonces por Proposición 9, $A \in \mathcal{N}(y)$ para todo $y \in A$ y por N4) de la Proposición 8, $S \in \mathcal{N}(y)$, es decir, $y \in \mathring{S}$. Como esto es cierto para todo $y \in A$, entonces $A \subseteq \mathring{S}$. Finalmente, como $x \in A$, entonces $\mathring{S} \in \mathcal{N}(x)$, luego $x \in \mathring{\mathring{S}}$. La prueba de I3) está completa.

Finalmente, tenemos que si $x \in \mathring{S} \cap \mathring{T}$, por definición, $S, T \in \mathcal{N}(x)$ y por N2) y N4) de la Proposición 8, esto es equivalente a decir que $S \cap T \in \mathcal{N}(x)$, es decir, $\operatorname{int}(S \cap T)$. Y así demostramos I4). □

Enunciemos y demostremos algunas propiedades sobre el interior.

Proposition 47. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S, T \subseteq X$. Si $S \subseteq T$, entonces $\mathring{S} \subseteq \mathring{T}$.

Demostración. Si $x \in \mathring{S}$, entonces $S \in \mathcal{N}(x)$ y como $S \subseteq T$, por N4) de la Proposición 8, tenemos que $T \in \mathcal{N}(x)$, por lo que $x \in \mathring{T}$. □

Proposition 48. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S, T \subseteq X$. Entonces $\mathring{S} \cup \mathring{T} \subseteq \operatorname{int}(S \cup T)$.

Demostración. Sea $x \in \mathring{S} \cup \mathring{T}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \in \mathring{S}$. Entonces $S\mathcal{N}(x)$. Como $S \subseteq S \cup T$, entonces por N4) de la Proposición 8, entonces $S \cup T \in \mathcal{N}(x)$, por lo que $x \in \operatorname{int}(S \cup T)$. □

Example 35. Veamos que esta inclusión puede ser estricta. Tomemos $\mathbb{R}$ con la topología usual y sean $S = [0, 1]$ y $T = [1, 2]$. Por un lado, tenemos que $S \cup T = [0, 2]$, por lo que $\operatorname{int}(S \cup T) = (0, 2)$. Por otro lado, $\mathring{S} = (0, 1)$ y $\mathring{T} = (1, 2)$, por lo que $\mathring{S} \cup \mathring{T} = (0, 1) \cup (1, 2)$. De este modo, $\mathring{S} \cup \mathring{T} = (0, 1) \cup (1, 2) \subsetneq (0, 2) = \operatorname{int}(S \cup T)$.

Como uno habrá podido percatarse, las demostraciones de que las demostraciones y los resultados a los que llega tanto en el caso de la clausura como en el del interior son prácticamente análogos, teniendo de alguna manera un comportamiento dual. Se quiere decir con esto que las mismas técnicas de demostración y casi los mismos argumentos podrían ser utilizados en el interior tomando como referencia lo que se demostró con la clausura. Es por tanto que alguna relación conceptual entre estas dos nociones debe existir de algún modo. En efecto, el siguiente resultado nos demuestra que esa relación entre la clausura y el interior existe.

Proposition 49 (Relación entre clausura e interior)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$. Entonces

$$X \setminus \mathring{S} = \overline{X \setminus S}.$$

Demostración. Sea $x \in X \setminus \mathring{S}$, es decir, $x \notin \mathring{S}$. Por definición del interior, tenemos que $S \notin \mathcal{N}(x)$. Como no cumple la definición de entorno, entonces para todo $A \in \mathcal{T}(x)$, $A \nsubseteq S$, o lo que es lo mismo, $A \cap (X \setminus S) \neq \varnothing$. Como $\mathcal{T}(x)$ es una base de entornos de x por el Ejemplo 16, entonces en virtud de la Proposición 32, $x \in \overline{X \setminus S}$. □

Corollary 11. $\operatorname{int}(X \setminus S) = X \setminus \overline{S}$.

Demostración. Tomemos $T = X \setminus S$. Por Proposición 50, $X \setminus \mathring{T} = \overline{X \setminus T}$. Por un lado, $X \setminus \mathring{T} = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus S)$. Por otro lado, $X \setminus \mathring{T} = \overline{X \setminus (X \setminus S)} = \overline{S}$. Por tanto, $X \setminus \operatorname{int}(X \setminus S) = \overline{S}$, es decir, $\operatorname{int}(X \setminus S) = X \setminus \overline{S}$ □

Al sólo usar la definición de interior para demostrar esta igualdad de conjuntos, uno podría usar esta proposición para demostrar todas las propiedades anteriores sobre el interior de un conjunto. Una vez introducido esta igualdad, haremos uso de ella para ahora demostrar la propiedad más importante: ser el abierto más grande contenido en el subconjunto. Esta fórmula nos simplificará la demostración en comparación a si sólo usamos la definición, si bien es posible demostrar las propiedades siguientes usando sólo al definición de conjunto interior.

Proposition 50. El interior de cualquier conjunto es abierto.

Demostración. Como por Proposición 37, $\overline{X \setminus S}$ es cerrado, entonces por Proposición 49, $X \setminus \mathring{S} = \overline{X \setminus S}$ es cerrado, luego $\mathring{S} \in \mathcal{T}$. □

Corollary 12. $S \in \mathcal{T}$ si y solo si $S = \mathring{S}$.

Demostración. $S \in \mathcal{T}$ si y solo si $X \setminus S$ es cerrado y por el Corolario 7, esto es equivalente a decir que $X \setminus S = \overline{X \setminus S} = X \setminus \mathring{S}$ por la Proposición 49. De este modo, $S = \mathring{S}$. □

Proposition 51. El interior $\mathring{S}$ es el abierto más pequeño contenido en S.

Demostración. Por Proposición 50, $\mathring{S} \in \mathcal{T}$ y por I2) de la Proposición 46, el $\mathcal{S} \subseteq S$.

Veamos ahora que, en efecto, el interior es el mayor de todos los abiertos que están contenidos en S. Para demostrar esto basta ver lo siguiente: si $A \in \mathcal{T}$ tal que $A \subseteq S$, entonces $A \subseteq \mathring{S}$.

Por tanto, sea A el dicho abierto. Por Proposición 47, tenemos que $\mathring{A} \subseteq \mathring{S}$ y como $A \in \mathcal{T}$, entonces por Proposición 50, $A = \mathring{A} \subseteq \mathring{S}$. □

Para finalizar con esta sección, de manera análoga a cómo un operador clausura podía definir una topología, no es de extrañar que el interior también permite describir topologías.

Proposition 52. Sea $X \neq \varnothing$ arbitrario y $\mathfrak{i} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ un operador satisfaciendo I1)-I4). Entonces $\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid \mathfrak{i}(A) = A\}$ es una topología de manera que $\mathfrak{i}(S) = \mathring{S}$.

Demostración. Definamos el operador $\mathfrak{c} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ de manera que $\mathfrak{c}(S) = X \setminus \mathfrak{i}(X \setminus S)$. Veamos que $\mathfrak{c}$ satisface las propiedades Cl1)-Cl4).

En primer lugar, $\mathfrak{c}(\varnothing) = X \setminus \mathfrak{i}(X \setminus \varnothing) = X \setminus \mathfrak{i}(X) = X \setminus X = \varnothing$ y esto es cierto por I1), luego hemos probado Cl1).

Por otro lado, tomando un $S \subseteq X$ arbitrario, por I2) tenemos que $\mathfrak{i}(X \setminus S) \subseteq X \setminus S$, luego $S \subseteq X \setminus \mathfrak{i}(X \setminus S) = \mathfrak{c}(S)$, luego se cumple CL2).

Probemos ahora Cl3). $\mathfrak{c}(\mathfrak{c}(S)) = X \setminus \mathfrak{i}(X \setminus \mathfrak{c}(S)) = X \setminus \mathfrak{i}(\mathfrak{i}(X \setminus S)) = X \setminus (X \setminus S) = S$.

Finalmente, demostremos Cl4). $\mathfrak{c}(S \cup T) = X \setminus \mathfrak{i}(X \setminus (S \cup T)) = X \setminus \mathfrak{i}(X \setminus S \cap X \setminus T) = X \setminus (\mathfrak{i}(X \setminus S) \cap \mathfrak{i}(X \setminus S)) = X \setminus (\mathfrak{i}(X \setminus S)) \cup X \setminus (\mathfrak{i}(X \setminus T)) = \mathfrak{c}(S) \cup \mathfrak{c}(T)$.

Por tanto, como $\mathfrak{c}$ cumple Cl1)-Cl4), entonces por la Proposición 38 define una topología cuyos cerrados son aquellos $C \subseteq X$ tales que $\mathfrak{c}(C) = C$ y que cumple que $\mathfrak{c}(S) = \overline{S}$.

Por Proposición 2, la topología que define la familia de cerrados es $\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \in \mathcal{C}\}$. Por tanto, $A \in \mathcal{T}$ si y solo si $X \setminus A \in \mathcal{C}$, que es equivalente a decir que $X \setminus A = \mathfrak{c}(X \setminus A) = X \setminus \mathfrak{i}(A)$, es decir, $A ? \mathfrak{i}(A)$.

Finalmente, por la Proposición 49, $\mathfrak{i}(S) = X \setminus \mathfrak{c}(X \setminus S) = X \setminus \overline{X \setminus S} = \mathring{S}$. □

3.3.1. Exterior

Definition 25. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$. Decimos que $x \in X$ es un **punto exterior** de S si

$$X \setminus S \in \mathcal{N}(x).$$

Definimos el **exterior** como el conjunto de puntos exteriores de S, denotado por $\mathrm{ext}(S)$.

Proposition 53. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$. Entonces

$$\mathrm{ext}(X) = \mathrm{int}(X \setminus S).$$

Demostración. Tenemos que $x \in \mathrm{ext}(S)$ si y solo si $X \setminus S \in \mathcal{N}(x)$ y por definición de conjunto interior esto es equivalente a $x \in \mathrm{int}(X \setminus S)$. □

Proposition 54. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S, T \subseteq X$. Entonces

1. Si $S \subseteq T$, entonces $\mathrm{ext}(T) \subseteq \mathrm{ext}(S)$.

2. $\mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S))$.

Demostración. En primer lugar, por la Proposición 53, tenemos que si $S \subseteq T$, entonces $X \setminus T \subseteq X \setminus S$. Por Proposición 47, finalmente tenemos que $\mathrm{ext}(T) = \mathrm{int}(X \setminus T) \subseteq \mathrm{int}(X \setminus S) = \mathrm{ext}(S)$.

Por otro lado, Por I2) de la Proposición 46, tenemos que $\mathrm{ext}(S) = \mathrm{int}(X \setminus S) \subseteq X \setminus S$. Por tanto, $S \subseteq X \setminus \mathrm{ext(S)}$. Como el interior conserva la inclusión, entonces $\mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{int}(X \setminus \mathrm{ext}(S)) = \mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S))$. □

3.4. Frontera

Definition 26. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$. Decimos que $x \in X$ es un **punto de frontera** de S si

$$\text{para todo } U \in \mathcal{N}(x),\ U \cap S \neq \varnothing \text{ y } U \cap (X \setminus S) \neq \varnothing.$$

Definimos la **frontera** como el conjunto de puntos frontera de S, denotado por ∂S o $\mathrm{bd}(S)$.

Proposition 55. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\mathcal{B}(x)$ una base de entornos para $x \in X$ y $S \subseteq X$. Tenemos que $x \in \partial S$ si y solo si

$$\text{para todo } B_x \in \mathcal{B}(x),\ B_x \cap S \neq \varnothing \text{ y } B_x \cap (X \setminus S) \neq \varnothing.$$

Demostración. Como en particular las bases de entornos son entornos, entonces se tiene la primera implicación. Supongamos que se cumple la propiedad para las bases de entornos y tomemos $U \in \mathcal{N}(x)$, entonces existe un $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B_x \subseteq U$ y por hipótesis, $\varnothing \neq B_x \cap S \subseteq U \cap S$ y $\varnothing \neq B_x \cap S \subseteq U \cap (X \setminus S)$, luego $x \in \partial S$. □

Proposition 56. Sea (X, d) un espacio métrico, $S \subseteq X$. Tenemos que $x \in \partial S$ si y solo si

$$\text{para todo } r > 0,\ \mathbb{B}(x; r) \cap S \neq \varnothing \text{ y } \mathbb{B}(x; r) \cap (X \setminus S) \neq \varnothing.$$

Demostración. Las bolas abiertas forman una base de entornos de la topología métrica y aplicando la Proposición 55 al case métrico se tiene lo deseado. □

Proposition 57. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$. Entonces

$$\partial S = \overline{S} \cap \overline{X \setminus S}.$$

Demostración. Tenemos que $x \in \partial S$ es equivalente a decir que para todo entorno U de x, por un lado se cumple que $U \cap S \neq \varnothing$, es decir, $x \in \overline{S}$ y por otro lado que $U \cap (X \setminus S) \neq \varnothing$, equivalentemente, $x \in \overline{X \setminus S}$. Por tanto, $x \in \overline{S} \cap \overline{X \setminus S}$. □

Corollary 13. La frontera es un conjunto cerrado

Demostración. Por la Proposición 57, la frontera es la intersección de la clausura de dos conjuntos. Como la clausura es un conjunto cerrado, entonces la intersección de dos cerrados es otro cerrado. □

Proposition 58 (Frontera, clausura e interior)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$. Entonces

$$\partial S = \overline{S} \setminus \mathring{S}.$$

Demostración. Por la Proposición 57, $\partial S = \overline{S} \cap \overline{X \setminus S}$ y por la Proposición 49, se tiene que $\overline{X \setminus S} = X \setminus \mathring{S}$. Por tanto, $\partial S = \overline{S} \cap \overline{X \setminus S} = \overline{S} \cap X \setminus \mathring{S} = \overline{S} \setminus \mathring{S}$. □

Corollary 14. $A \in \mathcal{T}$ si y solo si $A \cap \partial A = \varnothing$.

Demostración. Supongamos que A es abierto. Podemos calcular su frontera mediante la Proposición 58: $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \setminus A$. Esto implica que $A \cap \partial A = \varnothing$.

Por otro lado, supongamos que $A \cap \partial A = \varnothing$. Demostremos que $A \in \mathcal{T}$ probando que $A = \mathring{A}$. Como siempre se cumple que $\mathring{A} \subseteq A$, basta probar la otra inclusión. Si $x \in A$, entonces por hipótesis $x \notin \partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$, lo que en particular se deduce que $x \notin X \setminus \mathring{A}$, es decir, $x \in \mathring{A}$. □

Capítulo 4

Aplicaciones continuas

En los tres capítulos anteriores pudimos estudiar las propiedades más básicas que se pueden encontrar en cualquier espacio topológico. En el primer capítulo vimos las nociones más básicas sobre una topología —abiertos, cerrados, bases y entornos—. En el segundo capítulo nos centramos en un tipo de espacio topológico concreto y uno de los más importantes por las varias propiedades que cumplen: los espacios métricos. En tercer lugar, pudimos definir varios operadores topológicos relacionados con los conjuntos abiertos y cerrados más próximos a un subconjunto dado —clausura e interior respectivamente—. No obstante, estos estudios se han podido proceder para un sólo espacio topológico. En muchos casos, tendremos varios espacios topológicos de manera que están relacionadas mediante una aplicación. Es por tanto que abrimos nuestro interés en estudiar qué propiedades debe tener esta aplicación para que, de alguna manera, también mantengas las propiedades topológicas entre un espacio y otro. Dicho de otra manera, estamos interesados en estudiar cuándo dos espacios topológicos tienen «los mismos abiertos» mediante la aplicación que los relaciona. Por tanto, en este capítulo veremos que propiedades debe tener la aplicación de manera que podamos catalogar dos espacios topológicos como equivalentes.

4.1. Continuidad en un punto

Definition 27. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X \to Y$ es **continua** en $x \in X$ si

$$\text{para todo } V \in \mathcal{N}_y(f(x)), \text{ existe un } U \in \mathcal{N}_X(x) \text{ t.q. } f(U) \subseteq V.$$

Proposition 59. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X \to Y$ es continua si y solo si

$$\text{para todo } B_{f(x)} \in \mathcal{B}_y(f(x)), \text{ existe un } B_x \in \mathcal{B}_X(x) \text{ t.q. } f(B_x) \subseteq B_{f(x)}.$$

Demostración. Supongamos que f es continua y tomemos un $B_{f(x)}$ entorno local de $f(x)$. Concretamente, es un entorno de $f(x)$, luego por la definición de continuidad en x, existe un entorno $v \in \mathcal{N}_X(x)$ tal que $f(U) \subseteq B_{f(x)}$. Ahora, como U es entorno de x, entonces existe un entorno local $B_x \subseteq U$, por lo que $f(B_x) \subseteq f(U) \subseteq B_{f(x)}$.

Supongamos ahora que se cumple la definición para la base local de entornos. Tomemos cualquier $V \in \mathcal{N}_Y(f(x))$. Entonces existe un $B_{f(x)} \subseteq \mathcal{B}_Y(f(x))$ tal que $B_{f(x)} \subseteq V$. De esta manera, por hipótesis, existe un $B_x \in \mathcal{B}_X(x)$ tal que $f(B_x) \subseteq B_{f(x)} \subseteq V$. Como en particular, B_x es entorno de x, entonces podemos tomar $U = B_x$, por lo que tenemos que $f(U) \subseteq V$. □

Proposition 60. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X \to Y$ es continua si y solo si

$$\text{para todo } V \in \mathcal{N}_Y(f(x)),\ f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_X(x).$$

Demostración. Supongamos que f es continua. Entonces para todo entorno V de $f(x)$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subseteq V$. Esto es equivalente a escribir que $U \subseteq f^{-1}(V)$. Como $U \in \mathcal{N}_X(x)$, entonces por N4), se tiene que $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_X(x)$.

Análogamente, Tomemos $V \in \mathcal{N}_Y(f(x))$ cual sea. Entonces por hipótesis, $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_X(x)$. Por definición de entorno, existe un abierto $A \in \mathcal{T}_X$ tal que $x \in A \subseteq f^{-1}(V)$, es decir, $f(A) \subseteq V$. Finalmente, como $x \in A$ y $A \in \mathcal{T}$, entonces por Proposición 9, $A \in \mathcal{N}_X(x)$, luego podemos tomar $U = A$, obteniendo finalmente que $f(U) \subseteq V$. □

Proposition 61 (Composición de funciones continuas en un punto)**.** Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ aplicaciones y $x \in X$. Si f es continua en x y g es continua en $f(x)$, entonces $g \circ f$ es continua en x.

Demostración. Sea $W \in \mathcal{N}_Z(g(f(x)))$. Como g es continua en $f(x)$, entonces existe un $V \in \mathcal{N}_Y(f(x))$ tal que $g(V) \subseteq W$. De la misma manera, como f es continua en x, tomando el entorno V, tenemos que existe un $U \in \mathcal{N}_X(x)$ tal que $f(U) \subseteq V$. Por tanto, tenemos que $g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W$, es decir, $(g \circ f)(U) \subseteq W$, demostrando entonces la continuidad en x de la aplicación composición $g \circ f$. □

4.2. Continuidad en todo el espacio

Definition 28. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X \to Y$ es **continua** si y solo si es continua para todo punto $x \in X$.

Proposition 62. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos. Son equivalentes:

1. La aplicación $f : X \to Y$ es continua.
2. Para todo $A \in \mathcal{T}_Y$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$.
3. Para todo $C \in \mathcal{C}_Y$, $f^{-1}(C) \in \mathcal{C}_X$.

Demostración. Supongamos que f es continua y tomemos $A \in \mathcal{T}_Y$. Si demostramos que $f^{-1}(A) \in \mathcal{N}_X(x)$ para todo $x \in f^x(A)$, entonces por la Proposición 9 se demostraría que $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$. Tomemos $x \in f^{-1}(A)$, entonces existe un $y \in A$ tal que $f(x) = y$. Como $f(x) \in A$, entonces $A \in \mathcal{N}_Y(f(x))$ y por la Proposición 60, $f^{-1}(A) \in \mathcal{N}_X(x)$.

Supongamos ahora que la preimagen de todo abierto es abierto. Tomemos $C \in \mathcal{C}_Y$. Entonces $Y \setminus C \in \mathcal{T}_X$ y por hipótesis, tenemos que $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C) \in \mathcal{T}_X$, luego $f^{-1}(C) \in \mathcal{C}_X$.

Finalmente, supongamos que la preimagen de todo cerrado es cerrado. Sea $V \in \mathcal{N}_Y(f(x))$, entonces existe un $A \in \mathcal{T}_Y(f(x))$ tal que $A \subseteq V$, equivalentemente, $Y \setminus V \subseteq Y \setminus A$. Como $C = Y \setminus A \in \mathcal{C}_Y$, entonces por hipótesis $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(C) \in \mathcal{C}_X$. Equivalentemente, $X \setminus f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(V)$. Como $X \setminus f^{-1}(C) \in \mathcal{T}(x)$, entonces $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_X(x)$, demostrando entonces que es continua. □

Corollary 15. Sea $\mathcal{B}_Y$ una base para la topología $\mathcal{T}_Y$. Una aplicación $f : X \to Y$ es continua si y solo si para todo $B \in \mathcal{B}_Y$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$.

Demostración. Sea f continua y $B \in \mathcal{B}_Y$, en particular B es un abierto en Y, por lo que $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$ por la Proposición 62. Análogamente, sea $A \in \mathcal{T}_Y$, demostremos que $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$. Sea $x \in f^{-1}(A)$, entonces $f(x) \in A$ y como $\mathcal{B}_Y$ es base de la topología, entonces existe un $B \in \mathcal{B}_Y$ tal que $f(x) \in B \subseteq A$, por tanto, $x \in f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A)$. Como $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, entonces $f^{-1}(A) \in \mathcal{N}_X(x)$, es decir, es entorno de todos sus puntos, luego $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$. □

Proposition 63. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X \to Y$ es continua si y solo si $f\left(\overline{S}\right) \subseteq \overline{f(S)}$ para todo $S \subseteq X$.

Demostración. Supongamos que f es continua y tomemos un $x \in \overline{S}$. Como f es continua en x, tomando un $V \in \mathcal{N}_Y(f(x))$ arbitrario, entonces existe un $U \in \mathcal{N}_X(x)$ tal que $f(U) \subseteq V$. Como $x \in \overline{S}$ y U es entorno de x, por definición de la clausura, $U \cap S \neq \varnothing$. Por tanto, $\varnothing \neq f(U \cap S) \subseteq f(U) \cap f(S) \subseteq V \cap f(S)$. Como esto es cierto para cualquier V entorno de $f(x)$, $f(x) \in \overline{f(S)}$, es decir, $f\left(\overline{S}\right) \subseteq \overline{f(S)}$.

Supongamos ahora que $f\left(\overline{S}\right) \subseteq \overline{f(S)}$ para todo $S \subseteq X$. Tomemos $C \in \mathcal{C}_Y$ arbitrario. Si comprobamos que $D = f^{-1}(C) \in \mathcal{C}_X$, entonces por la Proposición 62 se tiene. En primer lugar, siempre se cumple que $f(D) = f(f^{-1}(C)) \subseteq C$. Por hipótesis, $f\left(\overline{D}\right) \subseteq \overline{f(D)} \subseteq \overline{C} = C$. De este modo, $\overline{D} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{D}\right)\right) \subseteq f^{-1}(C) = D$. Por tanto, $\overline{D} = D$, pues la otra inclusión siempre se da y esto demuestra que $D = f^{-1}(C)$ es cerrado. □

Proposition 64 (Composición de funciones continuas)**.** Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ aplicaciones. Si f es continua y g es continua, entonces $g \circ f$ es continua.

Demostración. Basta probar que $g \circ f$ es continua para todo punto $x \in X$. Dado un cierto $x \in X$, como es f continua, entonces en particular f es continua en x. De la misma manera, g es continua en $f(x) \in Y$, luego por la Proposición 61, $g \circ f$ es continua en x. Como esto es cierto para todo $x \in X$, entonces $g \circ f$ es continua. □

4.3. Aplicaciones abiertas y cerradas

Definition 29. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X \to Y$ es **abierta** si

$$\text{para todo } A \in \mathcal{T}_X,\ f(A) \in \mathcal{T}_Y$$

Proposition 65. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos y $\mathcal{B}_X$ una base de $\mathcal{T}_X$. Una aplicación $f : X \to Y$ es abierta si y solo si

$$\text{para todo } B \in \mathcal{B}_X,\ f(B) \in \mathcal{T}_Y$$

Demostración. Supongamos que f es abierta. En particular, como todo abierto básico $B \in \mathcal{B}_X$ es abierto, entonces $f(B)$ es abierto en Y. Contrariamente, supongamos que se cumple para los abiertos básicos. Sea $A \in \mathcal{T}_X$, demostremos que $f(A) \in \mathcal{T}_Y$. Dado $y \in f(A)$, entonces existe un $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Como A es abierto, exite un $B \in \mathcal{B}_X$ tal que $x \in B \subseteq A$. Por tanto, $f(x) = y \in f(B) \subseteq f(A)$. Como $f(B) \in \mathcal{T}_Y$, entonces $f(A) \in \mathcal{N}_Y(y)$. Como esto es cierto para todo $y \in f(A)$, entonces $f(A) \in \mathcal{T}_Y$. □

Proposition 66. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos. Son equivalentes

1. f es abierta.
2. Para todo $x \in X$, $U \in \mathcal{N}_X(x) \Rightarrow f(U) \in \mathcal{N}_Y(f(x))$.
3. Para todo $S \subseteq X$, $f(\text{int}_X(S)) \subseteq \text{int}_Y(f(S))$.
4. Para todo $C \in \mathcal{C}_X$, $\{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq C\} \in \mathcal{C}_Y$.

Demostración. Supongamos que f es abierta. Tomemos $x \in X$ y $U \in \mathcal{N}_X(x)$ arbitrarios. Entonces por definición de entorno, existe un $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq U$. Por tanto, $x \in f(A) \subseteq f(U)$. Como f es abierta, entonces $f(A) \in \mathcal{T}_Y$ y por tanto, por la definición de entorno, $f(U) \in \mathcal{N}_Y(f(x))$.

Sea ahora $S \subseteq X$ y tomemos $x \in \text{int}_X(S)$. Entonces $S \in \mathcal{N}_X(x)$. Por hipótesis, $f(S) \in \mathcal{N}_Y(f(x))$, por lo que $f(x) \in \text{int}_Y(f(S))$. Dicho de otra manera, $f(\text{int}_X(S)) \subseteq \text{int}_Y(f(S))$.

Fijémonos que $\{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq C\} = Y \setminus f(X \setminus C)$. Por tanto, basta probar con que $f(X \setminus C) \in \mathcal{T}_Y$. Tomando $S = X \setminus C \in \mathcal{T}_X$, tenemos que $f(\text{int}_X(S)) = f(X \setminus C) \subseteq \text{int}_Y(f(S)) = \text{int}_Y(f(X \setminus C))$. Por tanto, como la otra implicación se tiene, obtenemos que $f(X \setminus C) = \text{int}_Y(f(X \setminus C))$, por lo que $f(X \setminus C) \in \mathcal{T}_Y$.

Finalmente, sea $A \in \mathcal{T}_X$. Entonces $C = X \setminus A \in \mathcal{C}_X$. Por hipótesis, $\{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq C\} = Y \setminus f(X \setminus C) \in \mathcal{C}_y$. Además, tenemos que $Y \setminus f(X \setminus C) = Y \setminus f(A)$ y como este conjunto es un cerrado en Y, se tiene que $f(A) \in \mathcal{T}_Y$, luego f es abierto. □

Definition 30. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X \to Y$ es **cerrada** si

$$\text{para todo } C \in \mathcal{C}_X,\ f(C) \in \mathcal{C}_Y$$

Proposition 67. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos. Son equivalentes

1. f es cerrada.
2. Para todo $S \subseteq X$, $\overline{f(S)} \subseteq f\left(\overline{S}\right)$.
3. Para todo $A \in \mathcal{T}_X$, $\{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A\} \in \mathcal{T}_Y$.

Demostración. Supongamos que f es cerrada. Dado un $S \subseteq X$ arbitrario, entonces tenemos que $S \subseteq \overline{S}$, por lo que $f(S) \subseteq f\left(\overline{S}\right)$. Como f es cerrada, $f\left(\overline{S}\right) \in \mathcal{C}_Y$, luego es un cerrado que contiene a $f(S)$. Por definición de la clausura de ser el cerrado más pequeño que contiene a $f(S)$, $\overline{f(S)} \subseteq f\left(\overline{S}\right)$.

Fijémonos que $\{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A\} = Y \setminus f(X \setminus A)$. De este modo, basta probar que $f(X \setminus A) \in \mathcal{C}_Y$. Si $A \in \mathcal{T}_X$, tomando $S = X \setminus A \in \mathcal{C}_X$, tenemos que $\overline{f(X \setminus A)} = \overline{f(S)} \subseteq f\left(\overline{S}\right) = f\left(\overline{X \setminus A}\right) = f(X \setminus A)$. Como la otra inclusión se cumple siempre, tenemos que $\overline{f(X \setminus A)} = f(X \setminus A)$, luego $f(X \setminus A) \in \mathcal{C}_Y$.

Finalmente, dado un $C \in \mathcal{C}_X$, entonces $A = X \setminus C \in \mathcal{T}_X$ y por hipótesis, $Y \setminus f(X \setminus A) \in \mathcal{T}_Y$, es decir, $f(X \setminus A) = f(C) \in \mathcal{C}_Y$, luego la aplicación es cerrada. □

Proposition 68. Sea $f : X \to Y$ una aplicación biyectiva. Son equivalentes:

1. f es abierta.
2. f es cerrada.
3. f^{-1} es continua.

Demostración. Supongamos que f es abierta. Tomemos $C \in \mathcal{C}_X$, entonces $A = X \setminus C \in \mathcal{T}_X$. Como f es abierta, $f(A) \in \mathcal{T}_Y$. Finalmente, como f es biyectiva, entonces $f(C) = f(X \setminus A) = Y \setminus f(A) \in \mathcal{C}_Y$, luego f es cerrada.

Supongamos ahora que f es cerrada. Entonces para todo $C \in \mathcal{C}_X$, $f(C) = (f^{-1})^{-1}(C) \in \mathcal{C}_Y$, que es lo mismo que decir que f^{-1} es continua.

Finalmente, supongamos que f^{-1} es continua. Entonces para todo $A \in \mathcal{T}_X$, $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \in \mathcal{T}_Y$, es decir, que f es abierta. □

Proposition 69. La composición de aplicaciones abiertas (resp. cerradas) es abierta (cerrada).

Demostración. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ abiertas. Entonces para todo $A \in \mathcal{T}_X$, $f(A) \in \mathcal{T}_Y$, por lo que $(g \circ f)(A) = g(f(A)) \in \mathcal{T}_Z$.

De la misma manera, si f y g son cerradas, entonces para todo $C \in \mathcal{C}_X$, $f(C) \in \mathcal{C}_Y$, por lo que $(g \circ f)(C) = g(f(C)) \in \mathcal{T}_Z$. □

4.4. Homeomorfismos

Definition 31. Dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ son **homeomorfos** ($X \cong Y$) si existe una aplicación $f : X \to Y$ tal que

1. f es biyectiva.
2. f y f^{-1} son continuas.

Llamamos a esta aplicación f **homeomorfismo**.

Remark 1. Una aplicación biyectiva f es un homeomorfismo si y solo si f^{-1} es un homeomorfismo.

Proposition 70. Sea $f_X \to Y$ una aplicación biyectiva. Son equivalentes:

1. f es un homeomorfismo.
2. f es continua y abierta.

3. f es continua y cerrada.

Demostración. Es consecuencia directa de la Proposición 68. □

Proposition 71. La composición de funciones homeomorfas es homeomorfa.

Demostración. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to z$ ambas homemomorfas. En primer lugar, f y g son en particular biyectivas, por lo que $g \circ f$ es también biyectivo. Por otro lado, como f y g son continuas, entonces por la Proposición 64, $g \circ f$ es continua. Finalmente, como f^{-1} y g^{-1} son también continuas, entonces su composción $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$ es continua. En resumen, $g \circ f$ es biyectiva y $g \circ f$ y $(g \circ f)^{-1}$ son continuas, luego $g \circ f$ es continua. □

Proposition 72. La relación «ser homeomorfo» es una RBE.

Demostración. Veamos que se cumplen la reflexiva. En primer lugar, tomemos $\mathrm{id}_X : X \to X$. Esta aplicación es biyectiva por ser la identidad y es continua. La inversa es ella misma, por lo que su inversa también es continua. Luego es un homeomorfismo y por tanto $X \cong X$.

Veamos ahora la simétrica. Supongamos que $X \cong Y$. Entonces $f : X \to Y$ homeomorfismo. Tomando $f^{-1} : Y \to X$, entonces es también un homeomorfismo, luego $Y \cong X$.

Finalmente, la transitiva se cumple por que la composición de funciones homemomorfas es homeomorfa. □

Definition 32. Decimos que una sentencia P es una **propiedad topológica** si se conserva por homeomorfismos: si $X \cong Y$ entonces

$$P \text{ es cierto en } X \Leftrightarrow P \text{ es cierto en } Y$$

4.5. Continuidad en espacios métricos

Proposition 73 (Caracterización de continuidad en espacios métricos)**.** Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una aplicación $f : X \to Y$ es continua en x_0 si y solo si

$$\text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe un } \delta > 0 \text{ t.q. } d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Demostración. Por la proposición 59, f es continua si y solo si para todo $B_{f(x_0)} \in \mathcal{B}_y(f(x_0))$, existe un $B_x \in \mathcal{B}_X(x_0)$ t.q. $f(B_{x_0}) \subseteq B_{f(x_0)}$. Como estamos en el caso de espacios métricos, por la Proposición 21, las bolas forman una base local de entornos, luego $B_{f(x_0)} = \mathbb{B}_Y(f(x_0); \varepsilon)$ y $B_{x_0} = \mathbb{B}_X(x_0; \delta)$, por lo que reescribiríamos $f(\mathbb{B}_X(x_0; \delta)) \subseteq \mathbb{B}_Y(f(x_0); \varepsilon)$. Esto se puede reescribir de la siguiente manera: si $x \in \mathbb{B}_X(x_0; \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathbb{B}_Y(f(x_0); \varepsilon)$, o lo que es lo mismo, $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. □

Definition 33. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una aplicación $f : X \to Y$ es **uniformemente continua** si

$$\text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe un } \delta > 0 \text{ t.q. } d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \text{ para todo } x_1, x_2 \in X.$$

Proposition 74. Toda aplicación uniformemente continua es continua.

Demostración. Tomemos $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe un $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, x_0) < \delta$, entonces $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Esto demuestra que f es continua en x_0. Como esto es cierto para cualquier $x_0 \in X$, entonces f es continua. □

Definition 34. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Decimos que X e Y son **isométricos** si existe una aplicación $f : X \to Y$ es una **isometría** si para todo $x_1, x_2 \in X$,

1. f es biyectiva.

2. Para todo $x_1, x_2 \in X$, $d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2))$.

Llamamos a esta aplicación f **isometría**.

Remark 2. Una aplicación biyectiva f es una isometría si y solo si f^{-1} es una isometría.

Proposition 75. Toda isometría es uniformemente continuo.

Proposition 76. Sea $f_X \to Y$ una isometría entre dos espacios métricos. Tomemos $\varepsilon > 0$. Entonces tomando $\delta = \varepsilon$ obtenemos que $d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) < \delta = \varepsilon$.

Corollary 16. Toda isometría es un homeomorfismo.

Demostración. En primer lugar, una isometría es biyectiva por definición. Por otro lado, por Proposición 75, la isometría es uniformemente continua, luego en particular es continua. Finalmente, por la Observación 2, la inversa es una isometría y, en particular, es continua. Por tanto, es un homeomorfismo. □

4.6. Topologías inciales y finales

Proposition 77. Sean $(X, \mathcal{T}_1)$, $(X, \mathcal{T}_2)$ e $(Y, \mathcal{T})$ y $f : X \to Y$ una aplicación. Supongamos que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Si f es continua en $\mathcal{T}_1$, entonces f es continua en $\mathcal{T}_2$.

Demostración. Supongamos que $A \in \mathcal{T}$. Como f es continua en $\mathcal{T}_1$, entonces $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. □

Remark 3. Si X tiene la topología discreta, entonces toda aplicación $f : X \to Y$ es continua para cualquier espacio topológico Y.

Proposition 78. Sean $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ y $f : X \to Y$ una aplicación. Supongamos que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Si f es continua en $\mathcal{T}_2$, entonces f es continua en $\mathcal{T}_1$.

Demostración. Supongamos que $A \in \mathcal{T}_1$. Entonces $A \in \mathcal{T}_2$ y como f es continua en $\mathcal{T}_2$, entonces $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$. □

Remark 4. Si Y tiene la topología trivial, entonces toda aplicación $f : X \to Y$ es continua para cualquier espacio topológico X.

Definition 35. Sean $X \neq \varnothing$, $\{(Y_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ una colección de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_i : X \to Y_i\}_{i \in I}$. Decimos la **topología inicial** de $\mathcal{F}$ es la topología $\mathcal{T}_{X,\mathcal{F}}$ generada por $\{f_i^{-1}(A_i) \mid A_i \in \mathcal{T}_i,\ i \in I\}$.

Remark 5. Denotemos por $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \{f_i^{-1}(A_i) \mid A_i \in \mathcal{T}_i,\ i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$. Entonces se puede demostrar usando la Proposición 62 que $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{T}$ si y solo si f_i son continuas para todo $i \in I$.

Proposition 79. Sean $(X, \mathcal{T})$ e $\{(Y_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ una colección de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$. Son equivalentes:

1. $\mathcal{T}$ es la topología inicial de $\mathcal{F}$.

2. $\mathcal{T}$ es la topología más débil que hace a las $f_i \in \mathcal{F}$ continuas.

3. Para toda aplicación $g : (Z, \mathcal{T}_Z) \to (X, \mathcal{T})$, g es continua si y solo si $f_i \circ g$ es continua para todo $i \in I$.

Demostración. Por Corolario 2, $\mathcal{T}$ es la topología más débil tal que $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{T}$. Por la Observación 5, $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{T}$ es equivalente a que las f_i sean continuas, demostrando lo deseado.

Supongamos ahora que $\mathcal{T}$ es la topología inicial de $\mathcal{F}$. Esto implica que las f_i son continuas. Si g es continua, $f_i \circ g$ es continua por Proposición 64. Por otro lado, supongamos que $g \circ f_i$ es continua para todo $i \in I$. Sea $B \in \mathcal{B}_X$, entonces $B = \cap_i f_i^{-1}(A_i)$ donde $A_i \in \mathcal{T}_i$ existe un $A_i \in \mathcal{T}_i$ tal que $B_i = f_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{T}_i$. Como $g \circ f_i$ es continua, entonces $g^{-1}(B_i) = g^{-1}(f^{-1}(A_i)) = (f_i \circ g)^{-1}(A_i) \in \mathcal{T}_Z$. Como esto ocurre para todo i, entonces tenemos que $g^{-1}(B) = g^{-1}(\cap i B_i) = \cap g^{-1}(B_i) \in \mathcal{T}_i$. Como esto se cumple para cualquier elemento de la base, entonces por Proposición 15, se tiene que g es continua.

Finalmente, Supongamos que se cumple el tercer punto. Tomando $Z = X$ y $g = \mathrm{id}_X$, como es continua, entonces $f_i \in \mathcal{F}$ son continuas para todo $i \in I$. Finalmente, supongamos que existe otra $\mathcal{T}'$ tal que f_i son continuas en $\mathcal{T}'$. Entonces $(Z, \mathcal{T}_Z) = (X, \mathcal{T}')$ y $g = \mathrm{id}_X$. En ese caso, tenemos que $f_i \circ g = f_i$ que es continua para la topología $\mathcal{T}'$. Por lo tanto, g es continua. Es decir, para todo $A \in \mathcal{T}$, $\mathrm{id}_X^{-1}(A) = A \in \mathcal{T}'$. En otras palabras, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Luego $\mathcal{T}$ es la topología más débil que hace a las f_i continuas. □

Proposition 80. Sean $Y \neq \varnothing$, $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ una colección de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_i : X_i \to Y\}_{i\in I}$. Entonces

$$\mathcal{T}_{Y,\mathcal{F}} := \{A \subseteq Y \mid f_i^{-1}(A) \in \mathcal{T}_i,\ i \in I\} \text{ es una topología.}$$

Demostración. Veamos que se cumplen las tres condiciones de la definición de continuidad. En primer lugar, $f_i^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ y $f_i^{-1}(Y) = X$ para todo $i \in I$, luego $\varnothing, Y \in \mathcal{T}_{Y,\mathcal{F}}$. Por otro lado, sean $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_{Y,\mathcal{F}}$. De este modo, $f_i^{-1}(A_1), f_i^{-1}(A_2) \in \mathcal{T}_i$ para todo $i \in I$. Por tanto, $f_i^{-1}(A_1) \cap f_i^{-1}(A_2) = f^{-1}(A_1 \cap A_2) \in \mathcal{T}_i$, por lo que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_{Y,\mathcal{F}}$. Finalmente, si $\{A_j\}_{j\in J} \subseteq \mathcal{T}_{Y,\mathcal{F}}$, entonces $f_i^{-1}(A_j) \in \mathcal{T}_i$ para todo $i \in J$ y $j \in J$. Por tanto, $\cup_j f^{-1}(A_j) = f_i^{-1}(\cup_j A_j) \in \mathcal{T}_i$, es decir, $\cup_j A_j \in \mathcal{T}_{Y,\mathcal{F}}$. □

Definition 36. Sean $Y \neq \varnothing$, $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ una colección de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_i : X_i \to Y\}_{i\in I}$. Decimos la **topología final** de $\mathcal{F}$ es la topología $\mathcal{T}_{Y,\mathcal{F}}$.

Proposition 81. Sean $(Y, \mathcal{T})$ e $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ una colección de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_i : X_i \to Y\}_{i\in I}$. Son equivalentes:

1. $\mathcal{T}$ es la topología final de $\mathcal{F}$.

2. $\mathcal{T}$ es la topología más fina que hace a las $f_i \in \mathcal{F}$ continuas.

3. Para toda aplicación $g : (Y, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$, g es continua si y solo si $g \circ f_i$ es continua para todo $i \in I$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{T}$ es la topología final. Entonces es fácil observar que f_i son continuas para todo $i \in I$. Veamos que $\mathcal{T}$ es la más fina. Supongamos que $\mathcal{T}'$ es otra topología que hace a las f_i continuas y sea $A \in \mathcal{T}'$. Como f_i son continuas en $\mathcal{T}'$, entonces $f_i^{-1}(A) \in \mathcal{T}_i$ para todo $i \in I$ y por definición de topología final, $A \in \mathcal{T}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{T}$ es la más fina que hace a las f_i continuas. Entonces $\mathcal{T}_{Y,\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{T}$ Si g es continua, entonces la composición $g \circ f_i$ es también continua. Supongamos que $g \circ f_i$ es continua. Tomando $A \in \mathcal{T}_Z$, entonces $(g \circ f_i)^{-1}(A) = f_i^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{T}_i$ para todo $i \in I$ y por tanto $g^{-1}(A) \in \mathcal{T}\mathcal{T}_{Y,\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{T}$. Como esto es cierto para todo $A \in \mathcal{T}_Z$, entonces g es continua.

Supongamos ahora que se cumple la implicación doble. Veamos que $\mathcal{T}$ es la topología final. En primer lugar, tomando $(Z, \mathcal{T}_Z) = (Y, \mathcal{T})$ y $g = \mathrm{id}_Y$, como la función identidad en continua, entonces $g \circ f_i = f_i$ es continua. Como la topología final es la más fina, entonces $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{Y,\mathcal{F}}$. Por otro lado, tomando $(Z, \mathcal{T}_Z) = (Y, \mathcal{T}_{Y,\mathcal{F}})$ y $g : \mathrm{id}_Y : (Y, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_{Y,\mathcal{F}})$. Como $g \circ f_i = f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (Y, \mathcal{T}_{Y,\mathcal{F}})$ es continua por la definición de topología final, entonces g es continua y por tanto, $\mathcal{T}_{Y,\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{T}$. $\square$

Capítulo 5

Nuevas topologías

5.1. Subespacios topológicos

Proposition 82. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico y $H \subseteq X$ no vacío. Entonces

$$\mathcal{T}_H := \{A \cap H \mid A \in \mathcal{T}\} \text{ es una topología en } H.$$

Demostración. Es fácil observar que $\varnothing = \varnothing \cap H$ y $H = H \cap X$. Por otro lado, si $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_H$, entonces existen $A'_1, A'_2 \in \mathcal{T}$ tal que $A_1 = A'_1 \cap H$ y $A_2 = A'_2 \cap H$. De este modo, $A_1 \cap A_2 = A'_1 \cap H \cap A'_2 \cap H = H \cap (A'_1 \cap A'_2) \in \mathcal{T}_H$. Finalmente, si $\{A_i\}_i \subseteq \mathcal{T}$, entonces $A_i = A'_i \cap H$ donde $A'_i \in \mathcal{T}$ y por tanto tenemos que $\cup_i A_i = \cup_i (A'_i \cap H) = (\cup_i A_i) \cap H \in \mathcal{T}_H$. □

Definition 37. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico y $H \subseteq X$ no vacío. Llamamos a $\mathcal{T}_H$ la **topología relativa** a X. Al par $(H, \mathcal{T}_H)$ se le conoce como **subespacio topológico** de $(X, \mathcal{T})$.

Proposition 83. Sea $(H, \mathcal{T}_H)$ un subespacio topológico de $(X, \mathcal{T})$.

1. $\mathcal{C}_H = \{C \cap H \mid C \in \mathcal{C}\}$.
2. Si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{B}_H = \{B \cap H \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una base de $\mathcal{T}_H$.
3. $\mathcal{N}_H(x) = \{U \cap H \mid U \in \mathcal{N}(x)\}$ para todo $x \in X$.
4. Si $\mathcal{B}(x)$ es una base de entornos de $x \in X$ en $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{B}_H(x) = \{B_x \cap H \mid B_x \in \mathcal{B}(x)\}$ es una base de entornos de x en $\mathcal{T}_H$.

Demostración. En primer lugar, $C' \in \mathcal{C}_H$ si y solo si $H \setminus C \in \mathcal{T}_H$, es decir, existe un $A \in \mathcal{T}$ tal que $H \setminus C = A \cap H$, equivalentemente, $C = H \setminus (A \cap H) = H \setminus A = X \setminus A \cap H$, donde $X \setminus A \in \mathcal{C}$.

Por otro lado, Sea $A' \in \mathcal{T}_H$, entonces $A' = A \cap H$ para algún $A \in \mathcal{T}$. Como $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$, entonces para todo $x \in A' \subseteq A$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathcal{B} \subseteq A$. Por tanto, $x \in \mathcal{B} \cap H \subseteq A \cap H = A'$.

En tercer lugar, $U' \in \mathcal{N}_H(x)$ si y solo si existe un $A' \in \mathcal{T}_H$ tal que $x \in A' \subseteq U'$. Tomando $U = U' \cup A$ se tiene que $U \cap H = (U' \cap A) \cup H = (U' \cap H) \cup (A \cap H) = U' \cup (A \cup H) = U'$.

Finalmente, sea $U' \in \mathcal{N}_H(x)$, entonces $U' = U \cap H$ donde $U \in \mathcal{N}(x)$. Como $\mathcal{B}(x)$ es base local de $\mathcal{T}$, existe un $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B_X \subseteq U$, por lo que $B_x \cap H \subseteq U \cap H = U'$. □

5.1.1. Métricas del subespacio

Proposition 84. Sea (X, d) un espacio métrico y $H \subseteq X$ no vacío. Definamos la aplicación.

$$d_H : H \times H \to \mathbb{R} \tag{5.1}$$
$$(h_1, h_2) \mapsto d_H(h_1, h_2) := d(h_1, h_2) \tag{5.2}$$

Entonces (H, d_H) es un espacio métrico.

Demostración. Las tres propiedades de la métrica se cumplen porque d es una métrica. □

Lemma 2. Sea (X, d) un espacio métrico y $H \subseteq X$ no vacío. Entonces

$$\mathbb{B}_{d_H}(h, r) = \mathbb{B}_d(h, r) \cap H.$$

Demostración. $x \in \mathbb{B}_{d_H}(h, r) \subseteq H$ si y solo si $x \in H$ y además $d_h(x, r) = d(x, h) < r$, es decir, $x \in \mathbb{B}_d(h, r)$. □

Proposition 85. Sea (X, d) un espacio métrico y $H \subseteq X$ no vacío. Entonces

$$\mathcal{T}_H = \mathcal{T}_{d_H}$$

Demostración. Tomemos un $h \in H$ arbitrario. Por un lado, una base local de entornos para la topología $\mathcal{T}_{d_H}$ es $\mathcal{B}_1(h) = \{\mathbb{B}_{d_H}(h, r) \mid r > 0\}$. Por otro lado, como las bolas $\mathbb{B}_d(h, r)$ forman un base local de entornos para $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{B}_2(h) = \{\mathbb{B}_d(h, r) \cap H \mid r > 0\}$ es otra una base local de entornos de $\mathcal{T}_H$. Por el Lema 2, $\mathcal{B}_1(h) = \mathcal{B}_2(h)$ para todo $h \in H$. Por tanto, ambas topologías son iguales. □

5.1.2. Operadores en el subespacio

Proposition 86. Sea $(H, \mathcal{T}_H)$ un subespacio topológico de $(X, \mathcal{T})$ y $S \subseteq H$.

1. $\mathrm{cl}_H(S) = \mathrm{cl}(S) \cap H$.

2. $\mathrm{int}(S) \cap H \subseteq \mathrm{int}_H(S)$.

3. $\mathrm{bd}_H(S) \subseteq \mathrm{bd}(S) \cap H$.

Demostración. Por Teorema 1, basta con probar que $\mathrm{cl}(S) \cap H$ es el cerrado en $\mathcal{T}_H$ más pequeño que contiene a S. Como la clausura de cualquier conjunto es cerrado, entonces $\mathrm{cl}(S) \cap H \in \mathcal{C}_H$. Supongamos que $C' \in \mathcal{C}_H$ tal que $S \subseteq C'$. Entonces $C' = C \cap H$ con $C \in \mathcal{C}$. Por Proposición 35, $\mathrm{cl}(S) \subseteq \mathrm{cl}(C') = \mathrm{cl}(C \cap H)$ y por Proposición 36, $\mathrm{cl}(S) \subseteq \mathrm{cl}(C \cap H) = \mathrm{cl}(C) \cap \mathrm{cl}(H) = C \cap \mathrm{cl}(H)$. De esta manera, $\mathrm{cl}(S) \cap H \subseteq C \cap \mathrm{cl}(H) \cap H = C \cap H = C'$.

Como $\mathrm{int}(S) \in \mathcal{T}$, entonces $\mathrm{int}(S) \cap H \in \mathcal{T}_H$ tal que $\mathrm{int}(S) \cap H \subseteq S$. Como el interior es el abierto más grande contenido en el subconjunto, entonces $\mathrm{int}(S) \cap H \subseteq \mathrm{int}_H(S)$.

Finalmente, $\mathrm{bd}_H(S) = \mathrm{cl}_H(S) \setminus \mathrm{int}_H(S) \subseteq (\mathrm{cl}(S) \cap H) \setminus (\mathrm{int}(S) \cap H) = (\mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S)) \cap H = \mathrm{bd}(S) \cap H$. □

5.1.3. Continuidad en el subespacio

Proposition 87. Sea $(H, \mathcal{T}_H)$ un subespacio topológico de $(X, \mathcal{T})$. Entonces $\mathcal{T}_H$ es la topología inicial de la aplicación inclusión $\imath_H : H \hookrightarrow X$.

Demostración. Demostremos que $\mathcal{T}_H$ es la topología más débil que hace a la inclusión continua. Veamos primero que $\imath_H : (H, \mathcal{T}_H) \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$ es continua. Teniendo en cuenta que para cualquier subconjunto $S \subseteq X$, $\imath_H^{-1}(S) = S \cap H$, entonces para todo $A \in \mathcal{T}$, tenemos que $\imath_H^{-1}(A) = A \cap H \in \mathcal{T}_H$. Supongamos ahora que $\mathcal{T}'$ es otra topología en H que hace a $\imath_H$ continua. Entonces si $A' \in \mathcal{T}_H$, entonces existe un $A \in \mathcal{T}$ tal que $A' = A \cap H = \imath_H^{-1}(A) \in \mathcal{T}'$. □

Corollary 17. Para todo $(Y, \mathcal{T}')$ y para todo $f : (Y, \mathcal{T}') \to (H, \mathcal{T}_H)$,

$$f \text{ es continua si y solo si } \imath_H \circ f \text{ es continua.}$$

Demostración. Es consecuencia directa de la Proposición 79. □

Proposition 88. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ continua y $H \subseteq X$.

1. $f|_H : (H, \mathcal{T}_H) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua

2. $f|^{f(X)} : (X, \mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{T}'_{f(X)})$ es continua.

Demostración. En primer lugar, Como f e $\imath_H$ son continuas, entonces la composición $f|_H = f \circ \imath_H$ es continua.

Por otro lado, como $f = \imath_{f(X)} \circ f|^{f(X)}$ es continua, entonces por el Corolario 17, $f|^{f(X)}$ es continua. □

Proposition 89. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $J \subseteq H \subseteq X$. Entonces

$$(\mathcal{T}_H)_J = \mathcal{T}_J.$$

Demostración. Denotemos la inclusiones $\imath_H : (H, \mathcal{T}_H) \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$ e $\imath_J : (J, \mathcal{T}_J) \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$. Tomemos ahora la aplicación inclusión $f : (J, \mathcal{T}_J) \hookrightarrow (H, \mathcal{T}_H)$. Como $\imath_J = \imath_H \circ f$ es continua, entonces por el Corolario 17, f es continua. Por definición de la topología inicial, como $(\mathcal{T}_H)_J$ es la topología más débil que hace a f continua, tenemos que $(\mathcal{T}_H)_J \subseteq \mathcal{T}_J$. Por otro lado, tomemos la misma inclusión f pero en las siguientes topologías $f : (J, (\mathcal{T}_H)_J) \to (H, \mathcal{T}_H)$. La aplicación f es continua por las topologías tomadas. De esta manera, Por Corolario 17, $\imath_J = \imath_H \circ f : (J, (\mathcal{T}_H)_J) \to (X, \mathcal{T})$ es continua. Como $\mathcal{T}_J$ es la más débil que hace a $\imath_J$ continua, entonces $\mathcal{T}_J \subseteq (\mathcal{T}_H)_J$. □

5.1.4. Inmersiones

Definition 38. Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ es una **inmersión** si $f|^{f(X)} : (X, \mathcal{T}_X) \to (f(X), \mathcal{T}_{f(X)})$ es un homeomorfismo. Decimos que X está **inmerso** en Y.

Proposition 90. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos y $f : X \to Y$. Entonces f es una inmersión si y solo si f es inyectiva, continua y abierta (o cerrada).

Demostración. Si f es una inmersión, entonces $f|^{f(X)} = \imath_{f(X)} \circ f$ es un homeomorfismo. En particular, $f|^{f(X)}$ es continua y por el Corolario 17, f es continua. Por otro lado, como $f|^{f(X)}$ es inyectiva, entonces f también lo es. Finalmente, tanto $f|^{f(X)}$ como $\imath_{f(X)}$ son abiertas, luego f es abierta por la Proposición 69.

Por otro lado, supongamos que f es inyectiva, continua y cerrada. Entonces por Proposición 88, $f|^{f(X)}$ es continua, biyectiva y abierta. Por Proposición 68, en este contexto ser cerrado es equivalente a ser abierto. Finalmente, ser continua, biyectiva y abierto es lo mismo que ser homeomorfo. □

Proposition 91. «El espacio $(X, \mathcal{T})$ está inmerso» es una propiedad topológica.

Demostración. Sea $\Phi : Y \to Z$ un homeomorfismo. Supongamos que $f : X \to Y$ es una inmersión y definamos $g : X \to Z$ tal que $g = \Phi \circ f|^{f(X)}$. Entonces g es continua, inyectiva y abierta por ser composición de aplicaciones con tales características, luego X está inmerso en Z.

Si suponemos ahora que $g : X \to Z$ es una inmersión, basta definir la aplicación $f : \Phi^{-1} \circ g|^{g(X)}$ y observar que es también continua, inyectiva y abierta. □

5.2. La topología producto

5.2.1. Métricas del producto

5.2.2. Operadores del producto

5.2.3. Continuidad en el producto

5.2.4. Productos finitos

5.3. La topología cociente

Definition 39. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\sim$ una RBE en X y $\pi : X \to X/\sim$ la proyección canónica. Definimos la **topología cociente** $\mathcal{T}_\sim$ a la topología final de π.

Example 36. Tomemos $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y la relación de equivalencia $x \sim y$ si y solo si $x - y \in \mathbb{Q}$. De este modo, $\mathbb{R}/\sim = \{[0], [\sqrt{2}]\}$. Por tanto, la topología cociente es $\mathcal{T}_\sim = \{A \subseteq \mathbb{R}/\sim \mid \pi^{-1}(A) \in \mathcal{T}_u\}$. Como $\pi^{-1}([0]) = \mathbb{Q} \notin \mathcal{T}_u$ y de la misma manera, $\pi^{-1}([\sqrt{2}]) = \mathbb{I} \notin \mathcal{T}_u$. Nos queda que los únicos abiertos en esta topología son el vacío y el total, es decir, $\mathcal{T}_u$ es la topología trivial.

Remark 6. Por la definición de topología final, π es continua.

Definition 40. Sea $f : X \to Y$ una aplicación y $\sim$ una RBE en X. Decimos que f **respeta las identificaciones** si para todo $x \sim y$, $f(x) = f(y)$.

Remark 7. La proyección natural $\pi : X \to X/\sim$ respeta las identificaciones.

Proposition 92. Supongamos que $f : X \to Y$ respeta las identificaciones. Entonces existe una única $g : X/\sim \to Y$ tal que $g \circ \pi = f$.

Demostración. Probemos la existencia. Definimos $g : X/\sim \to Y$ tal que $g([x]) = f(x)$. Veamos que está bien definida. Si $x \sim y$, entonces como f respeta las identificaciones, $g([x]) = f(x) = f(y) = g([y])$. Además, $f(x) = g([x]) = g(\pi(x)) = (g \circ \pi)(x)$.

Veamos ahora la unicidad. Supongamos que g_1 y g_2 satisfacen que $g_1 \circ \pi = g_2 \circ \pi = f$. Sea $[x] \in X/\sim$, entonces $g_1([x]) = g_1(\pi(x)) = f(x) = g_2(\pi(x)) = g_2([x])$, luego $g_1 = g_2$. □

5.3.1. Aplicación cociente

Definition 41. Una aplicación $q : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ es una **aplicación cociente** si

1. q es sobreyectiva.
2. $\mathcal{T}_Y$ es la topología final de q.

Lemma 3. Sea una aplicación $q : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ sobreyectiva. Son equivalentes

1. q es cociente.
2. $A \in \mathcal{T}_Y$ si y solo si $q^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$.
3. Para todo $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$, g es continua si y solo si $g \circ q$ es contiua.

Demostración. Es consecuencia directa de la Proposición 81. □

Remark 8. La proyección natural $\pi : X \to X/\sim$ es una aplicación cociente.

Proposition 93. Toda aplicación sobreyectiva continua y abierta (o cerrada) es una aplicación cociente.

Demostración. Sea $q : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$. Como q es continua, por la definición de topología final, $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}_{Y,q}$. Por otro lado, Si $A \in \mathcal{T}_{Y,q}$, entonces $q^{-1}(A) \in \mathcal{T}_Y$ y por ser q abierta, $q(q^{-1}(A)) \in \mathcal{T}_Y$ y por ser q sobreyectiva, $q(q^{-1}(A)) \subseteq A$, luego $\mathcal{T}_{Y,q} \subseteq \mathcal{T}_Y$. Es decir, $\mathcal{T}_Y$ es la topología final de Y y como q es sobreyectiva, entonces q es cociente.

Si q fuese cerrada, entonces es fácil probar que $\mathcal{C}_{Y,q} \subseteq \mathcal{C}_Y$, y esto probaría $\mathcal{T}_{Y,q} \subseteq \mathcal{T}_Y$. □

Proposition 94. Sea $q : X \to Y$ cociente. Son equivalentes

1. q es abierta.
2. Para todo $A \in \mathcal{T}_X$, $q^{-1}(q(A)) \in \mathcal{T}_X$.

Demostración. Supongamos que q es una aplicación cociente y abierta. Sea $A \in \mathcal{T}_X$. Como q es abierta, entonces $q(A) \in \mathcal{T}_Y$. Finalmente, como q es continua, entonces $q^{-1}(q(A)) \in \mathcal{T}_X$.

Demostremos ahora que es abierta. Sea $A \in \mathcal{T}_X$. Por hipótesis, $q^{-1}(q(A)) \in \mathcal{T}_X$. Como q es cociente, entonces $q(A) \in \mathcal{T}_Y$, luego q es abierta. □

Proposition 95. Sea $q : X \to Y$ aplicación cociente y la RBE $x \sim y$ si y solo si $q(x) = q(y)$.

1. Existe una única $f : X/\sim \to Y$ continua y biyectiva tal que $q = f \circ \pi$.

2. Si además q es abierta, entonces $X/\sim\cong Y$.

Demostración. En primer lugar, por definición, q respeta la identificación $\sim$, luego existe una única función $f : X/\sim\to Y$ tal que $q = f \circ \pi$. En primer lugar, como π es también una función cociente, como q es continua, por el Lema 3, f es continua. Por otro lado, q es sobreyectiva, luego f es también sobreyectiva. Finalmente, por la definición de la RBE $\sim$, f es inyectiva.

Supongamos que q es abierta y tomemos $A \in \mathcal{T}_\sim$. Entonces por definición de la topología cociente, $\pi^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$. Como q es abierta, entonces $q(\pi^{-1}(A)) \in \mathcal{T}_Y$. Como podemos expresar $q = f \circ \pi$, entonces $q(\pi^{-1}(A)) = f(\pi(\pi^{-1}(A))) = f(A) \in \mathcal{T}_Y$. El hecho de que $\pi(\pi^{-1}(A)) = A$ sea cierto se debe a que π es sobreyectiva. En conclusión, f es también abierto. Como además es biyectiva y continua, es un homeomorfismo y por tanto, $X/\sim\cong Y$. $\square$

Capítulo 6

Axiomas topológicos

6.1. Axiomas de numerabilidad

6.1.1. Primer axioma de numerabilidad

Definition 42. Decimos que $(X, \mathcal{T})$ cumple el **primer axioma de numerabiliad** (es **1AN**) si para todo $x \in X$, existe una base de entornos de x numerable.

Example 37. Si $(X, \mathcal{T}_{\text{cn}})$ es 1AN, entonces X es numerable.

Supongamos que $(X, \mathcal{T}_{\text{cn}})$ es 1AN. Entonces para todo $x \in X$, existe una base de entornos numberable $\mathcal{B}(x) = \{B_1, B_2, \ldots\}$. Como en particular los $B_i \in \mathcal{N}(x)$, entonces por Proposición 7 entorno existe un cerrado $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $x \notin C_i$ y $X \setminus B_i \subseteq C_i$. De esta manera, $X \setminus (\cap_{i\in\mathbb{N}} B_i) \subseteq \cup_{i\in\mathbb{N}} C_i$. Como por definición de la topología cofinita, C_i es finito, entonces $\cup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ es numerable.

Si X no fuese numerable, entonces $\cap_{i\in\mathbb{N}} B_i$ no sería numerable tampoco, luego existe un $y \in \cap_{i\in\mathbb{N}} B_i$ tal que $y \neq x$. Por definición de la topología cofinita, $X \setminus \{y\}$ es abierto y como $x \in X \setminus \{y\}$, entonces $X \setminus \{y\} \in \mathcal{N}(x)$. Por definición de base local de entornos, existe un $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_{i_0} \subseteq X \setminus \{y\}$. No obstante, $y \in B_{i_0}$, pero $y \notin X \setminus \{y\}$, lo que es una contradicción y viene de suponer que X es no numerable, luego X es numerable.

Proposition 96. Todo subespacio de un espacio 1AN es 1AN.

Demostración. Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es 1AN, entonces para todo x, $\mathcal{B}(x)$ es numerable. Sea $(H, \mathcal{T}_H)$ un subespacio arbitrario de X, entonces por Proposición 83, $\mathcal{B}_H(x) = \{B_x \cap H \mid B_x \in \mathcal{B}(x)\}$ es una base local de entornos. Como $\mathcal{B}(x)$ es numerable, entonces $\mathcal{B}_H(x)$ es numerable. Como es cierto para todo $x \in X$, entonces $(H, \mathcal{T}_H)$ es numerable. $\square$

Proposition 97. Todo espacio métrico es 1AN.

Demostración. Dado un $x \in X$, tomemos la familia de conjuntos $\mathcal{B}(x) = \{\mathbb{B}\left(x; \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Es claro que $\mathcal{B}(x)$ es numerable para todo x. Demostremos pues que es una base local de entornos. Tomemos un $U \in \mathcal{N}(x)$. Como las bolas abiertas son una base local de entornos, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{B}(x; \varepsilon) \subseteq U$. Ahora, por la propiedad Arquimediana de los reales, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1 < \varepsilon n_0$, es decir, $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Por tanto, $\mathbb{B}\left(x; \frac{1}{n_0}\right) \subseteq \mathbb{B}(x; \varepsilon) \subseteq U$. $\square$

6.1.2. Segundo axioma de numerabilidad

Definition 43. Decimos que $(X, \mathcal{T})$ cumple el **primer axioma de numerabiliad** (es **1AN**) si existe una base numerable.

Proposition 98. Todo espacio 2AN es 1AN

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable. Por la Proposición 12, $\mathbb{B}(x) = \{B \in \mathbb{B} \mid x \in B\}$ es una base local de entornos. Como $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}(x)$ es numerable. Como es cierto para todo $x \in X$, entonces el espacio es 1AN. $\square$

Proposition 99. Todo subespacio de un espacio 2AN es 2AN.

Demostración. Sea $\mathbb{B}$ un espacio numerable de $(X, \mathcal{T})$. Sea $H \subseteq X$ no vacío cual sea. Entonces por Proposición 83, $\mathcal{B}_H = \{B \cap H \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una base de $\mathcal{T}_H$. Como $\text{card}(\mathcal{B}_H) \leq \text{card}(\mathcal{B})$, entonces $\mathcal{B}_H$ es también numerable. $\square$

6.1.3. Espacios separables

Definition 44. Decimos que $(X, \mathcal{T})$ es separable si existe un subconjunto denso y numerable.

Proposition 100. Todo espacio 2AN es separable.

Demostración. Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es 2AN. Entonces existe una base $\mathcal{B}$ numerable. Para todo $B \in \mathcal{B}$, tomemos un $x_B \in B$ y definamos el conjunto $D = \{x_B \mid B \in \mathcal{B}\}$. Este conjunto es denso por estar en correspondencia con la base numerable. Por otro lado, veamos que es denso. Sea $B \in \mathcal{B}$, entonces existe un $x_B \in D$ tal que $x_B \in B$, en otras palabras, $x_B \in D \cap B$. Por tanto, $B \cap D \neq \varnothing$ para todo elemento B de la base, $(X, \mathcal{T})$ luego es separable. $\square$

Proposition 101. En un espacio métrico, ser 2AN es equivalente a ser separable.

Demostración. Hemos probado para el caso general que 2AN implica separable. Supongamos ahora que (X, d) es un espacio métrico separable. Por ser separable, existe un $P \subseteq X$ denso y numerable. Definamos $\mathcal{B} = \left\{\mathbb{B}\left(p; \frac{1}{n}\right) \mid p \in P,\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Este conjunto $\mathcal{B}$ es numerable. Veamos que es una base. Como (X, d) es un espacio métrico, entonces es 1AN y $\{\mathbb{B}(x; \frac{1}{n}) \mid x \in X,\ n \in \mathbb{N}\}$ es una base. Como P es denso, entonces $\mathbb{B}(x; \frac{1}{2n}) \cap P \neq \varnothing$ para cualquier $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Luego existe un $p_0 \in P$ tal que $p_0 \in \mathbb{B}(x; \frac{1}{2n})$, equivalentemente, $x \in \mathbb{B}(p_0; \frac{1}{2n})$. Demostremos que $\mathbb{B}(p_0; \frac{1}{2n}) \subseteq \mathbb{B}(x; \frac{1}{n})$. Si $y \in \mathbb{B}(p_0; \frac{1}{2n})$, entonces $d(y, x) \leq d(p_0, x) + d(y, p_0) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$, es decir, $y \in \mathbb{B}(x; \frac{1}{n})$. Por tanto, para cualquier elemento de la base $\mathbb{B}(x; \frac{1}{n})$, existe un $p_0 \in P$ tal que $x \in \mathbb{B}\left(p_0; \frac{1}{2n}\right) \subseteq \mathbb{B}(x; \frac{1}{n})$, luego $\mathcal{B}$ es una base de la topología. $\square$

Example 38. El espacio topológico $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es 2AN. Como $\mathbb{Q}^n$ es numerable y denso, luego $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es separable. Como además es un espacio métrico, entonces es 2AN.

6.2. Axiomas de separabilidad I

6.2.1. Espacios de Kolgomorov - T_0

Definition 45. Decimos que $(X, \mathcal{T})$ es un **espacio de Kolgomorov** o es $\mathbf{T_0}$ si para todo $x \neq y$, existe un entorno U de x o y tal que no contiene al otro punto.

Example 39. Si $\operatorname{card}(X) > 1$, entonces $(X, \mathcal{T}_t)$ no es un espacio T_0. Puesto que dados cualesquiera dos puntos $x \neq y$, $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y) = \{X\}$.

Proposition 102. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Son equivalentes.

1. $(X, \mathcal{T})$ es T_0.
2. Para todo $x \neq y$, $\mathcal{N}(x) \neq \mathcal{N}(y)$.
3. Si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, entonces $x = y$.

Demostración. Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es T_0. Tomemos $x \neq y$. Entonces existe un entorno de algún punto (supongamos sin pérdida de generalidad que tal punto es x), es decir, $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $y \notin U$. Por definición de entorno, $U \notin \mathcal{N}(y)$. Como hemos encontrado un elemento $\mathcal{N}(x)$ que no está contenido en $\mathcal{N}(y)$, entonces $\mathcal{N}(x) \neq \mathcal{N}(y)$.

Supongamos ahora que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Veamos en primer lugar que $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{N}(y)$. Sea $U \in \mathcal{N}(x)$. Entonces existe un $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq U$. Notemos que $y \in \overline{\{x\}}$. Como $A \in \mathcal{N}(x)$, como $y \in \overline{\{x\}}$, entonces $A \cap \{y\} \neq \varnothing$. Es decir, $y \in A$. Como A es abierto, entonces $A \in \mathcal{N}(y)$ y como $A \subseteq U$, entonces $U \in \mathcal{N}(y)$. De manera análoga, uno puede probar que $\mathcal{N}(y) \subseteq \mathcal{N}(x)$, demostrando de esta manera que $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$ y por hipótesis, $x = y$.

Finalmente, tomemos $x \neq y$. Por hipótesis, $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Entonces $\overline{\{x\}} \nsubseteq \overline{\{y\}}$ o $\overline{\{y\}} \nsubseteq \overline{\{x\}}$. Supongamos sin pérdida de generalidad la primera. Entonces existe un $z \in \overline{\{x\}}$ tal que $z \notin \overline{\{y\}}$. Como $z \notin \overline{\{y\}}$, entonces existe un $U \in \mathcal{N}(z)$ tal que $U \cap \{y\} = \varnothing$, es decir, $y \notin U$. Si demostramos que $U \in \mathcal{N}(x)$, entonces probaremos que X es T_0. Como $U \in \mathcal{N}(z)$, entonces existe un $A \in \mathcal{T}$ tal que $z \in A \subseteq U$. Por ser abierto $A \in \mathcal{N}(z)$ y como $z \in \overline{\{x\}}$, entonces $A \cap \{x\} \neq \varnothing$, es decir, $x \in A$ y como A es abierto, $A \in \mathcal{N}(x)$ y como $A \subseteq U$, entonces $U \in \mathcal{N}(x)$. □

Proposition 103. Todo subespacio de un espacio T_0 es T_0.

Demostración. Sea $(H, \mathcal{T}_H)$ un subespacio de $(X, \mathcal{T})$ y sean $x, y \in H$ tales que $\operatorname{cl}_H(\{x\}) = \operatorname{cl}_H(\{y\})$. Supongamos que $z \in \overline{\{x\}}$ y sea $A \in \mathcal{T}(z)$. Entonces $A \cap \{x\} \neq \varnothing$, es decir, $x \in A$. Como $x \in H$, entonces $x \in A \cap H$, donde $A \cap H \in \mathcal{T}_H(x)$. Como $x \in \operatorname{cl}_H(\{y\})$, entonces tenemos que $\{y\} \cap (A \cap H) \neq \varnothing$, es decir, $y \in A \cap H$. En particular, $y \in A$, es decir, $\{y\} \cap A \neq \varnothing$. En resumen, para todo $A \in \mathcal{T}(z)$, tenemos que $\{y\} \cap A \neq \varnothing$ y por definición de clausura, $z \in \overline{\{y\}}$. Queda demostrado que $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$. Demostrar $\overline{\{y\}} \nsubseteq \overline{\{x\}}$ es completamente análogo. Por tanto, $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ y por la Proposición 102, $x = y$. De modo que hemos probado que si $\operatorname{cl}_H(\{x\}) = \operatorname{cl}_H(\{y\})$, entonces $x = y$, demostrando pues que $(H, \mathcal{T}_H)$ es T_0. □

Proposition 104. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Definamos la relación en X: $x \sim y$ si y solo si $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(x)$.

1. La relación $\sim$ es una RBE.
2. El espacio cociente $(X/\sim, \mathcal{T}_\sim)$ es T_0.

Demostración. Es fácil comprobar que la relación $\sim$ es una RBE. Veamos que el espacio cociente es T_0. Es sabido que la proyección canónica $\pi : X \to X/\sim$ es una aplicación cociente. Demostremos primero que para todo $A \in \mathcal{T}$, $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$. La inclusión $A \subseteq \pi^{-1}(\pi(A))$ siempre se cumple. Tomemos pues $x \in \pi^{-1}(\pi(A))$. Entonces $\pi(x) \in \pi(A)$. Eso significa que existe un $y \in A$ tal que $[x] = q(x) = q(y) = [y]$, es decir, $x \sim y$ y, por definición, $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$. De esta manera, como $y \in A$, entonces $A \in \mathcal{N}(y) = \mathcal{N}(x)$ y por ser A abierto, $x \in A$. Por tanto queda demostrado que para todo $A \in \mathcal{T}$, $A \subseteq \pi^{-1}(\pi(A))$. Por la Proposición 94, esto implica que π es una aplicación abierta.

Ya estamos en condiciones para demostrar que el espacio cociente es T_0. Debemos demostrar que si $\mathcal{N}_\sim([x]) = \mathcal{N}_\sim([y])$, entonces $[x] = [y]$, o lo que es lo mismo, $x \sim y$ o, equivalentemente, $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$. De esta manera, supongamos que $\mathcal{N}_\sim([x]) = \mathcal{N}_\sim([y])$ y tomemos $U \in \mathcal{N}(x)$. Entonces existe un $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq U$ y por tanto $A \in \mathcal{N}(x)$. Como π es abierto, entonces por la Proposición 66, $\pi(A) \in \mathcal{N}_\sim([x]) = \mathcal{N}_\sim([y])$. Como π es continua, entonces $A = \pi^{-1}(\pi(A)) \in \mathcal{N}(y)$ y como A es abierto, entonces $y \in A \subseteq U$, luego $U \in \mathcal{N}(y)$. Queda demostrado la implicación $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{N}(y)$. La implicación restante es completamente análogo, demostrando lo deseado. $\square$

6.2.2. Espacios de Fréchet - T_1

Definition 46. Decimos que $(X, \mathcal{T})$ es un **espacio de Fréchet** o es $\mathbf{T_1}$ si para todo $x \neq y$, existe un $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $y \notin U$.

Proposition 105. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Son equivalentes.

1. $(X, \mathcal{T})$ es T_1.
2. Para todo $x \in X$, $\{x\} \in \mathcal{C}$.
3. Para todo $S \subseteq X$, $S = \bigcap_{S \subseteq A \in \mathcal{T}} A$.

Demostración. Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es T_1. Probemos que $\overline{\{x\}} \subseteq \{x\}$. Sea $y \in \overline{\{x\}}$. Si $y \neq x$, entonces por ser el espacio T_1, tenemos que existe un $U \in \mathcal{N}(y)$ tal que $x \notin U$. No obstante, como $U \in \mathcal{N}(y)$ e $y \in \overline{\{x\}}$, entonces $U \cap \{x\} \neq \varnothing$, esto es, $x \in U$, lo que conlleva a una contradicción y viene de suponer que $x \neq y$. Por tanto $x = y$ y por tanto $y \in \{x\}$, es decir, $\overline{\{x\}} \subseteq \{x\}$. De ello se deduce que, $\{x\}$ es cerrado.

Supongamos ahora que $\{x\}$ son cerrados para todo $x \in X$. Sea $S \subseteq X$. Podemos escribir $X \setminus S = \cup_{x \notin S} X \setminus \{x\}$. Así pues, $S = \cap_{x \notin S} X \setminus \{x\}$. Ahora bien, tomando todo $A \in \mathcal{T}$ tal que $S \subseteq A$, entonces $S \subseteq \cup_{S \subseteq A \in T} A$. Por otro lado, como para todo $x \notin S$, $X \setminus \{x\}$ es un abierto que contiene a S, entonces $\cup_{S \subseteq A \in T} A \subseteq \cap_{x \notin S} X \setminus \{x\} = S$. Por tanto, llegamos a la conclusión de que $S = \cup_{S \subseteq A \in T} A$.

Finalmente, por hipótesis, $\{x\} = \cap_{A \in \mathcal{T}(x)} A$. Si $x \neq y$, entonces $y \notin \cap_{A \in \mathcal{T}(x)} A$, luego existe un $A_0 \in \mathcal{T}(x)$ —por tanto $A_0 \in \mathcal{N}(x)$— tal que $y \notin A_0$. Demostramos así que $(X, \mathcal{T})$ es T_1. $\square$

Proposition 106. Todo espacio T_1 es T_0

Demostración. Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es T_1. Supongamos que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Como los elementos unipuntuales son cerrados por la Proposición 105, entonces $\{x\} = \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} = \{y\}$, es decir, $x = y$, luego $(X, \mathcal{T})$ es T_0. □

Example 40. La topología de Sierpiński es un espacio T_0 pero no T_1.

Proposition 107. Todo subespacio de un espacio T_1 es T_1.

Demostración. Sea $(H, \mathcal{T}_H)$ un subespacio de $(X, \mathcal{T})$. Entonces si $x \in H$, tenemos que en particular, $\{x\}$ es un cerrado en X. Por tanto, $\{x\} = \{x\} \cap H \in \mathcal{C}_H$, luego el subespacio es T_1. □

6.2.3. Espacios de Hausdorff - T_2

Definition 47. Decimos que $(X, \mathcal{T})$ es un **espacio de Hausdorff** o es $\mathbf{T_2}$ si para todo $x \neq y$, existen un $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \in \mathcal{N}(y)$ tales que $U \cap V = \varnothing$.

Corollary 18. Son equivalentes:

1. $(X, \mathcal{T})$ es T_2.
2. Para todo $x \neq y$, existen un $A_x \in \mathcal{T}(x)$ y $A_y \in \mathcal{T}(y)$ tales que $A_x \cap A_y = \varnothing$.
3. Si $\mathcal{B}$ es una base, entonces para todo $x \neq y$, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $x \in B_1$, $y \in B_2$ y $B_1 \cap B_2 = \varnothing$.
4. Si $\mathcal{B}(x)$ es una base local, entonces para todo $x \neq y$, existen $B_x \in \mathcal{B}(x)$ y $B_y \in \mathcal{B}(y)$ tales que $B_x \cap B_y = \varnothing$.

Demostración. Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es T_2. Entonces tomando cualquier $x \neq y$, se tiene que existen $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \in \mathcal{N}(y)$, tales que $U \cap V = \varnothing$. Por otro lado, por ser U y V entornos de x e y respectivamente, existen $A_x, A_y \in \mathcal{T}$ tales que $x \in A_x \subseteq U$ e $y \in A_y \subseteq V$. Por tanto, $A_x \cap A_y \subseteq U \cap V = \varnothing$, es decir, $A_x \cap A_y = \varnothing$.

Supongamos que tenemos una base $\mathcal{B}$. Entonces si $x \neq y$, existen dos abiertos $A_x \in \mathcal{T}(x)$ y $A_y \in \mathcal{T}(y)$ tales que $A_x \cap A_y = \varnothing$. Como $x \in A_x$ e $y \in A_y$ y además $A_x, A_y \in \mathcal{T}$, entonces existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $x \in B_1 \subseteq A_x$ e $y \in B_2 \subseteq A_y$. Como $B_1 \cap B_2 \subseteq A_x \cap A_y = \varnothing$, entonces $B_1 \cap B_2 = \varnothing$.

Ahora, supongamos que se cumple la tercera condición. En particular, $B_1 \in \mathcal{N}(x)$ y $B_2 \in \mathcal{N}(y)$, por lo que $(X, \mathcal{T})$ es T_2.

Supongamos de nuevo que $(X, \mathcal{T})$ es T_2. Repitiendo la misma sentencia, tomando cualquier $x \neq y$, se tiene que existen $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \in \mathcal{N}(y)$, tales que $U \cap V = \varnothing$. Por definición de base de entornos, existen $B_x \in \mathcal{B}(x)$ y $B_y \in \mathcal{B}(y)$ tales que $B_x \subseteq U$ y $B_y \subseteq V$. De este modo, $B_x \cap B_y \subseteq U \cap V = \varnothing$, es decir, $B_x \cap B_y = \varnothing$.

Si se cumple la cuarta condición, entonces con teniendo en cuaenta que $B_x \in \mathcal{N}(x)$ y $B_y \in \mathcal{N}(y)$ se demuestra que $(X, \mathcal{T})$ es T_2. □

Proposition 108. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Son equivalentes

1. $(X, \mathcal{T})$ es T_2.
2. $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ es cerrado en $(X \times X, \mathcal{T}_\times)$.
3. Para todo $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{\mathcal{C} \cap \mathcal{N}(x)} C_x$.

Demostración. Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es T_2. Para probar que $\Delta \in \mathcal{C}_\times$, demostraremos que $\text{cl}_\times(\Delta) \subseteq \Delta$. Sea $(x, y) \in \text{cl}_\times(\Delta)$. Supongamos que $x \neq y$, entonces existen $A_x, A_y \in \mathcal{T}$ tales que $x \in A_x$, $y \in A_y$ y $A_x \cap A_y = \varnothing$. Como $A_x \in \mathcal{N}(x)$ y $A_y \in \mathcal{N}(y)$, entonces $U_\times = A_x \times A_y \in \mathcal{N}_\times((x, y))$. Como $(x, y) \in \text{cl}_\times(\Delta)$, entonces $U_\times \cap \Delta \neq \varnothing$. Luego existe un $z_0 \in X$ tal que $(z, z) \in U_\times$, es decir, $z \in A_x \cap A_y$, pero esto contradice con el hecho de que $A_x \cap A_y = \varnothing$. La contradicción viene de suponer que $x \neq y$, luego $x = y$ y por tanto $(x, y) \in \Delta$. De esta manera probamos que Δ es cerrado en $(X \times X, \mathcal{T}_\times)$.

Supongamos que Δ es cerrado en $X \times X$. Es fácil comprobar que $\{x\} \subseteq \cap C_x$ para todo C_x entorno de x cerrado. Tomemos $y \in \cap C_x$ y supongamos que $x \neq y$. Entonces $(x, y) \notin \Delta$ y por ser Δ cerrado, $(x, y) \notin \text{cl}_\times(\Delta)$. Luego existen $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \in \mathcal{N}(y)$ tales que $(U \times V) \cap \Delta = \varnothing$, equivalentemente, $U \cap V = \varnothing$, es decir, $V \subseteq X \setminus U$. Como $V \in \mathcal{N}(y)$, entonces existe un $A \in \mathcal{N}(y)$ tal que $y \in A \subseteq V \subseteq X \setminus U$. Tomando $C_x = X \setminus A \in \mathcal{C}$, vemos que $U \subseteq C_x$, luego $C_x \in \mathcal{N}(x) \cap \mathcal{C}$ y por otra parte, por definición $y \notin C_x$. Por tanto, deducimos que $y \notin \cap C_x$, contradiciendo con el hecho de que hemos supuesto que $y \in \cap C_x$. Ésto viene de suponer que $x \neq y$, por tanto, $x = y$, demostrando de este modo que $\cap C_x \subseteq \{x\}$ y, por ende, $\{x\} = \cap C_x$.

Supongamos ahora que se cumple la igualdad. Sea $y \neq x$. Entonces $y \notin \{x\} = \cap C_x$. Por tanto, existe un $C_x \in \mathcal{N}(x) \cap \mathcal{C}$ tal que $y \notin C_x$. Por un lado como $C_X \in \mathcal{N}(x)$, entonces existe un $A_x \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A_x \subseteq C_x$. Por otro lado, como $C_x \in \mathcal{C}$, entonces $A_y = X \setminus C_x \in \mathcal{T}(y)$. Finalmente, $A_x \cap A_y = A_x \cap X \setminus C_x \subseteq C_x \cap X \setminus C_x = \varnothing$, es decir, $A_x \cap A_y = \varnothing$. Por tanto, el espacio es T_2. $\square$

Proposition 109. Todo espacio T_2 es T_1.

Demostración. Por la Proposición 108, $\{x\}$ es una intersección de cerrados. Como la intersección arbitraria de cerrados es cerrada, entonces $\{x\} \in \mathcal{C}$. $\square$

Proposition 110. Todo subespacio de un espacio T_2 es T_2.

Demostración. Sea $(H, \mathcal{T}_H)$ un subespacio de $(X, \mathcal{T})$ que es T_2. Sean $x, y \in H$ tales que $x \neq y$, entonces como $(X, \mathcal{T})$ es T_2, tenemos que existen $A_x \in \mathcal{T}_x$ y $A_y \in \mathcal{T}(y)$ tales que $A_x \cap A_y = \varnothing$. Por tanto, $A_x \cap H \in \mathcal{T}_H(x)$ y $A_y \cap H \in \mathcal{T}_H(y)$ tal que $(A_x \cap H) \cap (A_y \cap H) = (A_x \cap A_y) \cap H = \varnothing \cap H = \varnothing$. Queda demostrando entonces que $(H, \mathcal{T}_H)$ es T_2. $\square$

Proposition 111. Sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ continua e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un espacio T_2. Entonces $\text{Gr}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ es cerrado en $(X \times Y, \mathcal{T}_\times)$.

Demostración. Supongamos que $\text{Gr}(f)$ no es cerrado. Entonces existe un $(x, y) \in \overline{\text{Gr}(f)}$ tal que $(x, y) \notin \text{Gr}(f)$. Por un lado, como $(x, y) \notin \text{Gr}(f)$, entonces $y \neq f(x)$. Como Y es T_2, entonces existen $U \in \mathcal{N}(y)$ y $V \in \mathcal{N}(f(X))$ tales que $U \cap V = \varnothing$. Como f es continua en $x \in X$, entonces por la Proposición 60, $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}(x)$. De este modo, $f^{-1}(V) \times U \in \mathcal{N}((x, y))$. Como $(x, y) \in \overline{\text{Gr}(f)}$, entonces $(f^{-1}(V) \times U) \cap \text{Gr}(f) \neq \varnothing$. Por tanto, existe un $x_0 \in X$ tales que $(x_0, f(x_0)) \in f^{-1}(V) \times U$. Por un lado, $x_0 \in f^{-1}(V)$, que es equivalente a decir que $f(x_0) \in V$. Como también $f(x_0) \in U$, entonces $U \cap V \neq \varnothing$, que es una contradicción. Esta contradicción viene de suponer que $\text{Gr}(f)$. Por lo tanto, $\text{Gr}(f)$ es cerrado en $X \times Y$. $\square$

Proposition 112. Sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ continua y definamos $\mathcal{F} = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$.

1. Si f es continua e Y es T_2, entonces $\mathcal{F}$ es cerrada.

2. Si f es abierta y sobreyectiva, y $\mathcal{F}$ es cerrada, entonces Y es T_2.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ no es cerrada. Entonces existe un $(x_1, x_2) \in \overline{F}$ tal que $(x_1, x_2) \notin \mathcal{F}$. Entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. Como Y es T_2, tenemos que existen $U \in \mathcal{N}(f(x_1))$ y $V \in \mathcal{N}(f(x_2))$ tales que $U \cap V = \varnothing$. Como f es continua, entonces $f^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x_1)$ y $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}(x_2)$, de manera que $f^{-1}(U) \times f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. No obstante, como $f^{-1}(U) \times f^{-1}(V) \in \mathcal{N}((x_1, x_2))$, entonces como $(x_1, x_2) \in \overline{F}$, tenemos que $(f^{-1}(U) \times f^{-1}(V)) \cap \mathcal{F} \neq \varnothing$. Por tanto, existen $x_3 \in f^{-1}(U)$ y $x_4 \in f^{-1}(V)$ tal que $f(x_3) = f(x_4)$. Como $f(x_3) \in U$ y $f(x_4) \in V$ y $f(x_3) = f(x_4)$, entonces $U \cap V \neq \varnothing$, lo que conlleva a una contradicción que viene de suponer que $\mathcal{F}$ no es cerrado. Luego $\mathcal{F}$ es cerrado en $X \times X$.

Sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $y_1 \neq y_2$. Como f es sobreyectiva, existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Como $f(x_1) \neq f(x_2)$, entonces $(x_1, x_2) \notin \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es cerrado, entonces existen $U \in \mathcal{N}(x_1)$ y $V \in \mathcal{N}(x_2)$ tal que $(U \times V) \cap \mathcal{F} = \varnothing$. Como f es abierta, entonces $f(U) \in \mathcal{N}(y_1)$ y $f(V) \in \mathcal{N}(y_2)$ —recordemos que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$—. Si existe un $y_0 \in f(U) \cap f(V)$, entonces existen $x_3 \in U$ y $x_4 \in V$ tales que $f(x_3) = f(x_4) = y_0$, luego $(x_3, x_4) \in \mathcal{F} \cap (U \times V)$, pero eso es una contradicción porque $(U \times V) \cap \mathcal{F} = \varnothing$. Por lo tanto, $f(U) \cap f(V) = \varnothing$. Concluimos que para todo $y_1 \neq y_2$, existen $W_1 = f(U) \in \mathcal{N}(y_1)$ y $W_2 = f(V) \in \mathcal{N}(y_2)$ tal que $W_1 \cap W_2 = \varnothing$, demostrando así que Y es T_2. □

6.3. Axiomas de separabilidad II

6.3.1. Regularidad y T_3

Definition 48. Decimos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio **regular** si para todo $C \in \mathcal{C}$ y para todo $x \notin C$, existen un $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ tales que $x \in A_1$, $C \subseteq A_2$ y $A_1 \cap A_2$.

Proposition 113. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Son equivalentes.

1. $(X, \mathcal{T})$ es regular.

2. Para todo $A \in \mathcal{T}(x)$, existe un $A_0 \in \mathcal{T}(x)$ tal que $\overline{A_0} \subseteq A$.

3. Para todo $x \in X$, existe una base local $\mathcal{B}(x)$ formada por cerrados.

Demostración. Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es regular. Tomemos $x \in X$ y $A \in \mathcal{T}(x)$. Entonces $C = X \setminus A \in \mathcal{C}$ tal que $x \notin C$. Por tanto, existen $A_0, A_2 \in \mathcal{T}$ tales que $x \in A_0$, luego $A_0 \in \mathcal{T}(x)$. $C \subseteq A_2$ y $A_0 \cap A_2$. Esto implica en particular que $A_0 \subseteq X \setminus A_2 \subseteq X \setminus C = A$. Como $X \setminus A_2 \in \mathcal{C}$ contiene a A_0, entonces por el Teorema 1, $\overline{A_0} \subseteq X \setminus A_2 \subseteq A$.

Supongamos ahora que se cumple 2. Para todo $x \in X$, definamos $\mathcal{B}(x) = \{\overline{A} \mid A \in \mathcal{T}\}$. Demostremos que $\mathcal{B}(x)$ es una base de entornos. Sea $U \in \mathcal{N}(x)$. Entonces existe un $A \in \mathcal{T}(x)$ tal que $A \subseteq U$. Por hipótesis, existe un $A_0 \in \mathcal{T}(x)$ tal que $\overline{A_0} \subseteq A \subseteq U$. Como $\overline{A_0} \in \mathcal{B}(x)$, entonces $\mathcal{B}(x)$ es una base de entornos.

Sea $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \notin C$. Llamando $A_1 = X \setminus C$, tenemos que $x \in A_1$. Como $A_1 \in \mathcal{T}(x)$, entonces en particular es un entorno de x y como existe un $\mathcal{B}(x)$

formado por cerrados, existe un $C_x \in \mathcal{B}(x)$ cerrado tal que $x \in C_x \subseteq A_1$. De esta manera, llamando $A_2 = X \setminus C_x$, tenemos que tenemos que $C = X \setminus A_1 \subseteq X \setminus C_x = A_2$. En particular, $X \setminus A_1 \subseteq A_2$ es equivalente a decir que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Queda demostrado pues que $X(,\mathcal{T})$ es regular. $\square$

Proposition 114. Todo subespacio de un espacio regular es regular.

Demostración. Sea $(H, \mathcal{T}_H)$ un subespacio de $(X, \mathcal{T})$ que es regular. Tomemos $C' \in \mathcal{C}_H$ y $x \notin C'$. Por Proposición 83, exite un $C \in \mathcal{C}$ tal que $C' = C \cap H$. Como $x \in H$, entonces necesariamente $x \notin C$ y por ser $(X, \mathcal{T})$ regular, existen $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$ tales que $x \in A_1$, $C \subseteq A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Llamando $A_1' = A_1 \cap H$ y $A_2' = A - 2 \cap H$, tenemos que $x \in A_1'$, $C' = C \cap H \subseteq A_2 \cap H = A_2'$ y que $A_1' \cap A_2' = (A_1 \cap H) \cap (A_2 \cap H) = (A_1 \cap A_2) \cap H = \varnothing \cap H = \varnothing$. $\square$

Proposition 115. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio regular, entonces ser T_0, T_1 y T_2 son equivalentes.

Demostración. Como ya hemos visto que generalmente $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$, entonces basta demostrar que $T_0 \Rightarrow T_2$ cuando $(X, \mathcal{T})$ es regular. Sean $x \neq y$. Como $(X, \mathcal{T})$ es T_0, entonces existe un $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $y \notin U$. En particular, por ser U entorno de x, existe un $A \in \mathcal{T}(x)$ tal que $A \subseteq U$ y, por ende, $y \notin A$. Llamando $C = X \setminus A$, tenemos que $y \in C$ y $x \notin C$. Como $(X, \mathcal{T})$ es regular entonces existen $A_1 \cap A_2$ tales que $y \in C \subseteq A_2$, $x \in A_1$ y $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, luego $(X, \mathcal{T})$ es T_2. $\square$

Definition 49. Decimos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio $\mathbf{T_3}$ si es regular y T_0.

Corollary 19. Todo subespacio de un espacio T_3 es T_3.

Proposition 116. Como todo subespacio de un espacio regular y T_0 es a si vez regular y T_0, entonces el subespacio es T_3.

Proposition 117. Supongamos que $(X, \mathcal{T}_X)$ es T_3 y sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$. Si f es continua, abierta, cerrada y sobreyectiva, entonces $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es T_2.

Proposition 118. Supongamos que $(X, \mathcal{T}_X)$ es T_3 y $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ es continua, abierta, cerrada y sobreyectiva. Entonces Y es T_2.

Demostración. Basta con ver que $\mathcal{F} = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $X \times X$. Supongamos que $(x_1, x_2) \notin \mathcal{F}$. Entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$, lo que es equivalente a decir que $x_1 \notin f^{-1}(f(x_2))$. Como X es T_3, en particular, es T_1 y por tanto $\{x_2\} \in \mathcal{C}_X$. Como f es cerrada, entonces $f(\{x_2\}) \in \mathcal{C}_Y$. Finalmente, como f es continua, entonces $f^{-1}(f(x_2)) \in \mathcal{C}_X$. De esta manera, como X es T_3, entonces existen $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ tales que $x_1 \in A_1$, $f^{-1}(f(x_2)) \subseteq A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Como f es cerrada, entonces $W = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A_2\} \in \mathcal{T}_Y$. Podemos reescribir $W = Y \setminus f(X \setminus A_2)$. Por tanto, se tiene que $f^{-1}(W) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A_2)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A_2)) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A_2$. En particular, $f^{-1}(f(x_2)) \subseteq f^{-1}(W) \subseteq A_2$. Como $f^{-1}(f(x_2)) \subseteq A_2$, entonces por definición de W, $f(x_2) \in W$, es decir, $x_2 \in W$, por lo que $W \in \mathcal{T}(x_2)$. Si comprobamos que $(A_1 \times f^{-1}(W)) \cap \mathcal{F} = \varnothing$, entonces probaremos que $(x_1, x_2) \notin \overline{\mathcal{F}}$, demostrando por tanto que $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$, es decir, $\mathcal{F}$ es cerrado. Supongamos que $(A_1 \times f^{-1}(W)) \cap \mathcal{F} \neq \varnothing$, entonces existe $(y, z) \in (A_1 \times f^{-1}(W)) \cap \mathcal{F}$. De este modo, $y \in A_1$, $z \in f^{-1}(W)$ —es decir, $f(z) \in W$—, y $f(z) = f(y)$. Por tanto, $f(y) \in W$.

Equivalentemente, $y \in f^{-1}(W) \subseteq A_1$. Luego $y \in A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, lo que conlleva a una contradicción, que viene de suponer que $(A_1 \times f^{-1}(W)) \cap \mathcal{F} \neq \varnothing$. Por tanto, $(A_1 \times f^{-1}(W)) \cap \mathcal{F} = \varnothing$.

$\square$

6.3.2. Normalidad y T_4

Capítulo 7

Compacidad

7.1. Espacios compactos

Definition 50. Sea $X \neq \varnothing$ y $K \subseteq X$. Una familia de subconjuntos $\mathcal{S} = \{S_\alpha\}_\alpha$ es un **recubrimiento** de K (o que $\mathcal{S}$ **recubre** a K) si

$$K \subseteq \bigcup_\alpha S_\alpha.$$

Remark 9. En general $\mathcal{S}$ recubre a todo X si $X = \bigcup_\alpha S_\alpha$.

Definition 51. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $K \subseteq X$ y $\mathcal{S} = \{S_\alpha\}_\alpha$ un recubrimiento de K.

- $\mathcal{S}$ es un **recubrimiento finito** si $\mathcal{S}$ contiene solo una cantidad finita de subconjuntos.
- $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ es un **subrecubrimeinto** si $\mathcal{S}'$ también recubre a K.
- $\mathcal{S}$ es un **recubrimiento por abiertos** si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$.

Definition 52. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es **compacto** si para todo recubrimiento de X por abiertos, existe un subrecubriemto finito.

Definition 53. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $K \subseteq X$. Decimos que K es **compacto** si $(K, \mathcal{T}_K)$ es compacto.

Recordamos que sobre todo el concepto de compacidad está asociado a un subconjunto de un espacio topológico. Para definirlo correctamente usamos la topología relativa, si bien no es necesario hacer uso de ella. Es decir, para definir la compacidad de un subconjunto, usamos recubrimientos por abiertos de la topología relativa. Sin embargo, podemos preguntarnos si realmente es necesario tomar los abiertos del subespacio para verificar la condición de compacidad. La siguiente proposición nos indica que para determinar la condición de compacidad de un subconjunto basta con tomar los abiertos del espacio original.

Proposition 119. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $K \subseteq X$. K es compacto si y solo si para todo recubrimiento de K por abiertos de X, existe un subrecubrimiento finto.

Demostración. Supongamos que $(K, \mathcal{T}_K)$ es compacto. Tomemos $\mathcal{A} = \{A_\alpha\} \subseteq \mathcal{T}$ un recubrimiento de K por abiertos. Por ser recubrimiento, entonces $K \subseteq \cup_\alpha A_\alpha$. Por tanto, $K = \cup_\alpha (A_\alpha \cap K)$. Como $A_\alpha \in \mathcal{T}$, entonces $A_\alpha \cap K \subseteq \mathcal{T}_K$. Como $(K, \mathcal{T}_K)$ es compacto, entonces existen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tales que $K = \cup_{i=1}^n (A_i \cap K)$. Por tanto, $K \subseteq \cap_{i=1}^n A_i$. Es decir, $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{A}$ es un subrecubrimiento finito.

Tomemos $\mathcal{A}_K = \{A'_\alpha\}$ un recubrimiento de K por abiertos de $\mathcal{T}_K$. Como $A'_\alpha \in \mathcal{T}_K$, entonces $A'_\alpha = A_\alpha \cap K$ para un cierto $A_\alpha \in \mathcal{T}$. Denotemos $\mathcal{A} = \{A_\alpha\} \subseteq \mathcal{T}$. Como $\mathcal{A}_K$ recubre a K, entonces $K = \bigcup_\alpha A'_\alpha = \bigcup_\alpha (A_\alpha \cap K)$. De esta manera, $K \subseteq \bigcup_\alpha A_\alpha$. Por tanto, $\mathcal{A}$ es un recubrimiento de K por abiertos de $\mathcal{T}$. Por hipótesis, existe un recubrimiento finto $\mathcal{A}' = \{A_i\}_{i=1}^n$, es decir, $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$. Por tanto, $K = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap K) = \bigcup_{i=1}^n A'_i$. De este modo, $\mathcal{A}'_K = \{A'_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{A}_K$ es un subrecubrimiento finito. Por tanto, queda demostrado que $(K, \mathcal{T}_K)$ es compacto. □

Proposition 120. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $K \subseteq X$.

1. Si X es compacto y $K \in \mathcal{C}$, entonces K es compacto.

2. Si X es T_2 y K es compacto, entonces $K \in \mathcal{C}$

Demostración. Supongamos que X es compacto y K un cerrado de X. Supongamos que $\mathcal{A}$ es un recubrimiento de K por abiertos de X. Como K es cerrado, entonces $X \setminus K \in \mathcal{T}$ y, por tanto, $\mathcal{A} \cup \{X \setminus K\}$ es un recubrimiento de X por abiertos. Como X es compacto, entonces existe un subrecrubrimiento $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A} \cup \{X \setminus K\}$ finito. Por tanto, $\mathcal{A}' \setminus \{X \setminus K\} \subseteq \mathcal{A}$ es un subrecubrimiento finito. Por Proposición 119, K es compacto.

Supongamos que X es T_2 y K es compacto. Sea $x \notin K$. Para todo $y \in K$, tenemos que $x \neq y$. Como X es T_2, entonces existen $A_{x,y} \in \mathcal{T}(x)$ y $A_y \in \mathcal{T}(y)$ tales que $A_{x,y} \cap A_y = \varnothing$. De este modo, se puede comprobar que $\mathcal{A} = \{A_y\}_{y \in K}$ es un recubrimiento por abiertos de K. Como K es compacto, existen $A_{y_1}, \ldots A_{y_n} \in \mathcal{A}$ tales que $\{A_{y_i}\}$ es un subrecubrimiento finito. Como $A_{x,y_i} \cap A_{y_i} = \varnothing$, entonces llamando $A_x = \cap_{i=1}^n A_{x,y_i} \in \mathcal{T}(x)$ tenemos que $A_x \cap A_{y_i} = \varnothing$ para todo $i = 1, \ldots, n$. De este modo, $A_x \cap K \subseteq A \cap \bigcup_i A_{y_i} = \varnothing$. Por tanto, por la Proposición 7, tenemos que K es cerrado. □

Corollary 20. En un espacio métrico, todo conjunto compacto es cerrado y acotado.

Demostración. Como todo espacio métrico (X, d) es T_2, si $K \subseteq X$ es compacto, entonces por Proposición 120, K es cerrado. Por otro lado, $X = \bigcup_{x \in X} \mathbb{B}(x; 1)$ y como X es compacto, entonces X puede escribirse como una unión finita de bolas abiertas. Como las bolas abiertas son acotadas, por la Proposición 25, X es acotado. □

Theorem 2 (Heine-Borel)**.** En $\mathbb{R}^n$ con la topología usual, un subconjunto es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

Proposition 121. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico compacto y $S \subseteq X$.

$$S \text{ es infinto} \Rightarrow \mathrm{ac}(S) \neq \varnothing.$$

Demostración. Supongamos que $\mathrm{ac}(S) = \varnothing$. Entonces $\overline{S} = S \cup \mathrm{ac}(S) = S$ y por lo tanto S es cerrado. Por Proposición 120, entonces S es compacto. Tomemos $x \in S$ arbitrario. Como $x \notin \mathrm{ac}(S)$, entonces existe un $A_x \in \mathcal{T}(x)$ tal que $A_x \cap S = \{x\}$ De este modo, tendremos que $S = \bigcup_{x \in S}\{x\} = \bigcup_{x \in S}(A_x \cap S) \subseteq \bigcup_{x \in S} A_x$. De este modo, $\mathcal{A} = \{A_x\}_{x \in S}$ es un recubrimiento por abiertos de S. Por ser S compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in S$ tales que $S \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_{x_i}$. De este modo, $S = (\bigcup_{i=1}^n A_{x_i}) \cap S = \bigcup_{i=1}^n (A_{x_i} \cap S) = \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}$, probando por tanto que S es finito. □

Proposition 122. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

1. Si X es T_2, entonces X separa conjuntos compactos.

2. Si X es regular, entonces X separa compactos con cerrados.

Demostración. Supongamos que X es T_2. Y sean $K_1, K_2 \subseteq X$ subconjuntos compactos tales que $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Fijemos un $x \in K_1$ y tomemos un $y \in K_2$ arbitrario. Como $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, entonces $x \neq y$ y como X es T_2, entonces existen $A_{x,y} \in \mathcal{T}(x)$ (un abierto que depende de y) y $A_y \in \mathcal{T}(y)$ tal que $A_{x,y} \cap A_y = \varnothing$. Como esto es cierto para todo $y \in K_2$, en particular, $K_2 \subseteq \bigcup_{y \in K_2} A_y$. Como K_2 es compacto, entonces existen $y_1, \ldots, y_n \in K_2$ tales que $K_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_{y_i}$. Denotemos $A_{x,K_2} = \bigcup_{i=1}^n A_{y_i} \in \mathcal{T}$. Si definimos $A_x = \bigcap_{i=1}^n A_{x,y_i}$, entonces $A_x \in \mathcal{T}(x)$ tal que $A_x \cap A_{x,K_2} = \varnothing$. En resumen, para todo $x \in K_1$, existen $A_x \in \mathcal{T}(x)$ y $A_{x,K_2} \in \mathcal{T}$ tales que $K_2 \subseteq A_{x,K_2}$ y $A_x \cap A_{x,K_2} = \varnothing$. Como esto es cierto para todo $x \in K_1$, entonces $K_1 \subseteq \bigcup_{x \in K_1} A_x$ y como K_1 es compacto, entonces existen $x_1, \ldots, x_m \in K_1$ tales que $K_1 =\subseteq \bigcup_{j=1}^m A_{x_j}$. Denotemos $A_1 = \bigcup_{j=1}^m A_{x_j}$. Entonces $A_1 \in \mathcal{T}$ y $K_1 \subseteq A_1$. Por otro lado, para todo x_j, existe un $A_{x_j,K_2} \in \mathcal{T}$ tal que $K_2 \subseteq A_{x_j,K_2}$. Denotando $A_2 = \bigcap_{j=1}^m A_{x_j,K_2}$, tenemos que $A_2 \in \mathcal{T}$ y $K_2 \subseteq A_2$. Finalmente, $A_1 \cap A_2 = \bigcup_{j=1}^m (A_{x_j} \cap A_2) \subseteq \bigcup_{j=1}^m (A_{x_j} \cap A_{x_j,K_2}) = \varnothing$.

Supongamos ahora que X es un espacio regular y sean $K \subseteq X$ compacto y $C \in \mathcal{C}$ tales que $K \cap C = \varnothing$. Tomemos $x \in K$ arbitrario. Entonces $x \notin C$. Como X es regular, entonces existen $A_x \in \mathcal{T}(x)$ y $A_{C,x} \in \mathcal{T}$ tales que $C \subseteq A_{x,C}$ y $A_x \cap A_{x,C} = \varnothing$. De este modo, como $K_1 \subseteq \bigcup_{x \in K_1} A_x$, entonces como K_1 es compacto, tenemos que existen $x_1, \ldots, x_n \in K_1$ tales que $K_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_{x_n}$. Llamemos $A_1 = \bigcup_{i=1}^n A_{x_i}$. Como para todo $x_i \in K_1$, existe un $A_{x_i,C}$ tal que $C \subseteq A_{x_i,C}$, entonces tomando $A_2 = \bigcup_{i=1}^n A_{x_i,C}$ tenemos que $C \subseteq A_2$ y $A_2 \in \mathcal{T}$. Finalmente, $A_1 \cap A_2 = \bigcup_{i=1}^n (A_{x_i} \cap A_2) \subseteq \bigcup_{i=1}^n (A_{x_i} \cap A_{x_i,C}) = \varnothing$. □

Corollary 21. Para todo espacio compacto, T_1 implica T_3.

Demostración. Sea $(X, \mathcal{T})$ compacto y T_1. Sea $x \notin C$ donde $C \in \mathcal{C}$. Como X es compacto, por la Proposición 120 se deduce que C es compacto. Por otro lado, por ser X un espacio T_1, $\{x\}$ es cerrado y de nuevo por la Proposición 120, $\{x\}$ es compacto. Como $\{x\} \cap C = \varnothing$, entonces por la Proposición 122, X separa a x y a C, por lo que X es además regular. □

Definition 54. Sea $X \neq \varnothing$ y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos. Decimos que $\mathcal{S}$ satisface la **propiedad de la intersección finita** (o es **PIF**) si para todo subconjunto finito $\{S_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{S}$, tenemos que

$$\bigcap_{i=1}^n S_i \neq \varnothing.$$

Proposition 123. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces X es compacto si y solo si

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C} \text{ PIF} \Rightarrow \bigcap_{D \in \mathcal{D}} D \neq \varnothing.$$

Demostración. Supongamos que X no es compacto. Entonces existe un $\mathcal{A}$ recubrimiento por abiertos de X que no tiene subrecubrimiento finito. Sea $\mathcal{D} = \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\}$. En primer lugar, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ por que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$. Además, si $\{D_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{D}$ es finito, entonces $\{X \setminus D_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{A}$ y por tanto, no recubre a X, es decir, $\bigcap_{i=1}^n (X \setminus D_i) \neq X$ o, equivalentemente, $\bigcap_{i=1}^n D_i \neq \varnothing$. Por tanto, demostramos que $\mathcal{D}$ es PIF. Sin embargo, tenemos que como $\mathcal{A}$ es un recubrimiento, entonces $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = X$, es decir $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} D = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (X \setminus A) = X \setminus \left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right) = \varnothing$.

Supongamos ahora que no se cumple la hipótesis. Entonces existe un $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ PIF tal que $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} D = \varnothing$. Definamos $\mathcal{A} = \{X \setminus D \mid D \in \mathcal{D}\}$. Entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ y además, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} (X \setminus D) = X \setminus \left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D\right) = X$. Por tanto, $\mathcal{A}$ es un recubrimiento por abiertos de X. Sin embargo, tomando cualquier $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{A}$, tenemos que $\{X \setminus A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{D}$ y como $\mathcal{D}$ es PIF, $\bigcap_{i=1}^n D_i \neq \varnothing$, equivalentemente, $\bigcup_{i=1}^n A_i = X \setminus (\bigcap_{i=1}^n D_i) \neq X$. Por tanto, ningún subconjunto finito de $\mathcal{A}$ es un recubrimiento de X, luego X no es compacto. □

Theorem 3 (Weierstrass generalizado)**.** Sea $f : X \to Y$ una función continua y $K \subseteq X$.

$$K \text{ es compacto} \Rightarrow f(K) \text{ es compacto.}$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}_Y = \{A_\alpha\}_\alpha$ es un recubrimiento de $f(K)$ por abiertos de Y. Entonces $f(K) \subseteq \bigcup_\alpha A_\alpha$. Por tanto, $K \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$. Como f es continua, entonces $f^{-1}(A_\alpha) \in \mathcal{T}_X$. Por tanto, $\mathcal{A}_X = \{f^{-1}(A_\alpha)\}_\alpha$ es un recubrimiento de K por abiertos de X. Como K es compacto, entonces existe un subrecubrimiento finito $\{f^{-1}(A_i)\}_{i=1}^n$, es decir, $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(A_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$, es decir, $f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$. Por tanto, $\{A_i\} \subseteq \mathcal{A}_Y$ es un subrecubrimiento finito. Así probamos que $f(K)$ es compacto. □

Corollary 22. La compacidad es una propiedad topológica.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Si X es compacto, entonces por el Teorema 3 $f(X) = Y$ es compacto. Por otro lado, como f es homeomorfmo, en particular, $f^{-1} : Y \to X$ es también continua. Si Y es compacto, entonces de nuevo por el Teorema 3, $f^{-1}(Y) = X$ es compacto. □

Proposition 124. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos y $f : X \to Y$ continua.

$$X \text{ compacto} \Rightarrow f \text{ uniformemente continua.}$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua para todo $x \in X$, entonces existe un $\delta_x > 0$ tal que $f(\mathbb{B}(x; \delta_x)) \subseteq \mathbb{B}\left(f(x); \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Es fácil observar que $X = \bigcup_{x \in X} \mathbb{B}\left(x; \frac{\delta_x}{2}\right)$. Por tanto, como X es compacto, tenemos que existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^n \mathbb{B}\left(x_i; \frac{\delta_i}{2}\right)$. Denotemos $\delta = \min_{i=1,\ldots,n} \left\{\frac{\delta_i}{2}\right\}$. Demostremos entonces que f es uniformemente continua con ε y δ escogidos. Supongamos que $d_X(x, y) < \delta$. Como $x \in X$, entonces existe un i_0 tal que $x \in \mathbb{B}\left(x_{i_0}; \frac{\delta_{i_0}}{2}\right)$, es decir, $d_X(x, x_{i_0}) < \frac{\delta_{i_0}}{2} \leq \delta_{i_0}$ y por ser f continua en x_{i_0}, $d_Y(f(x), f(x_{i_0})) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por otro lado, obtenemos que $d_X(y, x_{i_0}) \leq$

$d_X(x, x_{i_0}) + d_X(x, y) < \delta_{i_0} + \frac{\delta_{i_0}}{2} \leq \frac{\delta_{i_0}}{2} + \frac{\delta_{i_0}}{2} = \delta_{i_0}$ y, de nuevo, por ser f continua en x_{i_0}, tenemos que $d_Y(f(x_{i_0}), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Finalmente, observamos que $d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x_{i_0}), f(x)) + d_Y(f(x_{i_0}), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Proposition 125. Sea $f : X \to Y$ una aplicación biyectiva y continua. Si X es Compacto e Y es T_2, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Basta probar que f es cerrada. Sea $C \in \mathcal{C}$. Como X es compacto, entonces por la Proposición 120, C es compacto. Por el Teorema 3, $f(C)$ es compacto en Y y como Y es T_2, entonces por Proposición 3, $f(C)$ es cerrado. □

Theorem 4 (Tíjonov)**.** Sea $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_\alpha$ una colección arbitraria de espacios topológicos.

$$\left(\prod_\alpha X_\alpha, \mathcal{T}_\times\right) \text{ es compacto} \Leftrightarrow (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \text{ es compacto } \forall\alpha.$$

7.2. Compacidad local

Definition 55. Decimos que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es **localmente compacto** en $x \in X$ si existe un entorno de x compacto.

Proposition 126. Sea $(X, \mathcal{T})$ es T_2 y $x \in X$. Son equivalentes.

1. X es localmente compacto en x.
2. Existe un $K \in \mathcal{N}(x)$ tal que $\overline{K}$ es compacto.
3. Exste una base local $\mathcal{B}(x)$ compuesto de compactos.

Demostración. Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es T_2 localmente compacto en $x \in X$. Entonces existe un $\overline{K} \in \mathcal{N}(x)$ compacto. Por Proposición 120, K es cerrado y por tanto, $\overline{K} = K$ es compacto.

Supongamos ahora 2. Entonces existe un K entorno de x tal que $\overline{K}$ es compacto. Como $K \subseteq \overline{K}$, entonces $\overline{K}$ es también un entorno de x. De este modo, existe un $A \in \mathcal{T}(x)$ tal que $A \subseteq \overline{K}$. Considerando $(\overline{K}, \mathcal{T}_{\overline{K}})$ el subespacio topológico de $(X, \mathcal{T})$, tenemos que $(\overline{K}, \mathcal{T}_{\overline{K}})$ es un espacio compacto y como $\overline{A} \subseteq \overline{K}$ es cerrado, por la Proposición 120, $(\overline{A}, \mathcal{T}_{\overline{A}})$ es compacto. Además, por la Proposición 110, $(\overline{A}, \mathcal{T}_{\overline{A}})$ es T_2 y, por la Proposición 21, $(\overline{A}, \mathcal{T}_{\overline{A}})$ es T_3 y por la Proposición 113, $(\overline{A}, \mathcal{T}_{\overline{A}})$ tiene una base local $\mathcal{B}(x)$ formada por cerrados. Como $\overline{A}$ es T_2, entonces por la Proposición 120 $\mathcal{B}_{\overline{A}}(x)$ está formada por compactos. Basta ver que $\mathcal{B}_{\overline{A}}(x)$ es una base local en el espacio $(X, \mathcal{T})$. Pero esto es cierto ya que para todo $U \in \mathcal{N}(x)$, $U \cap \overline{A} \in \mathcal{N}_{\overline{A}}(x)$. Por lo tanto, existe un $B_x \in \mathcal{B}_{\overline{A}}(x)$ tal que $B_x \subseteq U \cap \overline{A} \subseteq U$.

Finalmente, si existe una base local de entornos compactos, en particular x tiene un entorno compacto. □

Notemos que la segunda y la tercera condición implican la compacidad local en el punto dado sin requerir de la condición T_2. En efecto, esta condición de separabilidad es la que permite la equivalencia entre estos tres conceptos. Es por ello que la condición de ser T_2 será de gran relevancia para este análisis de la compacidad local. Muchos resultados relacionados con este tema no serían ciertos si el espacio no fuese T_2.

Definition 56. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es **localmente compacto** si es localmente compacto para todo $x \in X$.

Proposition 127. Todo espacio compacto es localmente compacto.

Demostración. Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es compacto. Como $X \in \mathcal{N}(x)$ para todo $x \in X$ y X es compacto, entonces X es localmente compacto para todo $x \in X$. □

Proposition 128. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio T_2.

1. Si X es localmente compacto, entonces $A \cap C$ es localmente compacto para todo $A \in \mathcal{T}$ y $C \in \mathcal{C}$.

2. Si $S \subseteq X$ es localmente compacto, entonces $S = A \cap \overline{S}$ donde $A \in \mathcal{T}$.

Demostración. Supongamos que X es localmente compacto y tomemos $A \in \mathcal{T}$ y $C \in \mathcal{C}$. Para todo $x \in A$, como X es localmente compacto, entonces exite una base local $\mathcal{B}(x)$ compuesta por compactos. Como A es abierto, entonces en particular, $A \in \mathcal{N}(x)$ por lo que existe un $K_x \in \mathcal{B}(x)$ compacto tal que $K_x \subseteq A$. Por tanto, A es localmente compacto. Por otro lado, si $y \in C$, entonces por el mismo razonamiento, existe un $K_y \in \mathcal{B}(y)$ compacto. De esta manera, $K_y \cap C \in \mathcal{N}_C(y)$. Como X es T_2 y K_y compacto, entonces por Proposición 120, K_y es cerrado, luego $K_y \cap C \in \mathcal{C}$ y por ser un subconjunto cerrado del compacto K_y, de nuevo por la Proposición 120, $K_y \cap C$ es un entorno de y compacto, luego C es localmente compacto. De esta manera, $A \cap C$ es localmente compacto.

Supongamos que S es localmente compacto. Basta con ver que S es un abierto del espacio $(\overline{S}, \mathcal{T}_{\overline{S}})$. Sea $x \in S$. Como S es localmente compacto, existe un $K \in \mathcal{N}_S(x)$ tal que $\mathrm{cl}_S(K)$ es compacto. En particular, $\overline{K} \in \mathcal{N}_{\overline{S}}(x)$. Podemos expresar $K = S \cap U$ donde $U \in \mathcal{N}(x)$. De esta manera, $\mathrm{cl}_S(K) = \overline{K} \cap S = \overline{S \cap U} \cap S$ es compacto y como X es T_2, por la Proposición 110, entonces $\overline{S \cap U} \cap S \in \mathcal{C}$. Como $S \cap U \subseteq \overline{S \cap U} \cap S$, entonces $\overline{S \cap U} \subseteq \overline{S \cap U} \cap S$, lo que implica que $\overline{K} = \overline{S \cap U} \subseteq S$ y como $\overline{K}$ es un entorno de x en $\overline{S}$, entonces $S \in \mathcal{N}_{\overline{S}}(x)$. Como esto es cierto para todo $x \in S$, entonces S es un abierto de $\overline{S}$. □

Corollary 23. Un conjunto denso en un espacio T_2 y localmente compacto es abierto si y solo si es localmente compacto.

Demostración. Sea $D \subseteq X$ denso. Si $D \in \mathcal{T}$, entonces $D = D \cap X = D \cap \overline{D}$, luego D puede escribirse como la intersección de un abierto y un cerrado. Por la Proposición 128, D es localmente compacto.

Si D es localmente compacto, entonces por la Proposición 128 existe un $A \in \mathcal{T}$ tal que $D = A \cap \overline{D} = A \cap X = A \in \mathcal{T}$ □

Proposition 129. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y abierta.

$$X \text{ es localmente continua} \Rightarrow f(X) \text{ es localmente continua.}$$

Demostración. Sea $y \in f(X)$. Entonces existe un $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como X es localmente compacto, entonces existe un $K \in \mathcal{N}(x)$ compacto. Como f es continua, por el Teorema 3, $f(K)$ es compacto y como f es abierta, entonces $f(K) \in \mathcal{N}(y)$. De este modo, y tiene un entorno compacto y como es cierto para todo $y \in f(X)$, entonces $f(X)$ es localmente compacto. □

Proposition 130. Sea $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_\alpha$ una colección arbitraria de espacios topológicos. $(\prod_\alpha X_\alpha, \mathcal{T}_\times)$ es localmente compacto si y solo si

1. X_α es localmente compacto para todo α.
2. Existen finitos X_{α_i} no compactos.

7.3. Espacios Lindelöf

Definition 57. Un espacio $(X, \mathcal{T})$ es **Lindelöf** si todo recubrimiento de X por abiertos tiene un subrecubrimiento numerable.

Es fácil observar que todo espacio compacto es Lindelöf.

Proposition 131. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio Lindelöf.

1. Si $C \in \mathcal{C}$, entonces $(X, \mathcal{T}_C)$ es Lindelöf.
2. Si $f : X \to Y$ es continua, entonces $f(X)$ es Lindelöf.

Demostración. Ambas demostraciones se realizan de manera análoga a las de la Proposición 120 del Teorema 3, cambiando las justificaciones oportunas —es decir, cambiando el subrecubrimiento finito por numerable—. □

Proposition 132. Todo espacio 2AN es Lindelöf.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ es un recubrimiento por abiertos del espacio $(X, \mathcal{T})$. Para todo $x \in X$, $x \in \bigcup A_\alpha$, luego existe un α_x tal que $x \in A_{\alpha_x}$. Como X es 2AN, tiene una base $\mathcal{B}$ numerable, luego existe un $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_{\alpha_x} \subseteq A_{\alpha_x}$. Como $\{B_{\alpha_x} \in \mathcal{B}\}_{x \in X} \subseteq \mathcal{B}$ y la base es numerable, entonces podemos escribir $\{B_{\alpha_x} \in \mathcal{B}\}_{x\in X} = \{B_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. De ahí, deducimos que $\{A_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ es un subrecubriemto numerable. □

Corollary 24. Para todo espacio métrico, ser 2AN y Lindelöf son equivalentes.

Demostración. Por la Proposición 132, basta con ver que todo espacio metrico Lindelöf es 2AN. Fjemos un $n \in \mathbb{N}$ y denotemos $\mathcal{A}_n = \left\{\mathbb{B}\left(x; \frac{1}{n}\right) \mid x \in X\right\}$. Es fácil observar que $\mathcal{A}_n$ es un recubrimiento por abiertos de X. Como X es Lindelöf, entonces existe un subrecrubrimiento numerable $\mathcal{A}'_n = \left\{\mathbb{B}\left(x_i; \frac{1}{n}\right) \mid i \in \mathbb{N}\right\}$. De esta manera, podemos observar que el conjunto $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}'_n$ es numerable. Veamos que $\mathcal{B}$ es también una base de X. Sea $A \in \mathcal{T}$ y $x \in A$. Entonces existe un $n \in \mathcal{N}$ tal que $x \in \mathbb{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq A$. Como en particular, $x \in X$, entonces tomando el recubrimiento $\mathcal{A}'_{2n}$, existe un $i_0 \in \mathcal{N}$ tal que $x \in \mathbb{B}\left(x_{i_0}, \frac{1}{2n}\right)$ —por tanto, $d(x, x_{i_0}) < \frac{1}{2n}$. Veamos que $\mathbb{B}\left(x_{i_0}, \frac{1}{2n}\right) \subseteq \mathbb{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$. Si $y \in \mathbb{B}\left(x_{i_0}, \frac{1}{2n}\right)$, entones $d(y, x) \leq d(y, x_{i_0}) + d(x_{i_0}, x) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$, luego $y \in \mathbb{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$. □

Capítulo 8

Conexión

8.1. Espacios conexos

Definition 58. Decimos que $(X, \mathcal{T})$ es **conexo** si no existe ningún clopen no vacío.

Definition 59. Dos subconjuntos $S_1, S_2 \subseteq X$ en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ están **separados** si $\overline{S} \cap T = S \cap \overline{T} = \varnothing$.

Example 41. La definición de conjuntos separados requiere que ambas intersecciones sean vacías, pues ésto cumple de manera general. Tomemos $X = \mathbb{R}$ con la topología usual, $S = [0, 1]$ y $T = (1,2)$. Entonces por un lado tenemos que $\overline{S} \cap T = [0, 1] \cap (1, 2) = \varnothing$, pero $S \cap \overline{T} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}$.

Proposition 133. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Son equivalentes.

1. X es conexo.
2. No existe una partición de X formada por dos abiertos.
3. No existe una partición de X formada por dos cerrados.
4. No existe ningún par de conjuntos no vacíos separados cuya unión sea X.

Demostración. Supongamos que X no es conexo. Entonces existe un $S \subseteq X$ no vacío clopen, es decir, $S \subseteq \mathcal{T} \cap \mathcal{C}$. De este modo, $A, X \setminus A \in \mathcal{T}$ tales que $A, X \setminus A \neq \varnothing$, su intersección es vacía y su unión es el total. Es decir, forman una separación.

Supongamos que existe una separación $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$. Entonces es fácil ver que $X \setminus A_1, X \setminus A_2 \in \mathcal{C}$ son no vacíos y forman una separación.

Supongamos que $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ forman una separación. Entonces son no vacíos, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ y su unión es X. Como son cerrados, entonces $C_i = \overline{C_i}$ para $i = 1, 2$, por lo que finalmente tenemos que $\overline{C_1} \cap C_2 = C_1 \cap \overline{C_2} = C_1 \cap C_2 = \varnothing$, es decir, son conjuntos separados.

Finalmente, sean $S, T \subseteq X$ conjuntos separados no vacíos cuya unión es X. Como son separados, entonces $\overline{S} \cap T = S \cap \overline{T} = \varnothing$. En particular, esto implica que $S \cap T = \varnothing$. Como además, $S \cup T = X$, entonces $S = X \setminus T$. Veamos que S es clopen. En primer lugar, como $S \cap \overline{T} = \varnothing$ y además $S \cup \overline{T} = X$, entonces $S = X \setminus \overline{T}$, por lo que es complementario de un cerrado, es decir, $S \in \mathcal{T}$. Por otro lado, como $\overline{S} \cap T = \varnothing$ y además $\overline{S} \cap T = X$, entonces $\overline{S} = X \setminus T = S$, por lo que $S \in \mathcal{C}$ demostrando así que S es clopen. $\square$

Como la definición de espacio conexo es una negación de existencia, por regla general se suele demostrar la conexión de un espacio negando su definición. Es por tanto que la existencia de conjuntos clopen será nuestro punto de partida a la hora de demostrar la conexión de un espacio. Nombrando a estos espacios que cumplen tal condición de existencia, decimos que un espacio topológico es **disconexo** si no es conexo, es decir, existe un conjunto clopen no vacío.

Definition 60. Un subconjunto $S \subseteq X$ de un espacio topológico es **conexo** si $(S, \mathcal{T}_S)$ es un espacio conexo.

Proposition 134. Set $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$ conexo. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ forman una partición de X, entonces $S \subseteq A_i$ para algún $i = 1, 2$.

Demostración. Como A_1 y A_2 son dos abiertos que forman una partición de X, en particular, $A_1 \cap S, A_2 \cap S \in \mathcal{T}_S$ tienen intersección vacía y unión S. Como S es conexo, entonces sin pérdida de generalidad $A_1 \cap S = \varnothing$, por lo que $S = (A_1 \cap S) \cup (A_2 \cap S) = A_2 \cap S$, por lo que $S \subseteq A_2$. $\square$

Proposition 135. La clausura de un conjunto conexo es conexo.

Demostración. Supongamos que $\overline{S}$ es disconexo. Entonces existe un clopen $A \in \mathcal{T}\overline{S}$ no vacío. Como $(S, \mathcal{T}_S)$ es un subespacio de $(\overline{S}, \mathcal{T}\overline{S})$, entonces $A \cap S$ es a la vez cerrado y abierto en S. Veamos que $A \cap S \neq \varnothing$. Como $\varnothing \neq A \subseteq \overline{S}$, entonces para cualquier $x \in A$, $x \in \overline{S}$, y por definición de la clausura, como $A \in \mathcal{T}(x)$, entonces $A \cap S \neq \varnothing$. De este modo, hemos encontrado un clopen no vacío en S, por lo que S es disconexo. $\square$

Corollary 25. Si S es conexo y $S \subseteq T \subseteq \overline{S}$, entonces T es conexo.

Demostración. Supongamos que T es disconexo. Entonces existe un clopen no vacío $A \subseteq T$. Por tanto, A y $T \setminus A$ forman una partición en T. Como S es conexo, entonces por la Proposición 134, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $S \subseteq T \setminus A$. Por lo tanto, $T \subseteq \overline{S} \subseteq \overline{T \setminus A} = T \setminus A$ por ser A clopen. Como $(T \setminus A) \cap A = \varnothing$ y como $\overline{S}$ es conexo por la Proposición 135, $A \cap T = \varnothing$ y como $A \subseteq T$, entonces $A = \varnothing$ pero esto es una contradicción, que viene de suponer que T es disconexo. $\square$

Definition 61. Una **cadena simple** es una familia $\{S_n\}n \in \mathcal{N}$ de subconjuntos de X tales que $S_n \cap Sn + 1 \neq \varnothing$.

Proposition 136. Se $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

1. Si $X = \bigcup_\alpha S_\alpha$ donde $S_\alpha \subseteq X$ es conexo para todo α y $\bigcap_\alpha S_\alpha \neq \varnothing$, entonces X es conexo.

2. Si para todo $x, y \in X$, existe un $S \subseteq X$ conexo tal que $x, y \in S$, entonces X es conexo.

3. Si $X = \bigcup_{i=1}^\infty S_n$ tal que $\{S_n\}$ es una cadena simple de conexos, entonces X es conexo.

Demostración. Sea $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ una partición de X. Entonces $A_i \cap S_\alpha$ forman una partición de S_α para $i = 1{,}2$. Como S_α es conexo, entonces por la Proposición 134, $S_\alpha \subseteq S_i$ para un $i = 1, 2$. Supongamos que existen $\alpha \neq \beta$ tal que $S_\alpha \subseteq A_1$ y $S_\beta \subseteq A_2$. Como $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ por ser partición de X, en particular, $S_\alpha \cap S_\beta = \varnothing$ lo que contradice la hipótesis. Por tanto, para todo α, $A_\alpha \subseteq A_1$ sin pérdida de generalidad. De este modo, $X = \bigcup_\alpha S_\alpha \subseteq A_1$, lo que lleva a que $X = A_1$ y por tanto $A_2 = \varnothing$. Luego no existe una partición de abiertos formada por abiertos no vacíos.

Fijemos $x_0 \in X$. Entonces para todo $x \in X$, existe un $S_x \subseteq X$ conexo tal que $x_0, x \in S_x$. Como $x_0 \in S_x$ para todo $x \in X$, entonces $\bigcup_{x \in X} S_x \neq \varnothing$ y, por otro lado, $X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X} S_x \subseteq X$, luego X es unión de conexos. Por el anterior párrafo, X es conexo.

Demostremos primero que si la unión es finita, entonces se cumple la conexión. Pro inducción, la unión de dos conexos con intersección no vacía cumple las condiciones de 1, luego X es conexo. Supongamos que es cierto para n. Si $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} S_i$, entonces $X = (\bigcup_{i=1}^{n} S_i) \cup S_{n+1}$. Por hipótesis de inducción, $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ es conexo. Como S_{n+1} y además, $\varnothing \neq S_n \cap S_{n+1} \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} S_i) \cap S_{n+1}$, entonces por 1, X es conexo. Visto que la unión finita de conexos con intersección no vacía dos a dos es conexo, demostrémoslo para el caso numerable. Supongamos que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ donde S_n es conexo y $S_n \cap S_{n+1} \neq \varnothing$. Tomemos $x_1, x_2 \in X$. Entonces existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $x_1 \in S_{n_1}$ y $x_2 \in S_{n_2}$. Por tanto, $x_1, x_2 \in \bigcup_{i=x_1 \wedge x_2}^{x_1 \vee x_2} S_i$. Como $\bigcup_{i=x_1 \wedge x_2}^{x_1 \vee x_2} S_i$ es conexo por el comentario anterior, entonces se cumplen la hipótesis de 2 y por tanto X es conexo. $\square$

Proposition 137. La imagen continua de un conexo es conexa.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ continua y $S \subseteq X$. Supongamos que $f(S)$ es disconexo. Entonces existe un clopen $A \subseteq f(Y)$ no vacío y propio. En primer lugar, $f^{-1}(A) \neq \varnothing$ ya que $A \neq \varnothing$ y $f^{-1}(A) \neq X$ ya que $A \neq f(Y)$. Como f es continua, entonces $f^{-1}(A)$ es clopen en X por ser A clopen en Y. Por tanto, $f^{-1}(A)$ es un clopen no vacío y propio de X, luego X es disconexo. $\square$

Corollary 26. La conexión es una propiedad topológica.

Demostración. Supongamos que $f : X \to Y$ es un homeomorfismo. Si X es conexo, entonces por la Proposición 137, $f(X) = Y$ es conexo. Por el contrario, si Y es conexo, entonces como f^{-1} es continua, $f^{-1}(Y) = X$ es conexo. $\square$

Proposition 138. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es conexo si y solo si toda aplicación continua $f : X \to \{0, 1\}$ es constante.

Demostración. Supongamos primero que X es conexo y sea $f : X \to \{0, 1\}$ continua. Como $\{0\}$ y $\{1\}$ son abiertos en $\{0, 1\}$. Entonces $f^{-1}(0), f^{-1}(1) \in \mathcal{T}$ de manera que forman una partición en X. Como X es conexo, sin pérdida de generalidad, $f^{-1}(0) = \varnothing$ y $f^{-1}(1) = X$ lo que significa que f es constante.

Sea ahora $A_{\subseteq} X$ un clopen no vacío y propio. Tomemos la función característica de A, $\chi_A : X \to \{0, 1\}$. Como $\chi_A^{-1}(0) = X \setminus A \in \mathcal{T}$ y $\chi_A^{-1}(1) = A \in \mathcal{T}$. entonces χ_A es una función continua y, por hipótesis, χ_A es constante. En ambos casos $\chi_A = 1$ o $\chi_A = 0$ llegamos a que $A = X$ o $A = \varnothing$ respectivamente, lo cual contradice con la hipótesis. Luego no existe ningún clopen no vacío propio, po lo que X es conexo. $\square$

Proposition 139. Sea $X \neq \varnothing$ y definamos la relación $x \sim y$ si y solo si existe un $S \subseteq X$ conexo tal que $x, y \in S$.

1. La relación $\sim$ es una RBE.

2. La clase de equivalencia $C_x = [x]$ es el conexo más grande que contiene a x.

Demostración. La transitividad y la simetría son directos. Por otro lado, para todo x, $\{x\}$ es un conexo que contiene a x, luego $x \sim x$.

Demostremos primero que C_x es conexo. Para todo $y \in C_x$, entonces $y \sim x$ y por tanto, existe un $S_y \subseteq X$ conexo tal que $x, y \in S_y$. Como $x \in S_y$ para todo $y \in C_X$, entonces $\bigcap_{y \in C_X} S_y \neq \varnothing$. Por otro lado, si $z \in S_y$, entonces por definición de la RBE $z \sim y$ y por transitividad, $z \sim x$, por lo que $z \in C_X$, es decir, $S_y \subseteq C_X$ para todo $y \in C_X$. De esta manera, $C_X = \bigcup_{y \in C_X} \{y\} \subseteq \bigcup_{y \in C_X} S_y \subseteq C_X$ y por la Proposición 136, C_X es conexo. Supongamos que S es un conexo que contiene a x. Entonces para todo $z \in S$, tenemos que $x, z \in S$ con S conexo, luego $z \sim x$ a lo que $z \in C_X$. Por tanto, C_X es el conexo más grande que contiene a x. □

Definition 62. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, decimos que C_x es la **componente conexa** que contiene a x.

Proposition 140. Toda componente conexa es cerrada.

Demostración. Sea C_x una componente conexa de un $x \in X$. Como es conexo, entonces por la Proposición 135, $\overline{C_x}$ es un conexo que contiene a x. Como C_x es el conexo más grande que contiene a x, entonces $\overline{C_x} \subseteq C_x$, luego C_x es cerrado. □

Definition 63. Sea $X \neq \varnothing$. Decimos que la cadena simple $\{S_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ **conecta** dos puntos $x, y \in X$ si existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x \in S_n$ e $y \in S_m$.

Proposition 141. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio conexo y $\mathcal{A}$ un recubrimiento por abiertos. Entonces para todo $x, y \in X$ existe una cadena simple $\mathcal{S}_{x,y} \subseteq \mathcal{A}$ que conecta a x e y.

Demostración. Tomemos un punto $x \in X$ fijo y definamos el siguiente conjunto $\mathcal{Z}x = \{y \in X \mid \text{existe una cadena simple } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A} \text{ que conecta } x \text{ e } y\}$. Si demostramos que $\mathcal{Z}_x$ es un clopen no vacío, entoces por ser X conexo tendremos que $\mathcal{Z}_x = X$. En primer lugar, es fácil observar que $x \in \mathcal{Z}_x$, luego no es vacío. Por otro lado, para todo $y \in \mathcal{Z}_x$, tenemos que existe una cadena simple $\{A_n\}n \in \mathbb{N}$ que une a x y a y. De este modo, $y \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \mathcal{Z}x$, por lo que $\mathcal{Z}_x \in \mathcal{N}(y)$. Como $\mathcal{Z}_x$ es entorno de todos sus puntos, $\mathcal{Z}_x \in \mathcal{T}$. Falta ver que es cerrado. Sea $y \in \overline{\mathcal{Z}_x}$. Como $\mathcal{A}$ es un recubrimiento, entonces existe un $A \in \mathcal{A}$ tal que $y \in A$ y como $A \in \mathcal{T}(y)$, entonces por definición de clausura, $A \cap \mathcal{Z}_x \neq \varnothing$. Sea $z \in A \cap \mathcal{Z}_x$. Como $z \in \mathcal{Z}_x$. Entonces existe una cadena simple $\{A_n\}n \in \mathbb{Z}$ que conecta z y x. Como $z, y \in A$, entonces $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{A\}$ es una cadena simple que conecta y con x, luego $y \in \mathcal{Z}_x$. Como hemos demostrado que $\overline{\mathcal{Z}_x} \subseteq \mathcal{Z}_x$, entonces $\mathcal{Z}_x$ es cerrado. □

8.2. Conexión por caminos

Definition 64. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es **conexo por caminos** si para todo $x, y \in X$, existe una aplicación $f : [0,1] \to X$ continua tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

A tal aplicación $f : [0,1] \to X$ continua que conecta x con y se le conoce como **camino**

Proposition 142. Todo espacio conexo por caminos es conexo.

Demostración. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio conexo por caminos. Tomemos $x, y \in X$, entonces existe un camino $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Como $[0,1]$ es un espacio conexo, entonces por ser f continua, $f([0,1])$ es un conjunto conexo de X tal que $x, y \in f([0,1])$. Como se cumple para todo par de puntos $x, y \in S$, por la Proposición 136, X es conexo. □

Proposition 143. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea la relación $x \sim y$ si y solo si existe un camino $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

1. La relación $\sim$ es una RBE.
2. La clase de equivalencia $[x]$ es el conexo por caminos más grande que contiene a x.

Demostración. La reflexión de la relación, $x \sim x$, es directa porque podemos considerar el camino constante $f : [0,1] \to X$ tal que $f(t) = x$ para todo $t \in [0,1]$. Por otro lado, si $x \sim y$, entonces existe un camino $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Podemos considerar $g : [0,1] \to X$ tal que $g(t) = f(1-t)$. Esta aplicación g es continua por ser composición de funciones continuas y $g(0) = f(1) = y$ y $g(1) = f(0) = x$, por lo que $y \sim x$. Finalmente, si $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces $f, g : [0,1] \to X$ con caminos tales que $f(0) = x$, $f(1) = g(0) = y$ y $g(1) = z$. Definamos $h : [0,1] \to X$ tal que $h(t) = f(2t)$ para todo $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $h(t) = g(2t-1)$ para todo $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Se puede demostrar que h es continua y además $h(0) = f(0) = x$ y $h(1) = g(1) = z$, por lo que $x \sim z$.

Veamos que $[x]$ es conexo por caminos. Sea $y, z \in [x]$. Por un lado, $y \sim x$, luego existe un camino $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = y$ y $f(1) = x$. Observemos que para todo $t_0 \in [0,1]$, $f(t_0) \in [x]$, pues podemos tomar $\tilde{f}(t) = f(tt_0)$ que es continua y además $\tilde{f}(0) = f(0) = x$ y $\tilde{f}(1) = f(t_0)$. Por tanto, $f([0,1]) \subseteq [x]$ y podemos considerar $f : [0,1] \to [x]$. De la misma manera y procediento análogamente, como $x \sim z$, entonces existe un camino $g : [0,1] \to [x]$ tal que $g(0) = x$ y $g(1) = z$. Por tanto, $h : [0,1] \to [x]$ tal que $h(t) = f(2t)$ para $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $h(t) = g(2t-1)$ para todo $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ es un camino que une y y z. Por tanto, todo par de puntos $y, z \in [x]$ pueden ser conectados por un camino, luego $[x]$ es conexo por caminos. Supongamos que existe un $S \subseteq X$ conexo por caminos que contiene a x. Si $y \in S$, entonces existe un camino $f : [0,1] \to S \subseteq X$ tal que une x con y, por lo que $x \sim y$ y por tanto $y \in [x]$. □

Definition 65. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es **arcoconexo** si para todo $x, y \in X$, existe una homeomorfismo $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

A dicho homeomorfismo f lo denominamos **arco**.

Proposition 144. Todo espacio arcoconexo es conexo por caminos.

Demostración. Basta con darse cuenta de que todo arco es un camino. □

8.3. Conexión local

Definition 66. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es **localmente conexo** en $x \in X$ si existe una base local $\mathcal{B}(x)$ formada por abiertos conexos.

Decimos que $(X, \mathcal{T})$ es **localmente conexo** si es localmente conexo para todo $x \in X$.

Proposition 145. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es localmente conexo si y solo si $\forall A \in \mathcal{T}$, las componentes conexas de A son abiertos.

Demostración. Sea C una componente conexa de A. Tomemos $x \in C$. Como $(X, \mathcal{T})$ es localmente conexa en x, entonces existe un $B_x \in \mathcal{B}(x)$ abierto y conexo. Como C es el conexo más grande que contiene a x, entonces $x \in B_x \subseteq C$ y por tanto, $C \in \mathcal{N}(x)$. Como C es entorno de todos sus puntos, $C \in \mathcal{T}$.

Para todo $A \in \mathcal{T}(x)$, denotemos $\mathrm{Comp}(A)$ como el conjunto de las componentes conexas de A y definamos $\mathcal{B}(x) = \bigcup_{A \in \mathcal{T}(x)} \mathrm{Comp}(A)$. Esta familia de conjuntos contiene abiertos conexos. Veamos que es una base local. Sea $U \in \mathcal{N}(x)$. Entonces existe un $A \in \mathcal{T}(x)$ tal que $A \subseteq U$. Tomemos $C_x \in \mathrm{Comp}(A)$ la componente conexa que contiene a x. Entonces $C_x \subseteq A \subseteq U$. Como $C_x \in \mathcal{B}(x)$, entonces es una base local. $\square$

Corollary 27. Sea $(X, \mathcal{T})$ localmente conexo.

1. Las componentes conexas son clopen.

2. Si X es compacto, entonces X tiene finitas componentes conexas.

Demostración. La primera afirmación es una consecuencia de la Proposición 140 y la Proposición 145.

Por otro lado, la familia formada por las componentes conexas forman un recubrimiento por abiertos. Como X es compacto, existe un subrecubrimiento finito $\{C_{x_i}\}i = 1^n$. Sea C_x una componente conexa que contiene a x, entonces existe un $i = 1, \ldots, n$ tal que $x \in Cx_i$. Como ambos son el conexo más grande que contiene a x, necesariamente $C_x = C_{x_i}$. Por tanto, $\{C_{x_i}\}_{i=1}^n$ es el conjunto de todas las componentes conexas de X. $\square$

Proposition 146. Todo cociente de un espacio localmente conexo es localmente conexo.

Demostración. Sea $(X/\sim, \mathcal{T}\sim)$ un espacio cociente y $A \in \mathcal{T}\sim$. Tomemos cualquier componente conexa $C \subseteq A$. Si demostramos que $C \in \mathcal{T}\sim$, entonces por la Proposición 145 se tiene. Denotando por $\pi : X \to X/\sim$ la proyección canónica, notemos que $C \in \mathcal{T}\sim$ si y solo si $\pi^{-1}(C) \in \mathcal{T}$. Basta con ver que $\pi^{-1}(C)$ es entorno de todos sus puntos.

Observamos fácilmente que $\pi^{-1}(C) \subseteq \pi^{-1}(A)$. Como π es continua, entonces $\pi^{-1}(A) \in \mathcal{T}$. Sea $x \in \pi^{-1}(C)$ y denotemos por $C_x \subseteq \pi^{-1}(A)$ la componente conexa que contiene a x. Como X es localmente conexo, entonces por la Proposición 145, $C_x \in \mathcal{T}$. De este modo, tenemos que por ser π una aplicación abierta, $\pi(C_x) \in \mathcal{T}_\sim$ y como π es además continua, entonces por la Proposición 137, $\pi(C_x) \subseteq \pi(\pi^{-1}(A)) = A$ es un conexo que contiene a $\pi(x)$. Como C es el conexo más grande que contiene a $\pi(x)$, entonces $\pi(x) \in \pi(C_x) \subseteq C$, es decir, $x \in C_x \subseteq \pi^{-1}(C)$, luego $\pi^{-1}(C) \in \mathcal{N}(x)$. $\square$

Definition 67. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es **localmente conexo por caminos** en $s \in X$ si existe una base local $\mathcal{B}(x)$ formada por conexos por caminos.

El espacio $(X, \mathcal{T})$ es **localmente conexo por caminos** si lo es para todo $x \in X$

Proposition 147. En un espacio localmente conexo por caminos, ser conexo es equivalente a ser conexo por caminos.

Demostración. Por la Proposición 142, todo espacio conexo es conexo por caminos. Por tanto, basta con demostrar la otra implicación. Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio conexo y localmente conexo por caminos. Tomemos $\mathcal{Z}_x$ la componente conexa por caminos de un cierto $x \in X$. En primer lugar, $x \in \mathcal{Z}$, luego $\mathcal{Z} \neq \varnothing$.

Por otro lado, Como X es localmene conexo por caminos, tomando cualquier $y \in \mathcal{Z}_x$, existe una base local $\mathcal{B}(y)$ de abiertos conexos por caminos. Dado un $B_y \in \mathcal{B}(y)$, por definición de componente conexa por caminos, $B_y \subseteq \mathcal{Z}_x$, luego $\mathcal{Z}_x \in \mathcal{N}(y)$ para todo $y \in \mathcal{Z}_x$. Es decir, $\mathcal{Z}_x \in \mathcal{T}$.

Finalmente, sea $y \in \overline{\mathcal{Z}_x}$, entonces tomando cualquier $B_y \in \mathcal{B}(y)$, tenemos que $B_y \cap \mathcal{Z}_x \neq \varnothing$. Como existe un $z \in B_y \cap \mathcal{Z}_x$, entonces existe un camino que conecta z y x —ya que $z \in \mathcal{Z}_x$— y otro camino que conecta z e y —ya que $z \in B_y$ y B_y es conexo por caminos—. Por la transitividad de la relación, existe un camino que conecta x e y. Es decir, $y \in \mathcal{Z}_y$ demostrando que es un cerrado.

Como $\mathcal{Z}_x$ es un clopen no vacío y X es conexo, entonces $\mathcal{Z}_x = X$ demostrando que todo punto es conectado a x por un camino. Como esto es cierto para todo $x \in X$, entonces todo par de puntos es conectado por un camino. □

Proposition 148. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es localmente conexo por caminos si y solo si $\forall A \in \mathcal{T}$, toda componente conexa por caminos $C \subseteq A$ es abierto.

Demostración. Sea $C \subseteq A$ una componente conexa de $A \in \mathcal{T}$. Sea $x \in C$, Como $x \in A$, entonces existe un $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B_x \subseteq A$. □

Capítulo 9

Sucesiones

9.1. Convergencia

Definition 68. Una **sucesión** en $X \neq \varnothing$ es una aplicación $\mathbb{N} \to X$.

Las sucesiones suelen denotarse como (x_n), indicando que la aplicación es de la forma $n \mapsto x_n$.

Definition 69. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Decimos que la sucesión (x_n) **converge** a un punto $x \in X$ si

$$\forall U \in \mathcal{N}(x),\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_0,\ x_n \in U.$$

En este caso, denotamos la convergencia como $\lim x_n = x$ o simplemente $x_n \to x$ y $x \in X$ es un **límite** de la sucesión (x_n).

Proposition 149. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ una base local y (x_n) una sucesión de X. Entonces $x_n \to x$ si y solo si

$$\forall B_x \in \mathcal{B}(x),\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_0,\ x_n \in B_x.$$

Demostración. Supongamos que $x_n \to x$. Si $B_x \in \mathcal{B}(x)$, entonces como en particular $B_x \in \mathcal{N}(x)$, se tiene lo deseado.

Por otro lado, sea $U \in \mathcal{N}(x)$. Entonces existe un $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B_x \subseteq U$. Por hipótesis, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \in B_x \subseteq U$, luego $x_n \to x$. □

Corollary 28. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces $x_n \to x$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $d(x, x_n) < \varepsilon$.

Demostración. Notemos que las bolas abiertas centradas en un cierto punto $x \in X$ forman una base local. Por tanto, Para toda bola abierta —es decir, tomamos cualquier $\varepsilon > 0$—, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \in \mathbb{B}(x; \varepsilon)$, es decir, $d(x, x_n) < \varepsilon$. □

Proposition 150. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico

1. Si X es T_2 entonces toda sucesión convergente tiene un único límite.
2. Si X es además $1AN$, entonces el recíproco es cierto.

Demostración. Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es T_2. Sean $x, y \in X$ y (x_n) una sucesión que converge a x e y. Tomemos $A_x \in \mathcal{T}(x)$ y $A_y \in \mathcal{T}(y)$. Por un lado, como $x_n \to x$, entonces existe un $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A_x$ para todo $n \geq n_x$. Por otro lado, como $x_n \to y$, existe un $n_y \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_y$, $x_n \in A_y$. Por tanto, tomando $n_0 = \text{máx}\{n_x, n_y\}$, para todo $n \geq n_0$, $x_n \in A_x \cap A_y$. De esto, $A_x \cap A_y \neq \varnothing$ y por ser X un espacio T_2, deducimos que $x = y$.

Supongamos ahora que toda sucesión convergente tiene un único límite y que X es 1AN. Sean $x, y \in X$. Entonces por ser X 1AN, existen bases locales $\mathcal{B}(x) = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\mathcal{B}(y) = \{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ numerables cuyos elementos forman una cadena respectivamente. Supongamos que para todo $n, m \in \mathbb{N}$, $B_n \cap V_m \neq \varnothing$. Entonces tomamos $z_n \in B_n \cap V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que $z_n \to x$ y que $z_n \to y$ y por hipótesis, $x = y$, luego X es T_2. □

Decimos que una una sucesión (x_n) en un conjunto cualquiera $X \neq \varnothing$ cumple **eventualmente** una propiedad P si existe un x_0 tal que $P(x_n)$ es cierto para todo $n \geq n_0$.

Con esta nomenclatura, una sucesión es convergente si para entorno de ese punto, la sucesión está eventualmente contenida en el entorno.

Proposition 151. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A, C \subseteq X$ y $f : X \to Y$ aplicación.

1. Si $A \in \mathcal{T}$, entonces para todo $x \in A$, $x_n \to x \Rightarrow (x_n) \subseteq A$ eventualmente.
2. Si para todo $x_n \to x$, $(x_n) \subseteq C$ eventualmente $\Rightarrow x \in C$, entonces $C \in \mathcal{C}$.
3. Si f es continuo, entonces $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$.

Demostración. Como $A \in \mathcal{T}(x) \subseteq \mathcal{N}(x)$, entonces por definición de convergencia, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \in A$.

Llamemos $A = X \setminus C$. Si $x_n \to x$ tal que $x \in A$, entonces $x \notin C$ y por hipótesis, $(x_n) \nsubseteq C$ eventualmente. Esto es equivalente a decir que $(x_n) \subseteq A$ eventualmente. Por tanto, demostramos que A es abierto y, por tanto, $C \in \mathcal{C}$.

Supongamos que $x_n \to x$ y tomemos $U \in \mathcal{N}(f(x))$. Como f es continua, entonces $f^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x)$ y como $x_n \to x$, entonces $x_n \in f^{-1}(U)$ eventualmente, es decir, $f(x_n) \in \mathcal{N}(f(x))$ eventualmente. Como esto es cierto para todo entorno de $f(x)$, se tiene que $f(x_n) \to f(x)$ □

9.1.1. Operadores topológicos sucesionales

Definition 70. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$.

1. La **clausura sucesional** de S es el conjunto

$$\text{cls}(S) = \{x \in X \mid \exists (x_n) \subseteq S \text{ t.q. } x_n \to x\}$$

2. El **interior sucesional** de S es el conjunto

$$\text{ints}(S) = \{x \in X \mid \forall (x_n) \text{ t.q. } x_n \to x \text{ entonces } x_n \in S \text{ eventualmente}\}.$$

Proposition 152. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$.

$$\mathring{S} \subseteq \text{ints}(S) \subseteq S \subseteq \text{cls}(S) \subseteq \overline{S}.$$

Demostración. Sea $x \in \mathring{S}$. Entonces $S \in \mathcal{N}(x)$. Como $x_n \to x$, entonces $x_n \in S$ eventualmente, luego $x \in \text{ints}(S)$.

Por otro lado, tomando $x \in S$, entonces la sucesión constante $x_n = x \in S$ converge naturalmente a x, luego $x \in \text{cls}(S)$. Luego $S \subseteq \text{cls}(S)$. Por otro lado, $X \setminus S \subseteq \text{cls}(X \setminus S) = X \setminus \text{ints}(S)$, luego $\text{ints}(S) \subseteq S$.

Sea $x \in \text{cls}(S)$. Entonces existe un $(x_n) \subseteq S$ tal que $x_n \to x$. Por tanto, para todo $U \in \mathcal{N}(x)$, $x_n \in U \cap S$ eventualmente. Deducimos pues que $U \cap S \neq \varnothing$ y como se cumple para cualquier entorno de x, entonces $x \in \overline{S}$. □

Definition 71. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$.

1. S es **sucesionalmente abierto** si $S = \text{ints}(S)$.
2. S es **sucesionalmente cerrado** si $S = \text{cls}(S)$.

Proposition 153. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$. Entonces

$$\text{ints}(S) = X \setminus \text{cls}(X \setminus S), \quad \text{cls}(S) = X \setminus \text{ints}(X \setminus S).$$

Demostración. Tenemos que $x \notin X \setminus \text{ints}(S)$ si y solo si existe una sucesión (x_n) tal que $x_n \to x$ y $x_n \notin S$ eventualmente. Es decir, $(x_n) \subseteq X \setminus S$ para todo $n \geq n_0$. Empezando la sucesión en n_0, obtenemos que $x \in \text{cls}(X \setminus S)$.

La segunda igualdad viene de tomar el subconjunto $T = X \setminus S$ en la primera ecuación. □

Corollary 29. Todo abierto (resp. cerrado) es sucesionalmente abierto (cerrado).

Demostración. Si $A \in \mathcal{T}$, entonces $A = \mathring{A} \subseteq \text{ints}(A) \subseteq A$, luego $\text{ints}(A) = A$.

Si $C \in \mathcal{C}$, entonces $C \subseteq \text{cls}(C) \subseteq \overline{C} \subseteq C$, luego $\text{cls}(C) = C$. □

9.2. Espacios sucesionales

Definition 72. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es un **espacio sucesional** si $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A = \text{ints}(A)$.

Proposition 154. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico. Son equivalentes

1. $(X, \mathcal{T})$ es secuencial.
2. $C \in \mathcal{C} \Leftrightarrow C = \text{cls}(C)$.
3. $\forall f : X \to Y$, f es continua si y solo si $\forall x_n \to x$, $f(x_n) \to f(x)$.

Demostración. Sea $C \in \mathcal{C}$. Entonces $X \setminus C \in \mathcal{T}$ y por tanto, $\text{cls}(C) = X \setminus \text{ints}(X \setminus C) = X \setminus (X \setminus C) = C$.

Como la implicación a la derecha es cierta siempre, demostremos que f es continua. Sea $C \in \mathcal{C}_Y$. Veamos que $f^{-1}(C) \in \mathcal{C}_X$. Basta ver que $f^{-1}(C)$ es sucesionalmente cerrado. Sea $x \in \text{cls}(f^{-1}(C))$. Entonces existe un $(x_n) \subseteq f^{-1}(C)$ tal que $x_n \to x$. Entonces por un lado, $f(x_n) \in C$ y por otro lado, $f(x_n) \to f(x)$. Por tanto, $f(x) \in \text{cls}(C) = C$. De este modo, $x \in f^{-1}(C)$.

□