

高数转专业复习题

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、 $\int_{-1}^1 x^{2013} \cos x dx = (\quad)$.

2、设 A 是一个 4 阶方阵，且 $|A| = 3$ ，则 $|2A| = (\quad)$.

3、若方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = \lambda - 1 \\ 3x_2 - x_3 = \lambda - 2 \\ \lambda x_2 - x_3 = \lambda^2 - 6\lambda + 10 \end{cases}$$
 有无穷多解，则 $\lambda = (\quad)$.

4、已知微分方程的通解是 $y = c_1 + c_2 e^x$ ，则微分方程为 (\quad) .

5、 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = (\quad)$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{3^n}$ 的收敛区间是 (\quad) .

(A) $(-3, 3)$ (B) $[-3, 3]$ (C) $(-3, 3]$ (D) $[-3, 3]$

2、设函数 y_1 和 y_2 是二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的两个特解， c_1, c_2 是任意常数，则该方程的通解是 (\quad) .

(A) $c_1 y_1 + c_2 y_2$; (B) $c_1 y_1 + c_2 y_2 + (y_1 - y_2)$; (C) $c(y_1 + y_2)$; (D) 以上都不对

3、设 $I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y}} 3x^2 y^2 dx$ ，则交换积分次序后 $I = (\quad)$. B

(A) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} 3x^2 y^2 dy$ (B) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} 3x^2 y^2 dy$ (C) $\int_0^{\sqrt{1-y}} dx \int_0^1 3x^2 y^2 dy$ (D) $\int_0^1 dx \int_0^{1+x^2} 3x^2 y^2 dy$

4、设 $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$ ，则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的 (\quad) .

(A) 无穷间断点 (B) 振荡间断点 (C) 可去间断点 (D) 跳跃间断点

5、设 $f'(1) = 2$ ，则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1 - \Delta x)}{\Delta x} = (\quad)$. (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

三、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

1、级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$ 条件收敛. (\quad)

2、微分方程 $(y'')^3 - 4y' - 5y = 0$ 是 2 阶微分方程. (\quad)

3、若函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导，则 $f(x)$ 在区间 I 上必连续. (\quad)

4、方程 $x^3 + 2x - 2 = 0$ 只有一个正根. (\quad)

5、设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续. (\quad)

四、求解下列各题（每小题 6 分，共 48 分）

1、设 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,0,1)}$.

2、求曲线 $y = \sin x (x \in [0, \pi])$, $y = 0$ 所围成的平面图形的面积及绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

3、计算二重积分 $\iint_D x dx dy$, 其中 D 是 $x^2 + y^2 \leq y, x \geq 0$ 所围成的平面区域.

4、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{e^x - 1}$.

5、求微分方程 $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$ 的通解.

6、设某产品的需求函数为 $p = 80 - 0.1x$ (p 为价格, x 为需求量), 成本函数为 $c = 5000 + 20x$. (1) 试求边际利润函数 $L'(x)$; (2) 求需求量 x 为多少时, 其利润最大?

7、求 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0$ 的通解.

8、求不定积分 $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$.

五、证明题 (每小题 6 分, 共 12 分)

1、设函数 $f(x)$ 是在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(1) = 0$, 证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0.$$

2、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (a_n > 0)$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛.