

大学物理 C1: 复习与回顾

张桃玮

2023 年 6 月 3 日

写在前面

本文试图通过一些例子完成本学期大学物理知识体系的构建。正如 Warrior 和众多大学教师一直建议的那样, 学习整理的过程永远要比结果更重要, 更值得享受。

Yeats 有一句名言: “教育不是注满一桶水, 而是点燃一把火。”他说得既对也错。你必须“给桶注一点水”, 这本书当然可以帮助你完成这部分的教育。毕竟, 当你去 Google 面试时, 他们会问你一个关于如何使用信号量的技巧问题, 确切地知道信号量是什么感觉真好, 对吧?

但是, Yeats 的更主要的观点显然是正确的: 教育的真正要义是让你对某些事情感兴趣, 这不仅仅是搞明白课上学习的东西, 得个好成绩。更重要的是课后可以独立了解这个主题的更多东西。正如我们的父亲 (作者的父亲 Vedat Arpacı) 曾说过的, “在课堂以外学习。”

我们编写本书的目的是激发你对操作系统的兴趣。这就可以让你能自行了解有关操作系统的更多知识, 进而可以与你的教授讨论, 甚至参与该领域相关的那些令人兴奋的研究。这是一个伟大的领域: 这里有充满了激动人心和精妙的想法, 它们以深刻而重要的方式塑造了计算历史。虽然我们知道这团火不会为你们所有人点燃, 但我们希望这能对许多人, 甚至是少数人有所帮助。因为一旦这团火被点燃, 那你就真正有能力做出伟大的事情。因此, 教育过程的真正意义在于: 一往无前, 学习更多的新的和引人入胜, 美妙绝伦的知识, 通过学习不断成熟, 最重要的是, 找到能为你点燃那团火的人。-《Operating Systems: Three Easy Pieces》

第一部分 核心内容回顾

1 运动学

一. 运动与坐标系的选取.

1. 矢量与微积分的观点
2. 描述运动的三个物理量

(1) 微分关系

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{i} + y_j \mathbf{j} + z_k \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{i} + v_j \mathbf{j} + v_k \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{i} + a_j \mathbf{j} + a_k \mathbf{k}$$

以及有微分关系 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$,

(a) 推论: 求 \mathbf{v}, t 对于 \mathbf{x} 的关系: 使用关系 $\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt}$.

(2) 积分关系

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt, \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt$$

$$d\mathbf{v} = \mathbf{a} dt, \vec{v} = \vec{a}_0 + \int_0^t \vec{a} dt$$

3. 坐标系的选取:

- (1) 直角坐标
- (2) 自然坐标
- (3) 极坐标

4. 圆周运动

(1) 描述圆周运动的物理量: 角速度 ω , 角加速度 β

(a) 之间关系: $\omega = \frac{d\theta}{dt}, \beta = \frac{d\omega}{dt}; \theta = \theta_0 + \int_0^t \omega dt, \omega = \omega_0 + \int_0^t \beta dt$.

(2) 自然坐标系中的加速度: $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$.

(a) a_n : 法向分量, 指向圆心 $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

(b) a_t : 切向分量, 沿轨迹方向 $a_t = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\beta$.

二. Newton 运动定律及其延伸

1. Newton 第二定律: $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}, \vec{F} = m\vec{a}$;
2. 动量与冲量
 定义. $\vec{F}dt = d(m\vec{v}), d\vec{I} = d\vec{P}, \vec{I} = \Delta\vec{P}$
 质点动量定理. $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$
 质点系动量定理. $\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i \vec{F}_{i_{\text{外}}}\right) dt = \sum_i m_i \vec{v}_{i2} - \sum_i m_i \vec{v}_{i1}$.
 动量守恒定律. 当 $\sum_i \vec{F}_{i_{\text{外}}} = 0, \sum_i m_i \vec{v}_i$ 守恒.

3. 角动量

定义. $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$. 其中 r 是从原点当前点的位置矢量.

角动量守恒定律: 有心力 (受力指向圆心, 外力矩为 0)

4. 功: $A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, 可以分坐标求和.
5. 保守力场中 P 点的势能: $E_p(P) = \int_{(P)}^{(\text{零势能点})} \vec{F}_{\text{保守}} \cdot d\vec{r}$.
6. 质点的动能定理: $A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = \Delta(\sum_i E_{k_i}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i2}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i1}^2$.
7. 功能原理: $A_{\text{外}} + A_{\text{非保守内}} = \Delta(\sum_i E_i), E = E_k + E_p$.

机械能守恒定律: 当只有保守力做功的时候, $\sum_i E_i$ 守恒.

三. 刚体的定轴转动

1. 运动的描述

描述: 圆周运动

刚体定轴转动定律: $M = J\beta, J = \sum_i m_i r_i^2 = \int_M r^2 dm$.

2. 刚体定轴转动的动能定理

描述: $A = \Delta E_k, A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta, E_k = \frac{1}{2} J\omega^2$

机械能守恒定律: 当只有保守力做功, $\sum_i E_i$ 守恒. 写作

$$E = E_k + E_p = \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \right) + (mgh + mgh_{\text{重心}})$$

3. 角动量: $L = J\omega$, 方向垂直于转动平面.

角动量守恒. 当合外力矩为 0, $L = J\omega$ 守恒

四. 相对论

1. 基本理论

(a) 相对性原理

(b) 光速不变性

2. 时间/地点相同的变换

变换因子

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \geq 1$$

3. Lorentz 变换: 相对于 $x - x'$ 方向的时空间隔变换:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \gamma(\Delta x' + u\Delta t'), \Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t) \\ \Delta t &= \gamma\left(\Delta t' + \frac{u\Delta x'}{c^2}\right), \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{u\Delta x}{c^2}\right)\end{aligned}$$

4. 相对论的动力学关系

- (a) 运动的质量. $m = \gamma m_0$
- (b) 相对论动量. $p = \gamma m_0 u$
- (c) 相对论动能. $E_k = E - E_0$
- (d) 动能, 静止能量: $E = \gamma m_0 c^2, E_0 = m_0 c^2$.

2 电磁学

一. 真空中的静电场

1. 点电荷模型

- a. 库伦定律: $\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$
- b. 点电荷形成的电场: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$

2. 电场叠加原理:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_{r_i} = \int_Q d\vec{E} = \int_Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{e}_r.$$

a. 模型电场

$$\text{长直导线. } \vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \vec{e}_r.$$

$$\text{大平面. } \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_n.$$

b. Gauss 定理 $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_{i\text{内}}, \phi_c = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$

应用: 用 Gauss 定理求对称性电场分布:

$$\text{球体: } E4\pi r^2 = q_{in}/\epsilon_0 \implies E = \frac{q_{in}}{\epsilon_0 4\pi r^2}$$

$$\text{圆柱体: } E2\pi r h = q_{in}/\epsilon_0 \implies E = \frac{q_{in}}{\epsilon_0 2\pi r h}$$

$$\text{平面: } E2S_{\text{底}} = q_{in}/\epsilon_0 \implies E = \frac{q_{in}}{\epsilon_0 2S_{\text{底}}}$$

3. 电势能与电场力做的功

a. 电场力做的功 $W_a - W_b = q_0(V_a - V_b) = q_0 \int_{(a)}^{(b)} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

b. 电势 $V_P(P) = \int_{(P)}^{(\text{零势点})} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

c. 点电荷的电势 $V_{\text{点电荷}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$

d. 电势的叠加

$$V_{\text{点电荷系}} = \sum_i V_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i} = \int_Q dV = \int_Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}.$$

二. 导体和电介质

1. 导体的静电平衡条件

最终形态: $E_{\text{内}} = 0, E_{\text{外表面}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. 导体是等势体, 其内无净电荷导体存在时静电场的分布

2. 电介质

(a) 场强分布: $\vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon_r$

(b) 电偶极矩: $\vec{p} = q \vec{l}$

(c) 极化强度: $\vec{P} = n \vec{p}$

3. \vec{D} 的 Gauss 定理 $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum (q_{0\text{内}} + q'_{\text{内}})$, 意味着

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_{0\text{内}}, D = \epsilon_0 \epsilon_e \vec{E}.$$

应用: 用 Gauss 定理求对称性电场分布:

球体: $D4\pi r^2 = q_{\text{in}} \implies E = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0 \epsilon_r 4\pi r^2}$

圆柱体: $D2\pi r h = q_{\text{in}} \implies E = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0 \epsilon_r 2\pi r h}$

平面: $D2S_{\text{底}} = q_{\text{in}} \implies E = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0 \epsilon_r 2S_{\text{底}}}$

4. 电容 $C = Q/U$

三类电容器的电容

5. 电场能量:

$$W_e = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} D E dV.$$

三. 磁场

1. 磁场的 Biot-Savart 定律:

$$\vec{B} = \int_I d\vec{B} = \int_I \frac{\mu_0 I dl \times \vec{e}_r}{r^2}.$$

2. 磁场的叠加: $B = \sum_i \vec{B}_i$.

模型磁场:

直线 $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$

圆弧 $B = \frac{\mu_0 I}{2r} \frac{\phi}{2\pi}$, 方向与电流方向成右手螺旋的关系.

3. 磁场的 Gauss 定理和环路定理

Gauss 定理 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$. (无源)

环路定理 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{内}}$

应用: 用环路定理求对称性磁场的分布

无限长直线. $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

螺线管. $B = n\mu_0 I$

螺线环. $B = \frac{N\mu_0 I}{2\pi r}$.

四. 磁力

1. Lorentz 力 $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$

a. 螺旋运动, $R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$, $h = \frac{2\pi mv_{\parallel}}{qB}$

2. Ampere 力 $\vec{F} = \int_L d\vec{F} = \int_L Id\vec{l} \times \vec{B}$, $d\vec{F} = nSdlq\vec{v} \times \vec{B} = Id\vec{l} \times \vec{B}$

3. 磁矩: $p_m = IS\vec{e}_n$

4. 磁力矩: $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$.

五. 电磁感应

1. 电磁感应定律: $\epsilon = -\frac{d\phi_m}{dt}$, $\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

2. 动生电动势: $\epsilon = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$, 其中非静电力是 $\vec{f} = \vec{v} \times \vec{B}$.

3. 感生电动势: $\epsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

特例. 非静电力 E_i 圆柱形均匀磁场的变化激发 $E_i 2\pi r = \frac{dB}{dt} S$

六. 位移电流与传导电流

1. 位移电流与传导电流均有磁效应

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum (I_0 + I_d)_{\text{内}}.$$

2. 位移电流源自变化的电场 $I_d = \frac{d\phi_D}{dt} = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} S$

特例: 圆柱形均匀电场变化激发磁场 $B 2\pi r = \mu_0 I_{d\text{内}}$.

第二部分 常见问题类型

3 运动学中的常见问题

单个变量的替代, 积分求解

1. 选取: 选取任意的状态, 将要得到的表达为一个关于任意的量.

2. 计算: 积分的上下限应当选取从初态到末态.

例 1. 匀加速直线运动的加速度为 a , 试着推导 $a-x$ 之间的关系.

答案: $v = \sqrt{2ax}$

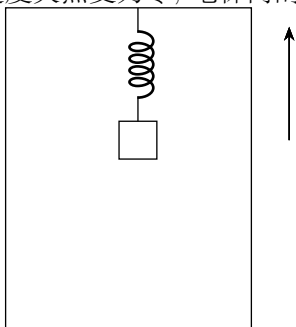
分析: $a = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$, 于是 $adx = vdv$. 两边同时积分可以得到.

例 2. 在离水面高为 h 的岸边, 有人用绳拉船靠岸, 船在离岸 x m 处, 当人以 v_0 m/s 恒定的速率收绳时, 试求船的速度、加速度的大小.

答案: $v = \frac{v(tv-L)}{\sqrt{(L-tv)^2-h^2}}, a = -\frac{h^2v^2}{((L-tv)^2-h^2)^{3/2}}$

分析: 注意到关系式 $x(t) = \sqrt{(L-tv)^2-h^2}$, 求两次导数即可.

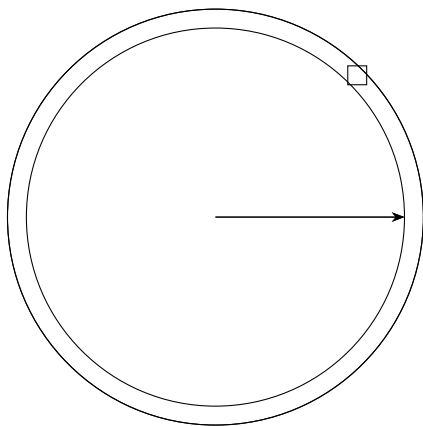
例 3. (2-2) 在一个加速度为 a 向上运动的电梯里, 悬挂一个劲度系数 k 的弹簧 (质量不计), 其下悬挂质量为 M 的物块, 物块相对电梯静止, 当电梯加速度突然变为零, 电梯内的观察者看到物块的最大速度为 _____.



答案: $a\sqrt{m/k}$

分析: 设弹簧的伸长量为 x_0 , 选择向上为正方向, 于是起始时刻受力分析: $F_{\text{弹}} - mg = ma$, 意味着 $k\Delta x - mg = ma \Rightarrow \Delta x = \frac{m(a+g)}{k}$. 根据机械能守恒, $\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg\Delta x$. 因此 $v_{\max} = \sqrt{\frac{m}{k}}a$.

例 4. (2-9) 光滑的水平桌面上放置一固定的圆环带, 半径为 R , 一物体贴着环带的内侧运动, 如图所示, 物体与环带间的滑动摩擦系数为 μ , 设物体在某一时刻经 A 点时的速率为 v_0 , 求此后 t 时间物体的速率以及从 A 点开始所经过的路程.



答案: $s = \frac{R}{\mu_k} \ln \frac{R+v_0\mu_k t}{R}$

分析: 对于任意的一个时刻, 沿着切向分析, 有 $F_t = f = \mu F_N$, 沿着法向分析, 有 $F_n = \frac{mv^2}{R}$. 直到 $a_t = \frac{\mu v^2}{R}$. 展开, 有 $\frac{dv}{dt} = \frac{\mu v^2}{R}$, 得到方程式 $\frac{dv}{v^2} = \frac{\mu}{R} dt$, 两边同时对初始状态和末了状态积分, 有

$$\int_{v_0}^{v_{\text{末}}} \frac{dv}{v^2} = \int_0^t \frac{\mu}{R} dt$$

解得

$$v_{\text{末}} = \frac{1}{\frac{\mu}{R}t + \frac{1}{v_0}}.$$

然后把 v 展开为 ds/dt , 对两边同时做定积分就可以求出路程 $s = \frac{R}{\mu_k} \ln \frac{R+v_0\mu_k t}{R}$.

例 5. (2-15) 一个初速度 v_0 从地面上竖直向上抛出质量为 m 的小球, 小球除了受重力外, 还受到一个大小为 αmv^2 的粘滞阻力 (α 是常数, v 是小球的运动速率). 求小球回到地面的时候的速率.

答案: $v_1 = \frac{v_0\sqrt{g}}{\sqrt{\alpha v_0^2 + g}}.$

分析: 如果一心想着一下子求出来, 就会陷入困境. 我们把这个问题转化为求上升和下降两段路程的问题, 最后让他们相等即可.

以向上为正方向, 上升过程中, 有 $-ma_1 = -mg - f$. 因为 $a = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$, 原式变为

$$\frac{v}{g + \alpha v^2} dv = dx$$

两边同时积分, 有 $\int_{v_0}^0 \frac{v}{g + \alpha v^2} dv = \int_0^h dx$, 解得

$$h_1 = -\frac{1}{2\alpha} \left(\ln \frac{g}{g + \alpha v_0^2} \right).$$

另外一方面, 考虑下来的时候, 进行受力分析, $-mg + f = -ma_2$. 同理, 有

$$h_2 = -\frac{1}{2\alpha} \left(\ln \frac{g - \alpha v_m^2}{g} \right).$$

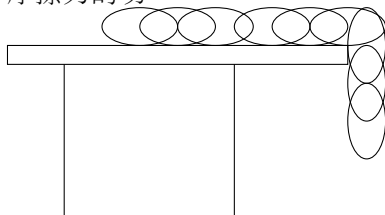
因为 $h_1 = h_2$, 解答得 $v_m = \frac{v_0 \sqrt{g}}{\sqrt{\alpha v_0^2 + g}}$.

例 6. (3-13) 有一运送砂子的皮带以恒定的速率 v 水平运动, 砂子经一静止的漏斗垂直落到皮带上, 忽略机件各部位的摩擦及皮带另一端的其它影响, 试问: (1) 若每秒有质量为 $M' = dM/dt$ 的砂子落到皮带上, 要维持皮带以恒定速率 v 运动, 需要多大的功率? (2) 若 $M' = 100\text{kg/s}$, $v = 0.5\text{m/s}$, 水平牵引力多大? 所需功率多大?

答案: $P = v^2 M'$, 50N , 25W .

分析: 对于任意时刻分析, 设有 dm 这样大的沙子落入传送并且获得速度, 那么 $dI = dm \cdot v$. 根据 $F = \frac{dI}{dt} = v \frac{dm}{dt}$, 那么 $P = Fv = v^2 \frac{dm}{dt}$. 第二问带入数据即可.

例 7. (4-14) 质量 m 的匀质链条, 置于桌面, 链条与桌面的摩擦系数为 μ , 下垂端的长度为 a , 在重力作用下, 由静止开始下落, 求链条完全滑离桌面时重力、摩擦力的功.



答案: $-\frac{\mu mg}{2l}(l-a)^2$.

分析 (一): 假设任意时刻, 掉下去的部分是 x , 还没有掉下去的部分是 $l-x$. 考虑之后很小的一段位移, $dA_{\text{重力}} = \frac{x}{l}m \cdot \frac{dx}{2}$. 这时候对于 $0 \rightarrow x$ 积分, 有 $\int A_{\text{重力}} = \int_0^a \frac{x}{l}m \cdot \frac{dx}{2} = -\frac{\mu mg}{2l}(l-a)^2$.

刚体的定轴转动综合问题

1. 刚体与 Newton 第二定律的对应关系: $J \rightarrow M, \beta \rightarrow a$, 合外力矩 $\rightarrow F, \omega \rightarrow v$

刚体的定轴转动定律. $M = J\beta$

刚体的定轴转动的动能. $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$

守恒条件: 没有非保守外力做功

刚体的定轴转动角动量. $L = J\omega$

守恒条件: 有心力或合外力矩为 0.

2. 刚体的能量

力矩: $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{R}$, 其中 \vec{R} 是从转动原点指向现在的点的向量.

刚体的定轴转动的动能. $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$

动能定理: 外力矩的功 = 刚体定轴转动动能的增量, 即 $A_{\text{外}} = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$

刚体的重力势能: $E_P = mgh_c$, 其中 h_c 是重心的高度.

机械能: 在重力场中, 包含定轴转动的系统, 机械能包含**刚体的重力势能**和**定轴转动功能**.

3. 刚体的动量

角动量 $\vec{L} = J\vec{\omega}$, 方向沿 z 轴.

角动量定理 外力矩的冲量 = 角动量的增量, 即 $\int_{t_1}^{t_2} M_{\text{外}z} dt = \Delta L_z = J\omega_2 - J\omega_1$.

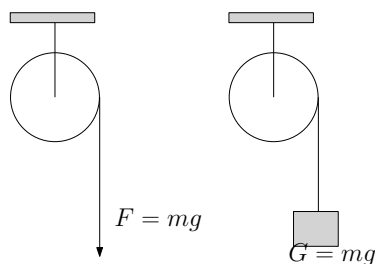
角动量守恒 定轴转动的刚体外力矩为 0, 刚体关于定轴的角动量守恒

- (1) 不受外力;
- (2) 外力作用穿过轴线;
- (3) 外力与作用轴平行.

4. 圆周运动切向与法向的关系

下面是一些关于滑轮与连接体的问题.

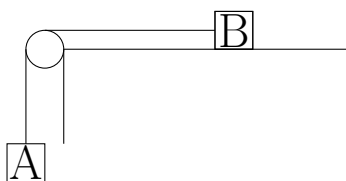
例 8. (5-3) 求 A, B 两定滑轮的角加速度 β_A, β_B , 已知定滑轮半径 R , 拉力 $F = Mg$ 与重物的质量相同.



答案: $\beta_A > \beta_B$

分析: 对于 A 图, 对物体进行受力分析, $Mg - T = ma_t$. 对于滑轮分析, $TR = J\beta$. 但是对于右图, $MgR = J\beta$.

例 9. (5-9) 如图, 滑块 A , 重物 B 和滑轮 C 的质量分别 m_A, m_B, m_C . 滑轮半径为 R . A 与桌面之间, 滑轮与轴承间均无摩擦, 绳质量可不计, 绳与滑轮间无相对滑动. 求滑块 A 的加速度及滑轮两边绳中的张力. (提示: $J_C = m_C R^2 / 2$)

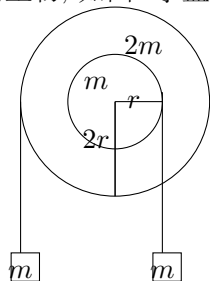


答案: $a = \frac{m_B g}{m_A + m_B + m_C/2}$, $T_A = m_A a$, $T_B = m_B(g - a)$.

分析: 选取重物下落的方向为正方向. 假设水平段中绳子的受力是 T_A , 竖直段的受力为 T_B . 加速度为 a . (注意这里一根绳子上的力是不等的, 但是绳子会传达加速度相等的消息) 对物体 A: $m_A a = T_A$ (1); 对物体 B: $m_B a = m_B g - T_B$ (2). 由于滑轮与两端绳子接触, 因此依据 Newton 第三定律, 合外力矩为 $(T_B - T_A)R$, 因此根据刚体的定轴转动定律, 就有 $(T_A - T_B)R = J\beta$ (3). 又因为 β 与 a 的关系, 有 $a = r\beta$ (4). 联立上述的式子, 解得到答案.

解答上述方程的提示: 首先方程的切入口是 (4), 然后分理处变量 a 即可.

例 10. (5-13) 质量分别为 m 和 $2m$, 半径分别为 r 和 $2r$ 的两个均匀圆盘, 同轴地粘在一起, 可以绕通过盘心且垂直盘面的水平光滑固定轴转动, 对转轴的转动惯量为 $9mr^2/2$, 大小圆盘边缘都绕有绳子, 绳子下端都挂一质量为 m 的重物, 如图. 求盘的角加速度的大小.



答案: $\frac{2g}{19r}$.

分析: 可以对每一个圆盘分别分析, 把沿重物下坠的方向记为正方向, 设两段绳子的拉力分别为 T_1, T_2 . 对应的加速度分别为 a_1, a_2 , 于是有:

$$\begin{aligned} mg - T_1 &= ma_1 \\ T_2 - mg &= ma_2 \\ -T_2 r + T_1 2r &= J\beta \\ a_1 &= \beta 2r \\ a_2 &= \beta r \end{aligned}$$

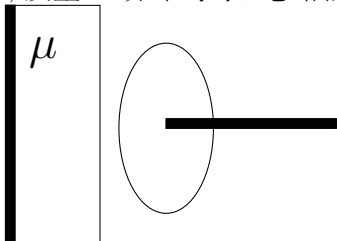
联立求解即可.

另外一种方法是使用整体法. 由于 $M_{\text{总}} = J\beta$, 那么有

$$mg \cdot 2r - mgr = \left(m(2r)^2 + mr^2 + \frac{9}{2}mr^2 \right) \beta.$$

同样可以得到答案.

例 11. (5-10) 用力 F 将一粗糙平面紧压在轮上, 平面与轮间滑动摩擦系数 μ , 轮的初角速度 ω_0 , 问: 转过多少角度及经过多长时间轮即停止转动? 轮半径 R , 质量 m 分布均匀; 忽略轴质量且力 F 均匀.

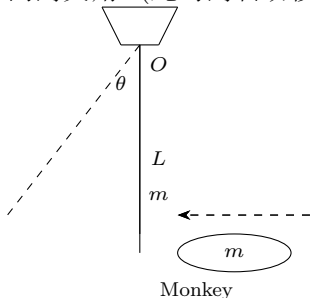


答案: $\Delta\theta = \frac{3mR\omega_0^2}{8\mu F}, \Delta t = \frac{3mR\omega_0}{4\mu F}.$

分析: 这个问题我们希望使用刚体定轴转动的动能定理 ($\frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 = A_{\text{外}} \xrightarrow{\text{恒定外力矩}} M\theta$) 和动量定理 ($J\omega_2 - J\omega_1 = p_{\text{外}} \xrightarrow{\text{恒定外力矩}} Mt$) 求解, 但是发现关键的问题在于求解外力矩.

选取若干个同心小圆环. 因为小圆环上面的 r 都是一样的, 因此量就好算了很多. 注意到 $dF = \frac{2\pi r}{\pi r^2} dr F, df = \mu dF = \mu \frac{r}{R} F, dM = df dr = 2\mu \left(\frac{r}{R}\right)^2 F dr$. 从 $0 \sim R$ 积分, 有 $M = \frac{2\mu RF}{3}$. 于是可以用动能定理 $M\Delta\theta = J\omega_0^2/2$, 以及角动量定理 $M\Delta t = J\omega_0$ 求出答案.

例 12. (5-14) 质量为 m , 长为 L 的匀质木棒可绕 O 轴自由转动, 开始木棒铅直悬挂, 现在有一只质量为 m 的小猴以水平速度抓住棒的一端 (如图), 求: (1) 小猴与棒开始摆动的角速度; (2) 小猴与棒摆到最大高度时, 棒与铅直方向的夹角. (此时的转动惯量是 $1/3mL^2$).



答案: $\omega = 3v_0/4L, \theta = \cos^{-1} \left(1 - \frac{v_0^2}{4gL} \right).$

分析: 对于 (1), 可以使用角动量守恒

$$mvL = \left(mL^2 + \frac{1}{3}mL^2 \right) \omega$$

就可以求得. 对于 (2), 考虑机械能守恒, 就有

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m R^2 + m R^2 \right) \omega^2 = \left(\frac{1}{2} m g L (1 - \cos \theta) \right) + m g L (1 - \cos \theta).$$

注意刚体是要看重心移动的距离.

例 13. (5-15) 质量 m 、长 l 的匀质杆, 以 O 点为轴, 静止从与竖直方向成角处自由下摆, 到竖直位置时与光滑桌面上的静止物块 m (视为质点) 发生弹性碰撞, 求 (1) 棒开始转动时的角加速度 β ; (2) 棒转到竖直位置碰撞前的角速度 ω_1 . 及棒中央点 C 的速率 v_{c1} ; (3) 碰撞后杆的角速度 ω_2 和物块的线速率 v_2 .

答案: $\beta = 3g \sin \theta_0 / 2l$; $\omega_1 = \sqrt{\frac{3g(1-\cos \theta_0)}{l}}$; $v_{c1} = \frac{1}{2} \sqrt{3gl(1-\cos \theta_0)}$; $v_2 = \frac{1}{2} \sqrt{3gl(1-\cos \theta_0)}$; $\omega_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos \theta_0)}$.

分析: (1) 一开始, 根据转动定律, 有 $\frac{1}{2} m g \sin \theta_0 = (\frac{1}{3} m l^2) \beta \implies \beta = 3g \sin \theta_0 / 2l$. 对于 (2), 根据转动机械能守恒, 有 $m g \frac{l}{2} (1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2} J \omega_1^2$. 由此可解答. (3) 弹性碰撞中棒与物块对转轴角动量守恒, 动能守恒. 于是列式子:

$$J = \frac{1}{3} m l^2 \quad (1)$$

$$J \omega_1 = J \omega_2 + m v_2 l \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} J \omega_1^2 = \frac{1}{2} J \omega_2^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 \quad (3)$$

对于 (3) 的计算建议: 可以对于 (3) 两端乘上 J , 然后让 (2) 平方, 有 $J^2 \omega_1^2 = J^2 \omega_2^2 + m J v_2^2$ (3), 以及 $J^2 \omega_1^2 = J^2 \omega_2^2 + m^2 v_2^2 l^2 + 2 J \omega_2 m v_2 l$ (4). 把 (3) 代入 (4) 中的左侧, 有 $J^2 \omega_2^2 + m J v_2^2 = J^2 \omega_2^2 + m^2 v_2^2 l^2 + 2 J \omega_2 m v_2 l$ (5). 化简 (5), 就有 $J v_2 = m v_2 l^2 + 2 J \omega_2 l$ (6). 知道 $\frac{2 J l \omega_2}{(J - m l^2)} = v_2$ (7), 也就是得到了 v_2 与 ω_2 的关系. 带入 (2), 有值为 $\omega_2 = -\frac{1}{2} \omega_1, \omega_1 = \frac{1}{2} \omega_1$.

狭义相对论

1. 不同的参考系: 假设参考系 S' 相对与 S 相对于 x 轴正方向运动

事件: 发生的事情

距离差: 以某一个参考系的度量测量的距离

时间差: 以某一个参考系的度量测量的时间

2. Lorentz 速度变换: 在参考系 S 中, 有 $\Delta x, \Delta t$, 在参考系 S' 中, 有 $\Delta x', \Delta t'$, 相对运动速率为 u .

$$\text{参考系 } S \rightarrow S': \Delta x' = \gamma(-u\Delta t + \Delta x) \quad \Delta t' = \gamma\left(-\frac{u\Delta x}{c^2} + \Delta t\right)$$

$$\text{参考系 } S' \rightarrow S: \Delta x = \gamma(u\Delta t' + \Delta x') \quad \Delta t = \gamma\left(\frac{u\Delta x'}{c^2} + \Delta t'\right)$$

理解. 只是在原来的内容上面做了一点修正. 修正的变量需要依赖另一个和相对运动的速度. 注意正负号和变换因子.

3. 相对论体系下的动量和能量

相对论质量. $m = \gamma m_0$ (速度越大的时候加速越难)

相对论动量. $\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$. 这个表达式保证在 Lorentz 变换的条件下, 动量守恒在所有的惯性系中成立.

相对论动能. $E_k = mc^2 - m_0c^2 = (\gamma - 1)m_0c^2$.

相对论能量. $E_{\text{总}} = mc^2, E_{\text{静}} = m_0c^2, E_{\text{动}} = E_{\text{总}} - E_{\text{静}}$.

相对论动量能量关系. $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$.

相互作用的守恒关系. 质能守恒, 动量守恒.

例 14. (6-3) 北京某日 19 时一工厂断电, 同日 19 时 0 分 0.00026 s 天津某人放了一响礼炮, 两者的直线距离 120km, 一艘飞船相对地面以 $0.8c$ 从北京到天津飞行, 问飞船上的航天员观察, 哪件事情先发生?

答案: $\Delta t = -0.0006\text{s}$, 天津事件先发生.

分析: 这里面有两个时间. 事件 1: 工厂断电; 事件 2: 天津放炮. $\Delta x = 0.00026\text{s}, \Delta s = 120\text{km}$. 根据变换公式, 有 $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{u\Delta x}{c^2}\right)$. 首先求出 γ , 也就是 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} = 5/3$. 把数据带入科学计算器, 就有答案 $\Delta t' = -0.191977\text{s}$.

例 15. 解答下列相对论的小问题:

- (6-10) 火箭静止质量 100t, 当它以第二宇宙速度 $v = 11.2 \times 10^3\text{m/s}$ 飞行时, 其质量增加 _____.
- (6-12) α 粒子在加速器中被加速, 当其质量为静止质量的 6 倍其动能是静止能量的 _____ 倍.
- (6-14) (a) 一粒子的相对论动量等于 2 倍非相对论动量, 求粒子速度.
(b) 一粒子的动能等于静能, 求粒子速度.
- (6-18) 一个高能质子进入磁场 B 发生偏转, 已知偏转半径 R . 求质子的动量 p 和能量 E_k .

答案: (1) $0.7 \times 10^{-4} \text{kg}$; $5m_0c^2$; $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$, $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$; $p = RBq$, $E = \sqrt{p^2c^2 + E_0^2}$.

分析: 对于 (1),

$$\Delta m = E_k/c^2 = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{c^2}.$$

因为速度远小于光速. 对于 (2), 得到 $m = \gamma m_0 \rightarrow \gamma = 6$. 意味着 $E_k = (\gamma - 1)m_0c^2 = 5m_0c^2$. 对于 (3). 我们有 $p = \gamma m_0 v = 2p_0 = 2m_0 v \rightarrow \gamma = 2$. 以及 $E_k = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \rightarrow \gamma = 2$. 于是可以求出 v . 对于 (4), 我们已经知道 $R = \frac{p}{qB}$. 得到 $p = RBq$, 再根据公式求出最后的值即可.

例 16. (6-17) 在 S 系, 静止质量 m_0 的两个粒子, 其中一个静止, 另一个速度大小为 $0.8c$, 沿一条直线作对心碰撞后合成为一个粒子, 求合成粒子的静止质量 M_0 .

答案: $2.31m_0$.

分析: 考虑质能守恒得到 $m_0c^2 + \gamma_1 m_0c^2 = Mc^2 = \gamma_2 M_0c^2$, 然后使用直线上的动量守恒得到 $\gamma_1 m_0 v_1 = Mv_2 = \gamma_2 M_0 v_2$ 就可以算出答案.

4 电场中的常见问题

叠加法

1. 运用叠加法解题的一般步骤

选取恰当的微元. 找到一小段微元, 使得这个微元上面某一个量是恒定的值.

给出微小一段上的量. 如果是标量, 那么就仅有一个数值; 如果是一个矢量, 那么需要考虑是否应当分 x 轴和 y 轴进行分析.

积分运算. 从初始状态积分值末了状态, 进行积分运算. **注意对称性分析.**

2. 静电场的场强求解

模型.

点电荷: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$

无限大直导线: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_{r\perp}$

无限大平面: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_n$

积分变元的变换: $\lambda \xleftarrow[\text{=dx}\times]{\times\text{小面=}} \rightarrow \sigma \xleftarrow[\text{=dx}\times]{\times\text{小面=}} \rightarrow v.$

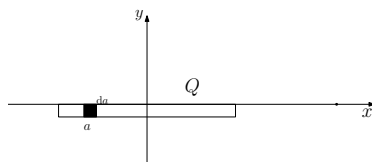
3. 静电场的电势求解

模型.

点电荷. $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$

均匀带电球面球心. $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$.

例 17. (7(1)-4) 电量 Q 均匀分布在长为 $2L$ 的细棒上, 在细棒的延长线上距细棒中心 O 距离为 x 的 P 点处放一带电量为 $q (q > 0)$ 的点电荷, 求带电细棒对该点电荷的静电力.



答案: $F = qE = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 (x^2 - L^2)}$.

分析: 考虑以棒子的中点为 O 原点, 以电荷的方向为正方向, 建立 Ox 坐标轴. 取一个电荷元 $dq = \lambda da = \frac{Q}{2L} da$. 那么, $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q da}{8\pi\epsilon_0 L (x-a)^2}$. 各个 $d\vec{E}$ 的方向均向右, 同方向叠加, 大小直接总 $-L \rightarrow L$ 积分即可.

例 18. (7(1)-5) 如图半径为 R 的半圆周上均匀分布有电荷 Q , 求圆心 O 点的场强. 另外, 如果用不导电的细塑料棒弯成半径为 R 的圆弧, 两段空隙为 $d \ll R$, 电量为 Q 的均匀分布在上面, 求圆心处的场强的大小和方向.

答案: $\frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}$, $\frac{Q/(2\pi R - d)d}{4\pi\epsilon_0 R^2}$, 方向指向缺口.

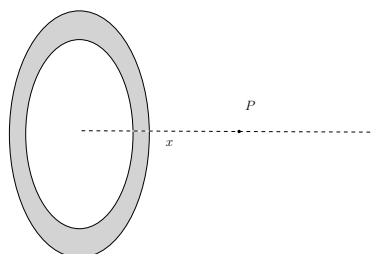
分析: 由于和弧有关, 这里选取 θ 表示量的关系. 选取电荷元 $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$. 考虑两段对称的弧在 O 点的作用. dE 的大小是 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2}$. 带入, E 的大小为 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{Q}{\pi} d\theta$, 那么 $E = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} \cos\theta d\theta$, 方向向下.

对于另外的一问, 我们知道

$$\vec{E}_O = \vec{E}_{\text{圆}} + \vec{E}_{\text{缺口处的负电荷}} = \vec{E}_{\text{缺口处的负电荷}}.$$

于是就可以知道 $\lambda = \frac{Q}{2\pi R - d}$, $E_O = \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0 R^2}$.

例 19. (7(1)-7) 一大平面中部有一半径为 R 的小孔, 设平面均匀带电, 面电荷密度为 σ_0 , 求通过小孔中心并与平面垂直的直线上的场强分布.



答案: $E = \frac{x\sigma_0}{2\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}$, 方向向右.

分析: 可以考虑使用叠加法进行求解. 取小圆环面为微元作为 dq , 因此就有 $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(x^2+r^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$. 这时候, 可以将 dq 视作一段很小的厚度, 这样我们就可以用面密度的信息了. 具体地, 有 $dq = \sigma_0 2\pi r dr$. 从 R 到 $+\infty$ 积分, 就有 $E = \frac{x\sigma_0}{2\epsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$.

提示: 可以把小圆环的公式正常记忆, 不过加上一个要乘的 $\cos\theta$ 值. 也就是

$$E_{\text{环}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(x^2+r^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}.$$

例 20. (7(2)-9) 一厚为 a 无限大的平板均匀带电, 电荷体密度为 ρ , 求平板面垂直距离为 b 的 P 点的电场强度.

答案: $E = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}$.

分析: 考虑一薄片. 那么这个就是 $dE = \frac{d\sigma}{2\epsilon_0}$. 考虑 dV 与 σ 的关系. 直观上感觉, dV 是一个单位体含有的电荷量, 这时候如果我们乘上 dx , 就变成了面密度. 因此 $\sigma = \rho dx$. 积分后就有答案.

体电流与面电流的转化: 考虑在厚度为 dx 的平面层切割面元 ds 的一个小的体积元 dV , 那么这时候根据带电量是恒等的列出等式:

$$dq = \rho dv = \rho dx ds = \sigma ds.$$

例 21. (7(2)-6) 半径为 R 的均匀带电半圆环, 电量 Q , 求圆心处的电势.

答案: $V_O = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R}$.

分析: 考虑

$$\begin{aligned} dV_O &= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \\ dq &= \sigma \pi r dr \end{aligned}$$

就可以得到答案.

例 22. (7(2)-12) 均匀带电圆盘半径为 R , 电荷面密度为 σ , 挖去半径 $R/2$ 的圆片, 求轴线上的电势分布, 再求轴线上的场强.

答案: $V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2+x^2} - \sqrt{(R/2)^2+x^2} \right)$, $E = E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{(R/2)^2+x^2}} \right)$.

分析: 根据先前的经验, 仍然去取半径为 r , 宽为 dr 的细圆环.

$$\begin{aligned} dq &= \sigma 2\pi r dr \\ dV &= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2+x^2}} \end{aligned}$$

之后使用电势梯度 $E_x = -\frac{dV}{dx}$ 对 x 求导就可以得到场强.

提示: 圆环轴心处的电势为

$$V_O = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2+x^2}}.$$

因为不涉及到矢量分解, 于是没有后面一项.

关于 \vec{D} 和 \vec{E} 的 Gauss 定理及其使用

1. \vec{E} 的 Gauss 定理: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{内}}$.

a. 静电场中的导体:

静电平衡. 电荷无宏观的移动, 不随时间变化.

静电平衡的条件. 电场分布: $E_{\text{内}} = 0, E_{\text{表面}} \perp E_{\text{导体表面}}$. 导体内无净电荷分布

b. 静电场中的电介质

Gauss 定理. 仍然适用, 但是需要加上另外感应出来的电荷, 较为麻烦. 于是引入 \vec{D} 的 Gauss 定理.

2. \vec{D} 的 Gauss 定理: $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_{0\text{内}}$.

a. \vec{D} 与 \vec{E} 的关系: $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$.

b. 不影响电场分布的对称性条件: (1) 均匀无穷介质; (2) 分界面为等势面; (3) 分界面与等势面垂直.

3. 电势分析: 注意吧电势变化带来的作用当做分析的起点.

a. 接地: 电势为 0.

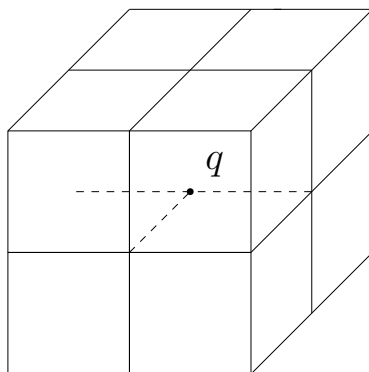
b. 两个连在一起: 电势相等

c. 两个相连的无异平行板之间: 电势差相等

例 23. (7(1)-12) 点电荷 q 位于边长为 a 的正立方体的中心, (1) 通过此立方体的每一面的电通量各是多少? (2) 若电荷移至正方体的一个顶点上, 则通过每个面的电通量又各是多少?

答案: $\phi_1 = \frac{q}{6\epsilon_0}, \phi_2 = \frac{1}{24} \frac{q}{\epsilon_0}$ 与 0.

分析: 因为立方体 6 个面电通量一样可以解答出第一问. 对于第二问, 设计边长 $2a$ 的大立方体, 将 q 包围在中心, 不过该顶点的三个小面的电通量为 $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \frac{q}{\epsilon_0}$. 过该顶点的三个小面电通量为零.



例 24. (7(2)-8) 两个截面半径分别为 R_1 、 R_2 的无限长圆柱面同轴放置, 已知内圆柱面电荷线密度为 λ , 求两圆柱面间的电势差 U .

答案: $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$.

分析: 根据 Gauss 定理求柱面内部的场强, 然后积分即可.

例 25. (7(1)-15) 半径 R 的球形带电体, 电荷体密度为 $\rho = Ar$, A 为常数; 总电量 Q , 求场强分布.

答案: $E_{\text{内}} = \frac{Ar^2}{4\epsilon_0}$, $E_{\text{外}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

分析: 同样取同心球面为 Gauss 面, 然后积分即可. 但是这时候内部不是常量, 于是取体积元为半径 r , 厚度为 dr 的同心球面层. 包含的电量为 $dq = \rho 4\pi r^2 dr$. $Q_{\text{总}} = \int_0^R \rho \cdot 4\pi r^2 dr$. 然后都带入对应的限积分即可.

注意: 这个问题同样应用了微元法, 其方法和上面总结的如出一辙, 很应该仔细体会.

例 26. (7(1)-16) 半径 R 的无限长圆柱形带电体, 电荷体密度为 $\rho = Ar^2$, A 为常数; 求场强分布.

答案: $E_{\text{内}} = \frac{Ar^3}{4\epsilon_0}$; $E_{\text{外}} = \frac{AR^4}{4\epsilon_0 r}$. 方向沿径向.

分析: 考虑作高为 h , 半径为 r 圆柱面为圆柱面. 仅仅有侧面有通量, 同样应用 Gauss 公式. 这时候其内部包含的电荷量就变成了 (取一小段电荷的微元) $dq = 2\pi r h \rho dr$. 然后带入 Gauss 公式就行了.

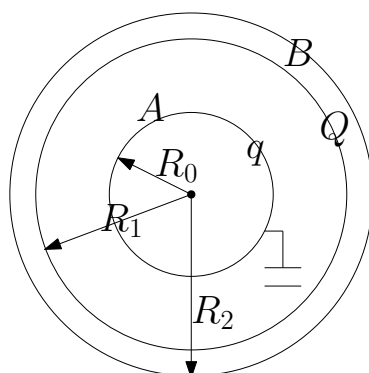
例 27. (8(1)-6) 不带电的导体球壳, 内有一点电荷 q , 距离球心为 d . 用导线将球壳接地后, 再撤除地线, 求球心的电势.

答案: $V_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right)$.

分析: 此时接地球壳 $V_{\text{壳}} = 0$. 内表面带电 $-q$, 外表面带电 0, 球外电场为 0. 只关注球壳在中心的电势和电荷在中心处的电荷的代数和即可.

(接地之后, 撤掉导线为啥还是电势为 0?)

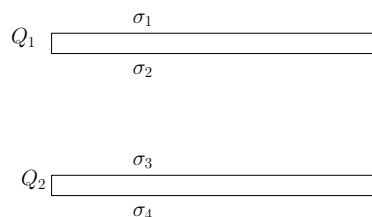
例 28. (课上例题) 现在有如下所示的问题. 原先, 球 A 带有电荷 q , 球 B 带有电荷 Q . 现在将球 A 接地, 这时候求球各个表面的电势分布.



答案: $V_A = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R_0} + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q+q'}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 0, q' = \frac{R_0 R_1 Q}{R_0 R_2 - R_1 R_2 - R_0 R_1}.$

分析: 我们发现 A 的电势是 0. 那么考虑 A 的电荷分布变为了 $q'. Q_{B\text{内表面}} = -q', Q_{B\text{外表面}} = Q + q'.$ 那么列出 $V_A = 0$ 的式子: $V_A = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R_0} + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q+q'}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 0;$ 解之即可.

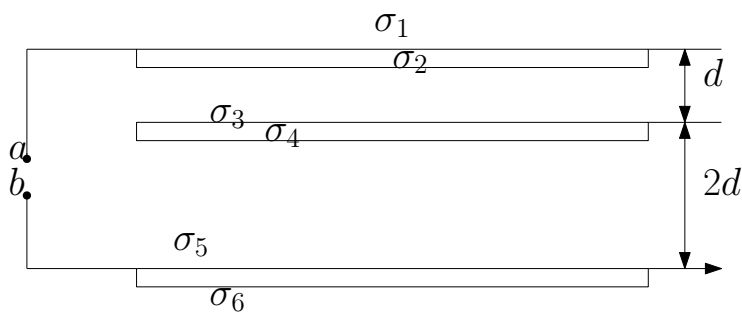
例 29. (8(1)-10) 两块大导体平板, 面积 S , 带电量分别为 Q_1 、 Q_2 , 证明相对两个面总是带等量异号电荷, 相背两个面总是带等量同号电荷, 并求各面电荷密度.



答案: $\sigma_1 = \sigma_4 = (Q_1 + Q_2)/2S; Q_2 = -Q_3 = (Q_1 - Q_2)/2S.$

分析: 取贯穿两个内部的面作为 Gauss 面, 因为通过 Gauss 面的电力线条数为 0. 但是电荷包围的电荷是可以计算的. 因此我们就可以写作 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 = \frac{Q_{\text{内}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\epsilon_0} S_{\text{底}},$ 也就是 $\sigma_2 + \sigma_3 = 0.$ 接着, 我们考虑场强叠加加上静电平衡条件 $E_{\text{内}} = 0,$ 在介质内任取一点, 得到 $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0.$ 最后, 根据电荷守恒, 就得到了 $\sigma_1 + \sigma_2 = Q_1/S; \sigma_3 + \sigma_4 = Q_2/S.$

例 30. (8(1)-11) 三块大导体平板, 面积 S , 中间一块带电 Q , 其余条件见图. (1) 当 ab 断开的时候求各面电荷密度. (2) 用导线连接 ab , 求各面的电荷密度.



答案: (1) $\sigma_{1,3,4,6} = Q/2S; Q_{2,5} = -Q/2S;$ (2) $\sigma_{1,6} = Q/2S; \sigma_2 = -\sigma_3 = 2Q/3S; \sigma_4 = -\sigma_5 = Q/3S.$

分析: 对于 (1) 而言, 考虑选择两个类似的 Gauss 面, 分别贯穿 A 的下表面, B 的上表面; B 的下表面, C 的上表面, 这样就与上一题有类似的

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (1); .$$

$$\sigma_4 + \sigma_5 = 0 \quad (2)$$

接下来运用 C 板的内容里面的场强之和为 0 的信息, 就有

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 - \sigma_6 = 0 \quad (3)$$

. 最后用电荷守恒的式子, 就有

$$\sigma_3 + \sigma_4 = 0 \quad (4);$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 0 \quad (5);$$

$$\sigma_5 + \sigma_6 = 0 \quad (6).$$

对于 (2) 而言, 由于 A, C 之间连了线, 电荷可以自由跑动, 于是 (5), (6) 应当改写为

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_5 + \sigma_6 = 0 \quad (7).$$

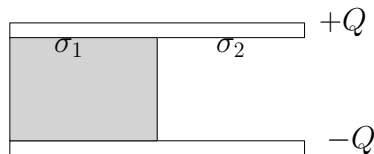
A, C 两板因为相连而等势, 选取

$$\frac{\sigma_3}{\epsilon_0} d = \frac{\sigma_4}{\epsilon_0} 2d \quad (8)$$

. 联立求解即可.

对于式子 (3), 如果改写成在 A 板子, B 板子里面列方程, 是等效的, 这样是重复的条件 (也就是线性相关的), 对我们的方程组解答没有大影响.

例 31. (8(2)-6) 平行板电容器中一半空间充满介质, 极板带电 Q 时, 求极板间电场和电势差.



$$\text{答案: } U = E_2 d = \frac{2Qd}{\epsilon_0 S(\epsilon_r + 1)}.$$

分析: 考虑因为两板之间的电势差是恒定的, 因此在介质的分界面上电荷会重新分布. 考虑左侧的面密度为 σ_1 , 右侧的为 σ_2 . 下面选取合适的 Gauss 面求场强.

$$D_1 = \sigma_1;$$

$$D_2 = \sigma_2;$$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 \epsilon_r};$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}.$$

电势差相等, $E_1 d = E_2 d$, 并且 $\sigma_1 + \sigma_2 = 2Q/S$. 由此可以得到 $E_2 = \frac{2Q}{\epsilon_0 S(\epsilon_r + 1)}.$

电容器

1. 电容

定义: $C \equiv Q/U$.

通常求法: 假设带电 Q , 求电场, 积分求电势 U , 使用定义求之.

击穿电压: 最大是沿最大场强的积分.

2. 若干个特殊物体的电容:

孤立导体球的电容: $C = 4\pi\epsilon_0 R$

平行板电容器的电容: $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$

柱形电容器的电容: $C = 2\pi\epsilon_0 \epsilon_r L \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^{-1}$.

3. 电容器的串并联

并联: U 相等, $C = \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{U}$

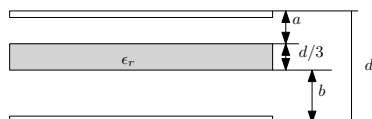
串联: Q 相等, $C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}}$.

判别方法: 同一根导线连接, U 相等, 若干个极板连着极板, Q 相等.

4. 电容器的储能: $W = \int dW = \int_0^Q U dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$.

另外的公式: 带入 $Q = CU$ 做恒等变换, 得 $W = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2}$.

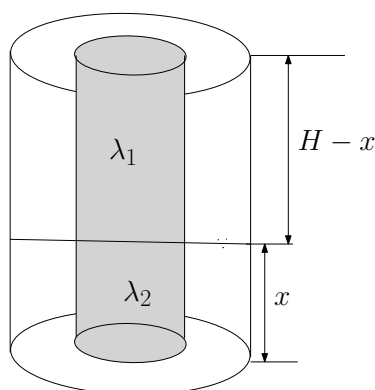
例 32. (8(2)-5) 平行板电容器中插入一介质板, 求电容.



答案: $C = \frac{3\epsilon_0 \epsilon_r S}{(2\epsilon_r + 1)d}$.

分析: 假设带电, 并且面密度 $D = \frac{Q}{S} = \sigma$, $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, $E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$. $U = E_0 \frac{2d}{3} + E_1 \frac{d}{3}$. 于是就可以根据 $C = \frac{Q}{U}$ 得到答案.

例 33. (8(2)-9) 这里有一个液位计, 内部导体圆柱半径为 r , 外面导体圆筒的半径为 R , 高为 H . 液体的相对介电常数为 ϵ_r , 求电容与液位高度 x 的关系.

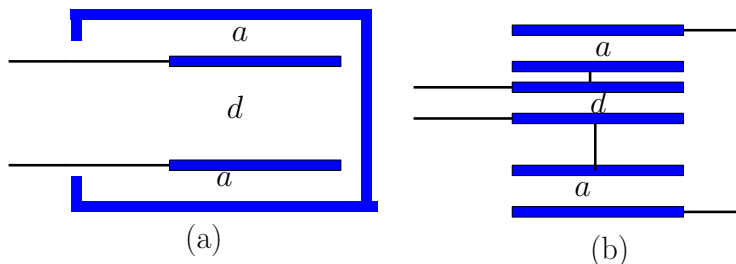


答案:

$$C = \frac{\lambda_2(H + (\epsilon_r - 1)x)}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}}$$

分析: 设电荷线密度介质部分, 真空部分分别为 λ_1, λ_2 . $D_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi r}$, $D_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi r}$. 求出 E , 然后因为电势差相等, 就有 $\int_r^R E_1 dr = \int_r^R E_2 dr$, 并且电荷守恒有 $\lambda_1 + \lambda_2(H - x) = Q$, 就可以解答.

例 34. (8(2)-12) 平行板电容器面积为 S , 间距为 d , 放在方形金属盒内, 两板距盒壁距离为 a , 从两板接出的两极之间的电容是多少?



答案: $\epsilon_0 S \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{d} \right)$.

分析: 考虑把相等电势的电容放在一起. 然后对右侧的图示做串并联分析 (就像中学做电路分析一样), 就有 (下 + 上) // 中. 于是就可求得.

例 35. (8(2)-10) 两个电容器的电容之比 $C_1 : C_2 = 1 : 3$. 把它们串联起来接电源充电, 它们的电场能量之比 $W_1 : W_2 = \underline{\hspace{2cm}}$; 如果是并联起来接电源充电, 则它们的电场能量之比 $W_1 : W_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: 3:1; 1:3.

分析: 串联, Q 相同, 因此可以用 $Q^2/2C$; 并联 U 相同, 因此可以用 $CU^2/2$.

例 36. (8(2)-11) 两个电容均为 C 的电容器带电量分别为 Q 和 $2Q$, 求并联后极板电量和能量增量.

答案: 电量增量: 都为 $(3/2)Q$; 能量增量为 $-Q^2/4C$.

分析: 先求总电量 $q_1 + q_2 = 3Q$. 由于电压相同进行重新分配, 也就是 $\frac{q'_1}{C_1} = \frac{q'_2}{C_2} \Rightarrow q'_1 = q'_2$. 根据 $W = \frac{Q^2}{2U}$ 就可以得到值.

电场的能量

1. 电场的能量公式: $W = \int_{(a)}^{(b)} DEdV$.

例 37. (综合复习题) 半径为 R 的导体球和内、外分别为 $2R$ 、 $3R$ 的导体球壳同心放置, 其间有均匀电介质, 相对介电常数为 ϵ_r . 若给外导体球壳带电 Q , 并将内球接地, 求: (1) 各表面的带电量; (2) 电场分布; (3) 导体球和球壳的电势差; (4) 电场的总能量

答案: 这个答案太复杂了, 问问老师到时候算出答案能不能不带入.

分析: (1) 设内球带电量为 q , 那么从内到外的各个电荷量为 $q, -q, Q+q$. (2) 先求 D 的大小, 再求 E 的大小. 从内到外的各个 D 分别是 $E_1 = 0, E_2 = \frac{q}{4\pi r^2}, E_3 = 0, E_4 = \frac{Q+q}{4\pi r^2}$; 各个电场分别是 $E_1 = 0, E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}, E_3 = 0, E_4 = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. (3) 电势差积分即可. (4) 表达式为 $W = \int_0^\infty \frac{1}{2} DEdV = \int_R^{2R} \frac{1}{2} D_2 E_2 4\pi r^2 dr + \int_{3R}^\infty \frac{1}{2} D_4 E_4 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi q^2}{16\pi^2 r^4 \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{7R}{3} - \frac{4\pi(Q+q)^2}{16\pi^2 r^4 \epsilon_0} \cdot \frac{27R}{3}$. 但是我们现在还不知道 q , 根据 U 导体球电势为 0, 可以得到方程式 $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \right) + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{3R} = 0$. 于是知道 $q = \frac{-Q\epsilon_r}{\epsilon_r - 3}$. 带入原方程就行了.

5 磁场中的常见问题

恒定电流与其激发的磁场

1. 电流

形成: 载流子的定向移动形成电流

传导电流. 载流子在电场作用下的定向移动

运流电流. 带电体的机械运动

位移电流. 与电场的变化有关

强度. 单位时间内通过任一截面的电量. $I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = neSu$, n 是数密度; S 是横截面面积; u 是电子的漂移速率.

线, 面上的电流状况

体电流的面密度. $\sigma = \frac{dI}{dS_\perp} (\text{A/m}^2)$

面电流的线密度. $j = \frac{dI}{dl_\perp} (\text{A/m})$

2. 电源和电动势

a. 电路

内电路: 外力克服静电力做功, 将电荷从低电位转移到高电位

外电路: 电荷在电场的作用下由高电位到低电位形成电流.

b. 电动势: 把单位正电荷从电源负极移动到正极, 非静电力做的功.

方向: 外电路从高到低, 内电路从低到高.

3. 特殊运动情形下的电流

a. 圆电流: 带电体绕定点的旋转

均匀带电杆子. 圆面电流 $dI = \frac{\lambda dr}{\omega}$.

均匀带电圆盘. 圆面电流 $dI = \frac{\sigma 2\pi r dr}{\omega}$.

4. 磁场

a. 特性: 运动电荷周围存在磁场, 磁场对周围运动电荷有力的作用; 是物质, 客观存在; 服从叠加原理

b. 磁感应强度 \vec{B} . 速度为 v 的运动电荷 q_0 受 Lorentz 力

大小: $f_m = q_0 v B \sin \theta$

方向: $\vec{f}_{m_{\max}} \times \vec{v}$.

单位: T

c. 磁感应线. 描述磁场空间分布的假想的曲线

关系. 切线方向为 \vec{B} 的方向, 数密度为 \vec{B} 的大小: $B = \frac{d\varphi_m}{dS_{\perp}}$, 又称为磁通密度.

性质. (1) 无头无尾的闭合曲线; (2) 曲线方向与电流成右手螺旋; (3) 曲线与电流相互铰链.

d. 曲面 S 的磁通量. $\varphi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$.e. 磁场的 Gauss 定理: $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$. 这表明了磁场没有原, 但是有旋.

5. 常见内容的磁场极其叠加

a. 电流元 $I d\vec{l}$ 的磁场. $d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$, 其中, \vec{e}_r 的方向是当前的微元指向要判定的点的矢量.b. 载流直导线的磁场. $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \vec{e}$.c. 圆环中心轴线距离 x 处上的磁场: $\frac{\mu_0 I}{2} \frac{R}{x^2 + R^2} \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$

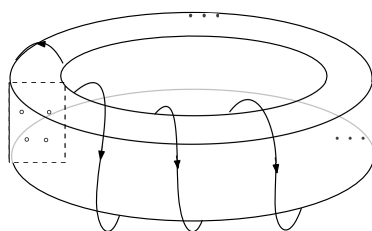
例 38. (9(1)-6) 有一闭合回路由半径为 a 和 b 的两个同心共面半圆连接而成, 如图其上均匀分布线密度为 λ 的电荷, 当回路以匀角速度 ω 绕过 O 点垂直于回路的轴转动时, 求圆心 O 点处的磁感应强度.

答案: $\frac{\mu_0 \lambda \omega}{2\pi} (\pi + \ln \frac{b}{a})$.

分析: 分为两个部分: 圆面电流和直线电流. 首先来看圆面电流: $I_a = \frac{q}{T} = \frac{\lambda \pi a}{2\pi/\omega} = \frac{1}{2} \lambda a \omega$. $B_0 = \frac{\mu_0 I_a}{2a}$. 同理可以看到另一个小圆环的情形. 他们的方向竖直向外.

接下来看直线段的电流: 其上电荷元 dq 旋转形成等效的圆电流. 也就是 $dI_r = 2 \frac{dq}{T} = 2 \frac{\lambda dr}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{\pi} \lambda dr$. 这个方向向外. 然后我们求这一小段的 $d\vec{B}$ 的大小. $dB_r = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r}$. 积分之后就可以得到.

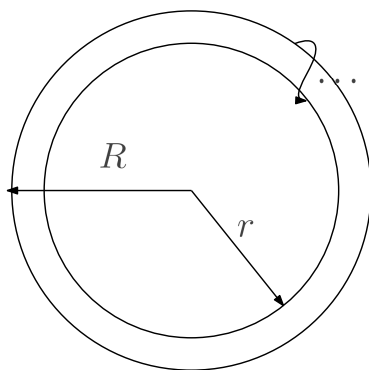
例 39. (课堂练习 17-2) 在一半径为 R 的无限长半圆柱形金属薄片, 自上而下地有电流强度 I 通过, 如图示, 试求圆柱轴线任一点 P 处的磁感应强度.



答案: 沿 y 轴负向, 大小为 $-\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$.

分析: 由于这是和圆面有关的, 于是使用极 (柱) 坐标系考虑. 于是 $dI = \frac{I dr}{\pi R} = \frac{IR d\theta}{\pi R}$. 那么电流元的磁感应强度大小为 $dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r}$. 从 $0 \rightarrow 2\pi$ 积分即可.

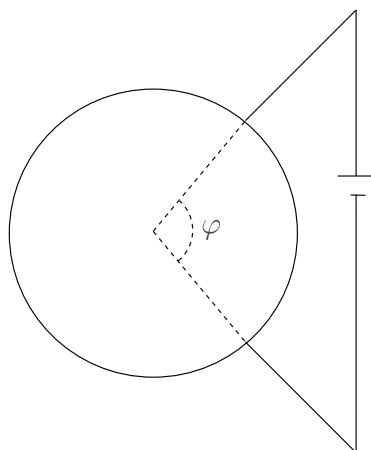
例 40. (课堂练习 17-4) 在半径为 R 及 r 的两圆周之间, 有总匝数为 N 的均匀密绕平面螺线圈如图示, 当导线中通有电流 I 时, 求螺线圈中心点 (即两圆圆心) 处的磁感应强度.



答案: $\frac{\mu_0 N I}{2(R-r)} \ln \frac{R}{r}$.

分析: 取半径为 a , 宽度为 da 的窄环, 则电流为 $dI = \frac{N}{R-r} I da$. 那么 $dB_{\text{圆心}} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi a}$. 积分即可.

例 41. (9(1)-2) 电流由长直导线 1 沿半径方向经 a 点流入一电阻均匀分布的圆环, 再由 b 点沿半径方向从圆环流出, 经长直导线 2 返回电源 (如图). 已知直导线上电流强度为 I , 求圆心 O 点的磁感应强度.



答案: 0.

分析: 首先根据结论, 在延长线上的线, 在中心的磁感应强度为 0. 其次, 考虑圆周上的点, 我们知道结论 $B = \varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. 于是有 $I_1 = \frac{I}{2\pi} (2\pi - \varphi)$. 一个方向向里, 另一个方向向外. 因此可以抵消.

环路定理

1. 环路定理: $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{内}}$.

2. 对环路定理的正确理解:

L . 在场中任取的一闭合路径, 任意一个绕行方向

dL . L 上的任意一个线元

\vec{B} . 线元处的磁场, 由空间所有电流共同产生

I_{in} . 与 L 铰链的电流

$\sum I_{\text{in}}$. 代数和, 取与 L 方向右手螺旋的电流取正

例 42. (课上展示 20-14) 求下列轴对称电流分布周围激发的磁场. (1) 无限长直电流; (2) 无限长圆柱面电流; (3) 无限长圆柱体电流.

答案: (1) $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$; (2) $B = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > R \end{cases}$; (3) $B = \begin{cases} \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2} & r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > R \end{cases}$.

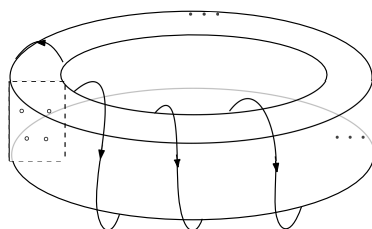
分析: (1) 考虑半径为 r 的与电流垂直的圆环路, 如图所示. 那么有 $\mu_0 I = B2\pi r$. (2) 考虑和上面一样的环路, 就有 $\mu_0 I_{\text{内}} = B2\pi r$. (3) 考虑 $\mu_0 I_{\text{内}} = B2\pi r$. 其中 $I_{\text{内}} = \frac{r^2 I}{R^2} (r < R)$.

例 43. (课上展示 20-15) 求下列面对称电流的分布. (1) 无限大均匀载流平面, 电流线密度为 j ; (2) 无限大平面层体电流 (电流的线密度为 σ).

答案: $B = \frac{\mu_0 j}{2}, B = \frac{\mu_0 \sigma h}{2}$.

分析: 对于 (1), 选取与电流方向垂直的部分, 居中放置矩形线框 (如长度为 l). 矩形线框的两个贯穿次场面的两条线相互抵消, 剩下上下两个部分. 因此, 就有 $B2l = \mu_0 j l \rightarrow B = \frac{\mu_0 j}{2}$. (2) 同样选取类似的内容, 就有 $B2l = \mu_0 \sigma h l$.

例 44. (课上展示 20-15) 密绕螺线环如下所示, 求内部的磁场.



答案: $B = 0, R < R_1, R > R_2; B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}, R_1 < R < R_2$.

分析: 对于小于 R_1 和大于 R_2 的情形, 会发现净电流总和为 0. 否则, 使用圆形的线框作用, 就有 $B2\pi r = \mu_0 N I$.

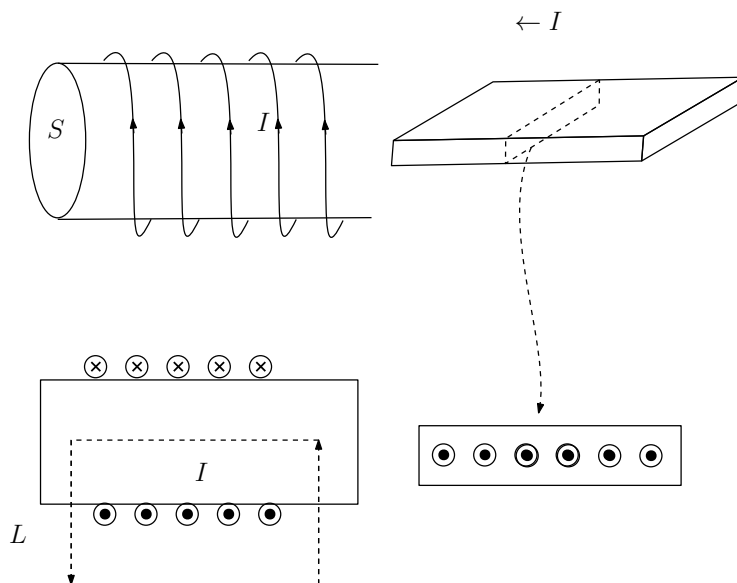
例 45. (9(1)-7) 长载流导体直圆管, 内半径为 a , 外半径为 b , 电流强度为 I , 电流沿轴线方向流动, 并且均匀分布在管壁的横截面上. 空间某点到管轴的垂直距离为 r . 求 $r < a, a < r < b, r > b$ 等各区间的磁感应强度. 导体内部 $\mu \approx \mu_0$.

答案: 分别为 $B_0 = 0, B_1 = \frac{\mu_0 I (r^2 - a^2)}{2\pi r (b^2 - a^2)}, B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

磁通量的计算

1. 计算方法: 一般采用微元累计的方法.

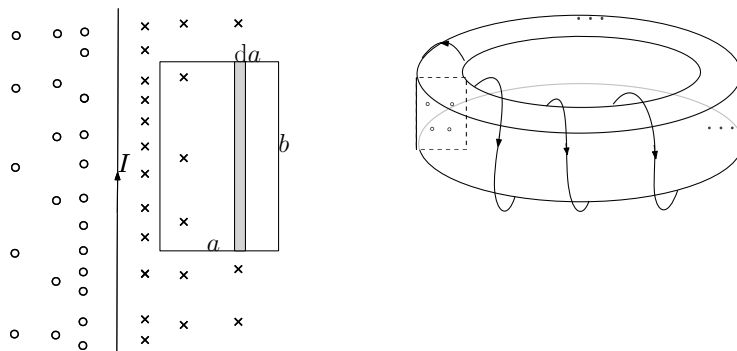
例 46. (课上演示 20-16) 求 (1) 密绕长直螺线管 (内部为均匀磁场) 的垂直于竖直截面的磁通量; (2) 无限大均匀载流平面, 电流线密度为 j (均匀磁场).



答案: $\mu_0 nIS, BS \cos \theta$.

分析: (1) 选取和上述一样的一段矩形线框, 根据 Ampere 环路定理得到 $B_0 = \mu_0 NI$. 由于是均匀的, $\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS = \mu_0 nIS$. (2) 无限大均匀载流平面选取对应的载流平面, $B = \frac{\mu_0 I}{2}$, $\phi_m = BS \cos \theta$.

例 47. (课上演示 20-17) 求 (1) 无限长直电流外侧如图所示的区域磁通量的计算; (2) 密绕螺绕环单侧截面的磁通量的计算.

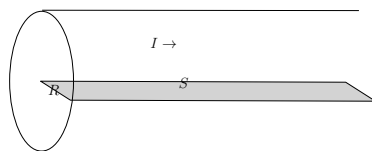


答案: $\frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \ln \frac{r_0+a}{r_0}$; $\frac{N^2 \mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$.

分析: (1) 无限长直导线周围的磁场为 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. 选取一位置为 a , 宽度为 da 的窄竖条, 就有 $d\vec{S} = bdr\vec{e}_n$. $\phi_m = \int_S B dS = \int_{r_0}^{r_0+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} bdr$. (2) 同样可以知道 $B2\pi r = \mu_0 NI$. 同样根据定义 $\phi_m = N\varphi_m = N \int_S B dS = N \int_{R_1}^{R_2} \frac{N\mu_0 I}{2\pi r} hdr$.

例 48. (9(1)-8) 一根很长的铜导线均匀载有电流 I , 在导线内部作一平面 S

, 如图示, 试计算通过 S 平面的磁通量 (沿导线长度方向取长为 1 米的一段作计算). 铜的磁导率 $\mu \approx \mu_0$.



答案: $B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} (0 < r < R); \phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} I$.

分析: 首先求出 B 的大小, 方向沿环的切向, r 相同的地方 B 相同. 取距轴 r 处, 宽 dr 的窄条, 其上 B 相同, $d\phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS = B l dr$. 积分即可得到 ϕ_m .

注意: 一般问磁通量是问磁通最大的地方.

磁力与磁力矩

1. 带电粒子在磁场的运动

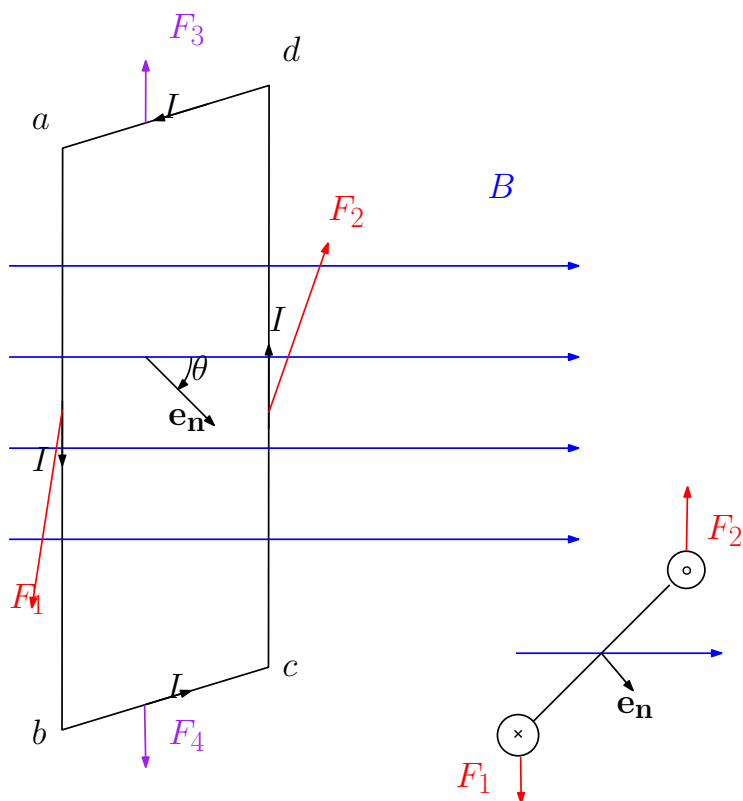
- a. Lorentz 力. $\vec{f} = q \vec{v} \times \vec{B}$. 大小 $f = qvB \sin \theta$. 方向: Lorentz 力只改变速度的方向, 不改变速度的大小, Lorentz 力不做功.
- b. 带电粒子在磁场中的运动. $R = \frac{mv_{\perp}}{Bq}, h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m v_{\parallel}}{Bq}$.
- c. Hall 效应: $q \frac{\Delta U_H}{h} = qvB \rightarrow \Delta H = \frac{1}{nq} \frac{IB}{b}$. 判定电势高低的时候注意是在电源的内部.

2. 载流导线在磁场中的受力

- a. Ampere 力: $\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$.

3. 磁力矩

矩形载流线圈: 载流线圈在磁场中的情形



合力与合力矩: 合力为 0, 合力矩不为 0. 而是

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{1}{2}l_1 F_1 \sin \theta + \frac{1}{2}l_1 F_2 \sin \theta \\
 &= Il_1 l_2 B \sin \theta \\
 &= ISB \sin \theta \\
 \vec{M} &= IS\vec{e}_n \times \vec{B}
 \end{aligned}$$

磁矩. $\vec{p}_m = IS\vec{e}_n$, 其中 e_n 与线圈电流方向满足右手螺旋.

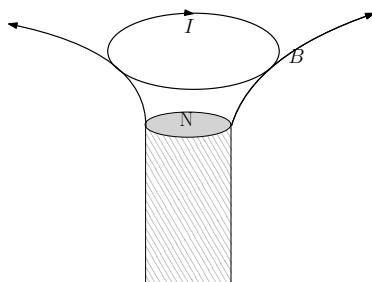
磁力矩. $\vec{M} = IS\vec{e}_n \times \vec{B} = \vec{p}_m \times \vec{B}$

结果. 在磁力矩的作用下, 线圈转向与磁场方向正平行.

例 49. (9(2)-6) 如图示, 一条任意形状的载流导线位于均匀磁场中, 试证明它所受到的 Ampere 力等于载流直导线 ab 所受到的 Ampere 力.

分析: 电流元的受力为 $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$. 对路径积分即可得到 $\vec{F} = I \left(\int_a^b d\vec{l} \right) \times \vec{B} = I\vec{ab} \times \vec{B}$.

例 50. (课堂例子 20-2) 一圆柱形磁铁 N 极上方水平放置一半径为 R 的圆电流 I , 圆电流所在处磁场的方向处处均与竖直方向成 α 角, 求圆电流所受磁力.



答案: $2\pi RIB \sin \alpha$.

分析: 在圆电流上去一小电流元, 在对称的时候 $d\vec{F} = Id\vec{l} \times d\vec{B}$. 根据对称性分析可以知道, $\oint_{2\pi R} dF_x = 0$, 那么 $F = \oint_{2\pi R} dF_y = 2\pi RIB \sin \alpha$.

例 51. (课堂例子 20-3) 这里有一个电磁轨道炮. 其形成机制是有两个相距为 d 的长直的导线, 导线截面半径为 r_0 . 在这中间有导体棒 ab 可以在上面滚动. 现在, 这两个长直导体棒被通入了大小为 I 的电流. 现在问这个导体棒的受力是多少.

答案: $\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{d-r_0}{r_0}$.

分析: 我们知道一个半无限长的导体棒在距离 r 处形成的磁场大小为 $\frac{\mu_0 I}{4\pi r}$. 考虑一小段 dI , 其中它的长度是相同的, 这样子就得到了 $2 \int_{r_0}^{d-r_0} IdrB = 2 \int_{r_0}^{d-r_0} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi r} dr$.

例 52. (9(2)-11) 有一片半径为 R , 圆心角为 θ 的扇形薄板, 均匀带电, 电荷面密度为 σ , 它绕过 O 点垂直于扇面的轴以匀角速率 ω 顺时针旋转, 旋转带电扇形薄板的磁矩大小为 _____, 方向为 _____.

答案: $\frac{1}{8}\sigma\theta\omega R^4$.

分析: 由于是带电体的转动, 因此考虑取 r 处, 宽度为 dr 的细线段旋转形成的细小圆环面. 因此, 对应的电流是

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma\theta r dr}{2\pi/\omega}.$$

那么 $dp_m = dI \cdot S = \frac{\sigma\theta r}{2\pi/\omega} dr$, 总磁矩积分即可.

6 电磁感应中的常见问题

Faraday 的电磁感应定律

1. Faraday 电磁感应定律

感应电动势. $\epsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$. (负号表示和磁通量的变化方向相反- ϵ 与 L 的绕行方向相反.) 其中 $\phi_m = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} > 0$.

引起磁通量变化的方式: (1) B 不变, 导线运动使得 S 变化, 形成动生电动势; (2) S 不变, 导线回路的 B 发生变化. 感生电动势.

磁链. N 匝串联的回路的总磁通 $\phi_m = \sum_i \phi_{mi}$.

2. 纯电阻电路中的感应电流和感应电荷

感应电流. $I = \frac{\epsilon}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi_m}{dt}$.

通过的电量. $q = \int_{\Delta t} I dt = \int_{\Delta t} -\frac{1}{R} \frac{d\phi_m}{dt} dt = -\frac{1}{R} \Delta\phi_m$.

例 53. (课堂例子 20-2) 真空中直导线通交流电, 求: 与其共面的 N 匝矩形回路中的感应电动势. (1) 已知 $I = I_0 \sin \omega t$. (2) I 恒定, 平面线圈以匀速率 v 向右运动, 结果如何?

答案: (1) $\epsilon = -\frac{\mu_0 N I_0 l \omega}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d} \cos \omega t$ (2) $\epsilon = \frac{\mu_0 I}{2\pi} N \frac{va}{(d+a+vt)(d+vt)}$.

分析. 先求 B , 并且根据回路的方向按照右手螺旋的规则求 $d\phi_m$, 然后积分求磁通量

$$\phi_m = N \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} N l \ln \frac{d+a}{d},$$

最后让磁通量对时间求导即可.

对于第二问, 选取任一时刻, 然后考虑

$$\phi_m = N \int_{d+vt}^{d+a+vt} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx$$

即可.

动生电动势

1. 动生电动势: $\epsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(BS) = -Bl \frac{ds}{dt} = -Blv$, 回路 L 方向同 B 方向.

2. 机制: 受到 Lorentz 力 $\vec{f}_m = -e \vec{v} \times \vec{B}$.

推导. $\epsilon = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$.

转动公式. $\epsilon = \int_{(a)}^{(b)} -\omega x B dx = -\frac{1}{2} \omega B l^2$.

推论. 均匀磁场中, 任意形状导线 ab 绕 a 端转动, $\epsilon = \int_{(a)}^{(b)} -\omega x B dx = -\frac{1}{2} \omega B (\overline{ab})^2$.

例 54. (11-2) 在均匀磁场 B 中的导线 oab , 形状如图示, 当其绕 o 点以角速度 ω 在平面内转动, 求导线 oab 上的动生电动势的大小, 哪端电势高? 已知弧 ab 为半径 R 的 $3/4$ 圆弧, 且 oa 长度为 R .

答案: $\frac{5}{2}\omega BR^2$.

分析: 根据上述的结论, 等同于一个直杆子在运动. 于是可以计算出答案.

例 55. (11-10) 导线杆 ab 以速率 v 在导线导轨 $adcb$ 上平行移动, 杆 ab 在 $t = 0$ 时, 位于导轨 dc 处. 均匀磁场的磁感应强度为 $B = B_0 \sin \omega t$, 求 t 时刻导线回路中的感应电动势?

答案: $-B_0 lv(\omega t \cos \omega t + \sin \omega t)$.

分析: 先求 ϕ_m . 注意时间变量的引入, 也就是 $\phi_m = BS = vtlB_0 \sin \omega t$.

感生电动势

1. 感生电动势:

性质: 涡旋电场

大小: $\epsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$ (非静电力对单位正电荷绕导线回路做功)

方向: (1) S 以 L 为边界, 成右手螺旋关系.

2. 求解感生电动势.

使用关系 $\epsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \int_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$.

方向: (1) S 以 L 为边界, 成右手螺旋关系. (2) 只有在 \vec{E}_i 有特殊分布的时候才可以计算出来.

对称条件: 限制在圆柱体内的均匀磁场, 磁感强度方向平行于轴线. 当磁场随时间变化时, 激发的感生电场具有轴对称分布的特性.

添加构成封闭区域

3. 与静电场的区别: 静电场有源无旋, 是保守场. 而涡旋电场无源有旋, 是非保守场.

例 56. (课上演示-20(3)-3) 右图的时变磁场激发的感生电场, 求它的电场分布.

答案: $E_i = -\frac{S}{2\pi r} \frac{dB}{dt}$.

分析: 选取同心圆环, 有

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \oint_{2\pi r} E_i dl = E_i 2\pi r$$

同时由于 Faraday 的电磁感应定律, 就有

$$\int_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{dB}{dt} \int_S d\vec{S} = -S \frac{dB}{dt}.$$

联立即可得到答案.

例 57. (课上演示 20(3)-9) 截面半径为 R 的长直螺线管中的磁场 $\frac{dB}{dt} = C$. (1) 求沿半径方向放置的导线 oa 上的感生电动势; (2) 求导线 ab 上的感生电动势; (3) 求导线 cd 上的感生电动势.

答案: (1) 0, (2) $-S_{\Delta} \frac{dB}{dt}$, (3) $-S_{\text{扇}} \frac{dB}{dt}$.

分析: 由于第一个 oa 上各处 E_i 方向垂直于 oa , 因此是 0. 后面两个可以通过构成回路的方法完成这样的操作. 把边界的问题转化为了区域内的问题.

这就和 Green 公式, Gauss 公式有很相似的地方.

7 Maxwell 方程组的常见问题

全电流的环路定理

1. 对于含有电流和电容器的全电流环路定理. $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum (I_d + I_0)_{\text{内}}, \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum (I_d + I_0)_{\text{内}}$. 其中 $I = I_0 + I_d$.

2. 位移电流和传导电流

位移电流. 为载流子的定向移动形成, 在导体中具有热效应.

传导电流. 都可以在周围产生磁场.

例 58. (课上演示 1) 半径为 R 的两块圆板构成平板电容器. 匀速充电, 两板间场强的变化率为 dE/dt , 求板间的位移电流, 以及距板中心连线 r 处的磁感应强度.

首先根据全电流的环路定理, 知道 $H \cdot 2\pi r = I_{d\text{内}}$. 那么有

$$H = \frac{1}{2\pi r} \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I_d, r < R$$

$$H = \frac{1}{2\pi r} I_d, r \geq R$$

根据 E 的变化率表示 I_d , 有:

$$I_d = \frac{d\phi_D}{dt} = \frac{dD}{dt} S = \epsilon_0 \frac{dD}{dt} \pi r^2.$$

根据关系有 $B = \mu_0 H$. 解之即可.