高等代数习题集

AUGPath

2023 年 2 月 19 日

0.1 数域

0.1.1 课后练习

问题 0.1.1. 设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为不同的素数, $n \geqslant 2$, 证明, $\sqrt[n]{p_1 \cdots p_k}$ 是无理数.

证明. 由题意, 假设

$$p_1 p_2 \dots p_k = (a/b)^n, \gcd(a,b) = 1, a, b \in \mathbb{Z},$$

那么有 $b^n p_1 p_2 \cdots p_{=} a^n$, 由于 $p_1, \cdots, p_n$ 都是质数, a, b 互质, 且 $n \geqslant 2$, 最终可以写成如下形式:

$$\prod_{i=1}^{n_1} q_i^{\alpha_i} \prod_{i=1}^{n_2} p_i = \prod_{i=1}^{n_2} r_i^{\beta_i}$$

分类讨论:

- 如果 p_i 不与相同, 等式不可能成立.
- 如果 p_i 与 q_i 部分相同, 那么 p_i 的次数只有 1, 与剩余部分的 n 次 $(n \geqslant 2)$ 不同, 因此也不成立.

综上, $p_1 p_2 \dots p_k \neq (a/b)^n$, 意味着 $\sqrt[n]{p_1 \cdots p_k}$ 是无理数, 在 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为不同的素数的条件下. □

问题 0.1.2. 试求所有 $\{t \in \mathbb{C}\}$ 使得 $\{a + bt | a, b \in \mathbb{Q}\}$ 是数域.

解答: 假设有 $x_1 = a + bt$, $x_2 = c + dt$, $x_1 x_2 = (a + bt)(c + dt) = t(ad + bc) + ac + bdt^2 \in \mathbb{Q}$. 这就要求 t 是二次有理方程系数的根. #

问题 0.1.3. 证明: 真包含 $\mathbb{R}$ 的数域只有复数域 $\mathbb{C}$.

证明. 考虑反证法: 假设存在一个数域 $\mathbb{F}$ 使得 $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$.

取得 $x = a + bi \in \mathbb{F}$, 且要求 $b = 0$. 由于 $R \subseteq \mathbb{F}$, $a \in P$. 注意到加法不具有封闭性. 因此与假设矛盾. □

问题 0.1.4. 设 $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ 为数域, 称映射 $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ 为 $\mathbb{E}$ 到 $\mathbb{F}$ 的自同态, 如果

$$\varphi(1) = 1, \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

特别的, 若 $\mathbb{F} = \mathbb{E}$, 称 φ 为 $\mathbb{E}$ 的自同构. 证明: 同态 φ 一定是单射.

证明. 考虑使用反证法, 假设 φ 不是一个单射, 也就是 $\exists x_1, x_2, x_1 \neq x_2, \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.

由题意, 我们可以表达 x_1 为

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2 + (x_1 - x_2)) = \varphi(x_2) + \varphi(x_1 - x_2)$$

同样可以表达 x_2 为

$$\varphi(x_2) = \varphi(x_1 + (x_2 - x_1)) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2 - x_1)$$

由于 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$, 那么 $\varphi(x_2)+\varphi(x_1-x_2)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2-x_1)$. 也就是 $\varphi(x_2-x_1)=0$. 如果 $p=(x_2-x_1)\neq 0$, 那么 $1=\varphi(1)=\varphi(p\cdot 1/p)=\varphi(p)\varphi(1/p)=0$, 矛盾. 因此假设不成立.

□

问题 0.1.5. 设 $\mathbb{E}$,$\mathbb{F}$ 为数域, 称 $\mathbb{E}$,$\mathbb{F}$ 同构, 如果存在可逆映射 $\varphi:\mathbb{E}\to\mathbb{F}$ 使得

$$\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta),\quad \varphi(\alpha\beta)=\varphi(\alpha)\varphi(\beta).$$

称 φ 为 $\mathbb{E}$ 到 $\mathbb{F}$ 的同构. 特别地, 若 $\mathbb{F}=\mathbb{E}$, 称 φ 为 $\mathbb{E}$ 的自同构.

(1) 证明: 存在无穷多个不同构的数域;

(2) 设 $\varphi:\mathbb{E}\to\mathbb{F}$ 为同构, 证明对任意 $\alpha\in Q$, 有 $\varphi(\alpha)=\alpha$.

(3) 试求 $F=Q(\sqrt{2})$ 的所有自同构

证明. □

0.1.2 问题引导的代数学

问题 0.1.6. 怎么把循环小数写成分数?

解答: 取循环节,

#

0.2 行列式

0.2.1 知识引导

余子式.

如果 A 是一个矩阵, 其中 M_{1j} 是划去 A 的第 1 行第 j 列后所得的 $n-1$ 阶方阵的行列式，称为 A_{1j} 的余子式

行列式的性质.

(1) 行列式中两行（列）互换，行列式变号. 证明可以使用每次交换逆序数奇偶性改变.

(1-1) 一个方阵和它的转置的行列式相等.

(2) 行列式某行（列）来以常数 c，则新的行列式是原行列式来以 c.

(3) 行列式具有行 (列) 的线性性.

(3-1) 若 A 中有两行成比例，特别地，一行为零或两行相同, 那么 $|A|=0$.

(4) 行列式的某一行（列）加上另一行（列）的 c 倍，行列式不变.

多行 Laplace 展开.

一个 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 任取 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n$, 则 A 中所有 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ 行上的 p 阶子式与其代数余子式的积之和为 $|A|$ ，即

$$|A| = \sum_{(j_1\cdots j_p)} (-1)^{\sum_{t=1}^{p}(i_t+j_t)} A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_p \\ j_1\cdots j_p \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{p+1}\cdots i_n \\ j_{p+1}\cdots j_n \end{pmatrix}$$

这里，求和取遍所有 $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots \leqslant n$.

注意是固定行, 取遍列, 或者固定列, 取遍行.

0.2.2 常见例子

问题 0.2.1. 使用 Laplace 展开可以有很多作用.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{11} & \cdots & d_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = |A||B|.$$

证明. □

问题 0.2.2. 使用 Laplace 展开证明 $|AB| = |A||B|$:

$$|A||B| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明. □

下面这两个例子展示了矩阵和多项式之间的联系:

问题 0.2.3. 证明:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i;$$

证明. □

问题 0.2.4. 证明:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix} = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

证明. □

下面这个问题产生的 Vandermonde 行列式可以应用于快速 Fourier 变换 (见《算法导论》), 也有很多实际的背景.

问题 0.2.5. 证明 Vandermonde 行列式:

$$设A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}, 证明: |A| = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i).$$

证明. □

0.3 矩阵

0.3.1 知识引导

常见分块矩阵的逆矩阵.

$$设T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}, 其中A, D 都是可逆方阵, T^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

三种初等矩阵.

(1) 第一类初等矩阵

$$P(i,j)=\begin{bmatrix}1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& 0 & \cdots & 1 &&& \\ &&& \vdots && \vdots &&& \\ &&& 1 & \cdots & 0 &&& \\ &&&&&& 1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1\end{bmatrix}$$

(2) 第二类初等矩阵.

$$P(i(c))=\begin{bmatrix}1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& 1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& c &&& \\ &&&&&& 1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1\end{bmatrix}$$

(3) 第三类初等矩阵.

$$P(i,j(c))=\begin{bmatrix}1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&& c &&& \\ &&& 1 &&&&&& \\ &&&& \ddots &&&&& \\ &&&&& 1 &&&& \\ &&&&&& 1 &&& \\ &&&&&&& \ddots && \\ &&&&&&&& 1 &\end{bmatrix}$$

0.3.2 常见例子