

# 问题求解课程讲义

ant-hengxin, AUGPath

2023 年 3 月 19 日

## 注意

这份笔记还处于实验和编写阶段. 可能很多内容会大改, 并且正确性不能够保证, 仅做预览使用.

## 来源

这份讲义大部分照抄了南京大学魏恒峰老师的离散数学课件和 NJU 问题求解课程编写组提供的课件和补充资料. 在这里为他们辛苦的准备讲稿以及无私地开源供外校学生学习表达感谢以及敬佩!

## 查看最新版本

请参看 Github 的源代码仓库<https://github.com/shzaiz/dx-public/blob/main/TeXify/pypsolve/pypsolve-main.pdf>.

# 目录

<b>第一章 程序设计语言基础回顾 [P]</b>	<b>5</b>
1.1 问题的提出: 通过程序, 可以求解的问题 . . . . .	5
1.2 程序设计的语法与语义 . . . . .	5
1.3 Python 代码执行可视化: 一个网站 . . . . .	6
1.4 可以“程序化”执行命令的最小指令集 . . . . .	6
1.4.1 Python 中的整个世界 . . . . .	9
1.4.2 函数: 整合相似过程 . . . . .	13
1.5 一些小例子 . . . . .	15
1.6 C 语言引导 . . . . .	20
1.6.1 作为不太好用的计算器 . . . . .	21
1.6.2 变量的引入 . . . . .	22
1.6.3 顺序执行的程序 . . . . .	23
1.6.4 循环结构 . . . . .	24
1.6.5 方便地创建多个变量: 数组 . . . . .	24
<b>第二章 简单数理逻辑 [M]</b>	<b>25</b>
2.1 问题的提出: 为什么要研究简单的数理逻辑 . . . . .	25
2.2 开始行动: 符号化逻辑 . . . . .	31
2.2.1 命题, 真值表和指派 . . . . .	31
2.2.2 命题逻辑的化简 . . . . .	37
2.2.3 化简的“目标”之一: 范式 . . . . .	39
2.3 命题推演的真象: 命题的推演 . . . . .	43
2.4 变得更加严谨: 形式化推理系统 . . . . .	46
2.5 表达更丰富的内容: 谓词 部分与整体的关系 . . . . .	48
2.6 尝试解释谓词公式 . . . . .	51
2.6.1 谓词公式, 解释, 等价表示 . . . . .	51
2.7 谓词公式的标准形 . . . . .	53
2.8 谓词逻辑的推理要求 . . . . .	55
2.9 常见的证明方法 . . . . .	56
2.10 重新审视算法的正确性: 从基本结构开始 . . . . .	59
2.11 继续理解子过程和递归 . . . . .	64

<b>第三章 集合论以及二元关系 [M]</b>	<b>67</b>
3.1 简单的朴素集合论的一些定义 . . . . .	67
3.2 高级集合操作 . . . . .	71
3.2.1 交和并 . . . . .	71
3.2.2 排列的力量 . . . . .	73
3.3 悖论的出现 . . . . .	74
3.4 二元关系: 简介以及简单运算 . . . . .	74
3.4.1 有序对 . . . . .	76
3.4.2 笛卡尔积: 一种组合方式 . . . . .	77
3.4.3 用有序对定义二元关系 . . . . .	78
3.4.4 关系的简单运算 . . . . .	79
3.5 等价关系 – 特殊的二元关系 . . . . .	85
3.5.1 从自然数到有理数 . . . . .	87
3.6 相容关系 – 特殊的二元关系 . . . . .	89
3.6.1 集合的覆盖 . . . . .	89
3.7 函数 – 特殊的二元关系 . . . . .	90
3.7.1 函数: 作为关系的一个子集 . . . . .	90
3.7.2 作为集合的函数 . . . . .	91
3.7.3 特殊函数关系 . . . . .	92
3.7.4 作为关系的函数 . . . . .	93
3.8 序关系 . . . . .	100
3.8.1 偏序关系 . . . . .	100
<b>第四章 磨刀不误砍柴工 [P]</b>	<b>101</b>
4.1 写代码/调试的基础设施 . . . . .	101

# 第一章 程序设计语言基础回顾 [P]

心智的活动, 除了尽力产生各种简单的认识之外, 主要表现在如下三个方面:

- (1) 将若干简单认识组合为一个复杂认识, 由此产生出各种复杂的认识.
- (2) 将两个认识放在一起对照, 不管它们如何简单或者复杂, 在这样做时并不将它们合而为一. 由此得到有关它们的相互关系的认识.
- (3) 将有关认识与那些在实际中和它们同在的所有其他认识隔离开, 这就是抽象, 所有具有普遍性的认识都是这样得到的.

—John Locke 有关人类理解的随笔, 1960

## 1.1 问题的提出: 通过程序, 可以求解的问题

电脑之所以叫“电脑”, 就是因为它能替代部分人类的思维活动. 回忆每个班上都有一个笔记和草稿纸都工工整整的 Ta, 比如布置了一个很繁琐的任务, Ta 总是认认真真默默画完. 很显然, 工整的笔记可以启发思维, 但是当问题范围更加大的时候非常困难继续进行.

学过编程的我们如果有良好的计算思维的时候, 就可能有这样的感慨:

烦死了! 劳资不干了! 玩更有趣的东西去了! —一名具有良好计算思维的同学

这就是计算思维: 写个程序 (如 model checker) 来代替我们一部分的机械的思维活动. 任何机械的思维活动都可以用计算机替代, AI 还可以替代启发式/经验式的决策.

## 1.2 程序设计的语法与语义

我们在学习英语的时候很重要的一部分是语法 (grammar): 也就是什么样的语言是可以被接受 (acceptable) 的. 比如下面这个英文句子是没有语法错误的:

`Fuhai Zhu said that this test is only a small test, so don't panic.`

但是这句话不同人有不同的理解方式, 这就是这句话的语义 (schematics).

- 我们可以推断朱富海老师在安抚准备参加小测试学生们的情绪
- 但是南京大学数学系的同学知道这是一个有名的梗: 上学期教高等代数的朱富海老师把线上期中考叫做“小测验”, 并在同学询问考试范围的时候微笑的答道: “从小学学的都考.”

简而言之 (不严谨), 现在我们有一个由一堆字符串和推导规则组成的形式系统 (formal system), 语法决定了这个形式系统能生存什么样的字符串, 而至于这些字符串有什么样的含义则是语义的范畴.

语法类似材料, 语义类似与材料组成的各种建筑物, 我们可以通过语法研究语义层面的推导, 同时也可以从语义层面捕获语法中内涵的结构, 其实语法和语义是相互区别又紧密联系, 即从范畴论的角度看语法和语义是伴随的 (其实不同的人做数学证明可以有不同的风格: 偏语法和偏语义, 不过大部分数学家更喜欢语义风格的证明, 可能因为更直观, 更容易被人脑接受. )

选自<https://www.zhihu.com/question/31347357/answer/892133941>

## 1.3 Python 代码执行可视化: 一个网站

### Tools 工具

在浏览器中输入<https://pythontutor.com/visualize.html>, 你就会得到一个 Python 代码执行可视化 ((visualization) 的机器. 当对于程序执行的结果感到存在疑问的时候, 我们可以用这个网站观察 Python 是如何“解释”你的代码的.

比如, 下面这一小段代码:

```
1 for i in range(10):  
2     print(i**2)
```

点击 Visualize Execution 就可以了, 你可以点击 Next 来继续模拟执行下一步.

在这里, 你可能会看到很多新奇的名词: 什么是 Global Frame, Object? 暂时先不用管. 不过你确实可以看到点击 Next 的时候 Print output 一栏一步一步的模拟了你的代码.

通过观察可以发现, 代码按照行数执行, 一次执行一行, 每一次执行计算机内部结构的状态 (右侧的面板). 下面我们化繁为简, 来看一看一个系统 (数学意义上) 能够完成任何人类完成的操作需要的最小可能的操作是什么.

## 1.4 可以“程序化”执行命令的最小指令集

如果我们说, 写出来一个可以计算“我们想要计算的任何理论上能够计算的东西”并不难, 你会不会认为这件事情是无稽之谈? 毕竟计算问题多种多样, 有一些内容涉及到很复杂的判断. 但是, 我们可以用一个很小的指令的集合来描述“我们可以计算的一切事物”. 我们不妨从日常生活中找一点灵感.

### Example 例子:

(等红绿灯) 观察红绿灯, 如果 (if) 是绿灯, 那就通过这个路口; 否则 (else) 继续等待. (遵纪守法的好公民)

(做作业) 明确今天的作业范围, 从第一题开始写, 写完题目或者 (or) 一题目没有思路之后做下一道题, 直到 (until) 做完所有的问题.

(排序成绩单) 获得班上同学的所有成绩单, 拿一张新的白纸打好表格, 每一次 (for each time) 从成绩单中选取最大的分数, 把那一行抄写到新的白纸上. 之后把原来那张纸上的内容划去. 一直重复下去, 直到原来的成绩单上没有任何可以被划去的内容.

我们需要找一些东西来具象化我们脑子中的“红绿灯的状态 (state)”, “现在在做作业的题目编号”, 这些内容, 因此我们就希望把这些抽象出来. 因此我们有了变量 (variable) 的概念, 也就是值存在的空间.

把上面的三个内容转化成伪代码 (不唯一) 就是:

```
1  ----- GO THROUGH CONJUNCTION -----
2  if traffic light's color is green:
3      go pass by
4  else
5      wait
6
7  ----- DO HOMEWORK -----
8  range = [a..b]
9  working on problem = a
10 while working on problem <= b:
11     finished this problem or can't work out
12     working on problem = working on problem+1
13
14 ----- SORT EXAM SCORE -----
15 list = get the source table
16 result = empty(for now)
17 while list is not empty
18     k= get the max element of list
19     write k to the next line of result
20 show result
```

其实要是能够构造出任何程序的“原材料”(也就是我们的指令集) 并不复杂. 无非就是变量 (variable) 的赋值 (assign), 判断 (judgement), 跳转 (jump), 终止 (terminate). 也就是, 如果你能声称有一套系统可以自动化的解决这四个内容, 那么这个系统就具有机械化地做任何人类做的事情. 换句话说, 你可以用这个工具创造整个世界.

### Dialogue 对话

A: 创造整个世界? 感觉好中二!

B: 有道理. 但是, 计算机的发明极大地解放了人们的计算能力, 我们只要描述更加聪明的东西, 计算机就会帮我们做更笨重的机械化的指令—而且几乎不会出错!

A: 有点意思, 毕竟我算个两位数乘两位数有时候都能出错...

B: 是的, 不过这个可以交给计算机. 我们就可以专注于研究更加“高等”和“深刻”的内容了.

其实用“机械化”的方法代替人力这样的想法是在计算机诞生之前就是人们孜孜以求的问题. Alan Turing 在 1936 年就提出了这样的设想. 他就是由只一条 (无限长) 的纸带和一根笔 (可以改纸带的内容, 并且查看纸带的内容并据此做判断), 并且有一个程序 (墙上的表格), 指示下一步要往哪转移. 只要能够移动读写头, 写纸带的某一个格子, 读纸带的某一个格子, 跳转, 以及终止. 根据计算领域里的证明, 可以得到这个机器就和我们人类的计算能力等价.

这是最早的图灵机的原型.

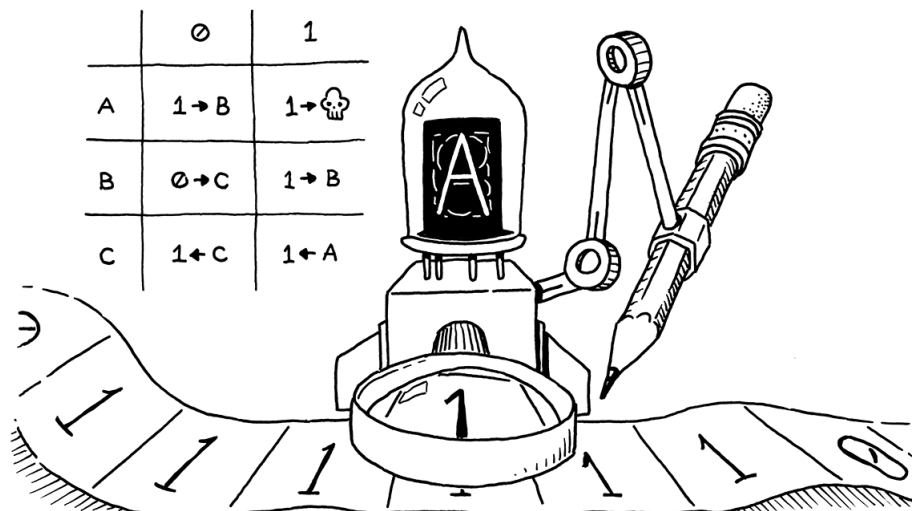


图 1.1: 一个存在于人类脑海中的图灵机实例

**Example 例子:**

运行图片1.1的程序, 左右按照我们的左右进行 (规定 ABC 右移一格是 ABC).

(1) 现在机器的状态是 A(头部的字母), 看到的是 1(放大镜的字母)

(2) 于是把当前的格子改为 1, 纸带向右移动一格, 然后停机.

假设当前纸带的放大镜看到的是 0, 再运行一次:

状态:A 纸带状态: 0 1 1 1 0 1 1 0 0

(1) 现在机器的状态是 A(头部的字母), 看到的是 0(放大镜的字母), 执行第一行第一列的指令 1(改为 1) → (向右移动一格)B(状态改为 B) .

状态:B 纸带状态: 0 1 1 1 1 1 1 0 0

(2) 现在机器的状态是 B(头部的字母), 看到的是 1(放大镜的字母), 执行第二行第二列的指令 1(改为 1) → (向右移动一格)B(状态改为 B) .

状态:B 纸带状态: 0 1 1 1 1 1 1 0 0

(3) 现在机器的状态是 B(头部的字母), 看到的是 1(放大镜的字母), 执行第二行第二列的指令 1(改为 1) → (向右移动一格)B(状态改为 B) .

状态:B 纸带状态: 0 1 1 1 1 1 1 0 0

(4) 现在机器的状态是 B(头部的字母), 看到的是 0(放大镜的字母), 执行第二行第一列的指令 0(改为 0) → (向右移动一格)C(状态改为 C) .

状态:C 纸带状态: 0 1 1 1 1 1 1 0 0

(5) 现在机器的状态是 C(头部的字母), 看到的是 0(放大镜的字母), 执行第三行第一列的指令 1(改为 1) ← (向左移动一格)C(状态改为 C) .

状态:C 纸带状态: 0 1 1 1 1 1 1 0 1

(6) 现在机器的状态是 C(头部的字母), 看到的是 0(放大镜的字母), 执行第三行第一列的指令 1(改为 1) ← (向左移动一格)C(状态改为 C) .

状态:C 纸带状态: 0 1 1 1 1 1 1 1 1



(7) 现在机器的状态是 C(头部的字母), 看到的是 1(放大镜的字母), 执行第三行第二列的指令 1(改为 1)  $\leftarrow$  (向左移动一格) A(状态改为 A) .

状态: A 纸带状态: 0 1 1 1 1 1 1 1 1

(8) 现在机器的状态是 A(头部的字母), 看到的是 1(放大镜的字母), 执行第一行第二列的指令 1(改为 1)  $\rightarrow$  (向右边移动一格)  $\dagger$  (停机)

状态: A 纸带状态: 0 1 1 1 1 1 1 1 1

下面我们来看一看为什么说可以用 Python 语言的计算能力和他们是等价的. 在这之前, 我们先来了解一下如何获取帮助和得到通俗易懂的教程.

### Dialogue 对话

A: 我最近开始学 Python 了.

B: 好啊, 你都学了什么?

A: 我学了 Python 可以读作 / pī THän/, 也可以读作 / pīTH(ə)n/, 是蟒蛇的意思...

B: 嗯, 还有呢?

A: uhmm... 还有变量的定义是变量是存放数据值的容器. 与其他编程语言不同, Python 没有声明变量的命令. 首次为其赋值时, 才会创建变量.

B: 不要背诵定义. 精确的定义毫无意义.

A: 那该怎么办?

B: 从例子中出发, 就把它当做英文说明书, 另外参考官方教程, 并且跟着官方教程做, 就会有大概的认识. 慢慢的, 你就能够得到你自己的定义了.

所以, 请认真阅读并实践 (无论是在脑子还是在交互器 (interactive shell) 里面) 官方帮助文档 (可以在<https://docs.python.org/zh-cn/3/tutorial/introduction.html>找到)<sup>1</sup>的内容. 可以让你了解更多易于理解的东西. 如果文章中有描述 C 和 Pascal 的句子, 忽略它就可以. 毕竟文档是给各个不同层次和水平的人看的, 有一些看不懂以后再说.

<sup>1</sup>最好看英文版, 更加

### Idea 启示

摒弃“我一定要一次把所有的东西都弄懂”的理念, 因为这些知识十分的巨大. 所以先了解一部分作为正确的立足点, 然后慢慢扩大就行了. 这需要很长时间的积累, 千万不要急. (着急也没用, 只会加大精神内耗.)

## 1.4.1 Python 中的整个世界

下面的内容其实不用单独记忆, 只要明确有哪些语句, 这些语句造成的效果是什么就行了. 如果看到有任何的问题, 如果是关于英语单词的, 可以搜索字典; 如果是对于程序报错有疑问, 可以搜索文档里面关于报错的信息; 如果有其他创造性的问题, 则可以询问周围的同学和老师.

下面会有两个术语 (term), 分别是表达式 (expression) 和过程 (procedure), 表达式可以暂且认为是形如  $x+12$ ,  $[2]*3$  这样的可以进行计算的内容, 过程就是一系列执行的过程, 不一定要能得到值. 我们用一个例子感受一下.

```

def InsertionSort(A):
    for j in range(1, len(A)):          #Proc
        key = A[j]      #A[j],key are expr #Proc #|
        i = j - 1      #j-1,i are an expr #v   #|
        while (i >=0) and (A[i] > key):      #|
            #    <-expr->    <-----expr----->      #|
            #    <-----expr----->      #|
            A[i+1] = A[i] #A[i] is expr    #Proc #|
            i = i - 1      #i-1 is expr    #v   #|
        A[i+1] = key      #v
    <-expr-> <-expr->

```

其实上面的 Proc 表示过程, 然后右边的是一个字符画, 表示 ↓, <-expr-> 其实表示的意思是 example 这一段是表达式.

expr

### Idea 启示

早期的电脑只有  $80 \times 24$  个只可以显示 26 个英文字母的黑白屏幕. 当时很多结构的图示就是通过像上面一样的字符画表示出来的.

重要的是, 把示例代码放到上面提到的可视化网站里面看一看就会很清楚, 很多概念都是不用记忆的.

## 变量的定义与赋值

**定义 1.4.1.** (变量的赋值) 变量名 = 变量的值

语义: 看看有没有叫变量名的盒子, 如果有, 就把右边的内容计算出来重新把新东西替换进原来的盒子里; 否则, 就创建一个新盒子, 把右边算出来的东西丢进去.

下面我们给出注解:

- 在不加修饰的情况下, 变量的名称只在当前的缩进块内有效
- 命名是用来指代对象的. 这就是为什么有时候可视化工具里面 Frames 后面有一个箭头指着 Objects.
- 如果用一个变量 = 另一个变量, 大多数情况是现计算出来右手边表达式的值之后给左手的变量. 有时候一些文章里面写作  $lhs \leftarrow rhs$ .

b=114514

a=b+1 # 执行完本句之后 a=114515

b = b+1 # 执行完本句之后 b=114515, a=114515 不变

a = b+1 # 执行完本句之后 a=114515, b=114516

- 在 Python 中, 变量的值的类型可以是任意的. 因为 Python 声明变量的时候没有说明类型.

```
a='Fuhai Zhu teached Advanced Algebra' # a 现在是字符串
a=1 # a 现在是整数
a=None # None 是一个关键字, 表示什么都没有.
```

- 如果没有定义 (也就是没有找到叫这个名字的盒子) 就使用了一个变量 (就是想要从这个名字的盒子里面拿东西), 通常就会有如下的报错:

```
print(a+1)
~
Traceback (most recent call last):  File "<stdin>", line 1, in <module>
NameError: name 'n' is not defined
(命名错误: 名称'n' 没有定义)
```

### Bonus 思考题

什么是 Traceback? stdin 又是什么? 后面会学习.

可以把什么东西放到盒子里面呢? 数字、字符串、列表. 当然这份回答相当不全面. 这时候可以参看官方文档<https://docs.python.org/zh-cn/3/tutorial/introduction.html>来继续.

## 控制语句: 判断与循环

**定义 1.4.2.** (条件判断) 可以使用 if 语句进行条件判断, 一般的, 有如下的形式:

```
if 表达式 1:
    过程 1
elif 表达式 2: # 可以有零个或者多个 elif, 但是 else 后面不能有 elif
    过程 2
else:
    过程 r
```

语义: 它通过逐个计算表达式, 直到发现一个表达式为真, 并且执行使表达式为真的这个过程 (完成后不执行或计算 if 语句的其他部分的判断表达式). 如果所有表达式都为 false, 如果存在 else 下方语句块的过程.

下面我们同样给出注记和例子.

- 什么是真? 什么是假? 这个问题就比较深刻了. 不过先可以认为非 0 数字和 True 是真, 0 和 False 和 None 是假.

```
if "AK":
    print("AK") # 会输出 AK, 这是怎么判断的?(后续会回答)
```

- 可以用逻辑运算符 and(且) or(或) not(非) 进行逻辑表达, 比如

```
zgw = 0
kertz = 1
```

```

ak = 1
cmo = 1
if kertz and ak and cmo :
    print(`Zixuan Yuan got full mark in CMO`)
elif zgw and ak and cmo:
    print(`zgw got full mark in CMO`)
else:
    print(`zgw is such a noob`)
# 会输出 Kertz got full mark in CMO, 由于已经找到了一个表达式的值为真的
# 表达式, 所以执行完 print(`Zixuan Yuan got full mark in CMO`) 之后
# 就
# 会跳转到这个语句块的尾部了. 不会执行 print(`zgw is such a noob`).
# (为自己菜爆的数学基础做了一个掩盖 (大雾))

```

- 如果结构不完整, 或者在 else 之后还有 elif, 那么就触发形如这样的错误:

例子 1.py-----

```

if True:
    print("Err")

```

----

File "main.py", line 3

```

    print("Err")

```

```

^ IndentationError: expected an indented block

```

(缩进 (indent) 错误: 我预期有一个带着缩进的语句块, 但是没有)

例子 2.py-----

```

if False:
    print(1)

```

```

else:

```

```

    print(2)

```

```

elif True:

```

```

    print(3)

```

---

File "main.py", line 5

```

    elif True:

```

```

^ SyntaxError: invalid syntax

```

(语法错误: 无效的语法)

**定义 1.4.3.** (while 循环) 可以使用 if 语句进行条件判断, 一般的, 有如下的形式:

```

while 表达式:

```

```

    过程 1

```

```

else: # 可以有, 也可以没有

```

```

    过程 2

```

语义: 这样反复测试表达式, 如果为真, 则执行**过程 1**; 如果表达式为假 (这可能是第一次测试), 则执行 else 子句的**过程 2**(如果存在的话), 然后循环终止. 在**过程 1**中执行的 **break** 语句会终止循环, 且不执行 else 子句的**过程 2**. 在**过程 1**中执行的 continue 语句跳过**过程 1**的 continue 语句之后的其余部分, 然后立刻回到测试表达式语句.

有了循环 (loop), 我们就可以解读这个东西:

```
def InsertionSort(A):
    j=1
    while(j<len(A)):
        key = A[j]
        i = j - 1
        while (i >=0) and (A[i] > key):
            A[i+1] = A[i]
            i = i - 1
        A[i+1] = key
        j=j+1
    return A
InsertionSort([1,1,4,5,1,4])
```

这个程序做的事情就和排序成绩类似. 输入一个列表 *A*, 它就可以把 *A* 进行排序.

### 程序的终止

**定义 1.4.4.** Python 程序的终止可能包含有如下的情况:

- (1) 执行到了最后一条语句, 没有下一条语句可以执行;
- (2) 程序有没有被处理的异常 (通常就有一个红色的报错了);
- (3) 通过语句 `exit(0)` 退出.

因此, 我们就得到了最小的可以 (理论上) 执行任何与人类计算能力等价的模型. 这些内容看上去十分的平凡, 但是通过一些过程的复合, 我们就能看到更多的魔力.

#### Dialogue 对话

A: 什么是复合? 我学过函数的复合, 但是感觉这里的复合还不太一样.

B: “复合”的方法可以分别列举, 也可以嵌套. 在上面的内容就有一些例子. 仔细体会这种过程.

A: 我不理解把两个循环变量嵌套该怎么体现.

B: 对于循环变量的嵌套可能一开始不是很好理解. 就想着有一根针指着当前要取的变量, 执行完当前过程, 想要执行下一步之后对应的针往后移动一位, 并且把所有的变量替换成针所指向的内容就行了.

### 1.4.2 函数: 整合相似过程

我们可以把相似的过程写在一起, 为了简洁和可维护.

下面, 可以阅读 <https://docs.python.org/zh-cn/3/tutorial/controlflow.html#defining-functions> 的 4.7, 4.8.1-4.8.6 节的内容, 把所有代码是怎么执行的放在 pythontutor 里面模拟着看一遍. 文字可以不用看, 但是代码一定要执行一遍.

### 递归 (recursion) 过程和栈帧 (stack frame)

观察下面的代码, 可能难以想象是怎么执行的:

```
def fib(n):
    if(n==1):
        return 1
    if(n==2):
        return 1
    else:
        return fib(n-1) + \
            fib(n-2)
fib(5)
```

像这样用自己调用自己的函数调用通常叫做递归. 一个关于递归的有趣定义是:

**定义 1.4.5.** 递归的定义: 如果你没有理解什么是递归, 那么参见递归.

事实上, 我们可以把它放在 pythontutor 里面执行一下, 发现如下的规则:

- 原来的程序就像是一张纸, 上面标注着当前执行到的行数;
- 每次函数调用的时候, 就会在一张新的纸片上抄下来调用的内容, 并且代换传进来的参数;
- 把这个内容放在原来纸片上面, 然后从第一行开始执行;
- 执行完的纸片扔掉.

看上去就像是:

- 你在晚自习上看课外书 (执行原来的函数)
- 老师来了, 让你写作业 (函数调用)
- 你把作业叠放在课外书上, 开始做作业 (执行函数)
- 做完作业之后你把作业扔了继续看课外书 (回到原来的函数)

像羽毛球球桶那样, 只能从一个方向插入, 弹出的内容的东西叫做“**栈 (stack)**”, 由于这些内容通常都是一些数据, 由此我们用术语**数据结构** (data structure) 来描述. 能被取出来的那个元素是**栈顶 (top of the stack)**, 在这个可视化工具里面用蓝色标示出来了.

Traceback 就是出错之后, Python 顺着栈一层一层找的结果. Trace 是跟踪, back 是返回, 意思可能就是说堆栈的**回溯 (traceback)**.

## 1.5 一些小例子

下面我们来看一些基础的例子, 来体会上一节中的一些思考:

### 片段 1. 热身练习

```
1 def getpercent(chinese, math, english):
2     return (chinese+math+english)/(150+150+150)
3
4 print(getpercent(100, 120, 135))
```

#### Bonus 思考题

如何判断一个程序的行为 (behavior)? 为了刻画程序的行为, 我们能不能像第一节里面提到的那样, 用一个“模型 (model)”来描述它?

宏观来说, 程序就是状态机. 程序的执行就是状态的迁移 (transform). 到底有哪些状态呢?

### 片段 2. 计算钱数之和

```
1 money = [10, 14, 13, 10]
2 int total = 0
3 for i in money:
4     total = total + i
5
6 print(money)
```

这里的 `for i in ...` 只是 `for u in range(len(money)), i=money[u]` 的简称罢了. 对我们的实际程序没有太多的障碍. 还是逃脱不了循环的大框架. 我们在前面说的最小指令集还是起作用的.

### 片段 3. 求一个数是不是素数

```
1 def isprime(x):
2     flag = 1
3     d=2
4     while d<x:
5         if x%d == 0:
6             flag = 0
7         d = d+1
8     if flag:
9         return 1
10    else:
11        return 0
```

在这个程序片段中, `flag` 代表了什么? 是不是有些像现实世界中的信息传递方式? 因为我们无法跨越循环次序改变程序的行为, 我们只好使用变量 `flag` 来记录, 并且让程序的控制流通过 `flag` 来进行判断与执行.

**Bonus 思考题**

素数 (prime) 有什么数学性质? 我们是用什么性质来判定性质的? 在我们下达的指令里面, 形式上和数学表达式相似吗?

事实上, 数学上的定义是  $\forall x, \neg \exists p, s.t. p|x$ . 我们的程序看上去并不是像数学那样简洁. 其实, 程序设计家族也有其他成员可以写起来比较优美.

**Passage 文章****程序设计家族的其他成员: 不只有下达命令**

南京大学 李隼 (见图1.2) 等 节选自《程序分析》教科书

在 IP 中, 指令一个一个给出, 用条件、循环等来控制逻辑 (指令执行的顺序), 同时这些逻辑通过程序变量不断修改程序状态, 最终计算出结果。我觉得, 尽管 IP 现在都是高级语言了, 但是本质上并没有脱离那种“类似汇编的, 通过读取、写入等指令操作内存数据”的编程方式 (我后面会提及, 这是源于图灵机以及后续冯诺依曼体系结构一脉的历史选择)。国内高等教育中接触的绝大多数编程语言都是 IP 的, 比如 Java、C、C++ 等。

在 FP 中, 逻辑 (用函数来表达) 可以像数据一样抽象起来, 复杂的逻辑 (高阶函数) 可以通过操纵 (传递、调用、返回) 简单的逻辑 (低阶函数) 和数据来表达, 没有了时序与状态, 隐藏了计算的很多细节。不同的逻辑因为没有被时序和状态耦合在一起, 程序本身模块化更强, 也更利于不同逻辑被并行的处理, 同时避免因并行或并发处理可能带来的程序故障隐患, 这也说明了为什么 FP 语言如 Haskell 在金融等领域 (高并发且需要避免程序并发错误) 受到瞩目。

```

1 (defun quadratic-roots-2 (A B C)
2   (cond ((= A 0) (string "Not a quadratic equation."))
3         (t
4          (let ((D (- (* B B) (* 4 A C))))
5            (cond ((= D 0) (concatenate 'string "x = " (write-to-string (/ (+ (- B) (sqrt D)) (* 2 A))))
6                  (t
7                   (values (concatenate 'string "x1 = " (write-to-string (/ (+ (- B) (sqrt D)) (* 2 A)
8                                     (concatenate 'string "x2 = " (write-to-string (/ (- (- B) (sqrt D)) (* 2 A)
))))))))))

```

LP 抽象的能力就更强了 (用逻辑来表达), 计算细节干脆不见了。把你想表达的逻辑直观表达出来就好了: 如“第三代火影的徒弟”且不是“女性”且“其徒弟也是火影” $\Rightarrow$ “自来也”。嗯, 学会“与或非”, 编程都不怕。如今, 在数据驱动计算日益增加的背景下, LP 中的声明式语言 (Declarative programming language, 如 Datalog) 作为代表开始崭露头角, 在诸多专家领域开拓应用市场。我们这本小书也准备用一章节来教大家如何使用 Datalog 语言编写程序分析器。

```

1 ancestor(A, B) :-
2   parent(A, C),
3   ancestor(C, B).

```



4

#### 片段 4. Perfect 数

```

1 def is_perfect(n):
2     sum=0
3     for i in range(1,n):
4         if n%i==0:
5             sum=sum+i
6     return sum==n

```

其中 `range` 现在可以认为是生成  $[1, n)$  的列表. 并且每一次循环就取列表的下一个元素. 比如 `for i in range(1,5)` 每次循环 `i` 的值会是 1 2 3 4.

在这个实例中, 逻辑关系体现的如何?

#### 片段 5. 求 3 和 5 的因数个数

```

1 def multiples_of_3_and_5(n):
2     sum=0
3     for i in range(1, n):
4         if i%3==0 or i%5==0:
5             sum=sum+i
6     return sum

```

可以注意我们的逻辑在 Python 里面是如何表达的? 还有哪些逻辑表达关系? 事实上, 这也是后续离散数学部分要学的命题逻辑—我们需要对于以前的逻辑有一个比较确切的定义.

#### Bonus 思考题

命题“若  $p$  则  $q$ ”的否定是什么?

普通的高中毕业生基本是无法回答这个问题的. 因为课本的知识完全没有提及类似的问题. 这就导致我们的高中数学看上去更像是民科学习的数学. 同时轻松地毁掉了高中与大学的衔接过程.

#### 片段 6. 一定范围内勾股数的个数

```

1 def integer_right_triangles(p):
2     # a^2+b^2=c^2    a+b+c=p    c is the longest
3     count=0
4     for a in range(1,p):
5         for b in range(a,p-a):
6             c=p-a-b
7             if a+b+c==p and a**2+b**2==c**2:
8                 count+=1
9                 print(a,b,c)
10    return count

```

这个例子对于数学的关系好像更加清晰了. 比如直角三角形数对有兴致  $a^2 + b^2 = c^2$ . 于是剩下的就比较像自然的“数数”一样了.

## 片段 7: 递归的力量

```
1 def fib(n):
2     if(n==1):
3         return 1
4     if(n==2):
5         return 1
6     else:
7         return fib(n-1) + \
8             fib(n-2)
9
10 fib(5)
```

这个内容也在前方的例子中有提及, 这样我们自然的就得出了“栈”的定义. 这也是我们这里接触的第一个数据结构—栈.

### Idea 启示

计算机高级程序可以由较为低级的程序解释. 这种程序一般而言更加机械, 但是更不利于我们的问题的解答. 这就需要一层一层的抽象叠加起来.

如果自己曾经动手写过一点代码的话, 我们就会发现把代码调试对是一件很不容易的事情. 下面我们给出一些小提示:

(1) **阅读程序的报错信息.** 我们发现很多同学会对于红色的 Syntax Error 如临大敌, 见到就跑. 下面, 我来举一个例子来说明为什么这是对的:

### Dialogue 对话

A: 我将会按照一定的规则给出三个数字, 我想让你找出这个规则是什么. 但是你能够获取信息的途径是: 你自己再列举三个数字. 我会告诉你这列数字是不是符合我的规则. 然后你们就可以说出来你们认为的规则是什么.

B: 好的, 明白了.

A: 我说出来的三个数字是 2, 4, 8.

B: 我猜测 16,32,64.

A: 符合我的规则.

B: 那我想规则是  $2^n$ .

A: 其实并不是这样.

为什么会出现这样的情况? 这就是因为没有知道什么东西是“错的”. 请观看真理元素的《你能解决这一问题吗》视频, 思考一下为什么错误也是很重要的. 这位 UP 在 B 站上的官方中文翻译视频链接是<https://www.bilibili.com/video/BV1Hx41157jV>.

(2) **程序出现难以预料的行为时, 在脑子里面模拟执行一遍程序.** 告诉自己“程序就是状态机”. 看一看逻辑设计的是不是出错了.

(3) **善于使用调试器.** 观察程序在哪一个地方与你预期的执行不相符. 这时候, 往往就意味着可以提问了.

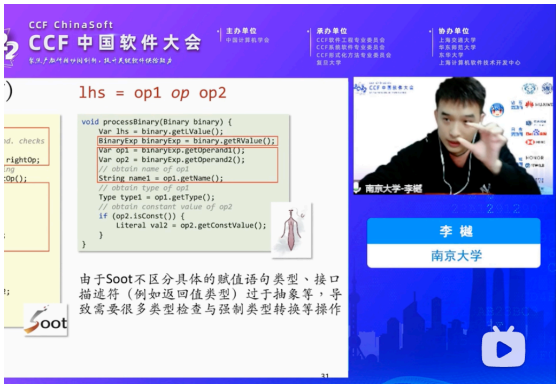


图 1.2: 南京大学李樾老师设计的静态程序分析框架“太阿”

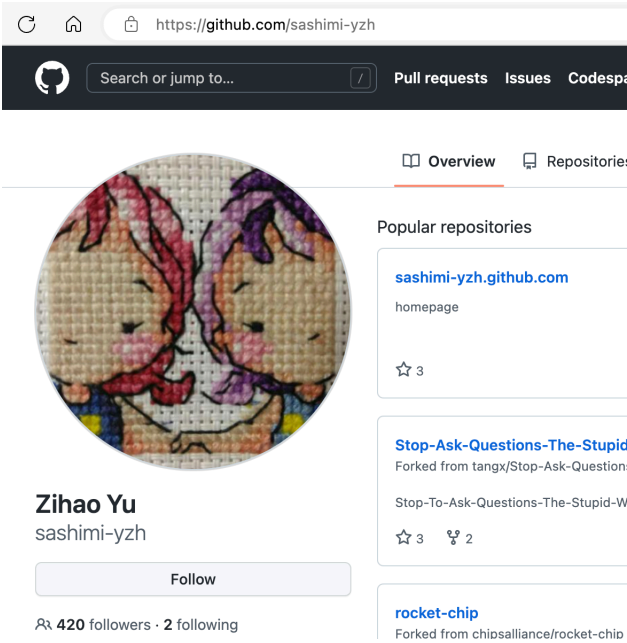


图 1.3: 余子豪的 Github 个人首页

## Passage 文章

## 与其说是学会提问, 倒不如说是学会不提问

南京大学 蒋炎岩

中国科学技术大学 余子豪 (图1.3)

节选自《PA 实验手册》

很多同学不多不少都会抱有这样的观点:

我向大佬请教, 大佬告诉我答案, 我就学习了.

你是否想过, 将来你进入公司, 你的领导让你尝试一个技术方案; 或者是将来你进入学校的课题组, 你的导师让你探索一个新课题. 你可能会觉得: 到时候身边肯定有厉害的同事, 或者有师兄师姐来带我. 但实际情况是, 同事也要完成他的 KPI, 师兄师姐也要做他们自己的课题, 没有人愿意被你一天到晚追着询问, 总有一天没有大佬告诉你答案, 你将要如何完成任务?

如果你觉得自己搞不定, 你很可能缺少独立解决问题的能力.

但幸运的是, 这种能力是可以训练出来的. 你身边的大佬之所以成为了大佬, 是因为他们比你更早地锻炼出独立解决问题的能力: 当你还在向他们请教一个很傻的问题的时候, 他们早就解决过无数个奇葩问题了. 事实上, 你的能力是跟你独立解决问题的投入成正比的, 大佬告诉你答案, 展示的是大佬的能力, 并不是你的能力. 所以, 要锻炼出独立解决问题的能力, 更重要的是端正自己的心态: 你来参加学习, 你就应该尽自己最大努力独立解决遇到的所有问题.

很多问题都可以通过查资料解答. 其中, 有一个很好的途径就是先看一看官方文档. 通常官方文档都有非常详细的解释.

## 练习题 1.1

- 请用 Python 写一段代码, 它可以模拟图灵机的行为 (内存大小不是无限的, 输入输出格式自定).

## 1.6 C 语言引导

一个很好玩的事情是, C 语言程序设计的基本语法比 Python 更加的基础. 而且 C 基本代码的语义的确定的掌握要花费的精力是远远小于 Python 的. 它更简单、包袱更少, 也没有很庞大的工具链. 虽然说这相当于“把你的手脚捆起来编程”, 但我们通常不需要很复杂的数据结构和代码逻辑, 因此现代语言特性的好处在大部分时候并不显著. 而且用 C 语言还有一些额外的好处:

和其他编程语言相比, C 语言特性更容易真正掌握和深入理解. 如果你没有学好, 用几周的时间补上应该也没问题. C 是一种“高级的汇编语言”, 你不难在大脑里把 C 出

代码翻译成指令序列; 但对于现代语言来说, 这要困难得多. 透过对 C 语言的深入理解, 可以更好地理解现代编程语言的设计动机和实现方法.

—蒋炎岩, 操作系统课程自救指南

所以, 不用惊慌. 我们会来简单介绍一下. 我们会用几个例子来说明一下 C 语言里面, 一些规则. 但是不用试图记忆, 最好能够跟着敲一遍. 一个比较完好的编译器会在你犯错误的时候 (通常情况下犯错是很正常的) 给出你提示. 这时候查一查字典就可以解决大多数的情形.

### 1.6.1 作为不太好用的计算器

作为计算机, 一个很重要的事情是: 如何使用计算机进行比较复杂的算术运算?

比如下面的程序可以告诉我们  $1+1$  的值, 并且输出到屏幕.

```
1 #include <stdio.h>
2 int main(){
3     printf("%d\n", 1+1);
4     return 0;
5 }
```

这里的 “%d” 是输出的占位符, 会输出整数. d 是 digit 的简称. 因为整数是由一位一位的数码构成的.

我们来看一看有没有什么有趣的实验:

#### Example 例子:

修改程序, 输出 (1)  $3-4$ ; (2)  $5\times 6$ ; (3)  $8\div 4$ ; (4)  $8\div 5$  的值.

和 Python 不同, C 会默认地把 1.6 转化成整数. 这是为什么?

#### Passage 文章

(Generated from ChatGPT)

In the early days of computing, hardware resources were limited, and memory and processing power were at a premium. The ability to perform automatic conversions between different data types was therefore an important feature of programming languages, as it allowed programmers to work with limited resources more efficiently.

Additionally, the automatic conversion of float to int likely reflects the fact that early computer hardware often did not support floating-point arithmetic natively. Floating-point arithmetic was typically implemented in software, which was slower and less efficient than the native integer arithmetic. Therefore, it was often necessary to convert floating-point values to integers in order to perform arithmetic operations more efficiently.

As hardware capabilities have evolved over time, the automatic conversion of float to int in C has remained an important feature, as it provides a convenient way to work with different data types and to simplify code. However, it's still important for programmers to be aware of the potential loss of precision when converting between data types, and to use these conversions intentionally and with care.

对于实数, 我们可以使用%f 输出. f 是 float 的简称, 用来表示这是一个浮点数 (也就是实数, 因为小数点会“浮动”).

### Bonus 思考题

C 是一个强类型的语言—也就是每一个变量都有一个一旦声明不能更改的类型.

如果我们输出  $8/5.0$ , 用%f 和%d 输出有什么区别? 在输出的过程中你认为的类型变换的过程如何?

如果我们在程序的开头加上 `#include <math.h>`, 就可以得到更加多样的数学运算. 如: 要计算  $1 + \frac{2\sqrt{2}}{5-0.1}$ , 我们就可以在 `main()` 里面替换上

```
1 printf("%.2f\n", 1+2*sqrt(3)/(5-0.1));
```

### Idea 启示

理解代码的核心方法 (上): 像阅读数学公式那样, 通过代换法理解一行代码.

举个例子, 我们在理解上面的内容的时候, 可以拆分成若干个部分, 想一想每一部分做了哪些输出. 最后整合起来就好了.

## 1.6.2 变量的引入

我们上面已经可以计算东西了, 可是还是不够劲啊! 如果我们能够从键盘读取输入就更加不错了! 那我们就需要用到 `scanf` 了.

输入的东西放在哪里呢? 可以放在小盒子里面. 和 Python 的“小盒子”不是很相同, 小盒子必须指定变量, 并且指定了之后不能修改盒子的类型. 这也是历史上的因素导致的.

我们来试一试: 比如最简单的  $a + b$  问题: 输入两个数, 用程序把它求和, 结果输出出来.

```
1 #include <stdio.h>
2 int main(){
3     int a, b;
4     scanf("%d%d", &a, &b);
5     printf("%d\n", a+b);
6     return 0;
7 }
```

这时候, 代换的方法仍然起作用. 我们就可以通过交互的情况下得到输入与输出了!

回忆一下小学的时候, 我们总是被要求计算 (有点无聊的) 圆柱体的表面积. 如果有一个小程序可以帮助当时的我们, 输入半径和高, 自动为我们输出答案, 那样自己就很好了. 于是我们有:

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <math.h>
3 int main(){
4     const double pi = 3.14;
5     double r, h, s1, s2, s;
6     scanf("%lf%lf", &r, &h);
7     s1 = pi*r*r;
8     s2 = 2*pi*r*h;
9     s = s1*2.0 + s2;
10    printf("Area = %.3f\n", s);
```

```

11  return 0;
12 }

```

### 1.6.3 顺序执行的程序

上面我们编写了很多行的代码, 一个问题是我们的程序是怎样被执行的? 事实上, 这点和 Python 区别不大—在没有控制执行的情形下都是顺序—从上到下一行一行执行的. 我们可以使用调试器来证明这一点.

#### Tools 工具

根据观察, 有很大一部分学生甚至不知道调试器是什么! 这件事情是很糟糕的—因为这样下来很多时候就会让他们看程序 “一头雾水”, 然后这就是放弃的前兆.

所以个人认为作为一个很重要的工具—调试器在刚开始的时候就应该介绍一下. 这个工具可以帮助我们看到计算机里面到底发生了什么, 从而理解我们的输入到底在干什么. 我们可以为我们的程序打上断点 (breakpoint), 然后启动调试—程序就会自动停下了, 同时把现在的状态告诉我们.

#### 例子: 交换变量

我一直以来是不太赞成初学的时候使用 Python 的语法特性 `a, b = b, a` 来做交换变量的. 其原因是可能会让一部分关键的直觉和感受丢失. 比如, 如果我们在 C 中希望交换两个变量, 怎么办?

如果我们还想像 Python 那样, 看一看会得到什么:

```

1  $ vim tmp.c
2
3  #include <bits/stdc++.h>
4  int main(){
5      int a = 1, b=2;
6      a, b = b, a;
7      printf("a=%d, b=%d", a, b);
8      return 0;
9  }
10
11  :!gcc %.c
12
13  warning: left operand of comma operator has no effect [-Wunused-value]
14  ue]
15      a, b = b, a;
16      ^
17  tmp.cpp:4:15: warning: expression result unused [-Wunused-value]
18      a, b = b, a;
19      ^
20  2 warnings generated.

```

哦, 出警报了, 我们看一看运行之后会有什么效果:

```

1  :!./a.out
2  a=1, b=2

```

诶, 完全没有效果了! 我们回顾上面的警告说这句话没有任何的作用. 这样就解释了这件事. 所以我们要用更加底层的方法来完成.

我们现在有哪些工具呢? (1) 创建一个带有类型的盒子; (2) 为这个盒子装/修改东西; (3) 输入, 输出; (4) 新增一行 (句) 代码.

#### 1.6.4 循环结构

我们刚刚对于所有的东西这样描述不够劲啊, 毕竟我们还是只是一个一个地完成步骤的说明. 有没有方法完成自动的重复呢? 我们可以用 `while` 循环.

那么如果我们希望在某一个地方就不用继续循环下去了, 可以用 `break`; 如果在某一个地方跳过下面的语句继续循环, 那么可以用 `continue`.

与 `while` 相仿, 我们还可以用 `for` 循环. `for` 的语法比较像  $\sum$ . 同样也有 `break` 和 `continue`.

#### 1.6.5 方便地创建多个变量: 数组

如果我们想要创建 100 个变量, 我们可以不用声明 `a0, a1, a2, ...`. 我们有可以自动给一个“空间”, 就像 `int a[100];`, 这样就给我们了 100 个变量的 `int` 类型的空间. 如果我们想访问其中的一个 (比如第 14 个), 我们就可以用 `a[14]` 来访问. 注意: 数组从 0 开始编号, 访问 `a[100]` 虽然不会有报错信息, 但是这是未定义行为.

我们可以用重复的方法来走遍一个数组里面的所有的部分. 可以和上面的 `for` 很方便的对应起来.

当然我们还可以创建多个方括号, 简称为“维度”. 比如 `b[100][100]` 就可以让我们在一个  $100 \times 100$  的平面上面读取数据. 比如想访问第二行 (从 0 计数) 第三列 (从 0 计数) 的就可以写成 `b[2][3]` 当然, 这个维度可以是任意多个的—只要不超出内存限制就没问题.

这证明了一个普遍规则: 程序帮你写的代码会比你自己手写的更正确、更可靠。如果改进了生成器, 例如能生成更好的代码, 那么每个人都会受益; 相反, 对手写程序的改进并不能改善其他程序。像 Yacc 和 Lex 这样的工具是这一规则的极好例子, Unix 也提供了许多其他工具。编写程序的程序总是值得尝试。就像道格·麦基尔罗伊所言, “任何你必须重复做的事都有待自动化。” — Unix 传奇: 历史与回忆



## 第二章 简单数理逻辑 [M]

“有两种推广. 一种没有什么价值, 另一种则是有价值的. 没什么思想、仅凭唬人的  
专人术语做推广是很容易做到的. 颇为困难的是从若干好的素材中提取出一份精致  
凝练的精品.”  
— George Polya

### 2.1 问题的提出: 为什么要研究简单的数理逻辑

#### Dialogue 对话

A: 问一个这一章比较简单<sup>a</sup>的问题: 如果我有一个命题叫做“若  $p$  则  $q$ ”, 那么这个命题  
的否定是什么?

B: 我研究这个干什么? 闲着找事情吗?

A: 想一想你学习的极限理论. 如果我希望对于“一个数列的极限存在”这个事情做否  
定, 你会怎样否定?

B: 数列极限的定义是如果一个数列的极限是  $A$ , 那么就是说  $\forall n > N, \exists |\epsilon| \geq 0, \text{s.t. } |a_n - A| < \epsilon$ . 要是否定还是真的不是一件容易的事情啊...

A: 这就是我们学习命题逻辑的原因. 以后我们会遇见成百上千的命题等待我们的操  
作, 如何从中找到逻辑就至关重要.

<sup>a</sup>这里的简单并不是不用预习与听课就能自动掌握. 这里的简单指的是相对于数理逻辑这一门科目而言, 这章内容显得十分微不足道且基础.

事实上, 很多同学是在学习数学中体会到逻辑的. 但是, 我们当中的很多人会发现: 数学仅  
仅是为了对付高考这样的考试. 那么希望在这一节以及以后的生活中, 慢慢体会数学带给我们的  
潜移默化的影响.

这一部分我们建议参看教科书《Reading, Writing, and Proving A Closer Look at Mathe-  
matics》的第一章. 我们会在这一章主要概括一下它的主要意思. 由于是为了本科生写的数学课  
本, 所以句子十分的容易懂. 就当做一个小练习吧.

**问题 2.1.1.** 结合自己的数学学习经历, 阅读《Reading, Writing, and Proving A Closer Look at  
Mathematics》的第一章, 然后与下文进行比对. 看一看自己的英语理解能力如何. 不设置时间  
限制, 因为我们需要做的是尽可能的联系自己过去的数学学习经历, 然后去体会这段文本.

我们在生活中经常看到这样的对话:

**Dialogue 对话**

学那么多的数学有什么用？买菜又用不到这样的数学，学这些还有用吗？

再后来，我们发现所有的数学问题都可以通过一种“程序化”的手段来解决。比如，我们在上一学期学习的 Gram-Schmidt 正交化矩阵向量的基、解其次线性方程组、求导数等等这样的操作，都有一系列的明确的步骤。

那么数学仅仅是局限于此吗？我们来看一看那些伟大的数学家的思想是什么样的：

伟大的数学家、教育学家 George Polya 专门出了一本书叫做“如何解题”。于是，学习数学一个很重要的目的可能就是教会我们：

- (1) 如何解决一个问题；
- (2) 为什么这样做是对的；
- (3) 这个方法什么时候是对的。

**Example 例子：**

我们是如何解含有未知数的等式（通常称为方程），其中一个比较重要的方法是消去律。

对于实数构成的方程，消去律大多数都是成立的（只要等式两端不除以 0），但是对于含有未知矩阵的方程，这样的方法很多时候就不灵了。

在我们遇到一个难以解答的数学问题的时候，还是回过头来看看 George Polya 为我们总结的 How to solve it 的一个 list 吧。

**Passage 文章****How to Solve it**

Summarized text

Originated from George Polya's How to solve it

First, you have to understand the problem.

"Understand the problem" is often neglected as being obvious and is not even mentioned in many mathematics classes. Yet students are often stymied in their efforts to solve it, simply because they don't understand it fully, or even in part. In order to remedy this oversight, Pólya taught teachers how to prompt each student with appropriate questions, depending on the situation, such as:

What are you asked to find or show?

Can you restate the problem in your own words?

Can you think of a picture or a diagram that might help you understand the problem?

Is there enough information to enable you to find a solution?

Do you understand all the words used in stating the problem?

Do you need to ask a question to get the answer?

The teacher is to select the question with the appropriate level of difficulty for each student to ascertain if each student understands at their own level, moving up or down the

list to prompt each student, until each one can respond with something constructive.

Second principle: Devise a plan:

Pólya mentions that there are many reasonable ways to solve problems. The skill at choosing an appropriate strategy is best learned by solving many problems. You will find choosing a strategy increasingly easy. A partial list of strategies is included:

Guess and check, Make an orderly list, Eliminate possibilities, Use symmetry, Consider special cases, Use direct reasoning, Solve an equation

Also suggested:

Look for a pattern, Draw a picture, Solve a simpler problem, Use a model, Work backward, Use a formula, Be creative.

Applying these rules to devise a plan takes your own skill and judgement.

Polya lays a big emphasis on the teachers' behavior. A teacher should support students with devising their own plan with a question method that goes from the most general questions to more particular questions, with the goal that the last step to having a plan is made by the student. He maintains that just showing students a plan, no matter how good it is, does not help them.

Third principle: Carry out the plan

This step is usually easier than devising the plan.[23] In general, all you need is care and patience, given that you have the necessary skills. Persist with the plan that you have chosen. If it continues not to work, discard it and choose another. Don't be misled; this is how mathematics is done, even by professionals.

Fourth principle: Review/extend

Pólya mentions that much can be gained by taking the time to reflect and look back at what you have done, what worked and what did not, and with thinking about other problems where this could be useful. Doing this will enable you to predict what strategy to use to solve future problems, if these relate to the original problem.

在解答完这些问题之后, 我们往往会感到满足. 很多时候这也是我们去学习数学的一个很重要的原因.

#### Dialogue 对话

A: 可我一点感觉开心也没有啊!

B: 可能是把做题看得太重了. 高考的“把题目作对”的观念在大学里面就应该淡化掉了.

A: 此话怎讲?

B: 来看一看朱富海老师的文章就知道了.

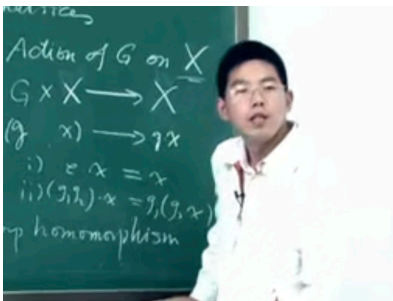


图 2.1: 南京大学朱富海老师在讲《有限群表示论》

### Passage 文章

## 高中数学与大学数学

南京大学 朱富海 (图2.1) 节选自数林广记微信公众号

美国大学的数学研究者们对于学生包括中学生的培养的确非常有热情, 比如一些名校的博士生在暑假期间常常有打工的机会, 主要任务是指导一些高中生尝试做科研. 2011 年, MIT 的 Pavel Etingof 教授与另外六位作者合作出版了一本书, 题目是 Introduction to Representation Theory.

这本书的内容包括代数、有限群、quiver (箭图) 表示论, 以及范畴论和有限维代数结构理论, 其中的大部分内容在国内高校数学院系的本科甚至研究生课程中都讲不到. 在 Etingof 的主页可以找到这本书的 PDF 文档. 他在前言中说, 这本书是他在 2004 年给其他六位合作者的授课讲稿, 而这六位听众当时都是高中生! 其中的 Tiankai Liu 应该是华人, 在 2001, 2002, 2004 年三次代表美国队参加国际数学奥林匹克都获得金牌. 还有一位合作者是来自 South Eugene 高中的 Dmitry Vaintrob, 他在 2006 年获得面向高中生的 Siemens 竞赛的第一名, 论文题目是 The string topology BV algebra, Hochschild cohomology and the Goldman bracket on surfaces, 论文已经涉及到很深的数学理论, 在 Dmitry Vaintrob 的主页上也能找到.

再看看我们在做什么? 曾经看过一道竞赛训练题, 其本质是把八位数 19101112 (华罗庚先生的生日) 分解质因数. 很容易找到因数 8, 然后就一筹莫展了. 后来借助网络工具才直到  $19101112 = 8 \times 1163 \times 2053$ . 看到结果有点傻眼了: 有谁能只用纸笔得到这个分解? 后来发现自己孤陋寡闻了, 有学生说这种分解质因数早就背过! 细细一想真的极为恐怖: 他们为什么要背这个? 他们又背了多少类似的东西?

想想挺有意思: 杰出的数学家们用他们的智慧和汗水去探索和展现数学之美, 而我们花费了大量时间和脑细胞记忆一些很容易遗忘的意义不大的知识点, 轻轻松松地毁掉数学之美的同时顺便浇灭了学生们的求知欲.

### Dialogue 对话

(... 对话仍在继续...)

B: 所以嘛, 我们只要把高考带来的陋习去除掉就行了. 也就是所谓的“去高考化”.

A: 听起来确实很有希望. 我们终于不用再整天因为分数担惊受怕了.

B: 是的, 但是看起来我们都是在这份讲稿里面存在的人物. 希望我们的存在能够对现实世界的你有一定的帮助吧.

同样, 顺着南京大学的问题求解课程, 我们同样找到了一本很有趣的书: 《Mathematics: A Discrete Introduction, Second Edition. Edward R. Scheinerman》. 这本书里面详细讲述了我们为什么要学习数学, 以及数学学习带来的享受.

**问题 2.1.2.** 和上面的问题一样, 带入自己之前的数学学习经历, 然后认真体会这本书写的内容. 只需要阅读第章的前五个小节就好了.

### Dialogue 对话

A: 为什么不让我读第六个小节?

B: 这是因为嘛... 第六小节就是我们下一节课的内容了.

A: 太好了, 我要预习!

B: 这时候终于知道了高中老师说的“预习”的重要性了吧!

A: 确实, 这样一来确实切身感受到了预习的重要性. 这样做可以帮助我了解我的理解哪里出了问题, 于是就可以更加准确地向老师发问, 而不必纠缠于那些可有可无的奇怪问题了.

我们先来看存在于大学数学课本的很多重要的元素和栏目.

### 定义 (definition).

定义的结构通常形如:  $X$  是一个具有性质  $Y$  的东西. 其实, 很多情形下, 我们对于定义的理解是很需要时间的, 一般地, 我们需要关注:

### Idea 启示

对于数学定义, 我们需要关注如下的几个问题:

- 这个定义是怎么来的? 有什么背景?
- 这个定义说的是是什么?
- 我们能用更好的方法或不同的角度定义吗?

### 命题 (proposition).

命题是我们关于数学对象的一些陈述性的性质. 那些陈述性的性质, 如果命题是真的, 我们就称为真命题 (有些难以得到的也称作“定理”); 不知道是不是真的命题一般来称为猜想; 错误的命题通常就称为“错误”.

数学中的命题和物理里面的命题有什么不同点? 比如, 我们说 Galileo 的速度变换公式在低速的情形下是成立的, 当速度接近光速  $c$  的时候, 这个公式就不灵了. 换言之, 我们只是使用

条件 A	条件 B	可能吗?
真	真	可能
真	假	<b>不可能!</b>
假	假	可能
假	真	可能

表 2.1: 若条件 A, 则条件 B 的若干种情形

了一个近似的表达结果. 但是, 数学的逻辑世界中这样的事情是不会发生的. 我们如果认为一个“命题”是真的, 那么在给定公理体系下, 无论什么情形下, 都是对的.

通常描述一个命题的时候, 我们使用的是若  $p$  则  $q$  的形式来完成表述. 那么什么叫做“若...则...”呢? 其实它的意思是对于任何一个真的  $p$ ,  $q$  一定是真的. 具体的关系可以参看表格2.1.

### Bonus 思考题

若  $p$  则  $q$  还有哪些等价的表示形式? 英语里面有哪些表达方式? 是不是比中文更加自然了?

**问题 2.1.3.** 用“当且仅当”写出的类似表2.1的表格.

关于逻辑连接词, 我们会在后面专门讨论. 下面再来看几个名词. 从上述参考资料中直接摘录了部分结果.

- 结果 (result): A modest, generic word for a theorem. There is an air of humility in calling your theorem merely a "result." Both important and unimportant theorems can be called results.
- 事实 (fact): A very minor theorem. The statement " $6 + 3 = 9$ " is a fact.
- 命题 (proposition): A minor theorem. A proposition is more important or more general than a fact but not as prestigious as a theorem.
- 引理 (lemma): A theorem whose main purpose is to help prove another, more important theorem. Some theorems have complicated proofs. Often one can break the job of proving a complicated theorem down into smaller parts. The lemmas are the parts, or tools, used to build the more complicated proof.
- 推论 (corollary): A result with a short proof whose main step is the use of another, previously proved theorem.

**证明 (proof).**

这个用的就比较多了. 我们曾经学过很多的方法, 比如反证法, 数学归纳法等.

**Bonus 思考题**

为什么这些东西是对的? 例如, 我们为什么不能用数学归纳法证明含有  $\mathbb{R}$  为变量的命题? 可以使用数学归纳法证明关于无穷的证明吗?

## 2.2 开始行动: 符号化逻辑

**Dialogue 对话**

A: 为什么采用符号化的方法? 用自然的语言不是更方便吗?

B: 这个视频可能是给出了一个答案, 里面提出了一些历史.

(数学有一个致命的缺陷约 40 分钟 <https://www.bilibili.com/video/BV1464y1k7Ya/>)

A: 我们还要符号化更多的东西吗?

B: 当然! 后面我们的抽象层次还会进一步加深. 只有在前面的抽象领域打好坚实的基础, 才可以学得动下面的内容!

A: 举个例子?

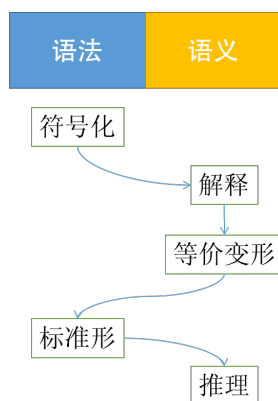
B: 现在让你去给刚学完加减乘除的小学生讲数学分析, 能在一个下午让他写出来很好的证明吗?

A: 这当然不行. 可能是没有受到一些理论的熏陶, 训练时间不是很足.

B: 确实是这样的. 在下面的命题逻辑和谓词逻辑中, 我们会像程序设计语言那样, 关注命题逻辑和谓词逻辑的语法和语义.

**Idea 启示**

以下是下面的内容的路线图.



等价变形关注的是一个公式内部简化与变形, 推理关注的是公式与公式之间的关系.

### 2.2.1 命题, 真值表和指派

从高中开始, 我们似乎就开始处理各种各样的命题. 下面我们加一层抽象, 这样, 我们就可以把一些繁琐的内容交给计算机完成, 并且在探索的过程中对“什么是有效的推理”有一个更深的理解.

符号	名称	英文读法	中文读法	L <sup>A</sup> T <sub>E</sub> X
$\neg$	negation(否定)	not	非	<code>\lnot</code>
$\wedge$	conjunction(合取)	and	与	<code>\land</code>
$\vee$	disjunction(析取)	or	或	<code>\lor</code>
$\rightarrow$	conditional	implies(if then)	蕴含 (如果, 那么)	<code>\to</code>
$\leftrightarrow$	biconditional	if and only if	当且仅当	<code>\leftrightarrow</code>

表 2.2: 五种常见的连接词

**定义 2.2.1** (命题 (proposition)). **命题**是可以判定真假的陈述句 (不可既真又假). 其中, 称**真** (true) 与假 (false) 称为命题的**真值** (truth value) .

相仿地, 我们试图像第一章探求的“最小的指令集合”一样, 问一问: 我们表达的逻辑, 有没有一些基础的组成部分?

#### Example 例子:

- (高等代数)  $V$  可分解为  $A$  的特征子空间的直和, 当且仅当  $A$  可以对角化.
- (数学分析) 如果一个数列的极限是  $A$ , 那么就是说  $\forall n > N, \exists |\epsilon| \geq 0, \text{s.t. } |a_n - A| < \epsilon$ .
- (解析几何) 两直线的方向向量  $s_1 = (l_1, m_1, n_1), s_2 = (l_2, m_2, n_2)$  垂直的充要条件是  $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ ; 平行的充要条件是  $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ .

**定义 2.2.2** (命题逻辑的语法). 命题逻辑的语言有且仅有如下的内容构成:

- 任意多的命题符号
- 5 个逻辑连接词 (见表2.2)
- 左括号, 右括号

#### Dialogue 对话

A: 为什么没有常见的“任意”, “存在”之类的量词?

B: 因为这样就复杂了. 包括结果判定的正确性和推理的难度上. 我们下一章会详细讲讲这个.

#### Bonus 思考题

为什么叫合取, 为什么叫析取?

其实命名的关键在于描述中的“和”和“析”. 我们可以查询古汉语字典来获取他们的意思. 并且从中找到一些合理性.

下面, 不妨用 Python 语言为例, 来看一看这些内容是如何在语言中有所设计的. 需要注意的是, 上表格中的后两个记号并不是新的. 只是我们经常用他们, 于是就变成了一个独立的记号.



如果  $p$  那么  $q$  的意思是: 如果  $p$  是对的, 那么  $q$  一定是对的, 如果  $p$  是错的, 那么  $q$  的真假性不确定. 因此, 我们可以把  $p \rightarrow q$  表示为  $\neg p \vee q$ —意味着要么  $p$  不成立, 要么当  $p$  成立的时候  $q$  是对的—命题只有对和错, 所以我们就很干净的进行了一次分类讨论.

当且仅当的表示就是“若  $p$  则  $q$ , 且若  $q$  则  $p$ ”. 本质上还是命题符号之间的“非”, “或”, “与”之间的连接.

#### Example 例子:

命题的真假在 Python 中可以用布尔表达式 (boolean expression) 的真 (true) 和假 (false) 表示. 比如今有变量  $a=True, b=False, c=True$ , 那么

```
1 a=True, b=False, c=True
2 var = a and b or not c
3 print(var)
4
```

打印的真值就是就是  $a \wedge b \vee \neg c$  的真值.

既然我们规定了符号, 自然要研究一下他们的运算律和运算关系. 什么是运算律?

#### Example 例子:

我们从小就开始听到运算律的相关内容了. 那么什么是运算律? 某国外网站的解释如下.

The order of operations is a rule that tells the correct sequence of steps for evaluating a math expression. We can remember the order using PEMDAS: Parentheses, Exponents, Multiplication and Division (from left to right), Addition and Subtraction (from left to right).

但是我们还听说过“交换律 (commutative law)”, “结合律 (associative law)”这样的名词. 这些内容反应了我们可以如何书写, 如何计算一个表达式.



图 2.2: 南京大学魏恒峰老师

**Idea 启示**

除了这些, 对于命题, 我们需要了解这四个内容:

- 一个可以判定“真/假”的“东西”-命题
  - 魏恒峰 (图2.2) 是南京大学的教师.
- 简单命题组成更复杂的命题-连接词
  - 如果这门课是魏恒峰老师教的, 那么他一定是很受欢迎的.
- 深入命题的内部-谓词与变元
  - 在“今天下雨了.”和“昨天下雨了”之间建立逻辑联系.
- 体现“普遍性”与“存在性”-量词
  - 任何一个学生计算机科学的学生都值得学习魏恒峰老师的离散数学课.

现在, 我们就可以探讨更多的语义相关的内容了. 来看一看能对这个公式产生怎样的解释.

**定义 2.2.3** (命题符号的运算规则). 一般地, 命题记号遵循如下的运算规则:

- 最外层的括号可以省略
- 优先级:  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 结合性: 右结合. 例如  $(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)$  表示  $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ ,  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$  表示  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$

那么我们说的命题的真假是怎么界定的呢? 通常情况下, 我们需要分类讨论每一个需要讨论的命题的真假, 最后看一看根据公式表达的真假性就行了. 所以, 我们很多时候希望“假定”这些命题的真假, 来考察最终结论的真假, 并且希望从中找到一点规律. 这样做其实有一个更专业的名字叫“真值指派”. 这样我们就可以对于“这句话永远是对的”有一个更加深刻的定义.

**Dialogue 对话**

A: 我现在知道这些条件是, 对于明天高等数学课程的一些事情.

B: 什么事情?

A: 如果明天老师讲完了《空间立体几何》, 那么他就会做一个小测试. 同时如果我如果学的非常差的话, 并且旁边还没有大佬捞我的话, 我的平时分就非常惨淡.

B: 那我来分析一下, 假设老师没有讲完, 那么平时分暂时还不会受到影响; 如果老师讲完了, 同时我学得不差, 平时分也不会受到影响. 如果老师讲完了, 我学得非常差, 但是有人捞, 那么平时分也不会受到影响. 但是这是违反学术诚信的, 并不能做. 所以, 只要自己学得比较好才能得到很好的平时分.

像上面的例子, 我们通常会对命题的一些内容的真假进行预先假定, 即: 对于命题进行真值指派.

$p$	$\neg p$
T	F
F	T

表 2.3: “非”的真值表

$p$	$q$	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

表 2.4: “和”的真值表

**定义 2.2.4** (真值指派 ( $v$ )). 令  $S$  为一个命题符号的集合.  $S$  上的一个**真值指派**  $v$  是一个从  $S$  到真假值的映射

$$v : S \rightarrow \{T, F\}.$$

具体的, 我们可以“指派”命题符号中的各个变量的值, 然后映射到真或假两种情况.

我们可以借助这个想法为我们上面定义的为我们上面的逻辑连接词做一个精确的数学定义. 叫做“真值表”.

**定义 2.2.5** (真值表). 表征逻辑事件输入和输出之间全部可能状态的表格. 列出命题公式真假值的表. 通常以 1 表示真, 0 表示假.

比如, 我们有“非”的真值表 (表2.3)、“和”的真值表 (表2.4)、“或”真值表 (表2.5)、“若, 则”真值表 ((表2.6) 以及“当且仅当”的真值表 (表2.7)

**问题 2.2.1.** 人类学者埃贝尔考察一个有着许多古怪社会现象的群岛, 他到访的第一个小岛上的居民分为两类, 而且每人必属其中的一类:

- Knight: 这类人永远说真话
- Knave: 这类人永远说假话

在岛上埃贝尔遇到一行三人, 且称他们为 A, B, C. 埃贝尔问 A: “你是 knight 还是 knave?” A 回答了, 但埃贝尔没听清; 于是埃贝尔就问 B: “他 (A) 说的是什么?” B 告诉埃贝尔 A 说自己是 knave。

$p$	$q$	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

表 2.5: “或”的真值表

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

表 2.6: “如果, 那么”的真值表

$p$	$q$	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

表 2.7: “当且仅当”的真值表

此时, C 插话说: “别相信他 (B), 他说谎!”

我们的问题是: C 是 knight 还是 knave?

事实上, 我们在小学很可能通过列举的方法完成求解. 但是现在我们可以用真值表列举. 甚至可以把公式写出来进行推演!

### Bonus 思考题

等等, 什么叫推演? 有哪些推演规律? 这些推演规律是不是可以用公式表示? 这些都是下一节要介绍的内容.

比如一个命题的否定的否定还是原命题本身一样, 我们可以定义一些“公式”. 比如  $\neg p$  与  $p$  等价. 首先我们定义一下什么叫“满足”, “蕴含”或者“等价”.

**定义 2.2.6** (满足 (Satisfy)). 如果  $v(\alpha) = T$ , 则称真值指派  $v$  满足公式  $\alpha$ .

很多时候一些逻辑表达式看上去就是废话. 比如“如果我后天知道了考试的成绩, 那我明天就知道了”. 数学上面对这类问题有一个定义叫做“重言蕴含”.

**定义 2.2.7** (重言蕴含 (Tautologically Implies)). 设  $\Sigma$  为一个公式集.

$\Sigma$  重言蕴含公式  $\alpha$ , 记为  $\Sigma \models \alpha$ ,

如果每个满足  $\Sigma$  中所有公式的真值指派都满足  $\alpha$ .

**定义 2.2.8** (重言式/永真式 (Tautology)). 如果将等价词两侧的子公式各自看作表达式, 则这两个逻辑表达式对于相关逻辑变量的任意赋值有相同的逻辑值. (或者: 如果  $\emptyset \models \alpha$ , 则称  $\alpha$  为重言式, 记为  $\models \alpha$ .)

反之, 就是永远都不能成立的矛盾的形式.

**定义 2.2.9** (矛盾式/永假式 (Contradiction)). 若公式  $\alpha$  在所有真值指派下均为假, 则称  $\alpha$  为矛盾式.

**定义 2.2.10** (重言等价 (Tautologically Equivalent)). 如果  $\alpha \models \beta$  且  $\beta \models \alpha$ , 则称  $\alpha$  与  $\beta$  **重言等价**, 记为  $\alpha \equiv \beta$ .

我们可以认为  $\models$  是语义上的,  $\vdash$  是偏向语法上的推演.

对于命题公式而言, 如果对于相同的变量输入, 外部观测的结果的真假相同, 我们就称为命题的等价.

**定义 2.2.11** (命题的等价). 设  $G, H$  是两个命题公式,  $P_1, \dots, P_n$  是出现在命题  $G, H$  中的所有变元, 如果对于  $P_1, P_2, \dots, P_n$  的  $2^n$  组不同的解释,  $G, H$  的真值结果都相同, 那么称  $G$  和  $H$  是等价的, 记作  $G \Leftrightarrow H$ .

根据上面的定义, 我们可以证明:

**定理 2.2.1.**  $G \Leftrightarrow H$  的充分必要条件是  $G \leftrightarrow H$ .

### Bonus 思考题

永真式和等价有什么区别和联系?

A proposition that is always True is called a tautology. Two propositions  $p$  and  $q$  are logically equivalent if their truth tables are the same. Namely,  $p$  and  $q$  are logically equivalent if  $p \leftrightarrow q$  is a tautology. If  $p$  and  $q$  are logically equivalent, we write  $p \Leftrightarrow q$ .

## 2.2.2 命题逻辑的化简

在上面我们发现了有很多的“废话”, 但是, 当看上去是“废话”的东西堆多堆复杂的时候, 那么它就不是显然的. 这就需要一些推理规律来帮助我们联通看上去毫不相干的逻辑符号.

经过我们的探讨, 我们就希望把一些最基本的规律写出来:

**命题 2.2.1.** (一些永真的公式) 如果  $A, B, C$  是命题, 那么以下的内容是永真式:

- 交换律:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$$

- 结合律:

$$((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$$

$$((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$$

- 分配律:

$$(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

$$(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

- De Morgan 律:

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

- 双重否定律:

$$\neg\neg A \leftrightarrow A$$

- 排中律:

$$A \vee (\neg A)$$

- 矛盾律:

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

- 逆否命题:

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

利用这些内容我们可以构造一些等价的命题:

**命题 2.2.2** (基本等价定律). (1) 幂等律:  $E_1 : G \wedge G \leftrightarrow G; E_2 : G \vee G \leftrightarrow G;$

(2) 交换律:  $E_3 : G \wedge H \leftrightarrow H \wedge G; E_4 : G \vee H \leftrightarrow H \vee G;$

(3) 结合律:  $E_5 : G \wedge (H \wedge S) \leftrightarrow (G \wedge H) \wedge S; E_6 : G \vee (H \vee S) \leftrightarrow (G \vee H) \vee S$

(4) 分配律:  $E_7 : G \vee (H \wedge S) \leftrightarrow (G \vee H) \wedge (G \vee S); E_8 : G \wedge (H \vee S) \leftrightarrow (G \wedge H) \vee (G \wedge S)$

(5) 吸收律:  $E_9 : G \vee (G \wedge H) \leftrightarrow G; E_{10} : G \wedge (G \vee H) \leftrightarrow G$

(6) 同一律:  $E_{11} : G \vee \text{False} \leftrightarrow G; E_{12} : G \wedge \text{true} \leftrightarrow G$

(7) 零律:  $E_{13} : G \vee \text{True} \leftrightarrow \text{True}; E_{14} : G \wedge \text{False} = \text{False}$

(8) 双重否定律:  $E_{15} : \neg(\neg G) \leftrightarrow G$

(9) De Morgan 律:  $E_{16} : \neg(G \vee H) \leftrightarrow \neg G \wedge \neg H; E_{17} : \neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H$

(10) 矛盾律:  $E_{18} : G \wedge \neg G \leftrightarrow \text{False}$

(11) 排中律:  $E_{19} : G \vee \neg G \leftrightarrow 1$

(12) 等价式:  $E_{20} : G \leftrightarrow \neg(G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$

(13) 蕴含式:  $E_{21} : G \rightarrow H \leftrightarrow \neg G \vee H$

(14) 假言易位:  $E_{22} : G \rightarrow H \leftrightarrow \neg H \rightarrow \neg G$

(15) 等价否定形式:  $E_{23} : G \leftrightarrow H \leftrightarrow \neg G \leftrightarrow \neg H$

(16) 归谬论:  $E_{24} : (G \rightarrow H) \wedge (G \rightarrow \neg H) \leftrightarrow \neg G$

这些为什么有用呢? 考虑有一天你在求解一个数学问题, 其中你想把一个命题否定掉, 比如

**问题 2.2.2.** 如果  $P, Q, R$  是命题, 请否定  $P \rightarrow Q \wedge R$ .

其中一个很重要的手段就是通过上面的这些重言式的替换. 就像在学习三角函数的时候使用三角恒等式替换一样.

下面我们来看一个比较有趣的逻辑代数推演的例子:

**问题 2.2.3.** 我们已经知道 Bill, Jim 和 Sam 分别来自 Boston, Chicago 和 Detroit. 以下每句话半句对, 半句错:

- Bill 来自 Boston( $p_1$ ), Jim 来自 Chicago( $p_2$ ).
- Sam 来自 Boston( $p_3$ ), Bill 来自 Chicago( $p_4$ ).
- Jim 来自 Boston( $p_5$ ), Bill 来自 Detroit( $p_6$ ).

能确定每个人究竟谁来自何处吗?

解答: 我们可以将上述条件用以下逻辑表达式来表示:

$$((p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2)) \wedge ((p_3 \wedge \neg p_4) \vee (\neg p_3 \wedge p_4)) \wedge ((p_5 \wedge \neg p_6) \vee (\neg p_5 \wedge p_6))$$

先看前两个括号 (上述式子红色的部分), 以连接两个式子中间的  $\wedge$  展开 (下式红色符号), 我们有

$$\begin{aligned} & ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2)) \wedge ((p_3 \wedge \neg p_4) \vee (\neg p_3 \wedge p_4)) \\ &= (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_4) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_4) \end{aligned}$$

根据已知条件,  $p_1 \wedge p_4, p_2 \wedge p_4, p_1 \wedge p_3$  均为假的, 所以上述式子是

$$(\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4)$$

与后面的  $((p_5 \wedge \neg p_6) \vee (\neg p_5 \wedge p_6))$  进行  $\wedge$  操作, 也就是有

$$\begin{aligned} & (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4) ((p_5 \wedge \neg p_6) \vee (\neg p_5 \wedge p_6)) \\ &= (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4 \wedge p_5 \wedge \neg p_6) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4 \wedge \neg p_5 \wedge p_6) \\ &= (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4 \wedge \neg p_5 \wedge p_6) \end{aligned}$$

所以我们知道:  $p_2, p_3, p_6$  是对的.

#

事实上, 我们能这样做是因为有带入定理帮助我们.

**定理 2.2.2** (带入定理). 运用永真式代替命题的变元, 得到的命题结果与原命题等价.

### Bonus 思考题

缺失的证明: 为什么没有了定理的证明?

一个很重要的问题是我们数学的基石是缺失的. 其实, 人类在认识世界的时候开始也是缺乏基础的, 仅仅凭借直觉来建立一些体系. 直到直觉无法完全覆盖的时候, 人类才开始探索有没有什么基础的支撑点来支持这一系列理论.

### 2.2.3 化简的“目标”之一: 范式

范式的意思是“规范的形式”. 那么, 这些内容化简到最后有没有一个目标呢? 其实是有的. 任何一个命题都可以写成“合取范式 (CNF)”或者“析取范式 (DNF)”的形式. 下面给出形如这样的式子的定义:

**定义 2.2.12** (合取范式 (Conjunctive Normal Form)). 我们称公式  $\alpha$  是合取范式, 如果它形如

$$\alpha = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_k,$$

其中, 每个  $\beta_i$  都形如

$$\beta_i = \beta_{i1} \vee \beta_{i2} \vee \cdots \vee \beta_{in},$$

并且  $\beta_{ij}$  或是一个命题符号, 或者命题符号的否定.

**定义 2.2.13** (析取范式 (Disjunctive Normal Form)). 我们称公式  $\alpha$  是析取范式, 如果它形如

$$\alpha = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_k,$$

其中, 每个  $\beta_i$  都形如

$$\beta_i = \beta_{i1} \wedge \beta_{i2} \wedge \cdots \wedge \beta_{in},$$

并且  $\beta_{ij}$  或是一个命题符号, 或者命题符号的否定.

**定理 2.2.3.** 每一个命题都有等价的合取范式和析取范式的形式. (Given any proposition, there exists a proposition in disjunctive normal form which is equivalent to that proposition.)

### Dialogue 对话

A: 你真的想要看证明吗?

B: 嗯... 有点好奇.

A: 好, 给你看看. 不过有一些集合论的内容, 我们会在后面会讲解.

证明. (Copied from <https://planetmath.org/everypropositionisequivalenttoapropositionindnf>) Any two propositions are equivalent if and only if they determine the same truth function. Therefore, if one can exhibit a mapping which assigns to a given truth function a proposition in disjunctive normal form such that the truth function  $f$  of this proposition is  $f$ , the theorem follows immediately.

Let  $n$  denote the number of arguments  $f$  takes. Define

$$V(f) = \{X \in \{T, F\}^n, f(X) = T\}$$

For every  $X \in \{T, F\}^n$ , define  $L_i(X) = \{T, F\}^n \rightarrow \{T, F\}$  as follows:

$$L_i(X)(Y) = \begin{cases} Y_i, & X_i = T; \\ \neg Y_i, & X_i = F. \end{cases}$$

Then, we claim that

$$f(Y) = \bigwedge_{x \in V(f)} \bigvee_{i=1}^n L_i(X)(Y)$$

On the one hand, suppose that  $f(Y) = T$  for a certain  $Y \in \{T, F\}^n$ . By definition of  $V(f)$ , we have  $Y \in V(f)$ . By definition of  $L_i$ , we have

$$L_i(Y)(Y) = \begin{cases} Y_i, & Y_i = T \\ \neg Y_i, & Y_i = F \end{cases}$$

In either case,  $L_i(Y)(Y) = T$ , since a conjunction equals  $T$  if each term of the conjunction equals  $T$ , it follows that  $\bigvee_{i=1}^n L_i(Y)(Y) = T$ . Finally, since a disjunction equals  $T$  if and only if there exists a term which equals  $T$ , it follows the right hand side equals  $T$  when the left-hand side equals  $T$ .



On the one hand, suppose that  $V(Y) = F$  for a certain  $Y \in \{T, F\}$ . Let  $X$  be any element of  $V(f)$ . Since  $Y \notin V(f)$ , there must exist an index  $i$  such that  $X_i \neq Y_i$ . For this choice of  $i$ ,  $Y_i = \neg X_i$ . Then we have

$$L_i(X)(Y) = \begin{cases} \neg X_i, X_i = T \\ \neg \neg X_i, X_i = F \end{cases}$$

In either case,  $L_i(X)(Y) = F$ . Since a conjunction equals  $F$  if and only if there exists a term which evaluates to  $F$ , it follows that  $\bigvee_{i=1}^n = F$  for all  $X \in V(f)$ . Since a disjunction equals  $F$  if and only if each term of the conjunction equals  $F$ , it follows that the right hand side equals  $F$  when the left-hand side equals  $F$ .

□

### Dialogue 对话

B: 看不懂的证明还有意义吗?

A: 这是一个很好的问题. 看似看不懂, 但是你在阅读的过程中会无意间记住一些话语, 那么将来你碰见相似的东西的时候, 就会感到快乐, 大多数情况下就更容易理解了.

B: 感觉我没办法一步到位诶...

A: 是的, 我们认识世界也是这样的, 一步一步的向前推进. 我们可以先有一个直观的印象, 慢慢做更加详细的探讨.

上面的只是给了我们一个正确性证明, 但是并没有告诉我们如何把一个式子化为合取范式或者析取范式. 一般的, 我们有如下的方法:

- (1) 用  $\neg, \wedge, \vee$  代替  $\rightarrow, \leftrightarrow$ ;
- (2) 用双重否定律, 消去律去掉多余的否定连接词, 运用 De Morgan 律将否定连接词内移.
- (3) 利用分配率, 结合律, 幂等律整理得到.

实际上, 在上面的三个人从哪里来的例子中, 我们就用到了这样的想法.

### Bonus 思考题

为什么合取范式 (外面  $\wedge$  里面  $\vee$ ) 和析取范式 (外面  $\vee$  里面  $\wedge$ ) 这么重要?

下面的这个回答来源于 StackExchange 上面的回答 [1], 简要概括如下:

逻辑公式中的变量 (输入) 可以以复杂的方式混在一起. 如果公式采用 CNF 或 DNF, 变量就更加分离, 从而更容易看出表达式何时成立. 比如, 要检查 CNF 是否成立, 只需逐个检查每个子句有一个是假的整个都是假的. DNF 也类似: 逐个检查子句, 并在找到一个为真的子句时停止, 整个句子都是真的.

很多时候真值表会带来很多的麻烦: 意味着穷举和非常麻烦的事情. 有了 CNF 与 DNF 以后, 我们不必从真值表开始枚举, 可以通过操作表达式来形式地构造标准形式. 在某些情况下可能可以更方便一些.

下面我们来看一看合取范式与析取范式的一些性质.

我们发现, 在合取范式中, 只要有一个条件是假的, 那么整个命题都是假的. 在析取范式中, 只要有一个条件是真的, 那么这个命题是真的. 特别地, 如果每个命题变元或其否定恰好只有一

P Q	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$P \wedge Q$
0 0	1	0	0	0
0 1	0	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	0	0	1

表 2.8: 合取范式枚举命题符号是否取反以及指派为真假的情形 (极小项)

P Q	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$P \wedge Q$
0 0	0	1	1	1
0 1	1	0	1	1
1 0	1	1	0	1
1 1	1	1	1	0

表 2.9: 合取范式枚举命题符号是否取反以及指派为真假的情形 (极大项)

个出现过并且只出现了一次, 那么我们说这个合取范式为极小项 (析取范式为极大项). 比如我们有两个变量, 那么就可以有如下的四个逻辑表达式:

$$P \wedge Q \quad \neg P \wedge Q \quad P \wedge \neg Q \quad \neg P \wedge \neg Q$$

这样就保证了我们除了枚举输入的命题之外, 我们还可以枚举极小项, 极大项, 从两方面来观察命题的真假. 比如, 还是上面的两个命题符号的情形, 对于合取范式和析取范式, 分别有表2.2.3 以及表2.2.3的情形.

### Bonus 思考题

列表有什么好处? 我们可以发现什么规律?

我们发现每一个赋值对应一个取值为  $\text{真}$  的极  $\text{小}$  项, 每个极  $\text{小}$  项的  $\text{真}$  赋值是唯一的. 并且没有等价的两个极  $\text{小}$  项, 任何两个不同的极  $\text{小}$  项  $\text{合}$  取必为真, 极  $\text{小}$  项的否定是极  $\text{大}$  项, 所有的极  $\text{小}$  项的  $\text{析}$  取为永假公式.

### Dialogue 对话

A: 这个和二进制表示好像. 我们能不能有一种方法来用一个整数来表示命题?

B: 确实, 但是需要考虑一下命题变元的记号问题.

如果我们把合取范式和析取范式里面的内容都变为极小项/极大项的时候, 我们就可以得到更标准, 更易于处理的内容. 通常称为主合 (析) 取范式.

## 练习题 2.1

1. 符号化下列命题:

- i. 虽然他的程序编写得很短小, 但运行效率不高.
- ii. 控制台打字机既可作为输入设备, 又可作为输出设备.
- iii. 如果你不多刷算法题且刷题时不讲方法, 那么面试时可能难于通过能力测试.
- iv. 若  $a$  和  $b$  是偶数, 则  $a + b$  是偶数.
- v. 停机的原因在于语法错误或程序逻辑错误.
- vi. 如果公用事业费用增加或者增加基金的要求被否定, 那么, 当且仅当现有计算机设备不适用, 才需购买一台新计算机.
- vii.  $1$  is the factorial of  $0$ , and  $u$  is the factorial of  $x + 1$  if  $v$  is the factorial of  $x$  and  $u$  is  $v$  times.

2. 设  $P$ : 数理逻辑很有趣;  $Q$ : 作业很难;  $R$ : 这门课程使人喜欢. 将下列句子符号化:

- i. 数理逻辑很有趣, 并且作业很难.
- ii. 数理逻辑无趣, 作业也不难, 那么这门课程就不会使人喜欢.
- iii. 数理逻辑很有趣, 作业也不难, 那么这门课程就会使人喜欢.
- iv. 数理逻辑无趣, 作业也不难, 而且这门课程也不使人喜欢.
- v. 数理逻辑很有趣意味着作业很难, 反之亦然.
- vi. 或者数理逻辑很有趣, 或者作业很难, 并且两者恰具其一.

3. 构造如下命题公式真值表, 并判断其类型:

- i.  $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ .
- ii.  $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \rightarrow P)$ .
- iii.  $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \wedge \neg Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$ .
- iv.  $(P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ .

## 2.3 命题推演的真象：命题的推演

我们发现, 蕴含词的逻辑永真式和我们经常所做的推理有很好的联系. 具体地, 如果  $\alpha \rightarrow \beta$ , 那么如果  $\alpha$  成立, 可以**推导出**  $\beta$  为真.

同样的, 如果假设  $\alpha$  成立, 只要经过合理的推导可以**推导出**  $\beta$  为真, 那么这个规则就是成立的.

我们在推理时多半用“因为... 所以...”, 那么前面的什么概念能起关键作用呢?

一般而言, 逻辑推理有一系列的假设前提  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 有一个结论  $B$ , 什么是正确的推理呢? 形式化地, 对前提与结论所涉及的逻辑变量任意赋值, 如果任意的  $A_i$  均为这真, 它们的合取式的值当然也为真, 那么  $B$  必为真.

形式化的, 我们就说: 这样的推理是正确的.

**定义 2.3.1.** 设  $G_1, G_2, \dots, G_n, H$  是命题公式, 对任意指派  $I$ , 如果  $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$  为真,  $H$  也为真, 或者  $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$  为真,  $H$  为假, 那么称  $H$  是  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的逻辑结果. 或者  $G_1, G_2, \dots, G_n$  共同蕴含  $H$ , 记做  $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n \Rightarrow H$ .

**定理 2.3.1.** 公式  $H$  是前提集合  $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$  的逻辑结果当且仅当  $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n \rightarrow H$  为永真的公式.

需要注意的是,  $\Rightarrow$  是一个关系, 这是一个不可计算的公式.

**定义 2.3.2.** 设  $G_1, G_2, \dots, G_n, H$  是命题公式, 如果  $H$  是  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的逻辑结果, 那么称  $G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow H$  是有效的或正确的. 否则称为无效的.

称  $G_1, G_2, \dots, G_n$  为一组前提,  $H$  为结论, 如果记  $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ , 上述关系可以记作  $\Gamma \Rightarrow H$ .

### Dialogue 对话

A: 如果我有一个有效的推理, 那么结论应该是正确的吧?

B: 那可不一定. 举个例子:  $1+1=3, 2+2=4 \Rightarrow 114+514=191$  虽然形式是有效的, 但是结论确实是不对的.

A: 确实, 很像是  $\rightarrow$  记号的拓展. 如果前提条件为假, 那么就不关心结论的正确性了.

所以这就解释了我们为什么经常使用的因为... 所以... 是合理的了. 比如  $(p \wedge (p \wedge q)) \rightarrow q$  是永真的, 那么就可以有三段论这样的合理的推理过程了.

### Example 例子:

一个三段论的示例如下:

关爱学生, 好好讲课, 有真才实学的老师会被学生欢迎

朱富海老师关爱学生, 好好讲课, 有真才实学

朱富海老师受学生欢迎.

我们经常对于知识研究一些规律. 比如在逻辑公式很长的时候, 逐个枚举是十分低效率的. 比如, 如果有 200 个命题符号的逻辑公式, 用计算机枚举则需要  $2^{200}$  种情况. 用 Python 的强大的计算器可以知道, 需要核验的情况是一个 61 位数.

### Example 例子:

我们可以使用 `ipython` 中输入 `len(str(2**200))` 知道它的位数. Python 自带高精度计算, 因此如果直接输入 `2**200`, 它就会直接把数字算出来!

既然要推理, 我们就要有推理的定律和推理的推理的规则. 正如前面说的程序语言的语法和语义类似.

经过总结归纳, 我们有如下的推理定律:

**定理 2.3.2** (常见的推理定律). 设  $G, H, I, J$  是任意的命题公式, 那么我们有:

(1) 简化规则:  $I_1 : G \wedge H \Rightarrow G, I_2 : G \wedge H \Rightarrow H$ .

(2) 添加规则:  $I_3 : G \Rightarrow G \vee H, I_4 : H \Rightarrow G \wedge H$ .

- (3)  $I_5 : G, H \Rightarrow G \wedge H$ .
- (4) 选言三段论:  $I_6 : \neg G, G \vee H \Rightarrow H$ .
- (5) 分离规则:  $I_7 : G, G \rightarrow H \Rightarrow H$ .
- (6) 否定结论:  $I_8 : \neg H, G \rightarrow H \Rightarrow \neg G$ .
- (7) 连续推理:  $I_9 : G \rightarrow H, H \rightarrow I \Rightarrow G \rightarrow I$ .
- (8) 两难推理:  $I_{10} : G \vee H, G \rightarrow I, H \rightarrow I \Rightarrow I$

一个学习的很好的方法是举一些例子. 我们可以用上面的符号翻译成具体的例子. 不用太过于拘束.

### Idea 启示

遇见新概念的时候, 可以应该举一些例子辅助理解, 尽可能弄懂来龙去脉.

以最后一个例子为例, 有:

### Example 例子:

8 现在发动机坏了并且没油了. 如果发动机坏了, 车子就动不了了; 如果没油了, 车子就动不了了; 我们可以得到: 车子动不了了.

### Bonus 思考题

为什么叫他们为基础的规则? 是不是因为他们具有某种完备性?

推理规则可以使用真值表验证. 除此之外, 我们还需要推理定律: 也就是需要完成什么样的变换. 我们有三条规则.

(1) Premise 规则: 前提引用. 如果推理的时候引入了前提集合中的一个前提, 那么称为使用了 P 规则;

(2) Transformation 规则: 逻辑结果引用的规则. 在推理过程中, 如果引入推理过程中某个产生的中间结果, 那么称使用了 T 规则;

(3) Conclusion premise 规则: 附加前提规则. 在推理过程中, 如果逻辑结果为一个含有蕴含  $\rightarrow$  的式子, 那么把它的前提条件作为假设引入, 就是用了 CP 规则. 所有引入的假设最终必须被“释放” (discharged) 所谓释放, 其实就是在使用假设  $\alpha$  作为假设的前提下推出了  $\beta$ , 最后要写成  $\alpha \rightarrow \beta$  的形式. 这就是假设的释放.

我们来推导一下  $I_6$ .

证明. (1) 直接引入前提集合的前提, 有  $\neg G$ ;

(2) 直接引入前提集合的前提, 有  $G \wedge H$ ;

(3) 使用 (1),(2) 的中间结果, 有  $\neg G \wedge (G \vee H)$ ;

(4) 使用 (3) 的中间结果, 使用分配律, 有  $(\neg G \wedge G) \vee (\neg G \wedge H)$ ;

(5) 使用 (4) 的中间结果, 有  $\neg G \wedge H$ ;

(6) 使用 (5) 的中间结果, 有  $H$ . □

对于  $I_9$ , 我们可以先把  $G$  是对的引入集合, 然后最后推理得到  $I$  的时候, 为了说明它的正确性, 就需要使用 CP 规则.

**Bonus 思考题**

P 规则和 T 规则能足够做所有的内容的推理吗?

在上面我们做的研究中, 我们会发现很多东西相当的机械化. 于是, 在有机械化的内容出现的时候, 计算机就有用了. 所以, 我们希望找到一种方法, 使得计算机可以自动地推理我们的命题. 在 1965 年, J.A. Robinson 发现了消解原理: 它的原理是规则  $I_7$ . 具体的有:

**定义 2.3.3** (消解与消解式). 设  $G$  和  $H$  是两个析取式, 如果  $G$  中有变元  $P$ ,  $H$  中有变元  $\neg P$ , 则从  $G$  和  $H$  中分别消去  $P$  和  $\neg P$ , 并且将余下的部分析取, 构成新的表达式  $W$ , 这个过程称为消解.  $W$  为  $G, H$  的消解式.

我们经过消解的方法, 立即可以得到一个很有“自动化”意思的定理:

**定理 2.3.3.** 如果  $W$  是  $G, H$  的消解式, 则  $G \wedge H \Rightarrow W$ .

**练习题 2.2**

1. 请写一个 Python 程序, 输入一个命题公式 (形式自己指定), 输出一个填写好的真值表的填写 (形式同样自己指定). 提示: 一开始不要搞得太复杂. 比如只接受五个逻辑连接词的某两个, 然后慢慢扩展.
2. 请写出一个 Python 程序, 使得我们可以把一个命题问题化为合取范式.

**2.4 变得更加严谨: 形式化推理系统**

经过一些时间, 我们希望找到简化的推理与验证. 如下是若干个规则:

- Conjunction:  $\frac{A, B}{A \wedge B}$ ;
- Simplification:  $\frac{A \wedge B}{A}$  and  $\frac{A \wedge B}{B}$ ;
- Addition:  $\frac{A}{A \wedge B}$  and  $\frac{B}{A \wedge B}$ ;
- Disjunctive Syllogism:  $\frac{A \wedge B, \neg A}{B}$  and  $\frac{A \wedge B, \neg B}{A}$ ;
- Modus Ponens:  $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$ ;
- Conditional Proof:  $\frac{\text{From } A \text{ derive } B}{A \rightarrow B}$ ;
- Double Negation:  $\frac{\neg \neg A}{A}$ ;
- Contradiction:  $\frac{A \wedge \neg A}{\text{False}}$ ;

- Indirect proof: 
$$\frac{\text{From } A, \text{ derived False}}{A}$$

我们只用上面的一些内容就可以得到更加复杂的推理规则: 比如我们有前提  $A \rightarrow B, \neg A \rightarrow A$ , 尝试推出结论  $B$ . 我们可以用上面的推理规则这样推理:

$A \rightarrow B$	$P(1)$	
$\neg A \rightarrow A$	$P$	(2)
$\neg B$	$P[\text{ for } B]$	(3)
$\neg\neg A$	$P[\text{ for } \neg A]$	(4)
$A$	4, DN	(5)
$B$	1, 5, MP	(6)
False	3, 6, Contr	(7)
$\neg A$	4 – 7, IP	(8)
$A$	2, 8, MP	(9)
False	8, 9, Contr	(10)

#### Dialogue 对话

A: 其实还是知道如何分类讨论就行了... 看看它的假设也是很明确的.

B: 确实. 我们能从这里得到哪些更多的东西呢?

#### Modus Tollens: mode that denies

	$\frac{A \rightarrow B, \neg B}{A}$	
$A \rightarrow B$	$P$	(1)
$\neg B$	$P$	(2)
$\neg\neg A$	$P[\text{ for } \neg A]$	(3)
$A$	3, DN	(4)
$B$	1, 4, MP	(5)
False	2, 5, Contr	(6)
$\neg A$	3 – 6, IP	(7)

#### Proof by cases

$$\frac{A \wedge B, A \rightarrow C, B \rightarrow C}{C}$$

#### Hypothetical Syllogism

$$\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

## Constructive Dilemma

$$\frac{A \wedge C, A \rightarrow C, B \rightarrow D}{C \wedge D}$$

## 2.5 表达更丰富的内容：谓词 部分与整体的关系

我们发现命题逻辑无法表达部分与整体的关系. 例如:

*Example* 例子:

- (1) 张三是个法外狂徒;
- (2) 李四与张三是好朋友;
- (3) 李四也是一个法外狂徒;
- (4) 王五站在张三与李四中间;<sup>a</sup>
- (5) 王五长得比张三与李四都高;
- (6) 所有的法外狂徒终将绳之以法;
- (7) 存在法外狂徒改过自新.

<sup>a</sup>王五害怕极了...

我们发现以前学过的东西仅仅能应对很基本的内容. 比如任意, 存在无法表示. 下面我们形式化的先来说说什么是任意和存在. 这些是对于一类类似于变元的内容的性质的总体描述. 因此, 我们首先定义什么是谓词

**定义 2.5.1** (谓词 (predicate)). 在不能被拆分为更小的命题中 (通常叫做原子命题 (atomic expression)), 可以独立存在的客体 (subject)(通常是句子中的主语, 宾语) 称为个体词 (individual), 描述客体的性质或客体之间的关系的部分称为谓词.

很多时候, 我们会泛指一些很笼统的概念, 比如“人”. 也有时候我们会举一些明确的个体, 比如“蒋炎岩老师 (图2.3)”. 这时候我们就需要区分“个体变量”(通常是泛指) 和“个体常量”(通常是特指).

**定义 2.5.2** (个体常量, 个体变量, 个体域, 全总个体域). 对于具体明确的个体而言, 称为个体常量 (individual constant), 一般用形如  $a, b, a_1, b_1$  这样的小写字母表示. 个体变量 (individual variable) 取值范围称作个体域 (或论域, individual field), 通常用字母  $D$  表示. 我们通常把宇宙间所有个体聚集在一起的个体域称为全总论域 (universal individual field).

**定义 2.5.3** ( $n$  元命题函数). 设  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是  $n$  元函数 (function), 其中每一个变量可以取其可以取到的对应的值. 如果  $P$  的值域是  $\{0, 1\}$ , 那么说  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是  $n$  元命题函数或  $n$  元谓词 ( $n$ -ary propositional function).

这样子, 我们就可以更加方便的定义量词 (qualifier) 了.

**定义 2.5.4** (全称量词与特称量词). 表达全部数量关系的词语诸如“一切”, “所有”, “每一个”等称为全称量词 (universal quantifier), 记作  $\forall$ . 如所有的  $x$  记作  $\forall x$ .



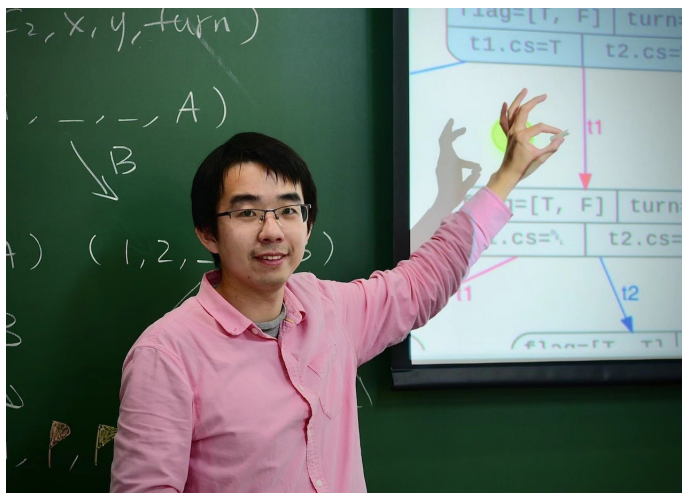


图 2.3: 南京大学蒋炎岩老师与他绘制的状态机

表达部分数量关系的词语诸如“存在”, “有一个”, “有一些”称为存在量词 (existential quantifier). 记作  $\exists$ . 如有一些  $x$  记作  $\exists x$ .

这里面,  $x$  被称为作用变量 (function variable), 一般将量词加在对应的谓词之前, 如  $\forall x.F(x)$  或  $\exists x.F(x)$ . 此时  $F(x)$  被称为全称量词和存在量词的作用域 (又成为辖域, scope).

上面的内容一个很重要的地方在于引入了变元. 例如, 在函数符号和谓词符号中, 变元的引入使得我们要讨论的事情变得更加多了.

### Bonus 思考题

你在哪里还见到过由常数引入到变量? 其实, 我们在初中的时候, 先研究了二次方程的解, 再把  $x$  当做一个变元, 研究所有  $x$  构成的二元组  $(x, f(x))$  的一些性质. 有兴趣学习高等代数的同学会发现在引入  $\lambda$ -矩阵 的时候也用了这样的知识.

这下子, 我们就可以定义谓词逻辑的构成了.

**定义 2.5.5** (谓词逻辑的构成). 谓词逻辑由且仅有以下的几部分构成:

- (1) 逻辑联词:  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- (2) 量词符号:  $\forall$  (forall; 全称量词),  $\exists$  exists; 存在量词)
- (3) 变元符号:  $x, y, z, \dots$
- (4) 左右括号:  $(, )$
- (5) 常数符号: 零个或多个常数符号  $a, b, c, \dots$ , 表达特殊的个体
- (6) 函数符号:  $n$ -元函数符号  $f, g, h, \dots$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ), 表达个体上的运算
- (7) 谓词符号:  $n$ -元谓词符号  $P, Q, R, \dots$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), 表达个体的性质与关系

和普通公式一样, 谓词公式也是由一项一项构成的.

**定义 2.5.6** (项 (Term)). 1. 每个变元  $x, y, z, \dots$  都是一个项;

2. 每个常数符号都是一个项;

3. 如果  $t_1, t_2, \dots, t_n$  是项, 且  $f$  为一个  $n$ -元函数符号, 则  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  也是项;
4. 除此之外, 别无其它.

**定义 2.5.7** (公式 (Formula)). 谓词逻辑的公式定义如下:

- 如果  $t_1, \dots, t_n$  是项, 且  $P$  是一个  $n$  元谓词符号, 则  $P(t_1, \dots, t_n)$  为公式, 称为**原子公式**;
- 如果  $\alpha$  与  $\beta$  都是公式, 则  $(\neg\alpha)$  与  $(\alpha * \beta)$  都是公式;
- 如果  $\alpha$  是公式, 则  $\forall x. \alpha$  与  $\exists x. \alpha$  也是公式;
- 除此之外, 别无其它.

我们来举一些例子:

**Example 例子:**

- 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg(Sx = 0)$$

- 两个自然数相等当且仅当它们的后继相等

$$\forall x. \forall y. (x = y \leftrightarrow Sx = Sy)$$

- $x$  是素数 ( $x > 1$  且  $x$  没有除自身和 1 之外的因子)

$$\text{Prime}(x) : S0 < x \wedge \forall y. \forall z. (y < x \wedge z < x) \rightarrow \neg(y \times z = x)$$

- 哥德巴赫猜想 (任一大于 2 的偶数, 都可表示成两个素数之和)

$$\begin{aligned} \forall x. (SS0 < 2 \wedge (\exists y. 2 \times y = x)) \rightarrow \\ (\exists x_1. \exists x_2. \text{Prime}(x_1) \wedge \text{Prime}(x_2) \wedge x_1 + x_2 = x) \end{aligned}$$

有了坐标系, 辩证法进入了数学. 有了坐标系, 运动进入了数学.

—Engels

这里的“运动”, “坐标系”只是变量引入数学的结果. 自然, 这让我们探索的内容更加的丰富, 同时也更加容易犯错了. 比如, 我们很多时候喜欢对变量做替换. 但是, 下面的代换显然是错的:

**Example 例子:**

“那曲市” := “中国最大的城市”

“那曲市” 有三个汉字

“中国最大的城市” 有三个汉字

因为“中国最大的城市”这个字符串有 7 个汉字构成. 这就警告我们要在变量代换的时候要格外小心. 那么, 变量有哪些类型呢?

在公式  $\forall x.P(x, y) \vee \exists y.R(x, y)$  中, 根据量词作用域的定义,  $\forall x$  的作用域是  $P(x, y)$ , 因此  $x$  受到了  $\forall x$  的约束, 从而把这个变元称作**约束变元**. 然而这个的  $y$  没有受到  $\forall x$  的约束, 所以称为**自由变元**.

**定义 2.5.8** (约束变元与自由变元). 给定公式  $\forall x.G$  和  $\exists x.G$ ,  $G$  为  $\forall x$  和  $\exists x$  的作用域, 那么  $G$  中的  $x$  出现的都是约束出现 (bounded occurrence), 称变元  $x$  则是约束变元 (bound variable),  $G$  中不同于  $x$  的其他变元出现的则是自由出现 (free occurrence), 称这些变元为自由变元 (free variable)

### Dialogue 对话

A: 这就像 C 语言里面判断一个变量是不是被定义过了一样! 如果被定义过了, 自然不能乱搞, 如果没有定义过, 改个和定义过的名字不一样的, 应该也是等价的.

B: 对, 名字是次要的, 真正的表达的东西才是核心啊!

可能由于重名的原因, 我们发现同样一个字母既可以表示自由变元, 又可以表示约束变元, 这样就很不利于我们问题的分析. 为此, 我们给出变元的代换规则, 可以让每一个符号各司其职.

**定理 2.5.1** (变元的代换规则). 对变元可以做如下的变量替换, 推理是有效的:

- (1) 约束变元改名. 将量词作用域内与作用变元相同的约束变元用新的个体变元替换. 新的变元要与作用域的其他变量名符号不同.
- (2) 自由变元带入. 将公式中的某个自由变元的每一处用新的个体变元或个体常量带入. 并且新变元不允许在公式中以任何约束形式出现.

上面的两条关系在带入之前和带入之后都没有改变原有命题之间的约束关系. 但是使用 (2) 之后, 公式的含义就发生了变化, 但是推理是成立的—比如选择常量带入进去, 那么命题就退化成了一个特化的情况了.

没有自由变量的公式有着很好的性质—他的真值表就可以确定了. 我们把这样的内容叫做闭式.

**定义 2.5.9** (闭式). 设  $G$  是任意的一个公式, 如果  $G$  中没有自由变元, 那么  $G$  被称为封闭的公式, 简称闭式.

**定理 2.5.2.** 闭式一定是命题.

在命题逻辑中, 我们运用了真值指派的方式来了解了这个命题的真值情况, 那么这里, 我们能不能也用类似的方法“解释”一个命题逻辑的含义呢?

## 2.6 尝试解释谓词公式

### 2.6.1 谓词公式, 解释, 等价表示

谓词公式的解释远远没有我们想象的那么简单! 在不同的数学结构中, 同一个谓词公式很可能有不同的结果!

**Example 例子:**

考虑

$$\alpha : \forall x.(x \times x \neq 1 + 1),$$

$\alpha$  在数学结构  $\mathcal{U} = \mathbb{Q}$  中是真的, 但是在数学结构  $\mathcal{U} = \mathbb{R}$  中是假的.

从上面的例子, 我们可以看出来, 要想解释清楚一个谓词逻辑的公式, 我们需要考虑对象所处的数学空间来下结论. 也就是一个表达式的语义大致取决于:

- 对量词论域 (universe) 的解释, 限定个体范围;
- 对常数符号、函数符号、谓词符号的解释;
- 对自由变元的解释 (赋值函数  $s$ ).

也就是这种“解释”将公式映射到一个数学结构  $\mathcal{U}$  上, 这决定了该公式的语义.

什么是解释呢? 更正式一点, 我们认为一个公式的解释由下列四部分组成:

**定义 2.6.1.** 谓词逻辑中的谓词公式  $G$  的一个解释 (interpretation)  $I$  由以下的四部分构成:

- (1) 非空的个体域  $D$ ;
- (2)  $G$  中的每个常量符号, 指定  $D$  中的某个特定的元素.
- (3)  $G$  中的每个  $n$  元函数符号, 指定的是每一个元随意选择得到的所有可能的结果的集合对应到  $D$  的一个函数
- (4)  $G$  中的每个  $n$  元谓词符号, 指定每一个元随意选择得到的所有可能的结果的集合到  $\{0, 1\}$  的某个特定的谓词.

因此, 我们给出在一个特定的数学结构上“满足”的定义.

**定义 2.6.2**  $((\mathcal{U}, s) \models \alpha)$ .  $\mathcal{U}$  与  $s$  满足公式  $\alpha$ :

$$(\mathcal{U}, s) \models \alpha$$

- 将  $\alpha$  中的常数符号、函数符号、谓词符号按照结构  $\mathcal{U}$  进行解释,
- 将量词的论域限制在集合  $|\mathcal{U}|$  上,
- 将自由变元  $x$  解释为  $s(x)$ ,
- 这样就将公式  $\alpha$  翻译成了某个数学领域中的命题,
- 然后, 使用数学领域知识我们知道该命题成立

同样的, 我们也可以说明语义蕴含在谓词逻辑中的定义:

**定义 2.6.3** (语义蕴含 (Logically Imply)). 令  $\Sigma$  为一个公式集,  $\alpha$  为一个公式.

$\Sigma$  **语义蕴含**  $\alpha$ , 记为  $\Sigma \models \alpha$ , 如果每个满足  $\Sigma$  中所有公式的结构  $\mathcal{U}$  与赋值  $s$  都满足  $\alpha$ . 记作

$$\{\forall x. P(x)\} \models P(y)$$

当然, 我们当然希望为公式能够在等价的意义下能够完成推理. 所以我们需要首先研究什么样的公式在怎样的情形下是等价的.

**定理 2.6.1** (谓词公式等价的定律). (1) 改名规则:

$$E_{25} : \forall x.G(x) \Leftrightarrow \forall y.G(y)$$

$$E_{26} : \exists x.G(x) \Leftrightarrow \exists y.G(y)$$

(2) 量词转换率/量词否定等值式 (对偶原理):

$$E_{27} : \neg \exists x.G(x) \Leftrightarrow \forall x.\neg G(x)$$

$$E_{28} : \neg \forall x.G(x) \Leftrightarrow \exists x.\neg G(x)$$

(3) 量词作用域的扩展/收缩:

$$E_{29} : \forall x.(G(x) \vee S) \Leftrightarrow \forall x.G(x) \vee S;$$

$$E_{30} : \forall x.(G(x) \wedge S) \Leftrightarrow \forall x.G(x) \wedge S;$$

$$E_{31} : \exists x.(G(x) \vee S) \Leftrightarrow \exists x.G(x) \vee S;$$

$$E_{32} : \exists x.(G(x) \wedge S) \Leftrightarrow \exists x.G(x) \wedge S;$$

(4) 量词的换序:

$$E_{33} : \forall x.G(x) \vee \forall x.H(x) \Leftrightarrow \forall x\forall y.(G(x) \vee H(y))$$

$$E_{34} : \exists x.G(x) \wedge \exists x.H(x) \Leftrightarrow \exists x\exists y.(G(x) \wedge H(y))$$

(5) 量词分配率:

$$E_{35} : \forall x.(G(x) \vee H(x)) \Leftrightarrow \forall x.G(x) \vee \forall x.H(x)$$

$$E_{36} : \exists x.(G(x) \wedge H(x)) \Leftrightarrow \exists x.G(x) \wedge \forall x.H(x)$$

(6) 对于多个量词的命题公式, 若  $G(x, y)$  是含有自由变量  $y$  的谓词公式, 那么有

$$E_{37} : \forall x\forall y.G(x, y) \Leftrightarrow \forall y\forall x.G(x, y)$$

$$E_{38} : \exists x\exists y.G(x, y) \Leftrightarrow \exists y\exists x.G(x, y)$$

## 2.7 谓词公式的标准形

仿照命题公式, 我们也想看一看, 谓词公式最后有没有一个统一的形式, 使得我们的表达和交流更加的方便.

当然, 命题逻辑公式有与之等值的范式. 谓词逻辑公式也有范式, 但不是所有范式都与原公式等值, 有一些可能条件会相对弱化一些, 下面介绍两个形式.

我们想, 任何的内容是不是都可以把所有的量词提到前面, 后面的内容就没有量词记号了. 这就会给我们的证明和讨论带来很好的方法.

## 前束范式

定义 2.7.1 (前束范式). 具有形式

$$Q_1x_1.Q_2x_2.\cdots Q_nx_n.M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的谓词公式称为前束范式 (prenex normal form), 其中  $Q_i$  为量词,  $M$  为不含量词的公式.

那么这个内容是不是存在的呢? 是不是唯一的呢? 实际上, 这是存在的, 但是不是唯一的.

### Dialogue 对话

A: 我还是希望看一下证明.

B: 好的. 这部分的证明可以在《Classical mathematical logic : the semantic foundations of logic》这本书里面找到, 下面抄一下里面的证明.

证明. (Copied from Page 108: Normal form theorem) We proceed by induction on the length of  $A$  to show that first  $A$  has a prenex normal form. If  $A$  is atomic or is quantifier free, we are done. So suppose theorem is true for all wffs (Well-formed formula, finite sequence of symbols from a given alphabet that is part of a formal language) shorter than  $A$ .

Suppose  $A$  has the form  $\neg C$ . Then by induction there is a wff  $C^*$  in prenex normal form for  $C$ . By Corollary 11, we are then done.

Suppose  $A$  has the form  $C \wedge D$ , Then by induction  $C$  and  $D$  have prenex normal forms,  $Q_1y_1 \cdots Q_ny_nC^*$  and  $Q_{n+1}z_1 \cdots Q_{n+m}y_mD^*$ . By Theorem 3 we can substitute so that we may assume that no  $y_i$  is a  $z_i$ . Then by parts (e) - (h) of the Tarski-Kuratowski algorithm,  $Q_1y_1 \cdots Q_ny_nQ_{n+1}z_1 \cdots Q_{n+m}z_mC^* \wedge D^*$  is semantically equivalent  $C \wedge D$ , and is in prenex form, and satisfies (ii) and (iv). The case when  $A$  has the form  $C \vee D$  is done similarly.

Suppose that  $A$  is of the form  $C \rightarrow D$ . Then  $C \rightarrow D$  is semantically equivalent in PC to  $\neg(C \wedge \neg D)$ . So we can use Theorem 7 and what we've already established.

If  $A$  has form  $\forall C$ . then by induction there is a wff  $C^*$ , in prenex normal form for  $C$ . Hence, by Theorem 1, Theorem 4, and Theorem IV.4, we are done. If  $A$  is of the form  $\exists x.C$  the proof is the same.

Finally, by applying Theorem 7 and the normal form theorem for propositional logic to a prenex normal form for  $A$ , we can obtain both a conjunctive normal form for  $A$  and a disjunctive normal form for  $A$ .  $\square$

### Dialogue 对话

B: 呃呃. 怎么还引用起来了其他的定理了啊...

A: 这可是一本书里面的一个部分. 所以说这一章的名字叫简单的数理逻辑.

我们发现, 前束范式虽然能够把两次放在最前端, 但是不唯一.

## Skolem 范式

要想唯一, 就要牺牲一点“等价性”. 这个意思就是说得到一个比原来命题结果要弱一些的结果. 这样, 我们就可以得到 Skolem 范式.

定义 2.7.2. 设公式

$$Q_1x_1.Q_2x_2.\cdots Q_nx_n.M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

是一个前束合取范式, 按照从左往右的顺序去掉  $G$  中存在的量词, 若  $Q_i$  是存在量词, 且  $i = 1$ , 则直接用个体常量代替  $M$  中的所有的  $x_1$ , 并且在  $G$  中删除  $Q_1x_1$ . 若  $i > 1, Q_1, Q_2, \cdots, Q_{i-1}$  都是全称量词, 则在  $G$  中使用一个未使用过的函数符号, 如  $f$ , 并且用  $f(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1})$  替换  $G$  中的所有的  $x_i$ , 然后删去  $Q_ix_i$ . 重复这个过程, 直到  $G$  中没有量词为止.

**Example 例子:**

求

$$\neg(\forall x.\exists y.P(x, y) \rightarrow \exists x.(\neg\forall y.Q(y, a) \rightarrow R(b, x)))$$

的 Skolem 范式.

解答:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \neg(\neg\forall x\exists yP(x, y) \vee \exists x(\neg\neg\forall yQ(y, a) \vee R(b, x))) \\ &\Leftrightarrow \forall x\exists yP(x, y) \wedge \neg\exists x(\forall yQ(y, a) \vee R(b, x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x\exists yP(x, y) \wedge \forall x(\exists y\neg Q(y, a) \wedge \neg R(b, x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(\exists yP(x, y) \wedge \exists y\neg Q(y, a) \wedge \neg R(b, x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(\exists yP(x, y) \wedge \exists z\neg Q(z, a) \wedge \neg R(b, x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x\exists y\exists z(P(x, y) \wedge \neg Q(z, a) \wedge \neg R(b, x)) \end{aligned}$$

现在消去存在  $y$ , 有

$$\forall x.\exists z.(P(x, f(x)) \wedge \neg Q(z, a) \wedge \neg R(b, x))$$

然后消去存在  $z$ , 有

$$\forall x.(P(x, f(x)) \wedge \neg Q(g(x), a) \wedge \neg R(b, x))$$

#

## 2.8 谓词逻辑的推理要求

相比于命题逻辑, 谓词逻辑要求的内容就多了不少了. 具体的, 我们可以把全称量词, 特称量词替换掉. 或者把它们替换掉为一个特殊的命题. 我们有如下的规则:

定理 2.8.1. 谓词逻辑的推理规则:

- (1) 全称量词的消去;
- (2) 全称量词的引入;
- (3) 特称量词的引入

## 2.9 常见的证明方法

### 著名的推理规则：三段论

上一次我们说到了因为  $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$  是永真式, 因此我们有了  $(p \wedge (p \rightarrow q)) \Rightarrow q$ . 三段论的内容被叫做 Modus Ponens.

Modus Ponens 来源于古拉丁文, 翻译成英语就是 method of putting by placing. 也就是说, 在推理的过程中, 如果  $p$  是真的,  $p \rightarrow q$ , 那么  $q$  是可以被接受的.

为什么呢? 因为如果有含蕴含词的永真式  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow B$ , 利用推理规则, 我们就能从前提条件  $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$  推出  $B$ , 以及  $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \cdots \rightarrow (A_n \rightarrow B))$

#### Bonus 思考题

蕴含记号支持结合律吗? 支持交换律吗?

### 当且仅当的证明

在中学, 我们学习了充分条件, 必要条件, 以及四种命题.

#### Dialogue 对话

A: 现在我知道如何否定命题“若  $p$  则  $q$ ”了!

B: 很好! 注意一下四种命题. 为什么命题和它的逆否命题真假性是一致的?

先对充要条件做描述: 充要条件是  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$

比如来看下面的问题:

**问题 2.9.1.** 求证:  $a^3 = b^3$  当且仅当  $a = b$ .

充分条件很容易说明. 但是必要条件如何说明呢? 我们高中知道命题和逆否命题真假一致, 能从命题逻辑的角度说明吗?

其实很容易.  $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$  是永真式就行了. 我们就有更加公理化的方法完成了证明.

**问题 2.9.2.** 为什么证明  $a^2 = b^2$  当且仅当  $a = b$  时不行的?

我们发现结论是析取式子 (或), 那么我们应该如何证明? 我们考察永真式  $(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q); (P \wedge Q), \neg P \Rightarrow Q$ . 为之构造一个合理的语言描述, 然后翻译成符号语言看上去是很好的一种方法.

### 反证法

Hardy 说证明  $\sqrt{2}$  是无理数是最漂亮的证明之一. 其中用了反证法. 不妨自己写出一个证明.

**问题 2.9.3.** 证明  $\sqrt{2}$  是无理数.



**Dialogue 对话**

A: 我感觉好难...

B: 那是因为高中没有学过数论! 去了解一些基本的整数的性质吧! 很多时候感觉困难只是因为前置知识没有做好. 补充上去就行了.

反证法之所以能成立, 是因为  $\neg A \Rightarrow C$ ,  $\neg A \Rightarrow \neg C$ , 必然有  $C \wedge \neg C \Rightarrow \text{False}$ . 根据上述的内容,  $(p \rightarrow q) \wedge (\neg q) \rightarrow \neg p$ , 所以化简得到  $\neg\neg A = A$ .

**Bonus 思考题**

我们应该如何否定含有量词的命题? 留到下一章节.

**基于数学对象结构的证明方法: 数学归纳法**

在分牌的时候, 我们可以使用这个小魔术:

- (1) 将一副纸牌按照红黑相间的模式排好;
- (2) 按照传统方式洗一次牌, 分牌时两叠牌显出的两张颜色互异;
- (3) 你能做到将牌放在背后 (自己看不见), 却能保证每次抽出两张牌, 始终是一红一黑吗?

这个过程的证明可以使用数学归纳法描述. 回忆一下数学归纳法的常见过程. (1) 归纳奠基; (2) 归纳假设; (3) 结论.

我们现在进行一个灵魂拷问:

**Bonus 思考题**

为什么数学归纳法在逻辑上是正确的?

事实上, 其合理性来自证明对象结构的定义.

**定义 2.9.1** (Peano 公理). 自然数的 Peano 公理有如下几条:

1. 0 是自然数;
2. 如果  $n$  是自然数, 则它的后继  $S_n$  也是自然数;
3. 0 不是任何自然数的后继;
4. 两个自然数相等当且仅当它们的后继相等;

对于自然数的归纳正确性, 我们还需要良序原理 (well-ordering principle). 可能需要很多的背景知识, 在这里仅仅给出基本的定义.

**定理 2.9.1** (第一数学归纳法 (The First Mathematical Induction)). 设  $P(n)$  是关于自然数的一个性质. 如果

1.  $P(0)$  成立;
2. 对任意自然数  $n$ , 如果  $P(n)$  成立, 则  $P(n+1)$  成立.

那么,  $P(n)$  对所有自然数  $n$  都成立.

**定义 2.9.2** (良序原理 (The Well-Ordering Principle)). 自然数集的任意非空子集都有一个最小元.

除了第一类数学归纳法, 其实还有更加强大的第二类数学归纳法. 并且两者之间是等价的.

**定理 2.9.2** (第二数学归纳法 (The Second Mathematical Induction)). 设  $Q(n)$  是关于自然数的一个性质. 如果

1.  $Q(0)$  成立;
2. 对任意自然数  $n$ , 如果  $Q(0), Q(1), \dots, Q(n)$  都成立, 则  $Q(n+1)$  成立.

那么,  $Q(n)$  对所有自然数  $n$  都成立.

他们的等价的推导, 用到了后面的量词相关的内容, 所以现在先暂时跳过. 不过, 第二类数学归纳法确实更加强大大一点. 比如可以证明任何一个整数可以分解成若干个素数的乘积.

#### Dialogue 对话

A: 数学归纳法这么好, 感觉什么整数的问题都能证明啊!

B: 其实没有你想象的那么简单. 《具体数学》上有关于它的论述, 但是我一时间找不到了.

最后, 我们用一个例子来结束这一节. 这是一个很烧脑的问题, 据说是由 Terry Tao 放在他的个人主页上的一道题.

**问题 2.9.4.** Of the 1000 islanders, it turns out that **100 of them have blue eyes** and **900 of them have brown eyes**, although the islanders are not initially aware of these statistics (each of them can of course only see 999 of the 1000 tribespeople).

One day, a **blue-eyed foreigner** visits to the island and wins the complete trust of the tribe.

One evening, he addresses the entire tribe to thank them for their hospitality.

However, not knowing the customs, the foreigner makes the mistake of mentioning eye color in his address, remarking “**how unusual it is to see another blue-eyed person like myself in this region of the world**”.

**What effect, if anything, does this *faux pas* (失礼) have on the tribe?**

答案比较令人出乎意料:

**定理 2.9.3.** Suppose that the tribe had  $n > 0$  blue-eyed people.

Then  $n$  days after the traveller's address, all  $n$  blue-eyed people commit suicide.

证明. 考虑采用数学归纳法:

- 基础步骤:  $n = 1$ .

这个**唯一的蓝眼人**的内心独白: “你直接念我身份证吧”

- 归纳假设：有  $n$  个蓝眼人时，前  $n - 1$  天无人自杀，第  $n$  天集体自杀。
- 归纳步骤：考虑恰有  $n + 1$  个蓝眼人的情况。  
每个蓝眼人都如此推理：我看到了  $n$  个蓝眼人，他们应该在第  $n$  天集体自杀。  
但是，每个蓝眼人都在等其它  $n$  个蓝眼人自杀，因此，第  $n$  天无人自杀。  
每个蓝眼人继续推理：一定不止  $n$  个蓝眼人，但是我看到的其余人都不是蓝眼。  
所以，“小丑竟是我自己”。

□

仔细考察这个例子，考虑  $n = 1, n = 2$  的简单情况，出现了类似“我知道你知道我知道...”的思维递归情形。数学归纳法帮我们挑选了其中的相邻两层，让我们更加清楚的直面问题。

#### Idea 启示

考虑递归问题的时候，在非边界条件的情形下，只用考虑连续的两层就可以了。关注状态变化。

#### Bonus 思考题

刚刚的魔术，为什么不是关于自然数的，也能用数学归纳法证明？

### 一个特别的证明：鸽巢原理

**定理 2.9.4.** 如果  $m$  只对象放入  $n$  个容器，其中  $m > n$ ，则至少有一个容器中对象个数大于 1。

#### Bonus 思考题

为什么鸽巢原理叫做“原理”而不是“公理”，“定理”？

## 2.10 重新审视算法的正确性：从基本结构开始

**问题 2.10.1.** 在本节开始之前，不妨先阅读 David Harel 写的书本《Algorithmics: The spirits of computing》，之后与本节的内容进行对比。

我们在之前知道，计算机解题的正确性在于正确算法的实现。那么算法的正确性来源于什么呢？不同于人类指令的有歧义和模糊，机器语言应该做到的是有明确的“基本指令”，与“控制结构”。

(对于初学者而言，) 精确的定义毫无意义。(见图2.4)

—蒋炎岩

无论如何，先忘掉这些抽象的名词吧。基本指令就可以想象成一行代码是如何进行的，它是如何操作了计算机的内部的。控制结构是一些描述那个当前的代码执行如何执行下一条指令的一系列规约。也就是描述了基本算法是什么，以及如何被实施的。

生活中很多的事情都可以用一些控制结构完成。我们来举几个例子：

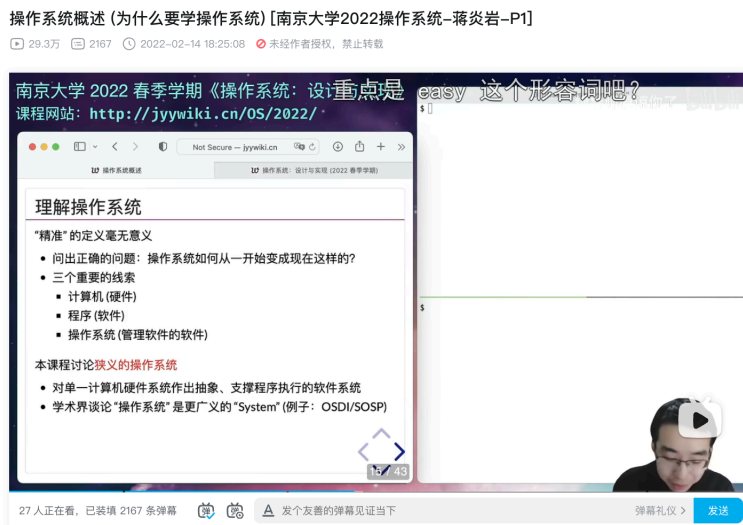


图 2.4: 蒋炎岩老师

## 顺序结构

### Example 例子:

吃一只蟹黄包的算法.

如何确保我们的过程无误? 其实我们可以在执行完之后进行监视. 每一个 guard 需要看一看前面的内容是不是已经完成了即可.

如果我们不打算只吃一只, 那么我们如何控制数量呢?

## 循环

一个很有趣的问题是: 如何确定循环的过程是正确的? 我们可以发现, 虽然循环的变量在变, 但是我们总是希望维系一个命题的值是真的. 由此我们引入“循环不变式”.

**定义 2.10.1** (循环不变式). 循环不变量是一个逻辑表达式, 在循环执行过程终止之前它应该始终为真.

例如, 我们使用累乘的方法去循环的时候, 循环不变式可以是“存放中间结果的量的值  $= a \times$  循环变量当前的值”.

类似于数学归纳法, 我们可以利用循环不变式证明循环算法证明的一个基本的方法:

**定理 2.10.1** (证明循环不变式的基本方法). (1) Initialization. It is true prior to the first iteration of the loop.

(2) Maintenance. If it is true before an iteration of the loop, it remains true before next iteration.

(3) Termination. The loop terminates, and when it terminates, the invariant – usually along with the reason that the loop terminated – gives us a useful property that helps show that the algorithm is correct.

下面我们为上述的两种吃蟹黄汤包的策略选定一个循环不变式. 对于策略 I, 我们有在循环终止之前, 我还没有饱的; 对于策略 II, 我们的循环不变式是计数器的值 = 存放临时变量的值 +1

我们发现不变量对于问题求解有很大的价值. 比如下面的这个问题:

**问题 2.10.2.** 在世界杯足球赛的第二阶段 (小组赛结束后) 进行单循环比赛, 每场必须分出胜负, 赢者进下一轮, 输者回家. 16 个队参加, 赛多少场决出冠军?

答案是 15 场. 因为每一次循环满足不变量: 这一次的值 = 上一次的值-1. 由此就可以归纳了.

与之类似的问题,

**问题 2.10.3.** A rectangular chocolate bar is divided into squares by horizontal and vertical grooves, in the usual way. It is to be cut into individual squares. A cut is made by choosing a piece and cutting along one of its groove. (Thus each cut splits one piece into two pieces) How many cuts are needed to completely cut the chocolate into all its squares?

解答的方法也是和前面的完全一样, 他们是遵循同一个“差 1”的不变量的. 这就是不变量对于问题求解的价值.

## 算法的条件分支

基本上, 算法用于决策的判断条件是一个命题逻辑, 根据其真假可以判别. 这时候我们在前面的一些内容就派上用场了.

上面我们已经对每一个部分所有的语义简单进行了了解, 下面, 我们把它们组合, 嵌套起来, 看一看他们能够解决什么样的问题.

## 组合起来: 列举与嵌套 (nesting)

从一个很常见的问题开始: 冒泡排序.

**问题 2.10.4.** 用上面的语句 (可以画流程图) 及其列举与嵌套, 完成排序问题:

- (1) 输入: 长度为  $n$  的自然数序列  $S$  (假设其中没有重复元素).
- (2) 输出: 序列  $S'$ , 其元素与  $S$  完全一样, 但已从小到大排好序.

一个可能的设计方法如图2.5所示. 我们可以模拟执行它.

我们可以把内循环同样抽象成一个问题, 将一个 (子) 序列中的最大元素放到该子序列位置地址最大的地方 (可以认为最后方). 那么对于它, 我们应该如何定义循环不变量?

每次  $i$  循环开始前, 序列  $S$  中地址最高的  $i$  个位置 (除  $i = 0$  外, 即  $S[n-i]$  到  $S[n-1]$ ) 包含  $S$  中前  $i$  个最大的元素, 且已从小到大排好序; 序列中其它位置上的元素即  $S$  中其它  $n-i$  个元素.

下面按照如下的三个方法归纳:

- 当  $i = 0$ , 显然;

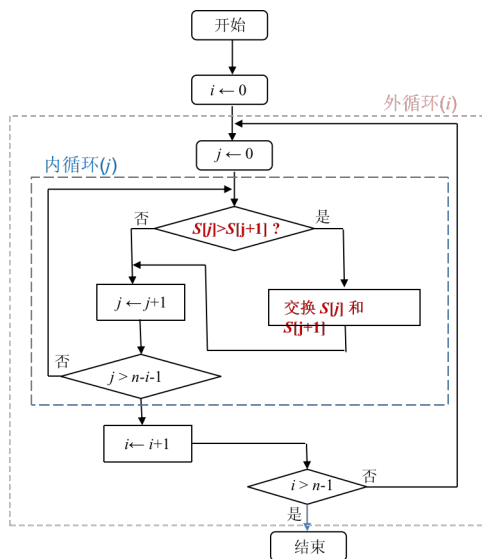


图 2.5: 冒泡排序的一个实现方法 (流程图)

- 如果当  $i = k > 0$  时上述命题成立, 即  $k$  循环开始前,  $S$  中最大的  $k$  个元素已被置换到  $S[n-k]$  到  $S[n-1]$ ; 在  $k$  循环中, 指针  $j$  从位置 0 扫描到位置  $n-k-1$ , 并将此范围内最大元素置换到  $S[n-k-1]$ . 则当  $i = k+1$  时,  $S$  中最大的  $k+1$  个元素被排好序, 放置在  $S[n-(k+1)]$  到  $S[n-1]$ ;
- 当  $i = n$ , 算法终止, 即  $n$  循环 (未执行) 前,  $n$  个  $S$  中的元素排好序, 并放置在  $S[0]$  到  $S[n-1]$  的位置上.

事实上, 把所有内容嵌套起来就是我们构造很复杂的情形的一个基本的方法. 因此, 我们就把很多简单的过程通过这样的方式进行了组合.

如果我们通过“子问题拆解”的方法来做这件事, 有什么样的好处?

### Bonus 思考题

在第一章里面我么说 TRM 里面有一条跳转指令, 为什么现在我们没有详细介绍 goto 指令, 并且绝大多数语言 (除了 C, C++) 都没有了 goto 呢?

Passage 文章

### Go To Statement Considered Harmful(Cropped)

E.W. Dijkstra

from Communications of the ACM, Vol. 11, No. 3, March 1968, pp. 147-148

My first remark is that, although the programmer's activity ends when he has constructed a correct program, the process taking place under control of his program is the true subject matter of his activity, for it is this process that has to accomplish the desired effect; it is this process that in its dynamic behavior has to satisfy the desired specifications. Yet, once the program has been made, the "making" of the corresponding process is delegated to the machine.

My second remark is that our intellectual powers are rather geared to master static relations and that our powers to visualize processes evolving in time are relatively poorly developed. For that reason we should do (as wise programmers aware of our limitations) our utmost to shorten the conceptual gap between the static program and the dynamic process, to make the correspondence between the program (spread out in text space) and the process (spread out in time) as trivial as possible.

.....

The unbridled use of the go to statement has an immediate consequence that it becomes terribly hard to find a meaningful set of coordinates in which to describe the process progress. Usually, people take into account as well the values of some well chosen variables, but this is out of the question because it is relative to the progress that the meaning of these values is to be understood! With the go to statement one can, of course, still describe the progress uniquely by a counter counting the number of actions performed since program start (viz. a kind of normalized clock). The difficulty is that such a coordinate, although unique, is utterly unhelpful. In such a coordinate system it becomes an extremely complicated affair to define all those points of progress where, say,  $n$  equals the number of persons in the room minus one!

The go to statement as it stands is just too primitive; it is too much an invitation to make a mess of one's program. One can regard and appreciate the clauses considered as bridling its use. I do not claim that the clauses mentioned are exhaustive in the sense that they will satisfy all needs, but whatever clauses are suggested (e.g. abortion clauses) they should satisfy the requirement that a programmer independent coordinate system can be maintained to describe the process in a helpful and manageable way.

.....

In Guiseppe Jacopini seems to have proved the (logical) superfluosness of the go to statement. The exercise to translate an arbitrary flow diagram more or less mechanically

into a jump-less one, however, is not to be recommended. Then the resulting flow diagram cannot be expected to be more transparent than the original one.

## 2.11 继续理解子过程和递归

### 子过程

在程序变的更加复杂的时候, 程序就会变得像面条一样难以复杂.

之后文件夹下面就有一些.s 文件了. 这是把 C 语言展开为了最基本的指令序列的结果. 可见, 当问题规模变得复杂的时候, 我们必须让复用重复的部分更加容易.

#### Bonus 思考题

所以, 用子过程有什么好处?

一个很好的问题是对于子过程, 什么会变, 什么不变? 一个可能的答案是代码的表现形式会变, 但是及其在外部看到的与其等价的形式是不会变的.

另外一个好处是子过程允许“自己调用自己”. 当然, 不加结束的自己调用自己会带来很多的问题. 比如, 下面的程序里面:

```
1 def call_myself():
2     print("I am calling myself that cannot stop!")
3     call_myself()
```

注意到 Python 会抛出 RecursionError. 如果是用 C 或者 C++ 来写同样的东西, 可能就不是很友好了. 因为它只会卡住, 然后就有一个奇怪的返回值, 令人摸不着头脑.

### 递归

在第一章我们用小纸条和老师以及作业本说明了什么是递归. 在这一节我们有一个更加重要的问题: 递归与数学归纳法有什么区别? 比如 Hanoi 塔问题:

**问题 2.11.1** (Hanoi 塔问题). Object of the game is to move all the disks over to Tower 3 (with your mouse). But you cannot place a larger disk onto a smaller disk.

You may play it here: <https://www.mathsisfun.com/games/towerofhanoi.html>

现在我们来谈一说数学归纳法到递归的一个关系:

**数学归纳法.** “假如”这个结论对  $k - 1$  是成立的, 我试图证明它对  $k$  也是成立的. 如果我做到了, 就可以认为 (当然考虑到“奠基”) 对任意不小于奠基值的自然数结论都成立.

**递归.** “假如”有“人”能帮我解决规模为  $k - 1$  的问题“实例”, 我就试图用那个结果来解决该问题规模为  $k$  的“实例”; 如果我做到了, 就可以认为 (当然也得给个“base case”的解法) 我解了这个问题.

但是这样思维上看上去很自然, 我们到底要如何执行呢? 事实上, 就是我们使用的那个“作业与纸条”的例子. 我们用 call stack 以及程序执行当前行的“箭头”来进行计算.



**Example 例子:**

计算机是如何执行 Hanoi 塔的递归程序的.

下面我们来看更多的例子.

**生成的排列.**

今天我们希望生成  $10!$  的排列. 比如从 1234567890 一直生成到 0987654321 为止.

那么, 利用递归的思想很容易看出当  $n = 4$  时的结果和当  $n = 3$  时的结果是什么关系?

每一步有两种情形: 第一种是在前面加一个, 第二种是在后面加一个. 如我们有  $x$ , 接下来考虑加  $a$ , 那么有  $ax$  或者  $ax$ . 然后变为更加基础的情形.

**故事仍在继续...**

我们会在下学期来进行更多的计算的细节. 例如均摊的分析, 摊还分析等手法.

与算法一起, 我们可以和计算机完成很多有趣的事情, 因此, 我们还需要学习更多的技巧, 让我们在后续的课程中学习更多的内容!

Real power can't be given, it must be taken.

– Godfather



## 第三章 集合论以及二元关系 [M]

$$S = \{x | x \notin x\}$$

–Georg Cantor

Point set topology is a disease from which the human race will soon recover. Later generations will regard Mengenlehre (set theory) as a disease from which one has recovered.

–Henri Poincare

We are not speaking here of arbitrariness in any sense. Mathematics is not like a game whose tasks are determined by arbitrarily stipulated rules. Rather, it is a conceptual system possessing internal necessity that can only be so and by no means otherwise.

–David Hilbert

### 3.1 简单的朴素集合论的一些定义

在中学的时候，我们定义的集合是如下的一个数学对象：**集合**就是任何一个**有明确定义**的对象的**整体**。

#### Dialogue 对话

A: 这个定义看上去好有道理...

B: 其实集合大多数情况是不做定义的...

A: 为什么?

B: 其实原因是说了就不灵了... 一会回看到 Russell 悖论。

**定义 3.1.1** (集合). 我们将**集合**理解为任何将**我们思想中那些确定而彼此独立的对象**放在一起而形成的**聚合**。

这也引出了概括原则:

**定理 3.1.1** (概括原则). 对于任意性质/谓词  $P(x)$ , 都存在一个集合  $X$ :

$$X = \{x \mid P(x)\}$$

很多时候我们需要判别两个集合是不是相等, 那么我们有外延性原理:

**定义 3.1.2** (外延性原理 (Extensionality)). 两个集合相等 ( $A = B$ ) 当且仅当它们包含相同的元素.

$$\forall A. \forall B. \left( (\forall x. (x \in A \leftrightarrow x \in B)) \leftrightarrow A = B \right)$$

这条公理意味着集合这个对象完全由它的元素决定.

有时候我们需要从一个集合里面抽出一部分, 也就是寻找一个集合的子集. 因此我们有如下的定义.

**定义 3.1.3** (子集). 设  $A$ 、 $B$  是任意两个集合.

$A \subseteq B$  表示  $A$  是  $B$  的**子集** (subset):

$$A \subseteq B \iff \forall x \in A. (x \in A \rightarrow x \in B)$$

$A \subseteq B$  表示  $A$  是  $B$  的**真子集** (proper subset):

$$A \subseteq B \iff A \subseteq B \wedge A \neq B$$

我们还可以证明两个集合相等, 当二者互为对方的子集时候.

**定理 3.1.2.** 两个集合相等当且仅当它们互为子集.

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

然后, 让我们来对于高中学习过的操作重新定义一下.

**定义 3.1.4** (集合的并 (Union)).

$$A \cup B \triangleq \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

**定义 3.1.5** (集合的交 (Intersection)).

$$A \cap B \triangleq \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

除此之外, 像命题逻辑一样, 集合也有一些运算的规律. 我们可以将它与命题逻辑一起观察, 并且发现其中的规律.

**定理 3.1.3** (分配律 (Distributive Law)).

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

对于这样的命题, 我们同样给出证明.

证明. 对任意  $x$ ,

$$\begin{aligned} & x \in A \cup (B \cap C) \\ \iff & (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ \iff & (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ \iff & (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \\ \iff & x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

□

同样, 像命题公式一样, 集合的运算也遵循吸收率:

**定理 3.1.4** (吸收律 (Absorption Law)).

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

证明. 对任意  $x$ ,

$$\begin{aligned} x &\in A \cup (A \cap B) \\ \iff x &\in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \\ \iff x &\in A \end{aligned}$$

□

有了这个我们就可以使用这个证明一个比较重要的习题.

**定理 3.1.5.**

$$A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$$

证明. 对任意  $x$

$$\begin{aligned} x &\in B \\ \implies x &\in A \vee x \in B \\ \implies x &\in A \cup B \end{aligned}$$

□

**定义 3.1.6** (集合的差 (Set Difference); **相对补** (Relative Complement)).

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

**定义 3.1.7** (绝对补 (Absolute Complement);  $\overline{A}, A', A^c$ ). **设全集为  $U$ .**

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

其中, 全集  $U$  (Universe) 是当前正在考虑的所有元素构成的集合. 一般均默认存在. 通常可以注意到: 不存在“包罗万象”的全集.

和命题逻辑一样, 相对补和绝对补之间就像是命题符号一样, 存在一些联系.

**定理 3.1.6** (“相对补”与“绝对补”之间的关系). **设全集为  $U$ .**

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

证明. 对任意  $x$ ,

$$\begin{aligned}
 & x \in A \setminus B \\
 \iff & x \in A \wedge x \notin B \\
 \iff & x \in A \wedge (x \in U \wedge x \notin B) \\
 \iff & x \in A \wedge x \in \overline{B} \\
 \iff & x \in A \cap \overline{B}
 \end{aligned}$$

□

**定理 3.1.7** (德摩根律 (绝对补)). 设全集为  $U$ .

$$\begin{aligned}
 \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\
 \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}
 \end{aligned}$$

证明. 对任意  $x$ ,

$$\begin{aligned}
 & x \in \overline{A \cup B} \\
 \iff & x \in U \wedge \neg(x \in A \vee x \in B) \\
 \iff & x \in U \wedge x \notin A \wedge x \notin B \\
 \iff & (x \in U \wedge x \notin A) \wedge (x \in U \wedge x \notin B) \\
 \iff & x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \\
 \iff & x \in \overline{A} \cap \overline{B}
 \end{aligned}$$

□

**定理 3.1.8** (德摩根律 (相对补)).

$$\begin{aligned}
 C \setminus (A \cup B) &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \\
 C \setminus (A \cap B) &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B)
 \end{aligned}$$

证明.

$$\begin{aligned}
 & C \setminus (A \cup B) \\
 \iff & C \cap \overline{A \cup B} \\
 \iff & C \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) \\
 \iff & (C \cap \overline{A}) \cap (C \cap \overline{B}) \\
 \iff & (C \setminus A) \cap (C \setminus B)
 \end{aligned}$$

□

这些命题的意义在于再证明集合相关的命题的时候, 就不需要从中抽出一个元素单独讨论了; 相反, 我们可以用集合整体的性质.

证明.

$$\begin{aligned}
 & C \setminus (A \cup B) \\
 \iff & C \cap \overline{A \cup B} \\
 \iff & C \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) \\
 \iff & (C \cap \overline{A}) \cap (C \cap \overline{B}) \\
 \iff & (C \setminus A) \cap (C \setminus B)
 \end{aligned}$$

□

这里面有一个类似一个异或操作的运算符: 对称差.

**定义 3.1.8** (对称差 (Symmetric Difference)).

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

## 3.2 高级集合操作

### 3.2.1 交和并

既然集合的对象是一组元素, 那么集合也是对象, 集合中的元素自然也可以被传进去看作运算. 由此, 我们需要定义关于集合的集合的运算.

**定义 3.2.1** (广义并 (Arbitrary Union)). 设  $\mathbb{M}$  是一组集合 (a *collection* of sets)

$$\bigcup \mathbb{M} = \{x \mid \exists A \in \mathbb{M}. x \in A\}$$

举一些例子, 比如  $\mathbb{M} = \{\{1, 2\}, \{\{1, 2\}, 3\}, \{4, 5\}\}$ , 那么  $\bigcup \mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, \{1, 2\}\}$ . 注意元素只被解开了一次而不是一次解包到我们认为的“基本元素”. 因为有时候“基本元素”也是用集合定义的. 我们后来会发现我们可以把整个数学基础建立到集合论的基础上.

和求和记号一样, 为了方便书写, 我们也有类似的记号:

$$\bigcup_{j=1}^n A_j \triangleq A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \triangleq A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \triangleq \{x \mid \exists \alpha \in I. x \in A_{\alpha}\}$$

和广义并一样, 我们还有广义交. 定义如下:

**定义 3.2.2** (广义交 (Arbitrary Intersection)). 设  $\mathbb{M}$  是一组集合 (a *collection* of sets)

$$\bigcap \mathbb{M} = \{x \mid \forall A \in \mathbb{M}. x \in A\}$$

同样的, 如果  $\mathbb{M} = \{\{1, 2\}, \{\{1, 2\}, 3\}, \{4, 5\}\}$  是全集,  $\bigcap \mathbb{M} = \emptyset$ . 同样只是展开一次就行了. 注意一个有趣的情况:  $\bigcap \emptyset = U$ . “包含所有元素的集合”在后面会发现会导出一个矛盾, 有时候我们也会认为这样说的结果是未定义的.

那么类似的, 我们也希望广义集合里面有没有像普通集合的一些操作. 答案是肯定的. 下面我们来探讨一些有趣的内容.

**定理 3.2.1** (德摩根律).

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_{\alpha})$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_{\alpha})$$

证明. 对任意  $x$ ,

$$\begin{aligned} x &\in X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \\ &\iff x \in X \wedge \neg(\exists \alpha \in I. x \in A_{\alpha}) \\ &\iff x \in X \wedge (\forall \alpha \in I. x \notin A_{\alpha}) \\ &\iff \forall \alpha \in I. (x \in X \wedge x \notin A_{\alpha}) \\ &\iff x \in \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_{\alpha}) \end{aligned}$$

□

我们同样可以用这条规律来化简集合, 而不用真正在一个集合的集合里面取出来一个元素.

**Example 举例:**

如果

$$X_n = \{-n, -n+1, \dots, 0, \dots, n-1, n\}$$

请化简:

$$A = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \setminus X_n)$$

证明.

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \setminus X_n) \\ &= \mathbb{R} \setminus \left( \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} X_n \right) \\ &= \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \\ &= \mathbb{Z} \end{aligned}$$

□



### 3.2.2 排列的力量

在高中, 我们学习了排列组合. 如果对于集合中的元素进行“选择性缺席”, 这样就可以让我们构造出更加复杂而全面的集合了.

**定义 3.2.3** (幂集 (Powerset)).

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

这个之所以强大, 是因为给定一个  $A$ , 就有如下的内容可以被生成.

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

因为对于  $|A| = n$  的句子,  $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ , 因此有时候也写做  $2^A$  或者  $\{0, 1\}^A$ .

接下来看一个 (看似) 没啥用的定理:

**定理 3.2.2.**

$$S \in \mathcal{P}(X) \iff S \subseteq X$$

这个定理的作用是在  $\in$  和  $\subseteq$  之间转换, 同时脱去一层  $\mathcal{P}()$  记号.

**Example 举例:**

请证明:

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(S)))$$

证明. 根据上面的定理, 我们有

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))) \iff \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(S)).$$

分别证明之:

$$\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$$

$$\iff \emptyset \subseteq \mathcal{P}(S)$$

$$\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$$

$$\iff \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(S)$$

$$\iff \emptyset \in \mathcal{P}(S)$$

$$\iff \emptyset \subseteq S$$

□

其实幂集生成之间也有一些关系. 不妨看一看.

**定理 3.2.3.** 证明:

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$$

证明. 对于任意  $x$ ,

$$\begin{aligned}
 & x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \\
 \iff & x \in \mathcal{P}(A) \wedge x \in \mathcal{P}(B) \\
 \iff & x \subseteq A \wedge x \subseteq B \\
 \iff & x \subseteq A \cap B \\
 \iff & x \in \mathcal{P}(A \cap B)
 \end{aligned}$$

□

**定理 3.2.4.** 证明:

$$\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{P}(A_\alpha) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$$

证明. 对于任意  $x$ ,

$$\begin{aligned}
 & x \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{P}(A_\alpha) \\
 \iff & \forall \alpha \in I. x \in \mathcal{P}(A_\alpha) \\
 \iff & \forall \alpha \in I. x \subseteq A_\alpha \\
 \iff & x \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \\
 \iff & x \in \mathcal{P}\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)
 \end{aligned}$$

□

### 3.3 悖论的出现

前面我们提到“不存在含有任何东西的集合”. 这就是我们以前知道的通俗讲述的“理发师悖论”. 形式化的, 根据概括原则, 如果性质  $P$  是  $P(x) \triangleq “x \notin x”$ , 集合  $R = \{x \mid x \notin x\}$ , 那么  $R \in R$  吗?

“悖论出现于数学的边界上, 而且是靠近哲学的边界上”

— Godel

之后, 数学家们提出了 ZF(ZFC) 公理化集合论, 避免了这样的内容. 通过粗暴的避免了这种情况, 我们得到了一个还可以使用, 但是丧失了一部分确定性的集合.

### 3.4 二元关系: 简介以及简单运算

我们在初中和高中的学习中学习了很多的“关系”. 比如, 比较两个数的大小, 我们引入了“大于”, “小于”和“等于”的关系. 这样的内容我们可以进一步的抽象, 提炼出“关系”的一些共性.

比如, 我们可以在  $\mathbb{R}$  上定义“Near”关系.

**Example 举例:**

如果  $|a - b| < 1 (a, b \in \mathbb{R})$ , 则称  $a, b$  具有 Near 关系.

回顾我们学过的表达“关系”的运算符, 相当一部分满足下面的性质:

**自反性.**

$$\forall a \in X. (a, a) \in R$$

**对称性.**

$$\forall a, b \in X. ((a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R)$$

**传递性.**

$$\forall a, b, c \in X. ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R)$$

很多时候, 我们把自反性 + 对称性 = 相容关系. 相容关系的含义其实是表明这两个关系之间有交叉.

这样, 我们就可以把关系表示成一个集合. 不严格的说, 在上面的定义中, 我们可以有这样的集合:  $R = \{(a, b) \mid |a - b| < 1\}$ .

下面来看几个更多的例子. 比如整除关系.

**Example 举例:**

假设  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ , “关系”是  $X$  上的整除关系.

按照上面的展开, 我们就有所有整除的全体 (有序对  $(a, b)$  表示的关系是  $a|b$ ):

$$R = \{(1, 2), \dots, (4, 12), \dots, (12, 60), \dots, (4, 60), \dots, (60, 60)\}$$

可以看到在上述的关系中, 上面的自反性, 对称性, 传递性仍然满足. 这种结构十分的常见. 比如地图上面的地方的“可达”关系, 还有给定集合的幂集按“包含”关系排序, 自然数按照大小关系排序, 等等. 满足上述的三条性质的关系叫做“偏序关系”. 特殊的, 我们或许还会发现自然数可以唯一地按照大小被排成一排, 这是一种比较特殊的偏序关系, 后来我们会定义它为全序关系.

特别的, 我们可以把上述偏序关系画成一张图, 也就是在多个维度上都有不同的序, 因此没办法唯一的列成一列, 包含所有元素.

比如上述的幂集的例子, 化作一张图3.1所示:

观察正整数集, 发现这是一条链式结构, 它和上述的偏序集最大的区别是什么呢? 其实, 最大的区别是在整数中的大于关系存在“连接性”.

**连接性.**

$$\forall a, b \in X. ((a, b) \in R \vee (b, a) \in R)$$

也就是自反性 + 反对称性 + 传递性 + 连接性 = **全序关系**.

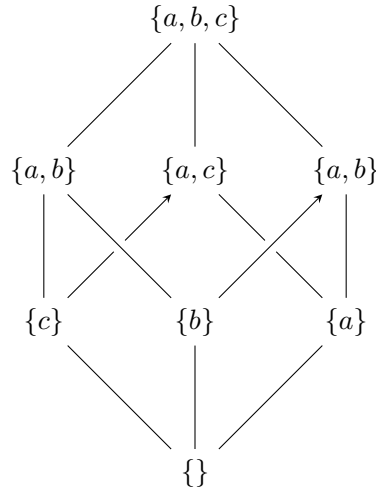


图 3.1: 偏序关系的图示

### 3.4.1 有序对

我们可能会很自然的想  $(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$ , 对于这样自然产生的概念, 我们同样要将它严格化, 给出一个定义.

历史上, 很多人会用集合的观念来刻画有序对. Norbert Wiener 在 1914 年给出了这样的定义.

**定义 3.4.1** (Ordered Pairs (Norbert Wiener; 1914)).

$$(a, b) \triangleq \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$$

这样一来, 有序对之间的相等关系看上去就自然了很多.

**定理 3.4.1.**

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$$

证明. 也就是证明

$$\left( \{\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \right) \iff (a = c \wedge b = d)$$

我们有:

$$\begin{aligned} & \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \\ \iff & (\{a\} = \{c\} \vee \{a\} = \{c, d\}) \wedge (\{a, b\} = \{c\} \vee \{a, b\} = \{c, d\}) \\ \iff & (\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c\}) \vee \\ & (\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}) \vee \\ & (\{a\} = \{c, d\} \wedge \{a, b\} = \{c\}) \vee \\ & (\{a\} = \{c, d\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}) \end{aligned}$$

□

有了有序对, 我们还可以把它拓广到  $n$  个元素的情况. 于是我们有定义:

**定义 3.4.2** ( $n$ -元组 (n-ary tuples)).

$$(x, y, z) \triangleq ((x, y), z)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \triangleq ((x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n)$$

在这个结构上同样是可以应用数学归纳法的. 不过一般我处理而二元组就行了. 多数情况下, 我们仅处理“二元关系”, 因此也仅使用“有序对”

### 3.4.2 笛卡尔积: 一种组合方式

如果我们有二个集合, 从二个集合中各取得一个元素, 把它们组合成一个有序对, 塞到一个新的集合里面, 这样, 我们就可以对于集合做一点组合, 生成更加复杂的集合了. 这样的操作叫做笛卡尔积.

**定义 3.4.3** (笛卡尔积 (Cartesian Products)). The *Cartesian product*  $A \times B$  of  $A$  and  $B$  is defined as

$$A \times B \triangleq \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

那么“笛卡尔积”这个操作满足哪些运算律呢? 我们首先来考察一些例子.

**Example 举例:**

$$X \times \emptyset = \emptyset \times X$$

$$X \times Y \neq Y \times X$$

$$(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$$

$$A = \{1\} \quad (A \times A) \times A \neq A \times (A \times A)$$

我们发现这个符号既没有普遍的交换律, 也没有普遍的结合律. 但是是有分配律的.

**定理 3.4.2** (分配律 (Distributivity)).

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$$

下面我们以证明  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$  为例, 看一下这个是如何进行起作用的.

证明. 对任意有序对  $(a, b)$ ,

$$\begin{aligned}
 & (a, b) \in A \times (B \cap C) \\
 \iff & a \in A \wedge b \in (B \cap C) \\
 \iff & a \in A \wedge b \in B \wedge b \in C \\
 \iff & (a \in A \wedge b \in B) \wedge (a \in A \wedge b \in C) \\
 \iff & (a, b) \in A \times B \wedge (a, b) \in A \times C \\
 \iff & (a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C)
 \end{aligned}$$

□

同样的, 我们可以有多个元素的笛卡尔积.

**定义 3.4.4** ( $n$ -元笛卡尔积 ( $n$ -ary Cartesian Product)).

$$X_1 \times X_2 \times X_3 \triangleq (X_1 \times X_2) \times X_3$$

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \triangleq (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$$

回想我们从数轴到平面直角坐标系再到空间直角坐标系, 我们可以发现这样的过程也就是对于一个维度反复做笛卡尔积的结果.

但在本节的情况下, 我们仅处理“二元关系”, 因此也仅使用“二元笛卡尔积”.

### 3.4.3 用有序对定义二元关系

我们以前做了有关关系的定义, 但是我们可能还要给“什么是关系”在集合方面下一个稍微集合化的定义. 于是我们有定义:

**定义 3.4.5** (关系 (Relations)). A *relation*  $R$  from  $A$  to  $B$  is a subset of  $A \times B$ :

$$R \subseteq A \times B$$

Specially, if  $A = B$ ,  $R$  is called a relation on  $A$ .

为了简化符号, 我们有时候也通过这样的方式来书写:

**定义 3.4.6** (Notations).

$$\begin{aligned}
 (a, b) \in R & \quad aRb \\
 (a, b) \notin R & \quad a\bar{R}b
 \end{aligned}$$

举一些例子:  $A \times B$  和  $\emptyset$  都是从  $A$  到  $B$  的关系, 前者的意义是任意两个  $A$  和  $B$  中的元素都有关系, 后者是都没有关系. 回顾我们在小学中学更一般的关系, 我们就会发现更加有趣的二元关系:

- 小于关系:  $< = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \text{ is less than } b\}$
- 整除关系:  $D = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists q \in \mathbb{N}. a \cdot q = b\}$

在生活中更有这样的关系. 比如  $P$  是所有人的集合, 如果我们定义  $M = \{(a, b) \in P \times P \mid a \text{ is the mother of } b\}$ ,  $B = \{(a, b) \in P \times P \mid a \text{ is the brother of } b\}$ , 那么上述定义的  $M$  和  $B$  都满足“关系”的定义.

有了这样的抽象, 我们就可以很开心的研究另外一些更重要的问题了. 具体地, 我们要研究这些重要的关系:

- 等价关系
- 序关系
- 函数

### 3.4.4 关系的简单运算

在进行之前, 我们认为对于关系的运算进行一些内容.

总体而言, 在这一小节中我们会给出三个定义, 5 个操作, 以及 7 个对应的性质.

其实, 这一节的内容很大程度上和中学定义的函数类似. 但是有一个重大的区别. 从现在开始, 我们稍微忘记我们高中关于“函数”的定义, 但是留下“函数”带给我们的思考方式. 下面我们来用有序对重新解释这一切.

#### 三个定义

**定义 3.4.7** (定义域 (Domain)).

$$\text{dom}(R) = \{a \mid \exists b. (a, b) \in R\}$$

我们在函数中说“定义域”是函数中有定义的地方的横坐标构成的集合, 在这里面的  $\exists b$  保证了在这个点一定被定义了, 那么我们就取出来它的  $a$ (横坐标). “扫描”所有这样的有序对  $(a, b)$  并将满足条件的  $a$  取出来, 我们就完成了这样类似概念的迁移.

**定义 3.4.8** (值域 (Range)).

$$\text{ran}(R) = \{b \mid \exists a. (a, b) \in R\}$$

我们在函数中说“值域”是函数中所有有定义的横坐标所对应的纵坐标, 在这里面的  $\exists a$  就说明了有这样的点被取到, 那么我们就取出来它的  $b$ (纵坐标). “扫描”所有这样的有序对  $(a, b)$  并将满足条件的  $b$  取出来, 同样有类似的概念.

**定义 3.4.9** (域 (Field)).

$$\text{fld}(R) = \text{dom}(R) \cup \text{ran}(R)$$

定义域和值域并起来就是域. 这样可以让我们直观的明确了解“二元关系”之间的空间映射关系.

举个例子: 对于  $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , 它的  $\text{dom}(R) = [-1, 1]$ ,  $\text{ran}(R) = [-1, 1]$ ,  $\text{fld}(R) = [-1, 1]$ .

我们来看一个更抽象的. 不过别忘了本质上就是用集合的操作解决这一切问题.

定理 3.4.3.

$$\text{dom}(R) \subseteq \bigcup \bigcup R \quad \text{ran}(R) \subseteq \bigcup \bigcup R$$

证明. 对任意  $a$ ,

$$\begin{aligned} a &\in \text{dom}(R) \\ \implies \exists b. (a, b) &\in R \\ \implies \exists b. \{\{a\}, \{a, b\}\} &\in R \\ \implies \exists b. \{a, b\} &\in \bigcup R \\ \implies \exists b. a &\in \bigcup \bigcup R \\ \implies a &\in \bigcup \bigcup R \end{aligned}$$

□

这个例子的直观解释就是任何的定义域, 值域都会在二元组的某一个元素中“出现”.

### 五种操作

1. 逆变换. 像“反函数”的概念一样, 关系有时候也有逆变换.

定义 3.4.10 (逆 (Inverse)). The *inverse* of  $R$  is the **relation**

$$R^{-1} = \{(a, b) \mid (b, a) \in R\}$$

我们可以来看几组例子:

- 如果  $R = \{(x, y) \mid x = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $R^{-1} = R$
- $R = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $R^{-1} = \{(x, y) \mid y = x^2 \wedge x > 0\}$
- $\leq = \{(x, y) \mid x \leq y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $\leq^{-1} = \geq \triangleq \{(x, y) \mid x \geq y\}$

直观地, 我们自然会想到反关系的反仍然是原来的关系. 所以我们有如下定理:

定理 3.4.4.

$$(R^{-1})^{-1} = R$$

证明. 对任意  $(a, b)$ ,

$$\begin{aligned} (a, b) &\in (R^{-1})^{-1} \\ \iff (b, a) &\in R^{-1} \\ \iff (a, b) &\in R \end{aligned}$$

□

既然关系也是集合定义的, 那我们自然可以证明它的交, 并, 补. 在我们做的有益的探索中, 我们会发现这个定理还是比较重要的.



**定理 3.4.5** (关系的逆). 如果  $R, S$  均为关系, 那么有

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$

$$(R \setminus S)^{-1} = R^{-1} \setminus S^{-1}$$

**2. 限制.** 由于问题的定义和性质, 有时候我们可能需要对于构造的“全面”集合的状态空间进行“裁切”, 来打造更精细的集合. 这样就可以自然地引入集合的限制操作. 我们希望引入这样的记号, 使得它可以对于这个关系二元组  $(a, b)$  中的  $a, b$  分别加以筛选. 于是我们有定义:

**定义 3.4.11** (左限制 (Left-Restriction)). Suppose  $R \subseteq X \times Y$  and  $S \subseteq X$ . The *left-restriction* relation of  $R$  to  $S$  over  $X$  and  $Y$  is

$$R|_S = \{(x, y) \in R \mid x \in S\}$$

**定义 3.4.12** (右限制 (Right-Restriction)). Suppose  $R \subseteq X \times Y$  and  $S \subseteq Y$ . The *right-restriction* relation of  $R$  to  $S$  over  $X$  and  $Y$  is

$$R|^S = \{(x, y) \in R \mid y \in S\}$$

**定义 3.4.13** (限制 (Restriction)). Suppose  $R \subseteq X \times X$  and  $S \subseteq X$ . The *restriction* relation of  $R$  to  $S$  over  $X$  is

$$R|_S = \{(x, y) \in R \mid x \in S \wedge y \in S\}$$

哎呀!“限制”和“左限制”的记号重复了! 但是仔细看一下他们的前提是不一样的.“左限制”的前提是有  $R \subseteq X \times X$ , 而“限制”的前提是  $R \subseteq X \times X$ , 也就是自己集合中元素到自己集合元素的关系.

下面我们来看刚刚举的例子: 如果  $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $R|_{\mathbb{R}^+}$  的含义就是表示关系的二元组  $(a, b)$ ,  $a$  只取  $\mathbb{R}^+$  的时候满足的才被认为“满足”关系.

#### Bonus 思考题

对于这样的情况, 我们能不能使用  $xOy$  平面表达这种关系呢? 限制在平面上的意义是什么?

**3. 像 (Image).** 想一想这种“有所对应”的感觉, 好像在高中学习函数那一节里面见过类似的, 也就是有点像函数里面  $f()$  做的事情. 同样的, 这里面也有类似描述这样一种“有所对应”的定义.

**定义 3.4.14** (像 (Image)). The *image* of  $X$  under  $R$  is the set

$$R[X] = \{b \in \text{ran}(R) \mid \exists a \in X. (a, b) \in R\}$$

为了简化符号, 一般而言  $R[a] \triangleq R[\{a\}] = \{b \mid (a, b) \in R\}$ .

**4. 逆像.** 同样的, 我们有时候可能需要顺藤摸瓜, 这就自然地导出了像也有“逆”的概念.

定义 3.4.15 (逆像 (Inverse Image)). The *inverse image* of  $Y$  under  $R$  is the set

$$R^{-1}[Y] = \{a \in \text{dom}(R) \mid \exists b \in Y. (a, b) \in R\}$$

同样为了简化记号, 我们有  $R^{-1}[b] \triangleq R^{-1}[\{b\}] = \{a \mid (a, b) \in R\}$ .

有了这两个操作之后, 事情就变得复杂了. 比如  $R^{-1}[R[X]]$  和  $X$  的关系如何,  $R[R^{-1}[Y]]$  和  $Y$  的关系又如何? 经过证明, 我们给出如下的定理:

定理 3.4.6.

$$R[X_1 \cup X_2] = R[X_1] \cup R[X_2]$$

$$R[X_1 \cap X_2] \subseteq R[X_1] \cap R[X_2]$$

$$R[X_1 \setminus X_2] \supseteq R[X_1] \setminus R[X_2]$$

证明. 对任意  $(a, b)$ ,

$$\begin{aligned} (a, b) &\in (R \circ S)^{-1} \\ \iff (b, a) &\in R \circ S \\ \iff \exists c. (b, c) &\in S \wedge (c, a) \in R \\ \iff \exists c. (c, b) &\in S^{-1} \wedge (a, c) \in R^{-1} \\ \iff (a, b) &\in S^{-1} \circ R^{-1} \end{aligned}$$

□

定理 3.4.7.

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

5. 复合. 像复合函数一样, 这是一种构建复杂系统的很好的一种方法. 因此我们自然给出定义:

定义 3.4.16 (复合 (Composition;  $R \circ S, R; S$ )). The *composition* of relations  $R \subseteq X \times Y$  and  $S \subseteq Y \times Z$  is the *relation*

$$R \circ S = \{(a, c) \mid \exists b. (a, b) \in S \wedge (b, c) \in R\}$$

举个例子,  $R = \{(1, 2), (3, 1)\}$   $S = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$ , 那么  $R \circ S = \{(1, 1), (2, 1)\}$ ,  $S \circ R = \{(1, 2), (1, 3), (3, 3)\}$ . 因为这个和“乘法”比较相似, 有时候我们也用空心圆圈表示.  $R^{(2)} \triangleq R \circ R = \{(3, 2)\}$ ,  $(R \circ R) \circ R = \emptyset$ .

#### Bonus 思考题

有的人习惯记号  $A \circ B \circ C = A \circ (B \circ C)$ , 还有的人习惯  $A \circ B \circ C = (A \circ B) \circ C$ . 这样做有区别吗?

定理 3.4.8.

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

证明. 对任意  $(a, b)$ ,

$$\begin{aligned}
 & (a, b) \in (R \circ S) \circ T \\
 \iff & \exists c. \left( (a, c) \in T \wedge (c, b) \in R \circ S \right) \\
 \iff & \exists c. \left( (a, c) \in T \wedge (\exists d. (c, d) \in S \wedge (d, b) \in R) \right) \\
 \iff & \exists d. \exists c. \left( (a, c) \in T \wedge (c, d) \in S \wedge (d, b) \in R \right) \\
 \iff & \exists d. \left( (\exists c. (a, c) \in T \wedge (c, d) \in S) \wedge (d, b) \in R \right) \\
 \iff & \exists d. \left( (a, d) \in S \circ T \wedge (d, b) \in R \right) \\
 \iff & (a, b) \in R \circ (S \circ T)
 \end{aligned}$$

□

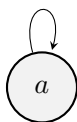
这就表明关系的复合满足结合律, 但是不满足交换律 (和矩阵乘法很相似).

### 七个性质

#### 1. 自反的.

定义 3.4.17 (自反的 (Reflexive)).  $R \subseteq X \times X$  is *reflexive* if

$$\forall a \in X. (a, a) \in R$$



举几个例子:

- $\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  is reflexive
- 三角形上的全等关系是自反的

其实所有自反的关系都是这个关系的一个子集, 可以有如下的表达.

定理 3.4.9.

$$R \text{ is reflexive} \iff I \subseteq R$$

其中

$$I = \{(a, a) \in A \times A \mid a \in A\}.$$

定理 3.4.10.

$$R \text{ is reflexive} \iff R^{-1} = R$$

#### 2. 反自反.

定义 3.4.18 (反自反 (Irreflexive)).  $R \subseteq X \times X$  is *irreflexive* if

$$\forall a \in X. (a, a) \notin R$$

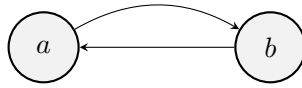
同样的, 我们给一些例子:

- $< \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  is irreflexive
- $> \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  is irreflexive

### 3. 对称.

定义 3.4.19 (对称 (Symmetric)).  $R \subseteq X \times X$  is *symmetric* if

$$\forall a, b \in X. aRb \rightarrow bRa$$



$$\forall a, b \in X. aRb \leftrightarrow bRa$$

对称就意味着  $R$  的逆是的形式是很好的. 具体的, 有如下定义.

定理 3.4.11.

$$R \text{ is symmetric} \iff R^{-1} = R$$

### 4. 反对称.

定义 3.4.20 (反对称 (AntiSymmetric)).  $R \subseteq X \times X$  is *antisymmetric* if

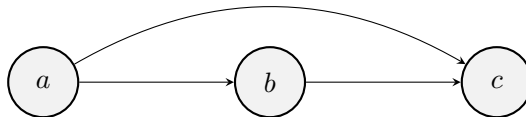
$$\forall a, b \in X. (aRb \wedge bRa) \rightarrow a = b$$

例如  $>$ ,  $|$  都具有反对称性.

### 5. 传递性

定义 3.4.21 (传递的 (Transitive)).  $R \subseteq X \times X$  is *transitive* if

$$\forall a, b, c \in X. (aRb \wedge bRc \rightarrow aRc)$$



有了传递性, 有时候就意味着关系的封闭性.

定理 3.4.12.

$$R \text{ is transitive} \iff R \circ R \subseteq R$$

证明. 对任意  $(a, b)$ ,

$$\begin{aligned} (a, b) &\in R \circ R \\ \implies \exists c. (a, c) &\in R \wedge (b, c) \in R \\ \implies (a, b) &\in R \end{aligned}$$

对任意  $a, b, c$

$$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies (a, c) \in R \circ R \implies (a, c) \in R$$

□

传递性和上面的内容一起构成了“序关系”. 上回我们定义了“偏序关系”. 接下来看到“偏序关系”到全序关系的重要关系, 就是下面的一个内容.

### 6. 连接性.

定义 3.4.22 (连接的 (Connex)).  $R \subseteq X \times X$  is *connex* if

$$\forall a, b \in X. (aRb \vee bRa)$$

我们发现, 在以前我们涉及“关系”的比较重,  $a > b, b < a, b = a$  三种关系中, 有且只有一种关系成立. 这样我们可以抽象出“三分的”性质.

### 7. 三分的.

定义 3.4.23 (三分的 (Trichotomous)).  $R \subseteq X \times X$  is *trichotomous* if

$$\forall a, b \in X. (\text{exactly one of } aRb, bRa, \text{ or } a = b \text{ holds})$$

其实这些关系是可以刻画“求逆”的可行性和唯一性. 具体的, 有如下的定理.

定理 3.4.13.

$$R \text{ is symmetric and transitive} \iff R = R^{-1} \circ R$$

证明. 对任意  $(a, b)$ ,

$$\begin{aligned} (a, b) &\in R \circ R \\ \implies \exists c. (a, c) &\in R \wedge (b, c) \in R \\ \implies (a, b) &\in R \end{aligned}$$

□

## 3.5 等价关系 – 特殊的二元关系

我们很多时候都在说“等价”, 一个很重要的问题是什么是等价? 我们可以运用什么样的语言去刻画它? 这一节, 我们来简单描述这样的特殊的二元关系 – 等价关系.

很多时候, 我们在研究数学关系会发现很多相同点. 比如在模意义下, 很多数是相等的. 比如  $3 \equiv 6 \pmod{3}$ . 他们的余数都是 0. 这就有一个很有趣的相似关系了.

用同余的例子, 我们会发现这种“等价性”满足这样几条性质:

**定义 3.5.1** (Equivalence Relation).  $R \subseteq X \times X$  is an *equivalence relation* on  $X$  iff  $R$  is

- reflexive:  $\forall a \in X. aRa$
- symmetric:  $\forall a, b \in X. (aRb \leftrightarrow bRa)$
- transitive:  $\forall a, b, c \in X. (aRb \wedge bRc \rightarrow aRc)$

更一般的, 我们发现各个等价关系其实把整个区间“划分”成了不同的区域, 其中每一个区域里面都有和其他地方在某些意义下完全相同的特性.

就像我们把所有属于中国的领土通过“划分”的方式形成了省, 其中每个省都有自己的地方行政机关, 他们彼此等价. 因此, 我们可以说这个是在中国领土上划分的情况下, 行政机关的等价关系.

更具体的, 划分有如下定义:

**定义 3.5.2** (划分 (Partition)). A family of sets  $\Pi = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$  is a *partition* of  $X$  if

1. (不空)  $\forall \alpha \in I. A_\alpha \neq \emptyset, (\forall \alpha \in I. \exists x \in X. x \in A_\alpha)$
2. (不漏)  $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = X, (\forall x \in X. \exists \alpha \in I. x \in A_\alpha)$
3. (不重)  $\forall \alpha, \beta \in I. A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset \vee A_\alpha = A_\beta (\forall \alpha, \beta \in I. A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset \implies A_\alpha = A_\beta)$

那么, 将划分的结果, 把每一类处于“同等地位的元素”拿出来看, 就可以被称作等价类了. 等价类其实可以看作拉拢所有的等价关系. 正式的, 我们有如下的定义:

**定义 3.5.3** (等价类 (Equivalence Class)). The *equivalence class* of  $a$  modulo  $R$  is a set:

$$[a]_R = \{b \in X. aRb\}$$

为什么等价类如此重要? 一个原因是它提供了一个抽象, 让我们方便的研究很多问题.

像整数的模运算一样, 我们在“集合”的也想有类似的运算. 因此我们有“商集”的概念. 这样我们就可以把所有相互等价的元素取用出来, 进行研究.

**定义 3.5.4** (商集 (Quotient Set)). The *quotient set of  $X$  by  $R$*  ( $X$  modulo  $R$ ) is a set:

$$X/R = \{[a]_R \mid a \in X\}$$

同样的, 这样取, 只不过是另外一种维度划分整个集合罢了. 这在直觉上看起来是对的, 下面我们来做一个证明.

**定理 3.5.1.**

$$X/R = \{[a]_R \mid a \in X\} \text{ is a partition of } X.$$

证明.  $\forall a \in X. [a]_R \neq \emptyset,$

$$\forall a \in X. \exists b \in X. a \in [b]_R.$$

□

在等价关系中, 下面这个定理可以很方便的从三个不同的侧面刻画“划分”, 同时帮助我们更容易的证明某些由“划分”产生的等价性问题.

**定理 3.5.2.**

$$\forall a \in X, b \in X. [a]_R \cap [b]_R = \emptyset \vee [a]_R = [b]_R$$

证明.  $\forall a \in X, b \in X. [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset \rightarrow [a]_R = [b]_R$

一方面, 不妨设  $x \in [a]_R \wedge [b]_R$

$$\begin{aligned} x &\in [a]_R \wedge [b]_R \\ \implies aRx \wedge xRb \\ \implies aRb \end{aligned}$$

另一方面, 对于任意  $x$ ,

$$\begin{aligned} x &\in [a]_R \\ \iff xRa \\ \iff xRb \\ \iff x \in [b]_R \end{aligned}$$

□

**定理 3.5.3.**

$$\forall a, b \in X. ([a]_R = [b]_R \leftrightarrow aRb)$$

这就意味着我们的划分在某种意义上也是一个等价关系!

**定义 3.5.5.** If partition  $\Pi$  of  $X \implies$  Equivalence Relation  $R \subseteq X \times X, (a, b) \in R \iff \exists S \in \Pi. a \in S \wedge b \in S, R = \{(a, b) \in X \times X \mid \exists S \in \Pi. a \in S \wedge b \in S\}$

**定理 3.5.4.**  $R$  is an equivalence relation on  $X$ .

### 3.5.1 从自然数到有理数

首先, 我们尝试把自然数的定义奠定在集合论的基础上. 具体的, 定义有如下的两条:

**定义 3.5.6** (自然数的定义). (1)  $\emptyset \in \mathbb{N}$ , 表示 0;

(2) 如果  $n \in \mathbb{N}$ , 那么  $n \cup \{n\} \in \mathbb{N}$ , 表示  $n + 1$ .

下面我们来定义一个关系  $\sim$ , 在  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  的集合上.

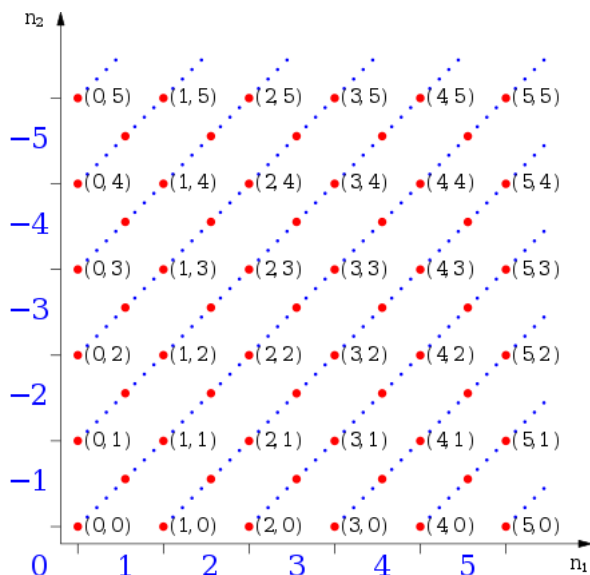
**定义 3.5.7.** 定义关系在集合

$$\sim \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

上, 其定义是:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a +_{\mathbb{N}} d = b +_{\mathbb{N}} c$$

那么,  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$  是什么呢? 哪些在  $\sim$  环境下是什么样的情况呢? 发现, 只有负数加正数才可以化为等价类. 那么我们就可以说  $[(1, 3)]_{\sim}$  这一类集合  $(1, 3), (2, 4), \dots$  就定义为了负数  $-2$ . 于是相仿的, 我们就可以定义出  $\mathbb{Z}$ . 形象的可以理解为图3.3.

图 3.2: 整数  $\mathbb{Z}$  的定义

**定义 3.5.8** ( $\mathbb{Z}$ ). 一般地, 整数可以定义为:

$$\mathbb{Z} \triangleq \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$$

有了整数, 我们就要为整数定义对应的加法和乘法. 分别记作  $+\mathbb{Z}$  和  $\times\mathbb{Z}$ . 这样就可以让这个加法和乘法不会因为牵涉了自然数变得“有问题”.

**定义 3.5.9** ( $+\mathbb{Z}$ ). 在整数范围的加法定义为:

$$[(m_1, n_1)] +_{\mathbb{Z}} [(m_2, n_2)] = [m_1 +_{\mathbb{N}} m_2, n_1 +_{\mathbb{N}} n_2]$$

**定义 3.5.10** ( $\cdot\mathbb{Z}$ ). 在整数范围的乘法定义为:

$$\begin{aligned} & [(m_1, n_1)] \cdot_{\mathbb{Z}} [(m_2, n_2)] \\ &= [m_1 \cdot_{\mathbb{N}} m_2 +_{\mathbb{N}} n_1 \cdot_{\mathbb{N}} n_2, m_1 \cdot_{\mathbb{N}} n_2 +_{\mathbb{N}} n_1 \cdot_{\mathbb{N}} m_2] \end{aligned}$$

现在我们假设我们的整数已经很好的定义了. 直接沿用其记号, 并且忘记刚刚的所有记号. 接下来我们再定义一个关系  $\sim$  (和刚刚的内容不一样). 这个关系是定义在  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0_{\mathbb{Z}}\})$  上的.

**定义 3.5.11.** 定义一个关系

$$\sim \subseteq \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0_{\mathbb{Z}}\})$$

其含义是

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a \cdot_{\mathbb{Z}} d = b \cdot_{\mathbb{Z}} c$$

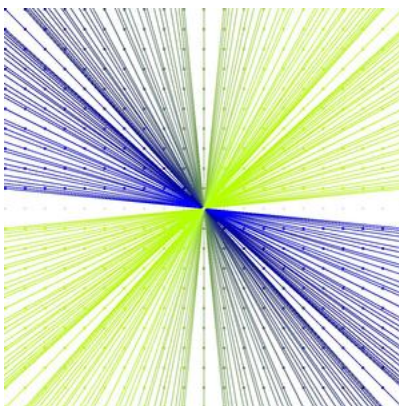
那么请问  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0_{\mathbb{Z}}\}) / \sim$  是什么?

**定义 3.5.12** ( $\mathbb{Q}$ ).

$$\mathbb{Q} \triangleq \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0_{\mathbb{Z}}\}) / \sim$$

如何用有理数定义实数? 请参见《数学分析》Dedekind 分割.



图 3.3: 整数  $\mathbb{Q}$  的定义

## 3.6 相容关系 – 特殊的二元关系

如果我们把上一节中的“传递性”去掉, 我们就得到了相容关系. 通俗的讲, 相容关系指的是“如果 A 和 B 有这个关系, 那么 B 和 A 也有这样的关系”. 也就是二者是“相互作用的”. 例如, 朋友关系. A 和 B 是朋友, 那么 B 和 A 也是朋友; 如果 A 和 C 是朋友, 我们不一定能够推出 B 和 C 也是朋友. 于是我们给出相容关系的定义.

**定义 3.6.1** (Compatibility relation).  $R \subseteq X \times X$  is an *compatibility relation* on  $X$  iff  $R$  is

- reflexive:  $\forall a \in X. aRa$
- symmetric:  $\forall a, b \in X. (aRb \leftrightarrow bRa)$

### 3.6.1 集合的覆盖

由于我们通常是对于一个集合来做这样的“相容关系”的定义的, 于是, 我们就希望用一个具体的例子说明这个关系到底在做什么.

**定义 3.6.2** (集合的覆盖 (cover)). 给定非空的集合  $A$ , 如果

- (1)  $A_i \subseteq A$  并且  $A \neq \emptyset, i = 1, 2, 3, \dots, m$ ;
- (2)  $\bigcup_{i=1}^m A_i = A$ ,

那么称  $S$  为集合  $A$  的一个覆盖.

我们可以发现集合的覆盖是不唯一的, 并且我们发现任意一个覆盖, 如果我们把每一个覆盖的  $A_i$  与他自己做笛卡尔积, 并且最终把它并起来, 事实上就得到了原来的集合的一个相容关系.

**定理 3.6.1.** 给定一个集合  $A$  的一个覆盖  $S = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , 有  $R = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , 则  $R = A_1 \times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup \dots \cup A_n \times A_n$ , 那么我们说  $R$  是  $A$  上的相容关系.

## 3.7 函数 – 特殊的二元关系

### 3.7.1 函数：作为关系的一个子集

函数不允许一对多，这就是它和“关系”最大的区别。

回想我们以前学习过的东西，好像“关系”和方程的图像有点相似。也就是我们在高中的时候在平面直角坐标系中做的椭圆的图线： $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 (a, b > 0)$ 。接下来，我们不妨来看一种特殊的“关系”：函数。

#### Bonus 思考题

为什么函数不允许“一对多”？在定义上有什么合理性？

让我们重新定义一下以前学过的函数。

**定义 3.7.1 (Function).**  $f \subseteq A \times B$  is a *function from  $A$  to  $B$*  if

$$\forall a \in A. \exists! b \in B. (a, b) \in f.$$

在函数中，除了定义域和值域之外，还有陪域。通常被称作“cod”。比如对于一个映射（函数） $f: A \rightarrow B$ ,  $\text{dom}(f) = A$ ,  $\text{cod}(f) = B$ , 对于一个函数的值域  $\text{ran}(f) = f(A) \subseteq B$ 。

为什么这样定义？值域为什么不是  $B$ ？原因是很多时候函数的值域难以求解，这样就使得我们的表达造成很多不便。而且很多时候如果强行把  $B$  当作值域很多时候可能会出现运算不封闭的问题，在研究某些问题的时候非常不方便。因此，我们不妨把这个值域扩大一些，这样才可以更方便一些。因此， $B$  就叫做“陪域”。值域只不过是陪域的一个子集。

对于证明而言，我们同样有一套形式化的证明语言： $\forall a \in A, \forall a \in A. \exists b \in B. (a, b) \in f, \exists! b \in B. \forall b, b' \in B. (a, b) \in f \wedge (a, b') \in f \implies b = b'$ 。

当然我们可以看一些有趣的函数。

**1. 恒等函数。**“恒等”在数学的各个领域里面都是重要的。“恒等函数”的地位有时候和加法意义下的‘0’，乘法意义下的‘1’很相似，其特点是经过一次复合之后还是一样的。我们一般用  $I_X$  表示，I 的意思是 identity 的缩写。其中，

$$\forall x \in X. I_X(x) = x.$$

#### Fun fact 趣事

Weierstrass 构造了一个处处连续，处处不可导的函数。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

其中， $0 < a < 1$ ,  $b$  is a positive odd integer,  $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ 。

当然，我们也可以把相似的函数放在一个集合里面。

**定义 3.7.2 ( $Y^X$ ).** The *set* of all functions from  $X$  to  $Y$ :

$$Y^X = \{f \mid f: X \rightarrow Y\}$$

举一些例子,  $|X| = x, |Y| = y, |Y^X| = x^y$ .

**Example 举例:**

- $\forall Y. Y^\emptyset = \{\emptyset\}$
- $\emptyset^\emptyset = \{\emptyset\}$
- $\forall X \neq \emptyset. \emptyset^X = \emptyset$
- $2^X = \{0, 1\}^X \cong \mathcal{P}(X)$

类似的, 我们可以问: 是否存在由所有函数组成的集合? 像 Russell 一样, 我们的答案是否定的.

**定理 3.7.1.** There is no set consisting of all functions.

证明. Suppose **by contradiction** that  $A$  is the set of all functions. For every set  $X$ , there exists a function  $I_{\{X\}} : \{X\} \rightarrow \{X\}$ .

$$\bigcup_{I_X \in A} \text{dom}(I_X) \text{ would be the universe that does not exist!}$$

□

既然函数和集合的结论如此相似, 我们自然地想到函数有没有和集合一样的性质?

### 3.7.2 作为集合的函数

**定理 3.7.2** (函数的外延性原理 (The Principle of Functional Extensionality)).  $f, g$  are functions:

$$f = g \iff \text{dom}(f) = \text{dom}(g) \wedge (\forall x \in \text{dom}(f). f(x) = g(x))$$

注意定义并没有要求陪域相同, 只要  $f = g \iff \forall (a, b). ((a, b) \in f \leftrightarrow (a, b) \in g)$  满足, 我们就认为这是相等的.

既然是集合, 我们就要考察一些集合的运算. 如果  $f$  和  $g$  是函数,  $f \cap g, f \cup g$  是函数吗? 因此我们有如下的定理:

**定理 3.7.3** (Intersection of Functions).

$$A = \{x \mid x \in A \cap C \wedge f(x) = g(x)\}$$

$$f \cap g = \{(x, y) \mid x \in A, y = f(x) = g(x)\}$$

**定理 3.7.4** (Union of Functions).

$$f \cup g : (A \cup C) \rightarrow (B \cup D) \iff \forall x \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g). f(x) = g(x)$$

举几个例子. 如果我们有  $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{Z}, f(A) = \begin{cases} \min(A \cap \mathbb{N}) & \text{if } A \cap \mathbb{N} \neq \emptyset \\ -1 & \text{if } A \cap \mathbb{N} = \emptyset \end{cases}$ . 注意  $\mathbb{N}$  的良序原理,  $\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) = \emptyset$ . Dichlet 函数也可以看作函数的并. 它是  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  的一个映射. 表达式写做:  $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$  注意到这个函数是“处处不连续”的.

### 3.7.3 特殊函数关系

有时候函数之间的映射关系也是重要的. 比如,  $f: A \rightarrow B$ ,  $A$  在  $B$  中的对应元素是不是都是不同的?  $B$  中的元素有没有全部对应上  $A$  中的元素 (可能不止被对应了一次)?  $A$  有没有和  $B$  中元素一一对应? 这样我们就有了单射, 满射的概念.

**定义 3.7.3** (Injective (one-to-one; 1-1) 单射函数).

$$f: A \rightarrow B \quad f: A \rightarrowtail B$$

$$\forall a_1, a_2 \in A. a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

对于证明而言, 我们可以这样写:  $\forall a_1, a_2 \in A. f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$ . 证明一个函数不是单射函数, 就可以这样写:  $\exists a_1, a_2 \in A. a_1 \neq a_2 \wedge f(a_1) = f(a_2)$ .

**定义 3.7.4** (Surjective (onto) 满射函数).

$$f: A \rightarrow B \quad f: A \twoheadrightarrow B$$

$$\text{ran}(f) = B$$

同样的, 对于证明给定的函数是满射而言, 我们可以这样写:  $\forall b \in B. (\exists a \in A. f(a) = b)$ , 反之, 我们可以这样写:  $\exists b \in B. (\forall a \in A. f(a) \neq b)$ .

既是双射又是满射的函数一定很特殊, 因为它有一个一一对应的关系. 因此我们给出如下定义:

**定义 3.7.5** (Bijective (one-to-one correspondence) 双射; 一一对应).

$$f: A \rightarrow B \quad f: A \xleftrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$$

$$1-1 \ \& \ \text{onto}$$

那么, 一个集合和它的幂集之间可不可以找到一个满射呢? 其实是不行的. Cantor 给出了一个证明.

**定理 3.7.5** (Cantor Theorem). If  $f: A \rightarrow 2^A$ , then  $f$  is **not** onto.

证明. Let  $A$  be the set and let  $f: A \rightarrow 2^A$ . To show that  $f$  is not onto, we must find  $B \in 2^A$  (i.e.  $B \subseteq A$ ) for which there is no  $a \in A$  with no  $f(a) = B$ . In other words,  $B$  is a set that  $f$  “misses”. To this end, let

$$B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$$

We claim there is no  $a \in A$  with  $f(a) = B$ . Suppose, for the sake of contradiction, there is an  $a \in A$  such that  $f(a) = B$ , we ponder: Is  $a \in B$ ?

- if  $a \in B$ , then, since  $B = f(a)$ , we have  $a \in f(a)$ . So by the definition of  $B$ ,  $a \notin f(a)$ . that is  $a \notin B$ . Contradiction!

- If  $a \notin B = f(a)$ , then by the definition of  $B$ ,  $a \in B$ . Contradiction!

To sum up, it can't be onto. □

除了反证之外, 还有一个构造性的证明, 我们一并给出.

对角线论证 (*Cantor's diagonal argument*). 以下仅适用于可数集合  $A$ .

$a$	$f(a)$					
	1	2	3	4	5	...
1	1	1	0	0	1	...
2	0	0	0	0	0	...
3	1	0	0	1	0	...
4	1	1	1	0	1	...
5	0	1	0	1	0	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

□

### 3.7.4 作为关系的函数

#### 函数的限制

和关系一样, 函数也有限制等操作. 我们来看看.

**定义 3.7.6** (Restriction). The *restriction* of a function  $f : A \rightarrow B$  to  $X$  is the *function*:

$$f|_X = \{(x, y) \in f \mid x \in X\}$$

注意  $X \subseteq A$  并不是必要的 (虽然平时经常这样用).

#### 像和逆像

**定义 3.7.7** (像 (Image)). The *image* of  $X$  under a function  $f : A \rightarrow B$  is the set

$$f(X) = \{y \mid \exists x \in X. (x, y) \in f\}$$

同样,  $X \subseteq \text{dom}(f) = A$  也不是必要条件, 尽管通常是这样的. 记号层面,  $f(\{a\}) = \{b\}$  简记为  $f(a) = b$ .

也就是  $y \in f(X) \iff \exists x \in X. y = f(x)$ .

**定义 3.7.8** (逆像 (Inverse Image)). The *inverse image* of  $Y$  under a function  $f : A \rightarrow B$  is the set

$$f^{-1}(Y) = \{x \mid \exists y \in Y. (x, y) \in f\}$$

注意不一定要  $Y \subseteq \text{ran}(f)$ , 但是很多情况都是满足这样的. 但是注意

$$f^{-1}(\{b\}) = \{a\} \quad \text{可简记为} \quad f^{-1}(b) = \{a\} \quad \text{不能简记为} \quad f^{-1}(b) = a$$

想一想, 为什么会这样?

**定义 3.7.9** (逆像 (Inverse Image)). The *inverse image* of  $Y$  under a function  $f : A \rightarrow B$  is the set

$$f^{-1}(Y) = \{x \mid \exists y \in Y. (x, y) \in f\}$$

这样一来, 我们就有这样的关系:  $y \in f(X) \iff \exists x \in X. y = f(x), x \in f^{-1}(Y) \iff f(x) \in Y$ .

需要注意的是, 如果有  $f : a \rightarrow b, a \in A_0 \not\Rightarrow f(a) \in f(A_0)$ , 这个式子才可以成立:  $a \in A_0 \cap A \Rightarrow f(a) \in f(A_0)$ .

关于求逆也有很多性质. 很多时候我们可能会想当然的误用. 所以使用之前一定要小心, 小心, 再小心.

幸运的是, 它还保留有很多性质. 我们一一罗列, 并给出一些证明.

**定理 3.7.6** (Properties of  $f$  and  $f^{-1}$ ).

$$f : A \rightarrow B \quad A_1, A_2 \subseteq A, B_1, B_2 \subseteq B$$

1.  $f$  preserves only  $\subseteq$  and  $\cup$ :

- (a)  $A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- (b)  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- (c)  $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- (d)  $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$

2.  $f^{-1}$  preserves  $\subseteq, \cup, \cap$ , and  $\setminus$ :

- (a)  $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
- (b)  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- (c)  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- (d)  $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

对于  $A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$ , 证明如下:

证明.

$$\begin{aligned} b &\in f(A_1) \\ \iff \exists a \in A_1. b &= f(a) \\ \implies \exists a \in A_2. b &= f(a) \\ \iff b &\in f(A_2) \end{aligned}$$

□

对于  $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ , 证明如下. 注意是哪一步变换, 使得它的箭头方向变为单向了, 为什么?

证明. 对任意  $b$ ,

$$\begin{aligned}
 & b \in f(A_1 \cap A_2) \\
 \iff & \exists a \in A_1 \cap A_2. b = f(a) \\
 \implies & (\exists a \in A_1. b = f(a)) \wedge (\exists a \in A_2. b = f(a)) \\
 \iff & b \in f(A_1) \wedge b \in f(A_2) \\
 \iff & b \in f(A_1) \cap f(A_2)
 \end{aligned}$$

□

对于  $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$  :

证明. 对任意  $b$ ,

$$\begin{aligned}
 & b \in f(A_1) \setminus f(A_2) \\
 \iff & b \in f(A_1) \wedge b \notin f(A_2) \\
 \iff & (\exists a_1 \in A_1. b = f(a_1)) \wedge (\forall a_2 \in A_2. b \neq f(a_2)) \\
 \implies & \exists a \in A_1 \setminus A_2. b = f(a) \\
 \iff & b \in f(A_1 \setminus A_2)
 \end{aligned}$$

□

对于  $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ , 证明如下:

证明. 对任意  $a$ ,

$$\begin{aligned}
 & a \in f^{-1}(B_1) \\
 \iff & f(a) \in B_1 \\
 \implies & f(a) \in B_2 \\
 \iff & a \in f^{-1}(B_2)
 \end{aligned}$$

□

对于  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ , 证明如下:

证明. 对任意  $a$ ,

$$\begin{aligned}
 a &\in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \\
 \iff f(a) &\in B_1 \cap B_2 \\
 \iff f(a) &\in B_1 \wedge f(a) \in B_2 \\
 \iff a &\in f^{-1}(B_1) \wedge a \in f^{-1}(B_2) \\
 \iff a &\in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)
 \end{aligned}$$

□

对于  $A_0 \subseteq A \implies A_0 \subseteq f^{-1}(f(A_0))$ , 有

证明. 对任意  $b$ ,

$$\begin{aligned}
 a &\in A_0 \\
 \implies a &\in A_0 \cap A \\
 \implies f(a) &\in f(A_0) \\
 \iff a &\in f^{-1}(f(A_0))
 \end{aligned}$$

□

对于  $B_0 \supseteq f(f^{-1}(B_0))$ , 思考什么时候这个条件是充要的 ( $\iff$ )?

证明. 对任意  $b$ ,

$$\begin{aligned}
 b &\in f(f^{-1}(B_0)) \\
 \iff \exists a \in f^{-1}(B_0). &b = f(a) \\
 \iff \exists a \in A. f(a) \in B_0 \wedge &b = f(a) \\
 \implies b &\in B_0
 \end{aligned}$$

“iff” when  $f$  is surjective and

$$B_0 \subseteq \text{ran}(f)$$

.

□

### 函数的复合

作为化简单为复杂的利器, 和关系一样, 函数也有复合.

定义 3.7.10 (Composition).

$$f : A \rightarrow B \quad g : C \rightarrow D$$

$$\text{ran}(f) \subseteq C$$

The *composite function*  $g \circ f : A \rightarrow D$  is defined as

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



**Bonus 思考题**

回顾关系复合的定义: The *composition* of relations  $R$  and  $S$  is the relation

$$R \circ S = \{(a, c) \mid \exists b : (a, b) \in S \wedge (b, c) \in R\}$$

和函数的有什么不同? 为什么是存在?

**定理 3.7.7** (Associative Property for Composition).

$$f : A \rightarrow B \quad g : B \rightarrow C \quad h : C \rightarrow D$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

证明. 我们只需证明:

1.

$$\text{dom}(h \circ (g \circ f)) = \text{dom}((h \circ g) \circ f)$$

2.

$$\forall x \in A. (h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

对于  $(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$ :

$$\begin{aligned} & (h \circ (g \circ f))(x) \\ &= h((g \circ f)(x)) \\ &= h(g(f(x))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ((h \circ g) \circ f)(x) \\ &= ((h \circ g)(f(x))) \\ &= h(g(f(x))) \end{aligned}$$

□

**定理 3.7.8.**  $f : A \rightarrow B \quad g : B \rightarrow C$ ,

- If  $f, g$  are injective, then  $g \circ f$  is injective.
- If  $f, g$  are surjective, then  $g \circ f$  is surjective.
- If  $f, g$  are bijective, then  $g \circ f$  is bijective.

对于第一条, 我们写出 “injective” 的定义, 然后完成逻辑推演.

证明.

$$\forall a_1, a_2 \in A. \left( (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \rightarrow a_1 = a_2 \right)$$

$$\begin{aligned} & (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \\ \iff & g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \\ \implies & f(a_1) = f(a_2) \\ \implies & a_1 = a_2 \end{aligned}$$

□

对于第二条, 我们写出 “surjective” 的定义.

证明.

$$\forall c \in C. \left( \exists a \in A. (g \circ f)(a) = c \right)$$

□

对于第三条, 如出一辙.

证明. 对任意  $a_1, a_2$ ,

$$\begin{aligned} & f(a_1) = f(a_2) \\ \implies & g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \\ \implies & (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \\ \implies & a_1 = a_2 \end{aligned}$$

□

**定理 3.7.9.**

$$f : A \rightarrow B \quad g : B \rightarrow C$$

1. If  $g \circ f$  is injective, then  $f$  is injective.
2. If  $g \circ f$  is surjective, then  $g$  is surjective.

因为 (1) 和 (2) 很像, 因此只证明 (2). 注意充要条件是在哪一步消失的.

证明. 对任意  $a_1, a_2$ ,

$$\begin{aligned} & g \circ f \text{ is surjective} \\ \iff & \forall c \in C. \exists a \in A. (g \circ f)(a) = c \\ \iff & \forall c \in C. \exists a \in A. g(f(a)) = c \\ \implies & \forall c \in C. \exists b \in B. g(b) = c \\ \iff & g \text{ is surjective} \end{aligned}$$

□

## 反函数

什么时候有反函数？反函数具有哪些性质？在高中的时候老师可能不会和我们讲，现在我们来探索一下反函数的性质。

**定义 3.7.11** (反函数 (Inverse Function)). Let  $f : A \rightarrow B$  be a function.

The *inverse* of  $f$  is a function from  $B$  to  $A$ , denoted  $f^{-1} : B \rightarrow A$  if  $f$  is bijective.

We call  $f^{-1}$  the *inverse function* of  $f$ .

**定义 3.7.12** (Invertible).  $f : X \rightarrow Y$  is *invertible* if there exists  $g : Y \rightarrow X$  such that

$$f(x) = y \iff g(y) = x.$$

下面这个定理展示了什么时候具有反函数。

**定理 3.7.10.**  $f$  is invertible  $\iff f$  is bijective.

**定理 3.7.11.** Suppose that  $f : A \rightarrow B$  is bijective. Then, its inverse function  $f^{-1} : B \rightarrow A$  is unique.

证明. By contradiction. Omitted. □

**定理 3.7.12.**

$$f : A \rightarrow B \text{ is bijective}$$

1.  $f \circ f^{-1} = I_B$
2.  $f^{-1} \circ f = I_A$
3.  $f^{-1}$  is bijective
4.  $g : B \rightarrow A \wedge f \circ g = I_B \implies g = f^{-1}$
5.  $g : B \rightarrow A \wedge g \circ f = I_A \implies g = f^{-1}$

这些定理是帮助我们找到反函数/说明反函数不存在的一些好的结论。  
对于 (1).

证明. 对任意  $b \in B$ ,

$$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b))$$

Suppose that  $a = f^{-1}(b)$

$$a = f^{-1}(b) \iff f(a) = b$$

$$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$$

□

对于 (2).

证明.  $g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ I_B = f^{-1}$

□

充分, 需要补充证明

我们当然可以看一看反函数的复合是怎样的一个情况.<sup>1</sup>

**定理 3.7.13** (Inverse of Composition).

Both  $f : A \rightarrow B$  and  $g : B \rightarrow C$  are bijective

1.  $g \circ f$  is bijective
2.  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
3.  $f \circ g = I_B \wedge g \circ f = I_A \implies g = f^{-1}$

那么, 我们就从集合论的角度构建了我们高中学习过的内容.

## 3.8 序关系

我们在本章的开头介绍关系的时候就提到了“偏序”以及“全序”. 下面我们来通过一些更多的例子好好体会一下这些“序关系”带给我们的思维上的碰撞, 并且我们会重新看一看定义极限的  $\epsilon - \delta$  语言里面的重要关系:  $<$  (小于号), 为什么换成  $\leq$  (小于等于) 就不行了. 并且这件事情能够让我们理解什么叫“开”, 什么叫“闭”; 同时也对于高等数学课程中空间解析几何的内容有一个更自然的想法.

### 3.8.1 偏序关系

前面我们提到过偏序关系. 我们给出一个定义:

**定义 3.8.1.** 设  $R$  是非空集合  $A$  上的关系, 如果  $A$  是自反的, 对称的, 以及传递的, 就称作  $R$  是  $A$  上的偏序关系. 通常记为  $\preceq$ . 整个序关系可以写作  $(X, \preceq)$

#### Bonus 思考题

有没有一种直观的方法来表达这种情形? 或许我们可以把每个元素化作圆圈, 有这样的关系就把他们之间画一个箭头.

这样的情形, 我们可以使用有向无环图 (directed acyclic graph) 表示. 这样的一种可达 (reachability) 关系. 设  $(X, \preceq)$

类似于小于号, 我们可以有

## 第四章 磨刀不误砍柴工 [P]

计算机系统里没有魔法.

– 蒋炎岩

### 4.1 写代码/调试的基础设施



# 所有问题的解答

## Exercises 2.1, page 42

- i.1. 如果记  $P$ : 他的程序编写得很短小;  $Q$ : 他的程序运行效率高, 那么有  $P \wedge \neg Q$ .
- ii. 如果记  $P$ : 控制台打字机可以作为输入设备;  $Q$ : 控制台打字机可以作为输入设备, 那么有  $P \wedge Q$ .
- iii. 如果记  $P$ : 刷很多的算法题;  $Q$ : 刷题不讲方法;  $R$ : 面试的时候容易通过能力测试, 那么有  $P \wedge Q \rightarrow \neg R$ .
- iv. 如果  $P$ :  $a$  是偶数;  $Q$ :  $b$  是偶数;  $R$ : 是偶数, 那么有  $P \wedge Q \rightarrow R$ .
- v. 如果有  $P$ : 出现停机;  $Q$ : 语法错误;  $R$ : 逻辑错误; 那么有  $Q \vee R \rightarrow P$ .
- vi. 如果  $P$ : 公用事业费用增加;  $Q$ : 增加基金的请求被否定;  $R$ : 计算机设备不适用;  $S$ : 购买一台新的计算机, 那么有  $\neg(P \vee R) \rightarrow (S \leftrightarrow R)$ .
- vii. 如果  $F(x)$ ...

i.2.  $P \wedge Q$ .

ii.  $\neg P \wedge \neg Q \rightarrow \neg R$ .

iii.  $P \wedge \neg Q \rightarrow R$ .

iv.  $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ .

v.  $P \leftrightarrow Q$ .

vi.  $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ .

3. 略.

## Exercises 2.2, page 46

- 1. 提示: 我们可以使用 Python 里面的 `eval` 函数—可以使用字符串替换的方法进行答案.
- 2. 提示: 这个是非常有趣的事. 怎么识别符号? 怎么进行推理? 这些大部分可以在编译原理课上学习到. 这个是一个不容易的事情. 但是我们可以调用别人已经有的库. 上网络上很容易搜到.





## 参考文献

- [1] MJD (<https://math.stackexchange.com/users/25554/mjd>). For cnf and dnf why do we look at the interpretations that make the formula false and true respectively? Mathematics Stack Exchange. URL:<https://math.stackexchange.com/q/4227598> (version: 2021-08-18).