数学分析习题集

AUGPath

2022 年 12 月 8 日

第一章　一元微分学

1.1　极限

1.1.1　Cheat Sheet

常见的等价无穷小.

(1) 当 $x \to 0$ 的时候, 第一组:

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$$

第二组 (Taylor 展开到第二项):

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

第三组:

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$$

第四组:

$$a^x - 1 \sim \ln a$$

常见三角恒等式.

$$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x) \qquad 1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$$

1.1.2　习题

问题 1.1.1. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

解答:　任意取 $\epsilon > 0, \left|\frac{2^n}{n!-0}\right| < \epsilon$. 也就是:

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2\cdot 2\cdots 2}^{n\text{个}2}}{\underbrace{n\cdot 2\cdots 2}_{\text{一共}n\text{项数}}} \leqslant \frac{2}{n}$$

也就是 $\lim_{n\to\infty} 2/n = 0$.

#

问题 1.1.2. 证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n$$

收敛.

解答: 由常见的极限,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

取对数, 有 $n\ln(1+1/n)<1<(n+1)\ln(1+1/n)$. 也就是 $1/(n+1)<\ln(1+1/n)<1/n$. 也就是

$$\begin{aligned}
b_{n+1}-b_n&=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}-\ln(n+1)-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln(n)=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n.\\
&=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0 \qquad \text{单调递减}\\
\text{寻找下界}\quad &>\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n\\
&=\ln 2-\ln|+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln(n+1)-\ln n-\ln n\\
&=\ln(n+1)-\ln(n)>0.
\end{aligned}$$

b_n 的界在大于 0 且小于 1, 根据单调数列收敛准则, 知道存在极限. #

注: 这是欧拉常数 $\gamma\approx 0.57121564490$. 在调和数列中有应用.

问题 1.1.3. 证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}\qquad (x>0)$$

.

解答:

$$\begin{aligned}
\text{原式}&\xlongequal[x=\log_a(1+t)]{a^x-1:=t}\lim_{t\to 0}\cdot\frac{t}{\log_a(1+t)}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\ln a.
\end{aligned}$$

#

问题 1.1.4. 证明:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^x}{n}\right)^{1/x}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}.$$

解答: 注意到原始式子可以变为

$$\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x-1}{n}+\frac{a_1^x-1}{n}+\cdots+\frac{a_n^x-1}{n}+\cdot\frac{1}{x}\right)$$

然后运用1.1.3可以得到最后的结果是右边的式子.

#

问题 1.1.5. 求极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos(2x)}\sqrt[3]{\cos(3x)}}{x^2}$$

解答:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[6]{\cos^6 x\cdot\cos^3(2x)\cdot\cos^2(3x)-1+1}}{x^2}\\=&\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}\left(\cos x^6\cdot\cos^3(2x)\cdot\cos^2(3x)-1\right)}{x^2}\end{aligned}$$

Taylor 展开到 x^2 得 $=3$.

#

问题 1.1.6. 求极限:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-x^{1/i})}{(1-x)^n}$$

解答: 注意到每一个上面面的式子因子每一个里面都缺失了一个对应的因数. 因此不妨设 $t=n!$.

因此有:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-x^{1/i})}{(1-x)^n}&=\lim_{x\to 1}\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-t^{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}j})}{(1-t^{n!})^n}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(1+t+t^2+\cdots+t^{(n!/2)-1})(1+t+t^2+\cdots+t^{(n!/3)-1})\cdots(1+t+t^2+\cdots+t^{(n!/n)-1})}{(1+t+t^2+\cdots+t^{(n!)-1})^{n-1}}\\&=\frac{n!/2\cdot n!/3\cdots n!/n}{(n!)^{n-1}}\\&=1/n!\end{aligned}$$

#

同时注意重要恒等式: $(1-x^n)=(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})$, 这个内容在试题中很重要. 同样的, 有恒等式 $x^m-y^m=(x-y)\sum_{i=1}^{m}x^{m-i}y^{i-1}$.

问题 1.1.7. 求极限:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$$

解答:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}&=\lim_{x\to 1}x-e^{x\ln x}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)\ln x}{1-x+\ln x}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\ln(1+(x-1))}{\ln(1+(x-1))-(x-1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\ln(1+(x-1))-(x-1)}=2\end{aligned}$$

#

1.2 微分与导数

1.2.1 Cheat Sheet

导数表.

(1) 和三角函数相关

$$
\begin{aligned}
(\cos x)' &= -\sin x. &(1.1)\\
(\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} = \cot x. &(1.2)\\
(\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}. &(1.3)\\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. &(1.4)\\
(\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. &(1.5)\\
(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}. &(1.6)\\
(\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. &(1.7)
\end{aligned}
$$

(2) 其余从略.

常见高阶导数.

1. 分式形高阶导数

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \left[(x+a)^{-1}\right]^{(n)} = -\left[(x+a)^{-2}\right]^{(n-1)} = \cdots = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

2. 对数形

$$[\ln(x+a)]^{(n)} = \left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1).}{(x+a)^n}$$

3. 三角函数形

$$\cdot[\sin(kx+a)]^{(n)} = k\left[\sin\left(kx+a+\frac{\pi}{2}\right)\right]^{(n-1)} = \cdots = k^n \sin\left(kx+a+\frac{n\pi}{2}\right)$$

同样, 有:

$$\cdot[\cos(kx+a)]^{(n)} = k\left[\cos\left(kx+a+\frac{\pi}{2}\right)\right]^{(n-1)} = \cdots = k^n \cos\left(kx+a+\frac{n\pi}{2}\right)$$

4. 多项式若干次方

$$[(x+a)^m]^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(x+a)^{m-n} & ,m \geqslant n \\ 0 & ,m < n \end{cases}$$

5. Newton 二项式定理 (略).

1.2.2 习题

问题 1.2.1. 证明:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m=\begin{cases}0, m=0,1,\cdots,n-1\\ n!, m=n\end{cases}$$

证明. 考虑构造多项式 $f(x)=x^m$, 那么做一次离散差分, 也就是

$$\mathbf{D}f(x)\triangleq(x+1)^m-x^m=\binom{m}{1}x^{m-1}+\binom{m}{2}x^{m-2}+\cdots+1$$

接着在做一次离散差分

$$\mathbf{D}^2f(x)\triangleq\mathbf{D}(f(x+1))-\mathbf{D}(f(x))=\binom{m}{1}\binom{m-1}{1}x^{m-2}+\cdots+c$$

经过 $n=m$ 次离散差分之后, 每次都会消去最后的一项. 在 $n=m$ 次差分之后, 函数中已经会没有 x, 因此是 $n!$. 否则, 要么式子中会存在 x, 要么值已经是 0. 因此可以解释.

□

注: 我们可以把离散差分推广到一般的形式.

首先观察到对于如下的式子有着很好的结论:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(x^{\underline{m}})x+1^{\underline{m}}-x^{\underline{m}}&=(x+1)(x)\cdots(x-m+2)-x(x-1)\cdots(x-m+1)\\&=mx(x-1)\cdots(x-m+2)\\&=mx^{\underline{m-1}}\end{aligned}$$

并且观察到,

$$\begin{aligned}\mathbf{D}f(x)&=f(x+1)-f(x)\\\mathbf{D}^2f(x)&=f(x+2)-2f(x+1)+f(x)\\\mathbf{D}^3f(x)&=f(x+3)-3f(x+2)+2f(x+1)+f(x)\end{aligned}$$

因此这样就可以总结出

$$\mathbf{D}^nf(x)=\sum_k\binom{n}{k}(-1)^kf(x+k)$$

这样的结论.

1.3 微分中值定理

1.3.1 Cheat Sheet

常见高阶导数

$$\tfrac{d^n}{dx^2}\sqrt{x}=\tfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cdots\tfrac{1\times3\times\cdots\times(2n-3)}{x^{n-1/2}}$$

常见 Taylor 级数的展开

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^x=1+x+\tfrac{x^2}{2!}+\cdots+\tfrac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)\\
&\sin x=x-\tfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\tfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n}\right)\\
&\cos x=1-\tfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\tfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)\\
&(1+x)^m=1+mx+\tfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\tfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)\\
&\ln(1+x)=x-\tfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\tfrac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)
\end{aligned}$$

1.3.2 习题

构造辅助函数证明

问题 1.3.1. (断点效应) 设函数 $f(x),\varphi(x)$ 二阶可导, 当 $x>0$ 时 $f''(x)>\varphi''(x)$, 且 $f(0)=\varphi(0),f'(0)=\varphi'(0)$, 试证：当 $x>0$ 时, $f(x)>\varphi(x)$.

可以视作不等式和函数, 并且构造函数补充证明之.

证明. 设 $F(x)=f(x)-\varphi(x)$. 当 $x>0$ 时, 则

$$F'(x)=f'(x)-\varphi'(x).$$

由于

$$F''(x)=f''(x)-\varphi''(x)>0,$$

可知 $F'(x)$ 当 $x>0$ 时单调增加. 又由于 $F'(0)=f'(0)-\varphi'(0)=0$, 所以当 $x>0$ 时, 有

$$F'(x)>F'(0)=0.$$

因此, $F(x)$ 在 $x>0$ 时也单调增加. 由于 $F(0)=f(0)-\varphi(0)=0$, 故当 $x>0$ 时有 $F(x)>F(0)=0$, 即

$$f(x)>\varphi(x).$$

□

作为恒等式代换/沟通

问题 1.3.2. 设 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的凸函数,$f(0)=0$, 证明:$f(x)/x$ 为 $(0,+\infty)$ 上的单调递增函数.

证明.

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}=\frac{f'(x)x-[f(x)-f(0)]}{x^2}(x>0)$$

由 Lagrange 中值定理得 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x,0<\xi<x$, 根据 $f'(x)$ 的单调性可证得. □

一些无穷区间上的问题

下面考虑几个涉及无穷区间的问题.

有一种做法是构造映射函数把它塞到一个有界区间里面, 不会改变其连续性.

问题 1.3.3. (无界区间上的 Rolle 定理) 设 f 于 $[a,+\infty)$ 上连续, 于 $(a,+\infty)$ 上可微, 且 $f(+\infty)=f(a)$, 证明: 存在 $\xi\in(a,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

证明. 我们可以仿照证明 $\mathbb{R}$ 是和 $[0,1]$ 的基数相同的思路, 对区间做合理的映射.

不妨设辅助函数:

$$g(t)=\begin{cases} f\left(\frac{1}{t+a-1}\right) & ,t\in(0,1] \\ f(a) & ,t=0 \end{cases}$$

这样, $g(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导. 并且 $g(0)=g(a)=g(1)$, 因此存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f'\left(\frac{1}{\xi_0}+a-1\right)\frac{-1}{xi_0}=0.$$

由于 $-1/\xi_0\neq 0$, $f'\left(\frac{1}{\xi_0}+a-1\right)=0$. 因此可以取 $\xi=1/(\xi_0+a-1)$.

□

注: 把无穷的区间塞到一个 $(0,1)$ 区间是很常见的一种策略. 这也说明了 $[0,1]$ 和 $\mathbb{R}$ 的基数是相同的.

或者可以使用极限的定义.

问题 1.3.4. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有有界的导函数, 用 Lagrange 中值定理证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x\ln x}=0$$

证明. 设 $|f'(x)|<M,\forall x\in(a,+\infty)$, 任取定 $x_0>a$, 则对 $\forall x>x_0$, 由 Lagrange 中值定理. $\exists\xi_x\in(x_0,x)$,s . t.

$$f(x)-f\left(x_0\right)=f'\left(\xi_x\right)\left(x-x_0\right),$$

因 $\left|f'\left(\xi_x\right)\right|<M$, 故对 $\forall x>\max\left\{1,x_0\right\}$, 有

$$\frac{-M\left(x-x_0\right)}{x\ln x}<\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x\ln x}<\frac{M\left(x-x_0\right)}{x\ln x}.$$

而 $\lim_{x\to+\infty}\frac{-M(x-x_0)}{x\ln x}=0=\lim_{x\to+\infty}\frac{M(x-x_0)}{x\ln x}$. 由两边夹定理知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x\ln x}=0,$$

因此 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x\ln x}+\frac{f(x_0)}{x\ln x}\right]=0+0=0$. □

问题 1.3.5. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 且 $\lim_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e},\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$, 求 c 的值.

解答: 由第一个式子, 可以得到:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x \overset{1^\infty}{=} \lim_{x\to\infty} e^{\frac{c}{x-c}\cdot x} = e^{2c}$$

由第二个式子, 可以得到:

$$\lim_{x\to\infty}\underbrace{(f(x)-f(x-1))}_{\text{选择}[x-1,x]\subseteq\mathbb{R}}\frac{\exists\zeta\in(x-1,x)}{\text{s.t.}}f'(\xi)\cdot 1. = \lim_{\xi\to\infty} f''(\xi) = e$$

因此得到 $c=1/2$.

#

同样的, 由如下结论:

若f 在$[a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=A$, 那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=A$.

多次应用定理得出结论

问题 1.3.6. 设函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[x_0,x_n]$ 上有定义且有 $n-1$ 阶的连续导数 $f^{(n-1)}(x)$;(2) 在区间 (x_0,x_n) 内有 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$;(3) 下列等式成立:

$$f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n)\quad(x_0<x_1<\cdots<x_n).$$

证明: 在区间 (x_0,x_n) 内最少存在一点 ξ , 使

$$f^{(n)}(\xi)=0$$

思路: 这道题一共需要使用 $(n-1)+(n-2)+\cdots+1$ 次 Rolle 中值定理即可证明. %

应用有限增量的形式反解极限

问题 1.3.7. 证明: 若 $x\geqslant 0$, 则

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中 $\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\frac{1}{2}$, 并且 $\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{4}, \lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

解答: #

问题 1.3.8. 已知 $f(x)$ 具有一阶导数, $f(0)=0, f'(0)=1$, 又知道 $f''(0)=2$, 求 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}$.

尝试:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(f(x)-x)-(f(0)-0)}{(x-0)}\frac{1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(f'(\xi)-1)-(f'(1)-1)}{x^2}\neq 2\end{aligned}$$

解答: 考虑对 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开, 带 Peano 余项. 因此我们就有:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)x^2/2!+o(x^2)$$

带入原式, 我们有:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2}-x}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f''(0)x^2}{2}}{x^2}\\&=\frac{f''(0)}{2}=1.\end{aligned}$$

#

问题 1.3.9. 函数 f 在 $[a,a+h]$ 上连续, 在 $(a,a+h)$ 上可导, 并且 $f''(a)\neq 0$, 根据 Lagrange 定理, 有

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta x),0\leqslant\theta\leqslant 1$$

求证 $\lim_{h\to 0}\theta=1/2$.

证明. 把 $f(x)$ 在 $x=a$ 处泰勒展开, 我们有:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+o((x-a)^2)$$

整理, 并和条件 $f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta x),0\leqslant\theta\leqslant 1$ 比较, 有:

$$\theta\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{\theta h}=\frac{f''(a)}{2}+o(1(h))$$

两边同时取关于 $h\to 0$ 的极限, 有:

$$\theta f''(a)=\frac{f''(a)}{2}$$

由于 $f''(a)\neq 0$, $\theta=1/2$. □

问题 1.3.10. 设 $f(x)$ 一阶可导, 且 $f''(x_0)$ 存在, 证明

$$\lim_{h=0}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$$

证明. 用带 Peano 余项的泰勒公式, 得

$$\begin{aligned}&f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)\\&=\left[f(x_0)+f'(x_0)\cdot 2h+\frac{f''(x_0)}{2!}(2h)^2+o\left(h^2\right)\right]\\&\quad-2\left[f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+o\left(h^2\right)\right]+f(x_0)\\&=f''(x_0)h^2+o\left(h^2\right).\end{aligned}$$

由此得 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$.

□

问题 1.3.11. 设 $f(x)$ 在 a 点的邻域内有连续的三阶导数, $f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h$, $0 < \theta < 1$, $f''(a) = 0, f'''(a) \neq 0$, 证明 $\lim_{h=0} = \sqrt{3}/3$.

证明. 可以使用 L' Hospital 法则. 因此, 把 $f(x)$ 依照 Taylor 公式展开到三次, 有

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + o((x-a)^3)$$

下面尝试整理: 带入 $h = 0$, 知 $f'(a) = 0$, 然后和条件的 $f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta x), 0 \leqslant \theta \leqslant 1$ 对比, 我们有:

$$\frac{f'''(a)}{6} + o(1(h)) = \frac{f'(a+2\theta h) - f'(a)}{2\theta^2 h^2}\theta^2$$

类似使用 L'Hospital 法则, 两边同时对 $h \to 0$ 取得极限, 有

$$\frac{f'''(a)}{6} = 2\theta^2 f'''(a)$$

由于 $f'''(a) \neq 0$ 得 $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

□

问题 1.3.12. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, $|f(x)| \leqslant a, |f''(x)| \leqslant b$, 其中 a, b 为非零常数, c 为 $(0,1)$ 内的任意一点, 证明: $|f'(c)| \leqslant 2a + \frac{b}{2}$.

证明. 注意到 c 的任意性, 因此考虑再 c 处按照 Laggrange 余项展开的 Taylor 公式. 也就

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)(x-c)^2}{2}$$

带入 $x = 0$, 有

$$f(0) = f(c) + f'(c)(-c) + \frac{f''(\xi)c^2}{2}$$

带入 $x = 1$, 有

$$f(1) = f(c) + f'(c)(1-c) + \frac{f''(\xi)(1-c)^2}{2}$$

用 $f(1) - f(0)$ 有

$$\begin{aligned}
f'(c) &= \frac{f''(\xi_1)}{2}c^2 - (1-c)^2\frac{f''(\xi_2)}{2} + (f(0) - f(1)) \\
|f'(c)| &= |\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2 - (1-c)^2\frac{f''(\xi_2)}{2} + (f(0) - f(1))| \\
&= \left|\frac{bc^2}{2} - bc + 2a + 1\right| \\
&\leqslant |\frac{b}{2} + 2a| \\
&= \frac{b}{2} + 2a
\end{aligned}$$

□

利用 Taylor 定理在特等地方展开求解

问题 1.3.13. 设 $f''(x)>0,\lambda_1>0,\lambda_2>0$, 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$, 证明: 对任意的 x_1,x_2, 都有

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\leqslant \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2).$$

证明. 考虑对 $f(x)$ 在 $x=(x_1+x_2)/2$ 处进行二阶 Taylor 展开, 带 Peano 余项. 有

$$f(x)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f''\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+o((x-n)^2)$$

带入 x_1, 就有:

$$f(x)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)+f''\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+o((x-n)^2)$$

带入 x_2, 就有

$$f(x)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)+f''\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2+o((x-n)^2)$$

将这两个式子第一个式子乘上 λ_1, 第二个式子乘上 λ_2, 并且相加, 我们有:

$$\begin{aligned}f(x)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)&+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left((\lambda_1-\lambda_2)\frac{x_1-x_2}{2}\right)\\&+f''\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+o((x-n)^2)\end{aligned}$$

这时, 在对 $x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$ 的展开. 我们有

$$\begin{aligned}f(x)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)&+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{(2\lambda_1-1)x_1+(2\lambda_2-1)}{2}\right)\\&+\frac{1}{2}f''\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{(2\lambda_1-1)x_1+(2\lambda_2-1)}{2}\right)^2+o((x-n)^2)\end{aligned}$$

然后对应项相等即可证明.

□

问题 1.3.14. 设 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上可导, 试用 L'Hospital 法则或 $\epsilon-\delta$ 语言证明:

若 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 则 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)/x=0$.

证明. **方法 I.($\epsilon-\delta$ 语言)** 由题意, $\forall\epsilon>0,\exists X,x>X$ 的时候, 总是有 $|f'(x)|<\epsilon$. 也就是

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=|f'(\xi)|<\frac{\epsilon}{2}$$

要证明 $|f(x)/x-0|$, 考虑添加项数. 于是有:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x}-0\right|&=|\frac{x-x_0}{x}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-0}+\frac{f(x_0)}{x}|\\&<\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|+\left|\frac{f(x_0)}{x}\right|\\&<\epsilon/2+\left|\frac{f(x_0)}{x}\right|\end{aligned}$$

只需要证明 $\left|\frac{f(x_0)}{x}\right| < \epsilon/2$. 发现 $\exists X_2$, 当 $x > X_2$ 的时候, $f(x_0) < |1/x|$, $1/x < \epsilon/2f(x_0)$, 意味着 $|f(x_0)/\epsilon x| < \epsilon/2$.

因此原命题得证.

方法 II(中值定理). 由题可知,

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$$

并且由 Lagrange 中值定理, $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$. 同时除以 x, 我们有

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x_0)}{x} + \frac{f'(\xi)(x - x_0)}{x}$$

两端同时取极限:

$$\frac{f'(x)}{x} = 0$$

因为当 x 趋近于无穷的时候, $f'(x) = 0$. □

问题 1.3.15. 证明: 若具实系数 $a_k(k = 0, 1, \cdots, n)$ 的多项式

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

之一切根为实数, 则其逐次的导数 $P_n'(x), P_n''(x), \cdots, P_n^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根.

证明. 由于多项式的唯一分解定理, 我们不妨设该多项式具有如下的形式:

$$P_n(x) = (x - x_0)^{m_1}(x - x_1)^{m_2}\cdots(x - x_p)^{m_p}$$

其中, $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$

考虑使用 Rolle 定理, 我们有发现存在 $\xi_i, \xi_i \in (m_i, m_{i+1})(i = 1, 2, \cdots, p - 1)$

并且这个多项式 $P_n'(x)$ 的根恰有 $(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \cdots + (m_p - 1) + (p - 1) = m_1 + m_2 + \cdots + m_p - 1 = n - 1$ 个, 由于鸽笼原理, 我们知道多项式的一阶导的根也全为实根.

反复运用这一结果, 我们同样可以说明 $P_n^{(n-1)}(x)$ 也有实根.

□

使用 Taylor 展开的多项式求极限

问题 1.3.16. 求极限:

$$\lim_{n\to+\infty} \cos\frac{a}{n\sqrt{n}}\cos\frac{2a}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\frac{na}{n\sqrt{n}}$$

这个问题中出现了多个因子连续相乘, 因此可能会思考使用 ln 这一个操作, 化乘法为加法.

解答: 由于 Taylor 展开, 有

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

且

$$\ln(1 + x)x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

先考虑对一项进行操作:

$$\ln\cos\left(\frac{ka}{n\sqrt{n}}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{2}\frac{k^2\alpha^2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{k^2\alpha^2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

那么多项相加就是

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\left(\frac{ka}{n\sqrt{n}}\right)=\frac{-a^2}{2n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=\frac{-a^2}{2n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

因此, 当 $n\to\infty$ 的时候, 上述式子的极限是 $-a^2/6$.

因此答案是 $e^{-a^2/6}$.

#

问题 1.3.17. 设 $f(x)$ 满足 $f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$, 其中 $g(x)$ 为任一函数. 证明: 若 $f\left(x_0\right)=f\left(x_1\right)=0 \quad\left(x_0<x_1\right)$, 则 f 在 $[x_0,x_1]$ 上恒等于 0 .

证明. 假设函数不恒等于 0, 这就意味着, 函数 $f(x)$ 在 $[x_0,x_1]$ 区间可以取到 M 和 m. 不妨设 M 是极大值, 那么由 Fermat 引理有 $f'(\xi)=0$. 又因为 $f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$, $f''(\xi)=f(\xi)=M>0$, 意味着这是一个极小值. 矛盾. 因此 $M=0$. 同理可证 $m=0$. 因此可以证明出在这个区间上恒为 0. □

问题 1.3.18.

$$设p>0,q>0,且p+q=1,求极限\lim_{n\to-\infty}\left(p\mathrm{e}^{\frac{qt}{\sqrt{npq}}}+q\mathrm{e}^{-\frac{pt}{\sqrt{npq}}}\right).$$

解答: 由于 Taylor 展开,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

带入, 对应需要展开的内容, 有

$$e^{\frac{qt}{\sqrt{npq}}}=1+\frac{qt}{\sqrt{npq}}+\frac{\frac{qt}{\sqrt{npq}}^2}{2!}+o\left(\frac{1}{\frac{qt}{\sqrt{npq}}^2}\right)$$
$$e^{-\frac{pt}{\sqrt{npq}}}=1+-\frac{pt}{\sqrt{npq}}+\frac{-\frac{pt}{\sqrt{npq}}^2}{2!}+o\left(\frac{1}{-\frac{pt}{\sqrt{npq}}^2}\right)$$

化简, 我们有原始极限为 1. #

问题 1.3.19. 证明: 若函数 $f(x)$:(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上有二阶导数 $f''(x)$;(2) $f'(a)=f'(b)=0$, 则在区间 (a,b) 内至少存在一点 c , 使得

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证明. 按照 Taylor 展开, 带入中点值:

$$\begin{aligned}
&f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\tfrac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2,\xi_1\in(a,x)\\
&f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\left(\tfrac{b-a}{2}\right)+\tfrac{f'(\xi_1)}{2}\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^2\cdots\\
&f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\tfrac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2,\xi_2\in(x,b).\\
&f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\left(\tfrac{a-b}{2}\right)+\tfrac{f''(\xi_2)}{2}\left(\tfrac{a-b}{2}\right)^2+\cdots
\end{aligned}$$

因为两个中点值相等, 也就是

$$f(b)-f(a)+\frac{f''(\xi_2)-f''(\xi_1)}{2}\cdot\frac{(a-b)^2}{4}=0.$$

运用不等式条件, 有

$$\begin{aligned}
&\tfrac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}\leqslant\tfrac{\left|f''(\xi_2)-f''(\xi_1)\right|}{2}\leqslant\tfrac{\left|f'(\xi_2)\right|+\left|f''(\xi_1)\right|}{2}.\\
&\leqslant f'(\xi)(\text{取}f''(\xi)=\max(f''(\xi_1),f''(\xi_2)))
\end{aligned}$$

□

问题 1.3.20. 证明: 若 $x\geqslant 0$, 则

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中 $\frac14\leqslant\theta(x)\leqslant\frac12$, 并且 $\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac14,\lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac12$.

证明. 令 $f(x)=\sqrt{x}$, 那么取得 $a,b\in\operatorname{dom}(f)$. 根据 Lagrange 中值定理, 有

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

注意到 $0<\theta(x)<1$, 反解出 θ, 有

$$\theta(x)=\frac{2\sqrt{x^2+x}-2x+1}{4},$$

容易得到结论.

□

函数凹凸性的证明

问题 1.3.21. 证明: 区间 I 上的两个单调递增的非负凸函数 f,g 之积仍为凸函数.

证明. 考虑使用等价定义: 设 f,g 在 I 上严格单调增加 (单调减少类似可证), $f'(x)>0,g'(x)>0$. 并有 $f(x)>0,g(x)>0$. 则 $\forall x_1,x_2\in I$, 不妨设 $x_2>x_1$, 有 $f(x_2)\geqslant f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)$,

$$g(x_2)\geqslant g(x_1)+g'(x_1)(x_2-x_1).$$

因为 $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$, 所以

$$\begin{aligned}
f\left(x_{2}\right) g\left(x_{2}\right) \geqslant & f\left(x_{1}\right) g\left(x_{1}\right)+f^{\prime}\left(x_{1}\right) g\left(x_{1}\right)\left(x_{2}-x_{1}\right) \\
& +f\left(x_{1}\right) g^{\prime}\left(x_{1}\right)\left(x_{2}-x_{1}\right)+f^{\prime}\left(x_{1}\right) g^{\prime}\left(x_{1}\right)\left(x_{2}-x_{1}\right)^{2} \\
\geqslant & f\left(x_{1}\right) g\left(x_{1}\right) \\
& \quad+\left[f^{\prime}\left(x_{1}\right) g\left(x_{1}\right)+f\left(x_{1}\right) g^{\prime}\left(x_{1}\right)\right]\left(x_{2}-x_{1}\right) .
\end{aligned}$$

所以, 按等价定义知, $f \cdot g$ 是凸函数. □

未分类

这种使用两边夹的手段其实也有很多的定义的.

问题 1.3.22. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 上可导, 且 $\lim_{x\to\infty} f(x)/x = 0$, 证明: $\underline{\lim}_{x\to\infty}|f'(x) = 0|$, 并构造函数, 使得 $\overline{\lim}_{x\to\infty}|f'(x) = 0|$.

证明. 取 $\{x_n\}$, 使 $a < x_1 < 2x_1 < x_2 < 2x_2 < \cdots < x_n < 2x_n < x_{n+1} < \cdots$, 且 $\lim_{x\to+\infty} x_n = +\infty$ 因为 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, 故对 $\forall\varepsilon > 0, \exists A > 0$, 当 $x > A$ 时有 $\left|\frac{f(x)}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$, 固定 $A, \exists N \in \mathrm{N}$, 当 $n > N$ 时, $x_n > A$. 又 f 在 $(a,+\infty)$ 中可导, 由 Lagrange 中值定理, $\exists\xi_n(x) \in (x_n, 2x_n)$, s. t.

$$\left|f^{\prime}\left(\xi_{n}(x)\right)\right|=\left|\frac{f\left(2 x_{n}\right)-f\left(x_{n}\right)}{x_{n}}\right| \leqslant 2\left|\frac{f\left(2 x_{n}\right)}{2 x_{n}}\right|+\left|\frac{f\left(x_{n}\right)}{x_{n}}\right|<2 \cdot \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon .$$

所以 $\lim_{n\to+\infty}\left|f'\left(\xi_n(x)\right)\right| = 0$, 从而

$$\lim_{x\to+\infty}|f'(x)| = 0$$

构造的函数是 $\sin x$. □

第二章　一元积分学

2.1　不定积分

2.1.1　Cheat Sheet

基本的积分公式 (I)

根据求导公式表, 可得

$\int \mathrm{d}x = x + C;$
$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1);$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C;$
$\int a^x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} a^x + C(0 < a \neq 1);$
$\int \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C;$
$\int \sin x\ \mathrm{d}x = -\cos x + C;\quad \int \cos x\ \mathrm{d}x = \sin x + C;$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\ \mathrm{d}x = \tan x + C \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\ \mathrm{d}x = -\cot x + C$

基本的积分公式表 (II)

根据分部积分和换元积分, 我们有 1. 分母含分式的积分: 平方之和:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C;$$

平方之差 (使用分解因式的技巧):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

根号下的平方差, 自变量的平方前面的系数是负数:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

根号下的平方, 自变量的平方前面的系数是正数:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$$

csc 的积分:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \csc x\ \mathrm{d}x = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C;$$

sec 的积分:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \sec x \ \mathrm{d}x = \ln \left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

2.1.2 习题

问题 2.1.1. 求积分

$$\int \left[\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}\right] dx$$