高等数学学习笔记

February 23, 2023

第一部分

一元微积分

第一章　函数, 极限, 连续

1.1　实数与实数系

Theorem 1.1. *(上确界和下确界)*

Proposition 1.1. *(绝对值不等式)*

$$|a+b| \le |a| + |b|$$
$$|a-b| \le |a| - |b|$$

1.2　数列的极限

Definition 1.1. (数列的极限) 如果说数列的极限是 A, 也就是对于任意的 ϵ, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - A| \le \epsilon$.

判断极限存在的方法有如下的几种:

Proposition 1.2. *(两边夹准则) 如果* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A, a_n \le b_n \le c_n$, *那么* $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

Proposition 1.3. *(单调有界准则) 如果数列* a_n *单调, 并且有界, 那么数列一定收敛.*

Proposition 1.4. *(Cauchy 准则) 对于任意的* $n_1, n_2 > N$ *以及任意的* ϵ*, 总存在* $|a_{n_1} - a_{n_2}| \le \epsilon$*, 那么数列是收敛的.*

Proposition 1.5. *(极限的四则运算)*

Definition 1.2. (数 e) 数 e 定义为

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Definition 1.3. (无穷极限)

1.3　函数的极限

Definition 1.4. (函数, 反函数)

复合函数的形成条件是内层函数的值域是外层函数定义域的子集.

Definition 1.5. (函数的有界性)

Definition 1.6. (函数在某一点处的极限)

Theorem 1.2. *(两个重要极限)*

Definition 1.7. (单侧极限)

Definition 1.8. (无穷极限)

1.4 无穷小与无穷大

Definition 1.9. (O 记号) 记号 "当 $x \in X$ 时, $\varphi(x) = O(\psi(x))$" 表示: 存在常数 A, 使得当 $x \in X$ 时, $|\varphi(x)| \leq A|\psi(x)|$. 若在点 $a(x \neq a)$ 的某个邻域内成立, 就可以写做:"当 $x \to a$ 时, $\varphi(x) = O(\psi(x))$".

Definition 1.10. (o 记号)

Theorem 1.3. *(常见的等价无穷小) 当 $x \to 0$ 时, 有*

$$\sin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim x$$
$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$
$$1 - \cos^\alpha x \sim \frac{\alpha}{2}x^3$$
$$a^x - 1 \sim x \ln a$$
$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$$

成立.

Proposition 1.6. *(无穷小的代换原则)*

1.5 函数的连续性

Definition 1.11. (连续函数)

Definition 1.12. (第一类间断点和第二类间断点)

Proposition 1.7. *(初等函数在定义区间连续)*

下面来看关于连续函数的在闭区间的基本定理.

Theorem 1.4. *(有界性) 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 那么存在最大值和最小值 M 和 m 与区间 $[a,b]$ 内.*

Theorem 1.5. *(介值定理) 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 如果有 $m \leq c \leq M$, 一定存在一点 ξ, 使得 $f(\xi) = c$.*

Theorem 1.6. *(零点定理) 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 并且 $f(a)f(b) < 0$, 那么在 $[a,b]$ 内一定存在零点.*

1.6 函数的一致连续性

Definition 1.13. (函数的一致连续性) 对于任意 x_1, x_2 以及 ϵ, 总存在 δ, 使得 $|x_1 - x_2| \leq \delta$ 的时候有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \delta$.

第二章　导数与微分

2.1　显函数的导数

Definition 2.1. (导数的定义)

Theorem 2.1. *(求导的基本法则)*

Theorem 2.2. *(基本初等函数求导的公式)*

$$
\begin{aligned}
&(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} && (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} && \\
&(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} && (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \\
&(a^x)' = a^x \ln a && (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} &&
\end{aligned}
$$

Definition 2.2. (单侧导数)

Definition 2.3. (无穷导数)

2.2　反函数的导数

Proposition 2.1. *(反函数的导数)*

Proposition 2.2. *(参数方程的导数)*

Proposition 2.3. *(隐函数的导数)*

2.3　函数的微分

Definition 2.4. (函数的微分)

微分的计算: 最后带入 Δy 的线性主部即可.

2.4　高阶导数和微分

Definition 2.5. (高阶导数)

Theorem 2.3. *(高阶导数的常用计算)*

$$
\begin{aligned}
&(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) && (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\
&(x^m)^{(n)} = m^{\underline{n}} x^{m-n} && ((ax+b)^m)^{(n)} = a^n m^{\underline{n}} (ax+b)^{m-n} \\
& && \left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n! a^n}{(ax+b)^{n+1}} \\
&(\ln(x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} && (uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^{(i)} v^{(n-i)}
\end{aligned}
$$

2.5　微分中值定理

Lemma 2.1. *(Fermart 引理) 函数的极值处的导数为 0.*

Theorem 2.4. *(Rolle 定理)*

Theorem 2.5. *(Lagrange 定理)*

Theorem 2.6. *(Cauchy 定理)*

2.6　函数的增减性

Theorem 2.7. *(增函数与减函数)*

Proposition 2.4. *(函数递增与递减的充分条件)*

2.7　函数的凹凸性与拐点

Definition 2.6. (凹凸性)

Proposition 2.5. *(凹凸性的充分条件)*

Proposition 2.6. *(拐点的充分条件)*

2.8　不定式的求值法

Theorem 2.8. *(L'Hospital 法则)*

2.9　Taylor 公式

Theorem 2.9. *(Taylor 公式) Taylor 公式的两种余项展开形式:*

- *Peano 形的余项:* $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x^{n+1})$
- *Lagrange 形的余项:* $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(\xi - x_0)^n$

Theorem 2.10. *(重要的 Taylor 展开式)*

$$
\begin{aligned}
e^x =& 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x =& x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \\
\cos x =& 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
(1+x)^m =& 1 + \binom{m}{1}x + \cdots + \binom{m}{n}x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) =& x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)
\end{aligned}
$$

2.10　函数的极值, 最大值和最小值

Theorem 2.11. *(极值存在的必要条件)*

Theorem 2.12. *(极值存在的充分条件)*

2.11　导数在几何中的应用

Definition 2.7. (n 阶相切)

Definition 2.8. (曲率圆) 若圆周 $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = R^2$ 在某一点与已知曲线 $y = f(x)$ 二阶或更高阶相切, 则称此圆为在相应点的曲率圆, 圆的半径

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

称作曲率半径, $k = 1/R$ 称为曲率.

第三章　不定积分

3.1　换元法和分部积分法

Proposition 3.1. *(常见函数的积分)* 常见函数有以下的积分表:

$$\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$
$$\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\tan x + \sec x| + C \qquad \int \csc x \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C \qquad \int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$$
$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C \qquad \int \sqrt{x^2 \pm 1}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm 1} + \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1} + C$$

Proposition 3.2. *(扩展积分表)* 对于二次三项式, 我们有如下的常见积分表:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \qquad \int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\left|\frac{x+a}{x-a}\right|$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$$
$$\int \sqrt{a^2-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arctan\frac{x}{a} \qquad \int \sqrt{\pm a^2+x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{\pm a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{\pm a^2+x^2})$$

Problem 3.1. 求解 $I_n = \int f_n(x)\mathrm{d}x, f_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$ 以及 $f_n(x) = \sin^n x$.

3.2　几类初等函数的积分

Problem 3.2. 已知: 在复数域上一切实系数多项式都可以分解成若干个一次因式的乘积, 证明: 一个有理真分式一定可以表示成若干个最简分式的和, 而最简真分式有且仅有如下四种:

$$\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^m}, \frac{Mx+N}{x^2+px+q}(p^2-4q<0), \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}(k>1, p^2-4q<0).$$

并且将 $\frac{2x+2}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$ 化为上述形式.

第四章　定积分

4.1 定积分的概念

4.1.1 习题

Problem 4.1. 用定积分的定义求 $I = \int_a^b 1/x \mathrm{d}x$.

Solution. **分割**. 将 $[a,b]$ 分为 n 份, 并且

$$a < aq < \cdots < aq^{n-1} < aq^n < b,$$

并且 $q = \sqrt[n]{b/a}$, **近似的**, $\xi_i = aq^i$, **求和**:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = n - \frac{n}{\sqrt[n]{\frac{b}{a}}}.$$

取极限:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{b}{a}}}\right) = \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

4.2 定积分的性质

Problem 4.2. 求出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t\right),$$

其中 $u(x)$ 是可微函数, f 是连续函数.

Solution. $f(u(x))u'(x)$.

Problem 4.3. 运用递推公式计算:

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n} x \mathrm{d}x.$$

Solution. 注意到 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

Problem 4.4. 求解

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \mathrm{d}x$$

的递推关系式. 并与 $I_n = \int \sin^n x \mathrm{d}x$ 的结果作对照.

Problem 4.5. 求解

$$I = \int_2^4 \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{9-x}} \mathrm{d}x.$$

Solution. 注意到可以让分子变为分母的第二项, 同时指标翻转.

Problem 4.6. 求积分
$$I=\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\mathrm{d}x.$$

Solution. 考虑半角公式. 作代换 $x=a\cos t$.

Problem 4.7. 求积分
$$I=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x\cos 2x\cos 3x+\sin x\sin 2x\sin 3x)\mathrm{d}x.$$

Solution. 考虑分奇偶加上和差化积公式.

Problem 4.8. 求定积分:
$$I_1=\int_0^{\pi}\ln(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta, I_2=\int_0^{\pi}\ln(1+\cos\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Solution. 考虑拆成两半积分.

Problem 4.9. 求定积分:
$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x.$$

Solution. 考虑 $x:=\pi/2-x$.

Problem 4.10. 如果 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明:
$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

Solution. 考虑 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_a^a f(a-x)\mathrm{d}x$.

Problem 4.11. 计算:
$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x.$$

Solution. 考虑 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\left(f(x)+f(-x)\right)\mathrm{d}x$.

Problem 4.12. 计算:
$$I_n=\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x.$$

Solution. 考虑分部积分之后使用递推关系, 注意配凑.

Problem 4.13. 计算:
$$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x.$$

Solution. 考虑 I_n+I_{n-1}. 如果分母差的次数为 1 并且为多项式, 可以考虑递推关系.

4.3　反常积分

Proposition 4.1. 反常积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x$$

当 $p > 1$ 时收敛, 并且其值为 $a^{1-p}/(p-1)$, $p \leq 1$ 时发散.

第二部分

多元微积分

第五章　向量代数

5.1　向量及其线性运算

Definition 5.1. (向量的加法, 数乘, 几何意义)

Proposition 5.1. *(中线长公式)*

Definition 5.2. (空间直角坐标系, 卦限)

Definition 5.3. (向量的坐标表示)

Proposition 5.2. *(定比分点公式) 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$, 以及实数 $\lambda\neq 1$, 在直线 AB 上找到点 M, 使得 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$, 那么有 $\overrightarrow{OM}=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.*

Definition 5.4. (向量的模)

Definition 5.5. (向量的方向角) 对于非零向量 $a=\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$, 可以用它与三条坐标轴的正向夹角 α,β,γ(都在 $[0,\pi]$ 内) 表示. 称作 α,β,γ 为非零向量 α 的方向角.

Proposition 5.3. *(方向角的恒等式) 如果一个向量的方向角为 α,β,γ, 那么 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.*

5.2　数量积, 向量积, 混合积

Definition 5.6. (数量积, 点乘)

Definition 5.7. (向量积) 向量 a 与 b 的向量积定义为 $a\times b=(|a||b|\sin\theta)e_n$. 其中 θ 是 a 和 b 之间的夹角, $0\leq\theta\leq\pi$, e_n 垂直于 a,b 的单位向量, 其方向为按照右手系从 a 转向 b 决定.

从定义出发, 向量积具有如下性质:

1. $\forall\vec{a},\vec{a}\times\vec{a}=\mathbf{0}$
2. 两个非零向量平行 $\iff$ 它们的向量积为 $\mathbf{0}$.
3. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=S(S$ 是两个向量构成的平行四边形的面积).

并且由如下的运算性质:

1. (反交换律) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.
2. (对加法的分配率) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.
3. (与数的结合律) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$,

Theorem 5.1. *(两个向量叉乘后用行列式表示) 如果 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, 那么*

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

Definition 5.8. (混合积) 定义三个向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 的混合积为 $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}| \cos\langle \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\rangle = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

混合积有如下的性质:

1. 反对称性: 如果任意两个向量变换位次, 那么混合积改变符号.
2. 几何意义: 是 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 为棱的平行六面体体积.
3. (共面判定) 三向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 共面的充分必要条件是 $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = 0$.

Theorem 5.2. *(三个向量混合后用行列式表示) 如果* $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z), \overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z), \overrightarrow{c} = (c_x, c_y, c_z)$ *那么* $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

注意向量的叉乘不满足结合律. 但是有另外一个有趣的形式:

Theorem 5.3. *(二重向量积)*

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{a}$$

$$\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}$$

第六章　空间解析几何

6.1　平面与直线

由于过空间内一点能且仅能做一条与已知向量垂直的平面, 因此可以推出空间中, 平面表示的形式:

Proposition 6.1. *(平面的点法式方程) 任意一点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 在平面 π 上 $\iff$ 平面上的任意的向量 (记作 $M_0M = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$) 与法向量 (记作 $n = (A, B, C), ABC$ 不全为 0) 垂直. 也就是 $n \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. 即 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)$. 这是平面的**点法式方程**.*

Definition 6.1. (平面的一般式方程) $Ax + By + Cz + D = 0, A, B, C$ 不全为 0.

Proposition 6.2. *平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的法向量是 (A, B, C).*

Definition 6.2. (平面的三点式方程, 截距式方程) 三个不共线的点 $P(x_i, y_i, z_i)(i = 1, 2, 3)$, 过这三个点的平面是

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

如果取 $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$, 那么有

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

叫做平面的截距式方程.

Proposition 6.3. *与哪个轴垂直, 那么可以取法向量在那个轴上的分量为 1, 其余的轴为 0. 与哪个轴平行, 剩下还有两个自由度, 与之平行的轴等于 0.*

空间直线的特征是: 直线上一定点与其一动点分别作起点和终点形成的向量与一定的向量平行. 因此设直线过定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 并且与一定向量 $\boldsymbol{s} = (l, m, n)$ 平行.

直线上任取一点 $M(x, y, z)$, $\overrightarrow{MM_0} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ 平行于 $\boldsymbol{s}$. 也就是 $\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{s}, t \in \mathbb{R}$. 也就是 $(x-x_0)i + (y-y_0)j + (z-z_0)k = tli + tmj + tnk$, 得到参数方程:

Definition 6.3. (直线的参数方程) $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 并且与一定向量 $\boldsymbol{s} = (l, m, n)$ 平行, 那么直线的参数方程表示为: $\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

(方向向量与方向数) 过点 M_0 且平行于向量 $\boldsymbol{s}$ 的向量叫做直线的**方向向量**, l, m, n 是该直线的一组**方向数**. 他们与 $\boldsymbol{s}$ 的三个方向的余弦值成比例.

(直线的对称式方程/标准方程) 由此可以写出

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, l^2 + m^2 + n^2 \neq 0.$$

(直线的两点式方程) 如果有两点 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, 那么有替换方向向量就可以得到

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

如果有一个分母等于 0, 那么可以自动忽略其中的一个, 如果有两个等于 0, 那么应当把有 0 的两个交叉相乘理解.

(直线的一般式方程) 两个相交的平面可以确定一条直线, 因此如果有线性方程组 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2+D_2=0 \end{cases}$ 与 A_2, B_2, C_2 不成比例.

6.2　直线与平面的基本问题

Theorem 6.1. *(点到平面的距离) 如果有平面 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$, 有点 $P(x_0, y_0, z_0)$, 那么有点到平面的距离*

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

如果需要求点关于直线的对称点, 那么可以先构造过目标点, 与已知直线垂直的平面, 然后运用参数方程的办法求平面与直线的交点, 最后运用中点坐标公式完成对称点的求取.

Definition 6.4. (两平面之间的夹角) 设有两个平面

$$\begin{aligned} \pi_1 :& A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ \pi_2 :& A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{aligned}$$

它们的法向量分别是 $\boldsymbol{n_1}=(A_1, B_1, C_1), \boldsymbol{n_2}=(A_2, B_2, C_2)$, 规定两平面的夹角为两平面法向量的夹角, 记作 θ. 限定 $\theta\in[0, \pi/2]$. 并且 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\rangle|$.

如果两个直线由一般式表示出来, 那么有

Proposition 6.4. *(平面夹角的另一个表示方法) 如果有两个平面*

$$\begin{aligned} \pi_1 :& A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ \pi_2 :& A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{aligned}$$

那么可以知道

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}}.$$

Definition 6.5. (平面与平面的夹角) 假设有平面 s_1, s_2, 他们的法向量分别是 $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2)$. 那么他们的夹角是

$$\cos\theta=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Proposition 6.5. *(两平面垂直或平行的充要条件) 两直线的方向向量 $s_1=(l_1, m_1, n_1), s_2=(l_2, m_2, n_2)$ 垂直的充要条件是 $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$; 平行的充要条件是 $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$.*

Definition 6.6. (直线与平面的夹角) 如果直线和平面的法向量的方程分别为 $s=(l, m, n)$, 平面的法向量是 $n=(A, B, C)$. 直线与平面的夹角定义为

$$\sin\theta=\frac{|Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

我们可以运用线性代数里面的线性表示的思路来把两个平面做线性组合. 也就是如果有不平行的两个平面, 我们考虑两个直线交线构成的直线:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$

那么 $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ 是过两平面交线的平面, 因为交线上的任何点都成立.

6.3　曲面

Theorem 6.2. *(曲面的方程) 任何一个空间中的曲面可以由 $F(x, y, z) = 0$ 表示. 其中任意一点在曲面上都满足曲面的方程, 任意一个不在曲面上的方程都不满足曲面的方程.*

Definition 6.7. (曲面方程的参数方程形式) 如果有 $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \quad (u \in I, v \in J) \\ z = z(u, v) \end{cases}$, 其中 x, y, z 是 u, v 的两个表达式在某一参数下的取值.

Example 6.1. 平面的参数方程 $Ax + By + Cz + D = 0 (C \neq 0)$ 可以用参数方程表示为

$$x = u, y = v, z = -\frac{A}{C}u - \frac{B}{C}v - \frac{D}{C}.$$

如下是一些常见曲面的参数方程:

Definition 6.8. (球面) 由所有定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 与有定距离 R 的点组成的集合称为**球面**. 称球面的中心是 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径是 R.

若点 M 在球面上, 我们知道 $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$. 如果球心在原点, 那么方程简化为 $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

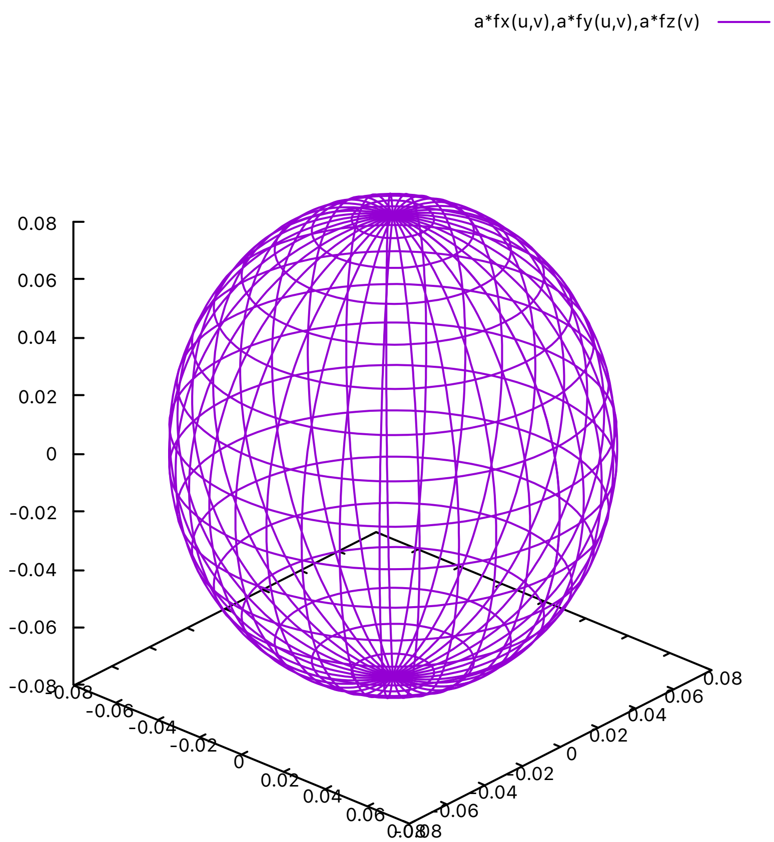
Definition 6.9. (柱面) 平行于定直线且沿着定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹称为**柱面**, 定曲线 C 叫做柱面的**准线**, 动直线 L 称为柱面的**母线**.

举一个最特殊的情形, 柱面的准线如果平行于坐标轴的某一个轴, 例如平行于 z 轴的柱面, 那么方程就是 $f(x, y) = 0$.

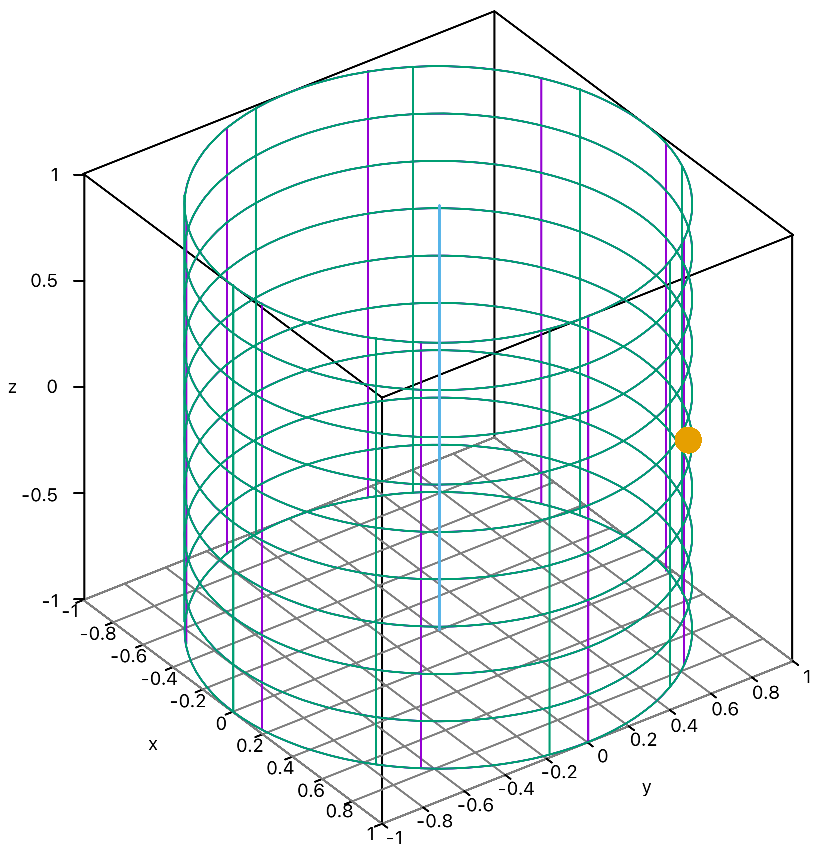
如果母线不平行于坐标平面, 那么我们就可以通过线性代数中学习的变换把它变换为平行于坐标轴的情形.

那么, 对于平行于坐标轴的情形, 对于 $f(x, y) = 0$ 而言, 柱面上任意一点 $M(x, y, z)$ 在 xOy 的投影 $M_1(x, y, 0)$ 都在 C 上, 同时也在柱面上. 并且其在 xOy 平面上的准线的方程是

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$



?figurename? 6.1: 球面



?figurename? 6.2: 柱面

Definition 6.10. (旋转曲面) 平面曲线 C 绕平面上的一个定直线 L 旋转一周而成的曲面称为**旋转曲面**. 定直线称为旋转曲面的轴, 曲线 C 叫做曲面的一条**母线**.

旋转面的一个特征是任意一个与旋转面垂直的截面与此立体图形相截的时候, 截痕为一个圆周. 下面来推导一下这个是如何来的.

假设母线在 xOy 平面内, 其方程为

$$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0; \end{cases}$$

把这个曲线绕着 z 轴旋转一周, 就有以 z 为轴的旋转曲面. 假若 $M(x,y,z)$ 为旋转曲线上的任意一点, 那么存在 C 上一点 $M_1(0,y_1,z_1)$, 使 M 在 M_1 绕 z 轴旋转的圆周上. 也就是 $f(y_1,z_1)=0, z=z_1$. 点 M 到 z 轴的距离就是

$$d=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z_1)^2}=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|.$$

带入 $z_1=z, y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$, 于是有旋转面的方程.

Proposition 6.6. *(旋转面的方程) 曲面在 yOz 的表达式若为 $f(y,z)=0$, 旋转轴平行于 z 轴的旋转面的方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.*

同样可以知道, 方程 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$ 表示的是绕着 y 轴旋转的曲面. 一个记忆的方法是: 绕着哪个轴转, 就保留那个轴, 剩下的换为正负另外两个轴字母的平方之和再开根号. 证明可以仿照上面的推导过程.

Example 6.2. 抛物线 $y^2=2px$ 绕着 x 轴旋转一周所成的曲面方程为 $y^2+z^2=2px$.

Example 6.3. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕着 y 轴旋转一周形成的曲面方程为 $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

与平面研究的一样, 我们在学完了直线之后又简单了解了几种二次的曲线, 如椭圆, 圆, 抛物线等. 下面来了解一些常见的二次曲面.

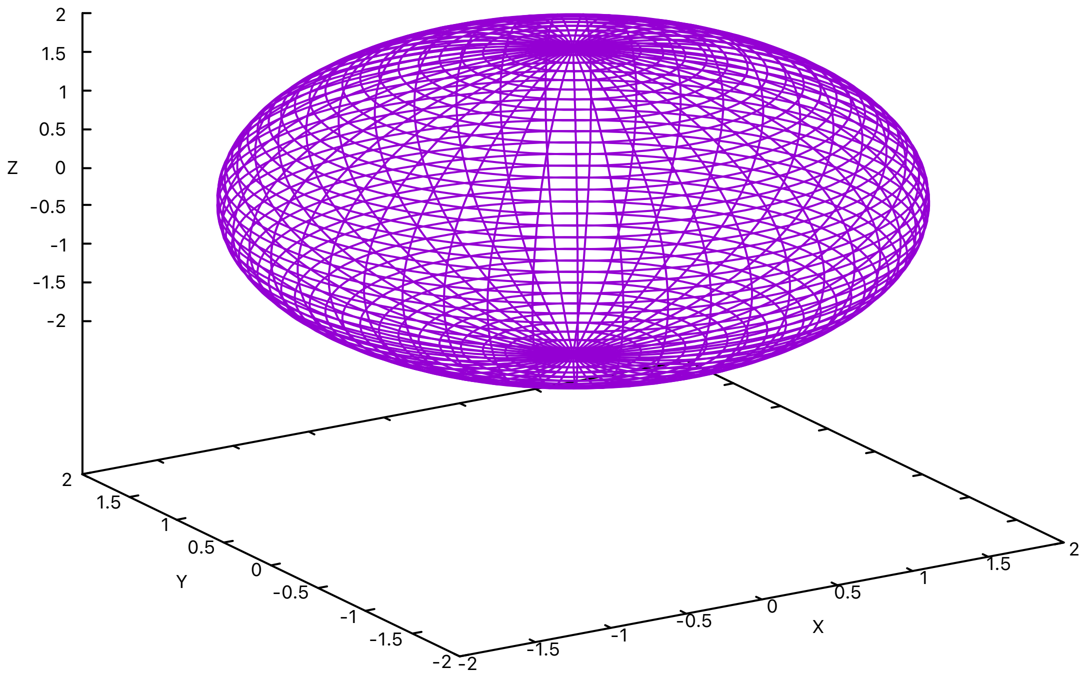
在考察二次曲面的时候, 通常从如下的几个方面入手:

1. 观察曲面是否具有对称性: 即关于原点或坐标轴, 坐标面对称.
2. 对于 $F(x,y,z)=0$ 的任意选两个变量等于 0, 观察另一个变量的实数值, 称为在未选个轴上的**截距**.
3. 任取一个变量等于 0, 例如 $z=0$, 那么这样反应的就是曲线与 xOy 面的交线, 称为曲面在该坐标面上的**截痕**. 如果令这个变量等于某一个常数, 也就是用一个平行于某一坐标轴的线来截取, 得到的结果称为这个是曲线的**轮廓线**.

Definition 6.11. (椭球面) 由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

表示的曲面叫做椭球面 $(a,b,c>0)$.



?figurename? 6.3: 柱面

Proposition 6.7. 椭球面的所有点都在 $x=\pm a, y=\pm b, z=\pm c$ 所围成的长方体内.

Theorem 6.3. *(双曲抛物面)* 由方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ 表示的曲面称为**双曲抛物面**.

为了画出它的图形, 我们可以采用平行截面法. (1) 首先用 $z=h$ 去截取, 轮廓线为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2h & (1)\\ z=h & (2)\end{cases}$$

注意到 $h>0$ 的时候, 这是双曲线, 实轴与 x 轴平行, 虚轴与 y 轴平行. 当 $h=0$ 的时候, 有

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 & (1)\\ z=0 & (2)\end{cases} \text{以及} \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 & (1)\\ z=0 & (2)\end{cases}$$

这样就是两条相交于原点的直线.

(2) 然后用平面 $x=h$ 去截, 轮廓线为

$$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{a^2}-2z & (1)\\ x=h & (2)\end{cases}$$

当 $h=0$ 的时候, 截痕是 yOz 平面上定点在原点的抛物线, 开口向下. 当 $h\neq 0$ 的时候, 也是开口向下的抛物线, 只不过抛物线的顶点在不断升高.

(3) 最后用平面 $y=h$ 去截, 有

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}+2z & (1)\\ y=h & (2)\end{cases}$$

注意到轮廓线为开口向上的抛物线.

Definition 6.12. (椭圆抛物面) 由方程 $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(pq>0)$ 表示的曲面为抛物面.

Definition 6.13. (双曲面) 由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 表示的曲面为单叶双曲面, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 表示的曲面为双叶双曲面.

事实上, 二次曲面的分类一共有 17 种. 可以参看《高等代数与解析几何》(《线性代数学习笔记》) 了解更多.

6.4　曲线

如同直线可以看做两个平面的交, 我们可以把曲线看做两个曲面的交, 也就是有如下定义:

Definition 6.14. (空间曲面) 如果有两个不同的曲面 $F(x,y,z)=0$ 与 $G(x,y,z)=0$, 他们的交线

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$$

可以表示一个曲线. 叫做空间曲线的一般方程.

除此之外, 我们还可以用参数方程表示.

Definition 6.15. (空间曲线的参数方程) 空间曲线还可以有参数方程, 其中参数是限定在某个范围内的.

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = f(t) \quad a \le t \le b. \\ z = f(t) \end{cases}$$

很多时候, 将三维平面降维打击是很有必要的. 我们可以看一看一个曲面投影在一个平面上的情形.

如果空间曲线 C 有方程

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

应该怎样求出其在 xOy 平面上的投影呢?

一个想法是过曲线 C 的每一点做 xOy 平面的垂线, 也就是相当于做一个与母线平行于 z 轴且通过曲线 C 的柱面. 这个柱面与 xOy 平面的交线就是曲线 C 在 xOy 平面上的投影. 下面来求解柱面的方程.

将 F, G 联立, 并且消去变量 z, 那么曲线的投影方程就是

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$