无穷

AUGPath

2022 年 12 月 1 日

0.1 简介

我们在高中的学习中, 对于极限的了解仅仅停留在表面和直观感受上. 那么, 我们有没有办法把这件事情严格化呢? 这是我们这次主要需要的事情.

> From his paradise that Cantor with us unfolded, we hold our breath in awe; knowing, we shall not be expelled.
>
> — David Hilbert

0.1.1 在 Cantor 以前

在《几何原本》中, Euclid 明确提出: "整体大于部分" 的公理. 但我们对无穷多个元素的集合而言, 部分是可以 "等于" 整体的.

考虑下面的两个集合:

$$S_1 = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$

$$S_2 = \{1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots\}$$

我们可以给 S_1 的每一个 S_1 中的元素 a 做映射 a^2, 使得 $a^2 \in A_2$, 因此可以认为这是相等的. 但是明显的, $S_2 \subseteq S_1$. 这就是所说的 "部分等于全体". 用我们有限的心智来讨论无限 $\cdots$

> "说到底，'等于'、'大于' 和 '小于' 诸性质不能用于无限，而只能用于有限的数量。"
> — Galileo Galilei

当时也有人反对使用 "无穷" 的论点, 认为这是一派胡言.

> "无穷数是不可能的。" — Gottfried Wilhelm Leibniz

但是 Cantor 坚定地认为, 以前我们的 "大于", "小于" 那一套东西已经过时了, 要讨论 "无穷", 当然要建立一套新的体系, 来帮助我们理解这一套内容.

> "这些证明一开始就期望那些数要具有有穷数的一切性质，或者甚至于把有穷数的性质强加于无穷。
>
> 相反，这些无穷数，如果它们能够以任何形式被理解的话，倒是由于它们与有穷数的对应，它们必须具有完全新的数量特征。
>
> 这些性质完全依赖于事物的本性，$\cdots$ 而并非来自我们的主观任意性或我们的偏见。"
>
> — Georg Cantor (1885)

于是他们尝试使用映射的观念来定义无穷:

定义 0.1.1 (Dedekind-infinite & Dedekind-finite (Dedekind, 1888)). A set A is *Dedekind-infinite* if there is a bijective function from A to some proper subset B of A.

A set is *Dedekind-finite* if it is not Dedekind-infinite.

但是我们还没有定义 "finite" 和 "infinite". 所以下面我们要用函数的观念来比较集合.

0.1.2 集合的比较

集合的个数相等

从开始的问题中, 我们可以看到, 只要出现了一个双射函数, 我们就可以说两个集合的元素个数相等. 于是给出如下定义:

定义 0.1.2 ($|A| = |B|$ ($A \approx B$) (1878)). A and B are *equipotent (等势)* if there exists a *bijection* from A to B.

一个集合其实是不关心这个集合元素的次序, 在 "势" 的考量下, 也不关心集合中的元素是什么, 就是两层抽象. 有时候也写作 $\overline{\overline{A}}$.

那么, 等势关系是一个等价关系吗? 不要关注太多, 要想证明远没有想象的那么简单.

定理 0.1.1. The "Equivalence Concept" of Equipotent For any sets A, B, C:

1. $A \approx B$
2. $A \approx B \implies B \approx A$
3. $A \approx B \wedge B \approx C \implies A \approx C$

有了 "势" 的概念, 我们就可以对 "有限" 进行定义了.

定义 0.1.3 (Finite). X is finite if

$$\exists n \in \mathbb{N} : |X| = |n| = |\{0, 1, \ldots, n-1\}|.$$

我们很多时候写作 $|X| = n$. 这就意味着集合 X 是有穷的当且仅当它与某个自然数等势.

相反的, 我们可以定义无穷.

定义 0.1.4 (Infinite). X is infinite if it is not finite:

$$\forall n \in \mathbb{N} : |X| \neq n.$$

我们既然定义了, 当然要说明它是存在的. 于是我们有这样的一个定理:

定理 0.1.2 (Existence of Infinite Sets!). $\mathbb{N}$ is infinite.(So are $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.)

我们可以使用反证法证明.

证明. 假设 $\exists n \in \mathbb{N}$, 使得 $|\mathbb{N}| = n$, 那么我们就存在 $f : \mathbb{N} \xleftrightarrow[onto]{1-1} \{0, 1, \cdots, n-1\}$.

下面, 我们构造限制映射 $g \triangleq f|_{\{0,1,\ldots,n\}} : \{0, 1, \cdots, n\} \to \{0, 1, \cdots, n-1\}$. 由于抽屉原理, g 不是一一映射, 那么 f 也不是一一映射.

$\square$

我们注意到无穷也有几种. 比如有的无穷是可以一个一个计数清楚的, 有的无穷是不行的.

定义 0.1.5 (Infinite). For any set X,

- Countably Infinite:

$$|X| = |\mathbb{N}| \triangleq \aleph_0$$

- Countable.

$$(\text{finite} \lor \text{countably infinite})$$

- Uncountable.

$$(\neg \text{ countable})$$
$$(\text{infinite}) \land \Big(\neg \ (\text{countably infinite})\Big)$$

自然的, 我们会发现 $\mathbb{Z}$ 是可数的. 如果我们把 $\mathbb{N}$ 的每一个元素扩大到原来了 2 倍, 中间就会稀疏一些, 可以容纳下负数.

Cantor 发现 $\mathbb{Q}$ 也是可数的. 因为 Cantor 是发现了一种数出有理数的方法. 其一句就是任何一个有理数 (quotient) 都可以成为形如 $a/b, \gcd(a,b) = 1$ 成比例的数. 如此:

$$\begin{array}{llll} 1/1 & & & \\ 1/2 & 2/1 & & \\ 1/3 & 2/2 & 3/1 & \\ 1/4 & 2/3 & 3/2 & 4/1 \end{array}$$

因此, 有理数是可数的. 更进一步的, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 也是可数的. 因为我们只要做一个映射就行了. 具体的, 可以把 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 压缩到 $\mathbb{N}$ 上. 也就是 $\pi(k_1, k_2) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)(k_1 + k_2 + 1) + k_2$.

按照归纳的方法, 也就是 $\pi^{(n)}(k_1, \ldots, k_{n-1}, k_n) = \pi(\pi^{(n-1)}(k_1, \ldots, k_{n-1}), k_n) \quad (n \geq 3)$, 有如下的定理:

定理 0.1.3 ($\mathbb{N}^n$ is Countable.)**.**

$$|\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}|$$

进一步的推广, 我们有:

定理 0.1.4. The Cartesian product of finitely many countable sets is countable.

另外, 任意有限集的并集都是可数的, 我们还可以用刚刚的想法, 使用对角线计数.

再后来的研究中, 我们惊奇的发现, 有些无穷的大小之间是有着深刻的差别的. 例如, $\mathbb{R}$ 是不能够被数出来的. 同样也是用对角线证明法得到的结论.

定理 0.1.5 ($\mathbb{R}$ is Uncountable. (Cantor 1873-12; Published in 1874))**.**

$$|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$$