Solution of NOIP 模拟赛 Day2

BLUESKY007

1 破碎的矩阵 (matrix)

1.1 类似题目

CF1016D P5159

1.2 部分分设置

30%：$\mathcal{O}(2^{nm}nm)$ 暴力枚举，直接检验。

45%/60%：暗示正解。

1.3 题目思路

考虑在 $x = 1$ 时，对于每个格子可以填 0/1。那么所有的格子对应的数都只有一个二进制位。当所有行异或和的异或和等于所有列异或和的异或和时，在前 $n-1$ 行 $m-1$ 列的格子随意的填数，第 n 行和第 m 列总有唯一合法的填数方案。

考虑在 $x = 2^k - 1$ 时，对于每个格子对应的数有 k 个二进制位，且 0/1 不受限制，此时相比于 $x = 1$，k 个二进制位相互独立，所以在前 $n-1$ 行 $m-1$ 列的格子随意的填数，第 n 行和第 m 列也总有唯一合法的填数方案。

考虑当所有行异或和的异或和不等于所有列异或和的异或和时，矩阵填数一定不合法，此时答案为 0。否则，矩阵内前 $n-1$ 行 $m-1$ 列可以随意填数，每个位置有 $x+1$ 种填数方案，此时答案为 $(x+1)^{(n-1)(m-1)}$。

时间复杂度 $\mathcal{O}(t\log(nm))$。

1.4 考察知识点

位运算（异或），快速幂。

2 零一之间 (binary)

2.1 部分分设置

20%：打表。

40%：记忆化搜索。

2.2 题目思路

一定存在一个 x 满足条件，下面是构造性证明：

考虑在 $\bmod n$ 的完全剩余系下，最多有 n 个数，那么我们考虑对于 1,11,111,1111...(n 个 1) 如果有某个数在 $\bmod n$ 意义下为 0，这个数就是答案，否则一定有两个数在 $\bmod n$ 意义下相等（抽屉原理），那么两数之差即为答案。

模拟这个过程，可以在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内解决这个问题，长度最长为 n 位。

2.3 考察知识点

抽屉原理，剩余系。

3 信息传递 (info)

3.1 部分分设置

30%：$\mathcal{O}(n^3)$ 暴力。

60%：留给有需要的 $\mathcal{O}(n^2)/\mathcal{O}(n^2\log n)$ 复杂度选手。

3.2 题目思路

首先，位置是环形的，可以考虑断环为链（长度 3 倍），那么所有人都知道 Venn 被飞的消息等价于传播的左端点到右端点长度 $\geq n$。

考虑从每个位置 pos 开始，第 i 秒后最远可以将 Venn 被飞的消息传播到的最左位置 $lp[pos][i]$ 和最右位置 $rp[pos][i]$。设答案为 ans，则 $j < ans$ 时，$rp[pos][j]-lp[pos][j]+1 < n$，$j \geq ans$ 时，$rp[pos][j]-lp[pos][j]+1 \geq n$。由于 $l_i, r_i > 0$，所以每经过 $1s$，边界位置总会扩大，考虑倍增。对于断环为链后的每个位置 pos，维护从当前位置开始传播 2^k 秒后的边界位置 $lp[pos][k]$ 和最右位置 $rp[pos][k]$，则有转移 $\begin{cases}\text{lp[pos][k]=min}_{i=lp[pos][k-1]}^{rp[pos][k-1]} lp[i][k-1] \\ \text{rp[pos][k]=max}_{i=lp[pos][k-1]}^{rp[pos][k-1]} rp[i][k-1]\end{cases}$，区间最大/最小值用线段树/ST 表维护，然后对于 n 个询问，倍增求出答案即可。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log^2 n)$。

3.3 考察知识点

倍增，线段树/ST 表。