

含参二次函数的求解问题

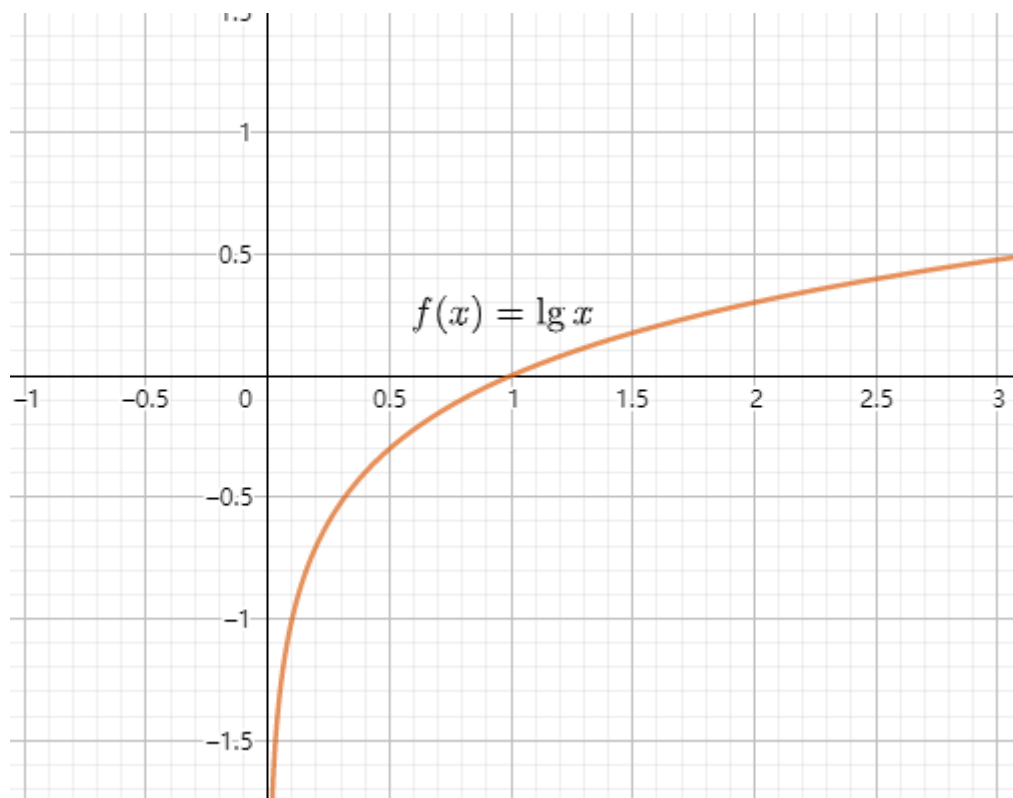
已知函数 $f(x) = \lg[(a^2 - 1)x^2 + (a + 1)x + 1]$ ①若 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} ，求实数 a 的取值范围；②若 $f(x)$ 的值域为 \mathbb{R} ，求实数 a 的取值范围。

分析该题目思路

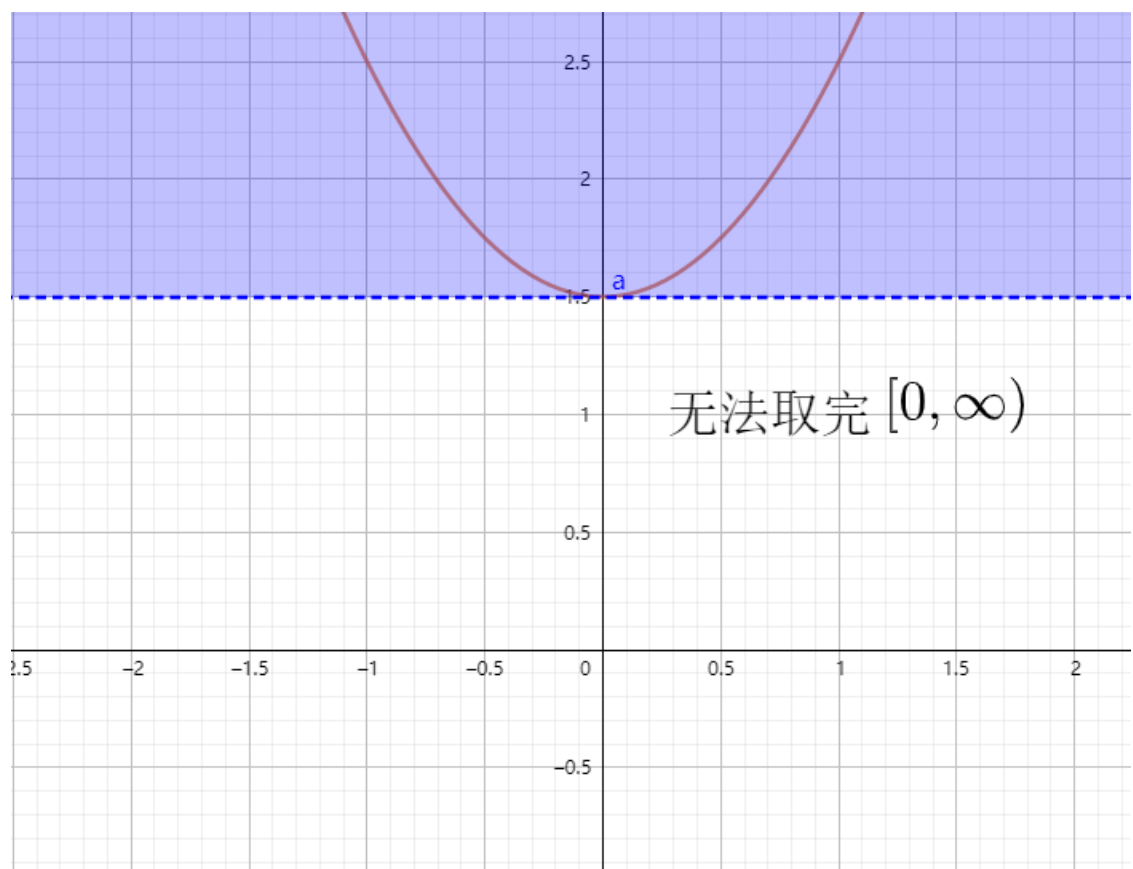
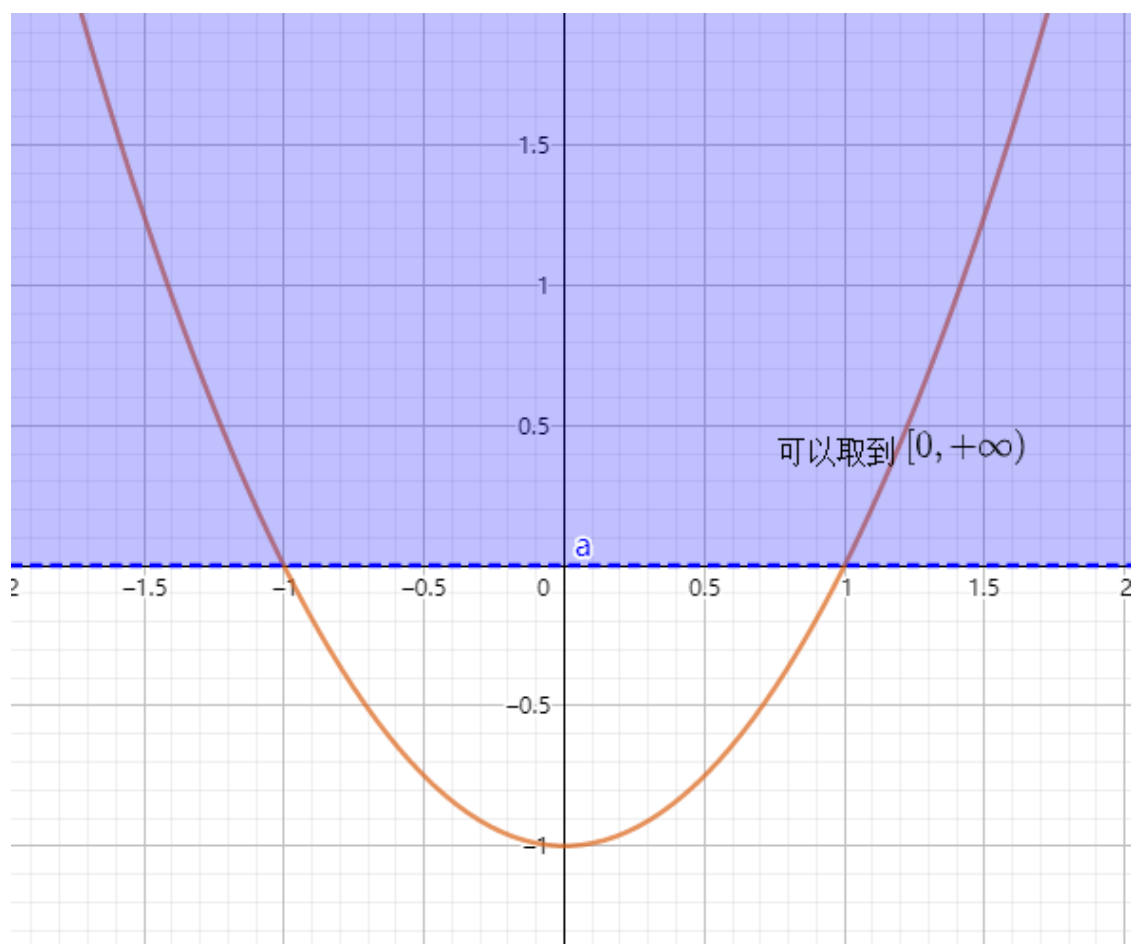
- 看上去是对数，其实里面是包裹一个类似二次函数的东西。
- 令对数里面的那一堆换成 t 。我们先研究外面的对数。
- 什么时候对数有意义？
- 例如这个 $\log_8 x, x > 0$ 的时候才成立。
- 所以第一问转化成 $t > 0$ 恒成立。也就是

$$(a^2 - 1)x^2 + (a + 1)x + 1 \text{ 是一个二次函数}$$
$$(a^2 - 1)x^2 + (a + 1)x + 1 > 0 \text{ 恒成立}$$

- 第二问说值域为 \mathbb{R} 。回忆对数函数的图像：



- 可见，我们必须让 x 取遍 $[0, +\infty)$ 的所有值。
- 那么 t 这个二次函数怎样做才可以保证取遍 $[0, +\infty)$ 的所有值呢？



- 可见，我们必须满足：

$$(a^2 - 1)x^2 + (a + 1)x + 1 \text{ 是一个二次函数}$$

$$\Delta \geq 0$$

才可以造出这样的值。

注意

前提是我们必须确认这东西得是一个二次函数。

那么我们必须保证二次项系数部分不为0。

如果是0，必须分类讨论说。

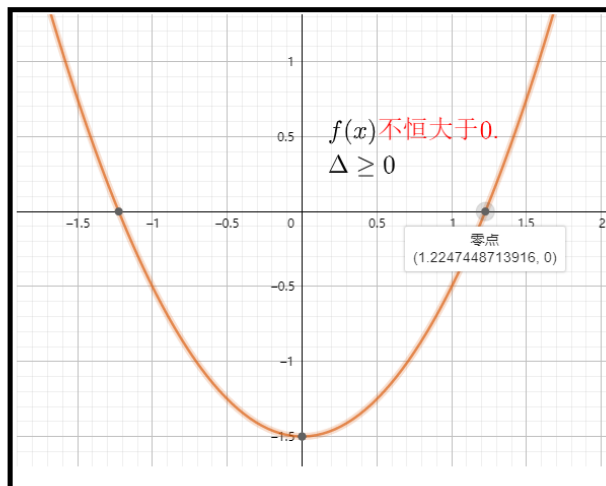
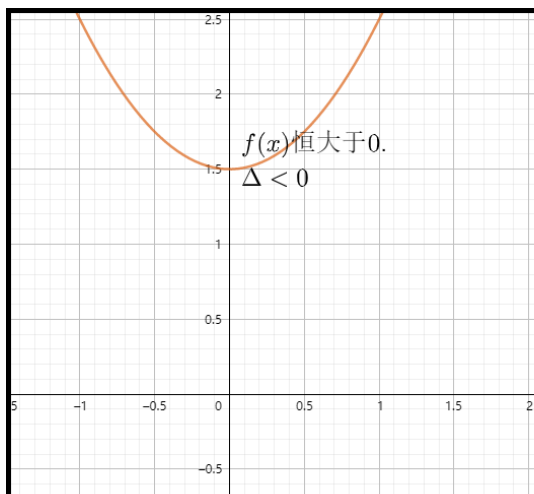
二次函数的含参求解的方法

- 就像刚刚提到的，我们把题目 (1) 转化成了

$(a^2 - 1)x^2 + (a + 1)x + 1$ 是一个二次函数

$(a^2 - 1)x^2 + (a + 1)x + 1 > 0$ 恒成立

- 根据第二个式子，我们不难发现 $(a^2 - 1)$ 的系数必须为正且 $\Delta < 0$ 来约束其不与 x 轴产生交点。



- 所以我们解答一下：

解:(1) $(a^2 - 1)x^2 + (a + 1)x + 1 > 0$ 恒成立:

I原式是一个二次函数

$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0 \\ \Delta < 0 \Rightarrow (a + 1)^2 - 4(a^2 - 1) < 0 \end{cases}$$

$$\text{解之:} \begin{cases} a < -1 \text{ 或 } a > 1 \\ -3a^2 + 2a + 5 < 0 \end{cases}$$

$$\text{得到: } x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{5}{3}, +\infty).$$

II原式不是一个二次函数

$$a^2 - 1 = 0. \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow 2x + 1 > 0, \text{ 不是恒成立。} \\ a = -1 \Rightarrow 1 > 0, \text{ 是恒成立。} \end{cases}$$

$$\text{综上所述: } x \in (-\infty, -1] \cup (\frac{5}{3}, +\infty).$$

(2) $(a^2 - 1)x^2 + (a + 1)x + 1$ 必须取得所有正数。

I原式是一个二次函数

$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0 \\ \Delta \geq 0 \Rightarrow (a + 1)^2 - 4(a^2 - 1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{解之:} \begin{cases} a < -1 \text{ 或 } a > 1 \\ -3a + 2a + 5 \geq 0 \end{cases}$$

$$x \in (1, \frac{5}{3}].$$

II原式不是一个二次函数:

$$a^2 - 1 = 0. \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow 2x + 1 > 0, \text{ 可以取得所有正数。} \\ a = -1 \Rightarrow 1 > 0, \text{ 不可以取得所有正数。} \end{cases}$$

$$\text{综上所述: } x \in [1, \frac{5}{3}].$$