# Solution of NOIP 模拟赛 Day2

BLUESKY007

# 1 破碎的矩阵 (matrix)

## 1.1 类似题目

CF1016D P5159

## 1.2 部分分设置

30%:$\mathcal{O}(2^{nm}nm)$ 暴力枚举,直接检验。
45%/60%:暗示正解。

## 1.3 题目思路

考虑在 $x=1$ 时,对于每个格子可以填 0/1。那么所有的格子对应的数都只有一个二进制位。当所有行异或和的异或和等于所有列异或和的异或和时,在前 $n-1$ 行 $m-1$ 列的格子随意的填数,第 $n$ 行和第 $m$ 列总有唯一合法的填数方案。

考虑在 $x=2^k-1$ 时,对于每个格子对应的数有 $k$ 个二进制位,且 0/1 不受限制,此时相比于 $x=1$,$k$ 个二进制位相互独立,所以在前 $n-1$ 行 $m-1$ 列的格子随意的填数,第 $n$ 行和第 $m$ 列也总有唯一合法的填数方案。

考虑当所有行异或和的异或和不等于所有列异或和的异或和时,矩阵填数一定不合法,此时答案为 0。否则,矩阵内前 $n-1$ 行 $m-1$ 列可以随意填数,每个位置有 $x+1$ 种填数方案,此时答案为 $(x+1)^{(n-1)(m-1)}$。

时间复杂度 $\mathcal{O}(t\log(nm))$。

## 1.4 考察知识点

位运算(异或),快速幂。

# 2 零一之间 (binary)

## 2.1 部分分设置

20%:打表。
40%:记忆化搜索。

## 2.2 题目思路

一定存在一个 $x$ 满足条件,下面是构造性证明:

考虑在 $\bmod n$ 的完全剩余系下，最多有 $n$ 个数，那么我们考虑对于 1,11,111,1111...($n$ 个 1) 如果有某个数在 $\bmod n$ 意义下为 0，这个数就是答案，否则一定有两个数在 $\bmod n$ 意义下相等（抽屉原理），那么两数之差即为答案。

模拟这个过程，可以在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内解决这个问题，长度最长为 $n$ 位。

### 2.3 考察知识点

抽屉原理，剩余系。

## 3 信息传递 (info)

### 3.1 部分分设置

30%: $\mathcal{O}(n^3)$ 暴力。

60%: 留给有需要的 $\mathcal{O}(n^2)/\mathcal{O}(n^2 \log n)$ 复杂度选手。

### 3.2 题目思路

首先，位置是环形的，可以考虑断环为链（长度 3 倍），那么所有人都知道 Venn 被飞的消息等价于传播的左端点到右端点长度 $\geq n$。

考虑从每个位置 $pos$ 开始，第 $i$ 秒后最远可以将 Venn 被飞的消息传播到的最左位置 $lp[pos][i]$ 和最右位置 $rp[pos][i]$。设答案为 $ans$，则 $j < ans$ 时，$rp[pos][j] - lp[pos][j] + 1 < n$，$j \geq ans$ 时，$rp[pos][j] - lp[pos][j] + 1 \geq n$。由于 $l_i, r_i > 0$，所以每经过 $1s$，边界位置总会扩大，考虑倍增。对于断环为链后的每个位置 $pos$，维护从当前位置开始传播 $2^k$ 秒后的边界位置 $lp[pos][k]$ 和最右位置 $rp[pos][k]$，则有转移 $\begin{cases} \text{lp[pos][k]=}\min_{i=lp[pos][k-1]}^{rp[pos][k-1]} lp[i][k-1] \\ \text{rp[pos][k]=}\max_{i=lp[pos][k-1]}^{rp[pos][k-1]} rp[i][k-1] \end{cases}$，区间最大/最小值用线段树/ST 表维护，然后对于 $n$ 个询问，倍增求出答案即可。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log^2 n)$。

### 3.3 考察知识点

倍增，线段树/ST 表。