Solution of NOIP 模拟赛 Day1

BLUESKY007

1 中位串 (midstr)

1.1 原题

CF1144E

1.2 部分分设置

30%：因为 $2 \cdot 26^{12} = 190857913323364352 \approx 2 \cdot 10^{17}$，所以可以把字符串看作 26 进制数并转化成不超过 long long 级别的十进制数，然后求中位数/平均数即可。

60%：提供给有 $\mathcal{O}(n^2)$ 复杂度奇怪想法实现高精加法和高精除以低精的人。

1.3 题目思路

由于两个字符串之间的字符串数量为奇数，所以两个字符串在被视为 26 进制数时奇偶性相同，也即它们的中位数就是它们的平均数。求平均数显然先求高精和，然后除以 2。所以这题也没什么难的，写个高精也不麻烦，标程我 CF 场上用五分钟就写完了。

1.4 考察知识点

高精，进制，基础数学。

2　染色 (color)

2.1　原题

CF1140E

2.2　部分分设置

1,2,8 $\sim$ 11：k=4，0 的个数不超过 10，可以考虑枚举每个等于 0 的 a_i，然后 $\mathcal{O}(n)$ 检验是否存在回文串。期望得分 30 分。

3：显然每个位置上的数只需要和前一个位置不同即可，后 $n-1$ 个位置每个位置都有 $k-1$ 种替换方案，所以方案总数为 $(k-1)^{n-1}$。

4,5：暗~~（明）~~示正解思路，考虑在两边有限制的情况下的方案数，显然两边有数分为两种情况：数字相同和数字不同。设状态为 $f[i][j]$，表示数列除两边非零的数外，中间 0 的个数为 i。对于 j，0 为两边数字不同，1 为两边数字相同。那么考虑转移方程：

- 初始状态 $f[0][0]=1, f[0][1]=0$。
- 当两边的数相同时，考虑填 $i-1$ 个 0 时的情况，由于填 $i-1$ 个 0 的末位置与填 i 个 0 的末位置相邻，所以两者必须不同 $(a,\cdots,a,b,a)$，即 $f[i][1]=(k-1)f[i-1][0]$。
- 当两边的数不同时，由于填 $i-1$ 个 0 的末位置与填 i 个 0 的末位置相邻，所以两者必须不同 $(a,\cdots,a,c,b)$，当 $c=a$ 时，有 $f[i-1][1]$ 种方案，当 $c\neq a$ 且 $c\neq b$ 时，有 $(k-2)f[i-1][0]$ 种方案，即 $f[i][0]=f[i-1][1]+(k-2)f[i-1][0]$。

所以跑一遍 DP 就行了，复杂度 $\mathcal{O}(n)$。

2.3　题目思路

参考 $3\sim 5$ 的思路，先完成 6,7，一个数列不存在长度 >1 且为偶数的回文子数列当且仅当一个数列不存在相邻两个相等的数（否则构成长度为 2 的回文子数列）。对于一般的数据，可以视为多组 3,4,5 数据的叠加，所以不妨先跑一遍 DP，首尾连续的 0 可以视为 3 的情况，数列中间的两

个数之间有 0 可以视为 4,5 的情况，至此可以解决 $m = 0$ 的所有情况。类似的，对于 $m = 1$，我们不难发现，一个数列不存在长度 > 1 且为奇数的回文子数列当且仅当一个数列不存在 $a_i = a_{i-2}$ 的情况（否则构成长度为 3 的回文子数列）。所以可以把奇数位和偶数位拆开考虑，得到两个 $m = 0$ 问题。至此，问题完全解决。

2.4 考察知识点

DP，技巧。

3 抛硬币 (coin)

3.1 原题

没有原题（至少在我出题的时候没有）。

3.2 声明

这题是文文赞助的，在此再次感谢文文赞助 $idea$ 以及帮忙验题等各种方面的付出。

3.3 部分分设置

没啥可讲的部分分，都是我随便给的。

因为文文最早给我的是特殊情况下的问题，然后在讨论过程中我们决定将问题推广到一般形式。数据范围上的各种性质都是从特殊推广到一般过程中需要考虑的点，这些直接在思路里面讲。

3.4 题目思路

设 T_n 为连续 n 次向上的期望抛硬币次数。显然 $T_0 = 0$（因为不需要抛）。考虑对于 $n > 0$ 的情况，假设我们当前已经有连续 $n-1$ 次向上，那么对于下一步操作，如果是正面向上，则抛 $T_{n-1}+1$ 次结束；如果是反面向上，

则抛 $T_{n-1}+T_n+1$ 次结束。所以有 $T_n=\frac{a}{b}(T_{n-1}+1)+(1-\frac{a}{b})(T_{n-1}+T_n+1)$ $\Rightarrow T_n=(T_{n-1}+1)\cdot(\frac{a}{b})^{-1} \pmod p$。由于数据保证了 $a,b,\frac{a}{b}$ 一定有模 p 意义下的逆元，所以预先求出 $\frac{a}{b},\frac{b}{a}$ 在模意义下的值即可，由于模数不保证是质数，所以需要用到 $exgcd$ 求逆元。设 $k=(\frac{a}{b})^{-1}$，则有 $T_n=kT_{n-1}+k$，然后矩阵快速幂即可。

3.5 考察知识点

概率期望，$exgcd$ 求逆元，矩阵快速幂。