函数及其运算

离散数学－集合论

南京大学计算机科学与技术系

回顾

- 关系：笛卡尔积的子集
- 关系的运算
  - 集合运算；复合运算；逆
- 0-1矩阵运算
- 关系的性质
  - reflexivity, ir-~; symmetry, anti-~; transitivity
  - 图特征；矩阵特征

提要

- 函数的定义
- 子集的像
- 单射与满射
- 反函数
- 函数的复合
- 函数加法与乘法

函数(function)的定义

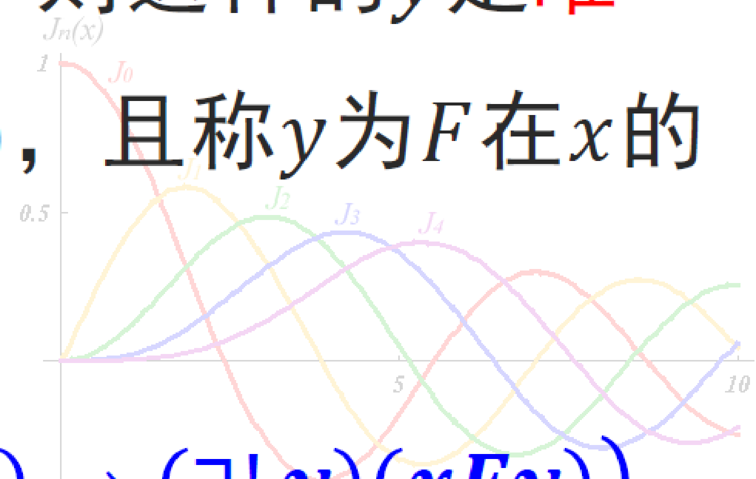
- 设 A 和 B 为非空集合，从集合A到B的函数 f 是对元素的一种指派，对A的每个元素恰好指派B的一个元素。记作 $f:A\to B$。
  - Well defined(良定义)
  - $f:A\to B$：函数的型构
  - f 的定义域（domain）是A，f 的伴域（codomain）是B
  - 如果 f 为A中元素a指派的B中元素为b，就写成 $f(a)=b$。此时，称 b是a的像，而a是b的一个原像。
  - A中元素的像构成的集合称为f的值域 range （f的像 image）。
- 函数也称为映射(mapping)或变换(transformation)

函数的集合定义

- 设F为二元关系，F为函数指：

$$(\forall x, y, z)(xFy \wedge xFz \rightarrow y = z)$$

当F为函数，若有y使xFy，则这样的y是唯一的，这时记这样的y为$F(x)$，且称y为F在x的值。事实上：



$$F\text{为函数} \leftrightarrow \left(\forall x \in \mathrm{Dom}(F) \rightarrow (\exists! y)(xFy)\right)$$

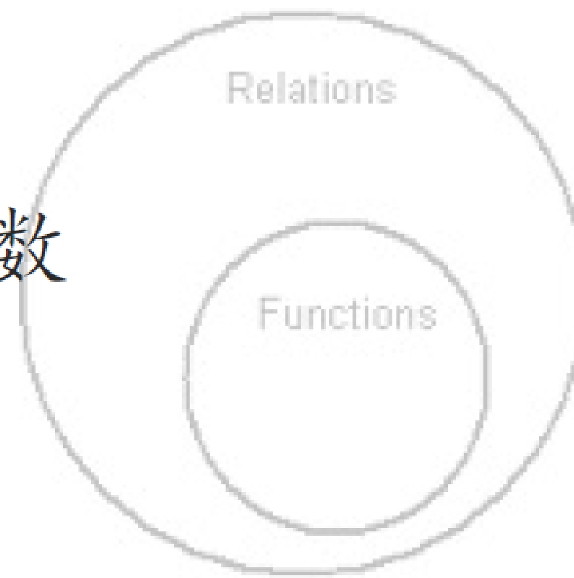
函数的集合定义（续）

- 例：

$$F_1 = \{(1,2),(3,2)\}$$ 为函数

$$F_2 = \{(1,2),(1,3)\}$$ 不为函数

$$F_3 = \emptyset$$ 为函数

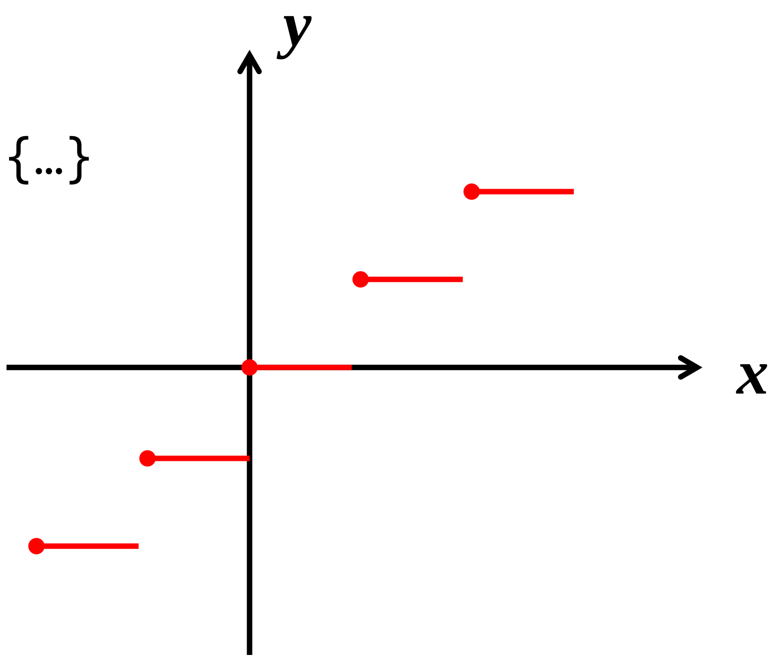


函数举例

- 下取整函数 $\lfloor x \rfloor$: $\mathrm{R} \to \mathrm{Z}$

```
Java Program
int  floor(float real) {…}


floor: float → int
```



- 函数 f 的图像: $\{(a, b) \mid a \in \mathrm{A} \wedge f(a)=b\}$

函数举例

- **某课程成绩**

函数原型

Program
CourseGrade grade(StudentName sname, CourseName cname) {…}

函数型构
(signature)

Function：
Grade: StudentName ×CourseName→ CourseGrade

姓名	课程	成绩
张明	离散数学	A
李宁	程序设计	B
王琴	数据结构	A
…	…	…

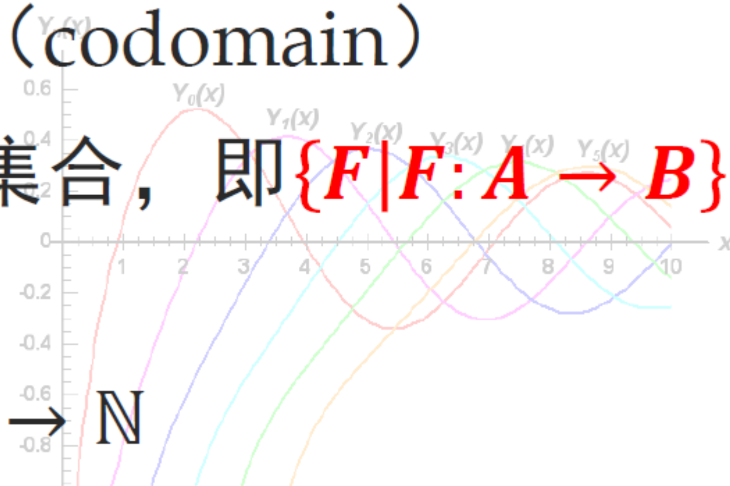
函数举例

- 设A为非空集合，A上的 恒等函数ι_A:$A\rightarrow A$定义为
  - $\iota_A(x)=x$，$x\in A$
- 设 U 为非空集合，对任意的$A\subseteq U$，特征函数χ_A:$U\rightarrow\{0,1\}$ 定义为：
  - $\chi_A(x)=1$，$x\in A$
  - $\chi_A(x)=0$，$x\in U\text{-}A$

函数的集合

- **定义：** 设A，B为集合，F为从A到B的函数(记为$F{:}\,A \to B$)指F为函数，且$\mathbf{Dom}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{A}$且$\mathbf{Ran}(\boldsymbol{F}) \subseteq \boldsymbol{B}$，$A$称函数$F$的定义域，$\mathrm{Ran}(F)$称$F$的值域，$B$称$F$的陪域（codomain）
- 记$\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}}$为$A$到$B$所有函数集合，即$\{\boldsymbol{F} \mid \boldsymbol{F}{:}\,\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}\}$，读作“$B$ 上 A”
- **例：** $\sin{:}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$\mathrm{Suc}{:}\,\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

  则：$\sin \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$，$\mathrm{Suc} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$



函数(function)的相等

- 函数相等 f=g if
  - dom(f)=dom(g)
  - codom(f)=codom(g)
  - $\forall x(x \in \text{dom}(f) \rightarrow f(x)=g(x))$

函数的相等

- **命题**：设$|A| = m$，$|B| = n$，则：

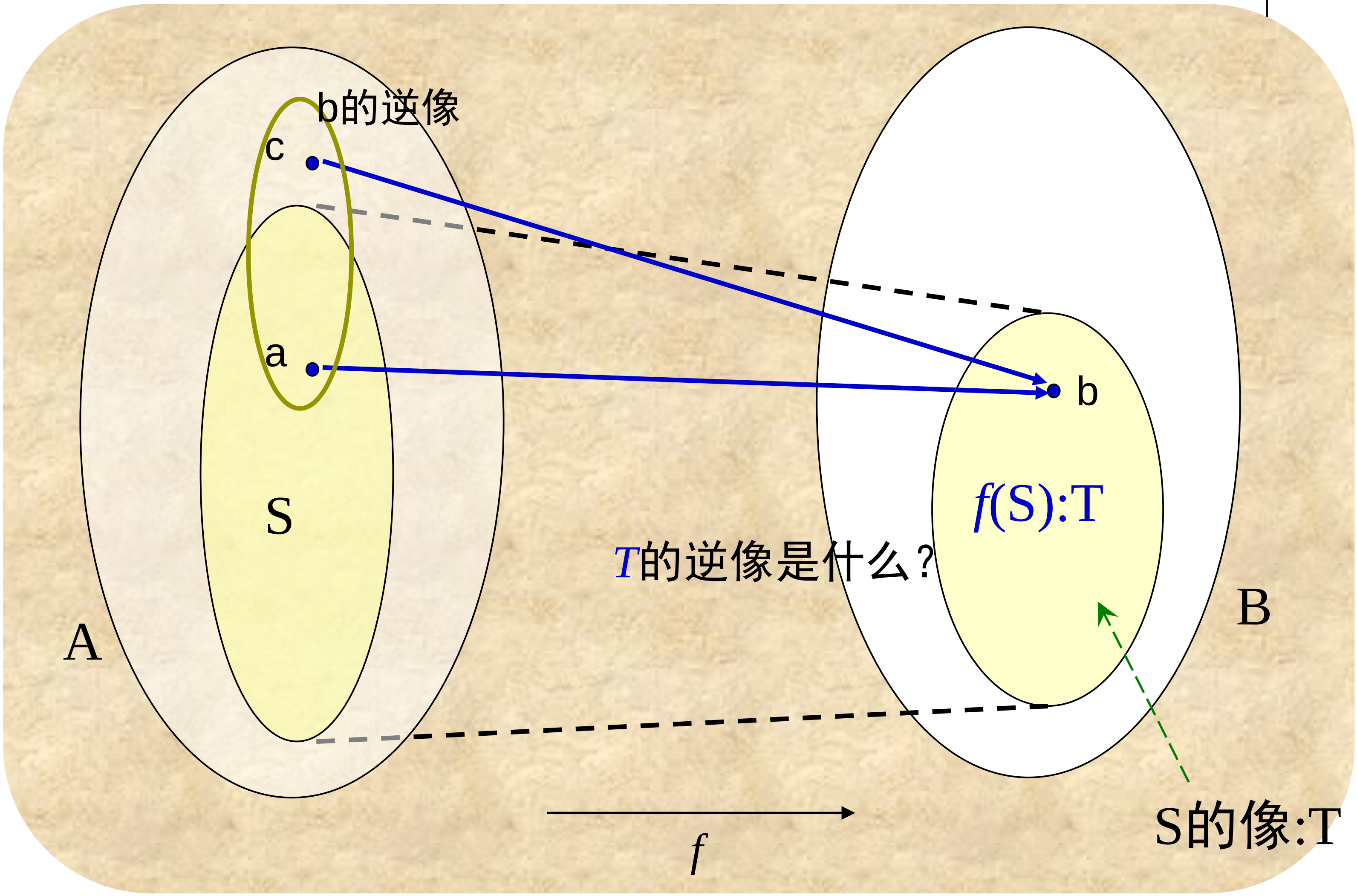
$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|} = n^m$$

这里约定$0^0 = 1$。注意：当$|A| = 0$，$|B| = 0$，即：$A = B = \emptyset$时，$B^A = \{\emptyset\}$；空关系本身是一个从空集到任意集合S（包括空集）的函数，因为它满足：$\forall x \in \emptyset \to (\exists! y \in S)\big((x, y) \in \emptyset\big)$

子集在函数下的像

- 设 f 是从集合A到B的函数，S 是A的一个子集。S 在 f 下的像，记为$f(S)$，定义如下：
  - $f(S)=\{\ t \mid \exists s \in S\ (t=f(s))\ \}$
- 备注：$f(A)$ 即为 f 的值域。

S的像和逆像



并集的像

- 设函数 f: A→B，且X，Y是A的子集，则

$$f(X\cup Y) = f(X)\cup f(Y)$$

- 证明:
  - $f(X\cup Y) \subseteq f(X)\cup f(Y)$

    对任意的t，若$t\in f(X\cup Y)$, 则存在$s\in X\cup Y$, 满足$f(s)=t$; 假设$s\in X$, 则$t\in f(X)$, 假设$s\in Y$, 则$t\in f(Y)$, $\therefore t\in f(X)\cup f(Y)$
  - $f(X)\cup f(Y) \subseteq f(X\cup Y)$

    对任意的t，若$t\in f(X)\cup f(Y)$

    情况1：$t\in f(X)$, 则存在$s\in X\subseteq X\cup Y$, 满足$f(s)=t$, $\therefore t\in f(X\cup Y)$

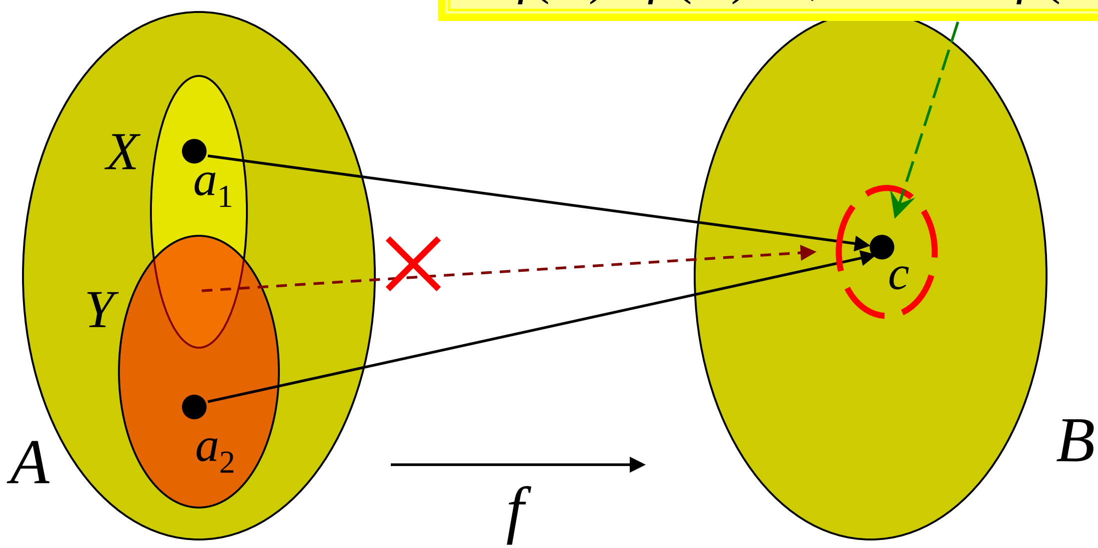
    情况2：$t\in f(Y)$, 同样可得$t\in f(X\cup Y)$

    $\therefore t\in f(X\cup Y)$

交集的像

- 设函数 $f: A\to B$，且X，Y是A的子集，则
  - $f(X\cap Y)\subseteq f(X)\cap f(Y)$

在$f(X)\cap f(Y)$中，但不在$f(X\cap Y)$中



函数性质

- f:A→B是**单射**（一对一的）
  - injection, injective function, one-to-one function
  - $\forall x_1, x_2 \in A$, 若$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) \neq f(x_2)$
  - //等价的说法：$\forall x_1, x_2 \in A$, 若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 = x_2$
- f:A→B是**满射**（映上的）
  - surjection, surjective function, onto function
  - $\forall y \in B, \exists x \in A$, 使得$f(x)=y$
  - //等价的说法：$f(A)=B$
- f:A→B是**双射**（一一对应）
  - bijection, bijective function, one-to-one correspondence
  - 满射+单射

函数性质的证明

- 判断$f:R\times R\to R\times R$, $f(<x,y>) = <x+y, x-y>$的性质
- 单射？
  - 令$f(<x_1, y_1>) = f(<x_2, y_2>)$
    - $x_1+y_1=x_2+y_2$且$x_1-y_1=x_2-y_2$,易见： $x_1=x_2$且$y_1=y_2$
    - $<x_1, y_1>=<x_2, y_2>$
- 满射？
  - 任取$<a, b> \in$R×R，总存在$<(a+b)/2,(a-b)/2>$,使得
  - $f(<(a+b)/2,(a-b)/2>)=<a, b>$

函数性质的证明

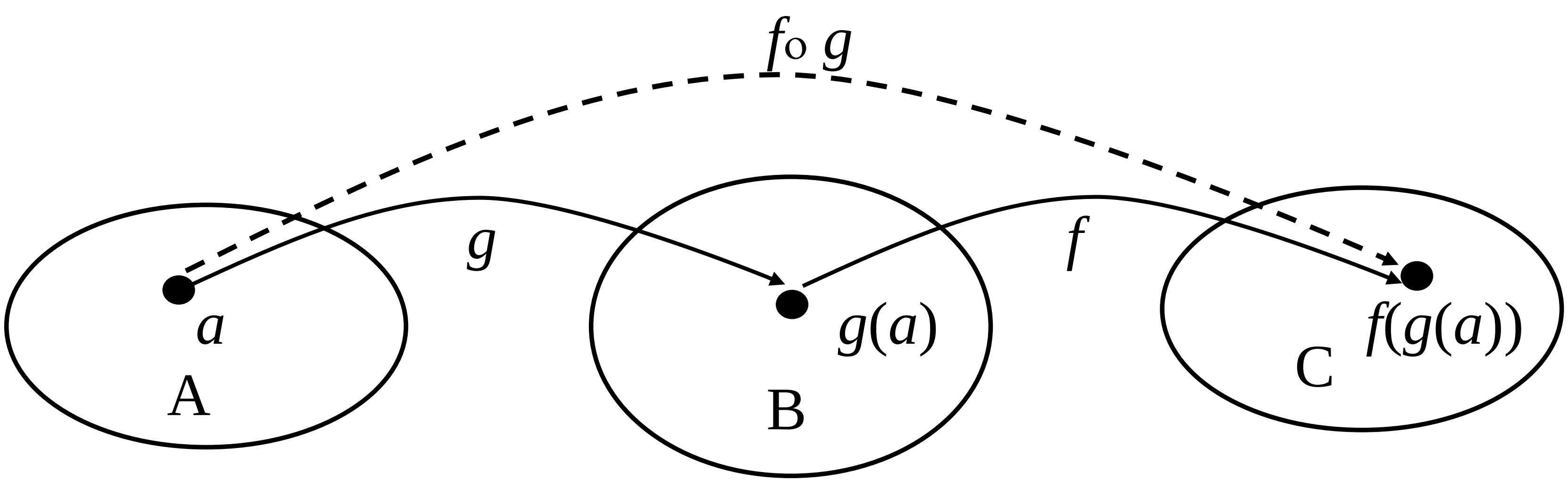
- 设A有限集合，f 是从A到A的函数。f 是单射当且仅当 f 是满射。

反函数

- 设f是从A到B的一一对应，f的反函数是从B到A的函数，它指派给B中元素b的是A中满足$f(a)=b$的（唯一的）a。f的反函数记作f^{-1}。
  - $f(a)=b$ 当且仅当 $f^{-1}(b)=a$
  - *任何函数都有反函数吗？*
- 例子
  - $f:R\times R\rightarrow R\times R$, $f(<x,y>) = <x+y, x-y>$
  - $f^{-1}:R\times R\rightarrow R\times R$, $f^{-1}(<x,y>) = <?, ?>$

函数的复合

- 设g是从A到B的函数，f是从B到C的函数，f和g的复合用$f \circ g$表示，定义为：
  - $(f \circ g)(x) = f(g(x))$， $x \in A$

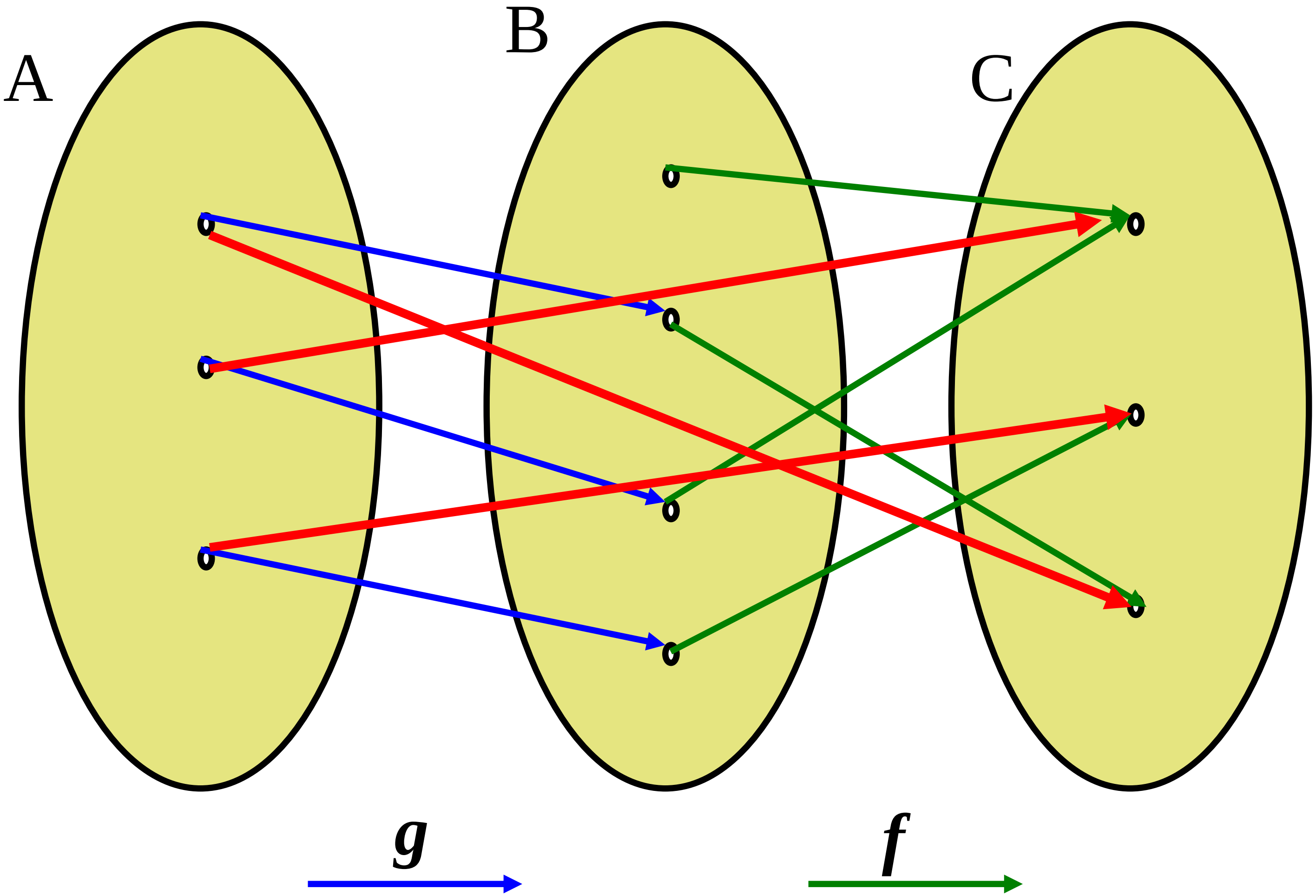


复合运算的性质

- 函数的复合满足结合律
  - $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- 满射的复合是满射
- 单射的复合是单射
- 双射的复合是双射
- 设f是从A到B的双射
  - $f^{-1} \circ f = \iota_A$
  - $f \circ f^{-1} = \iota_B$

但是…

- 若$f \circ g$是满射，能推出f和g是满射吗？
  - f*一定*是满射，g*不一定*是满射。
- 若$f \circ g$是单射，能推出f和g是单射吗？
  - g*一定*是单射，f*不一定*是单射。


A
B
C
g
f

函数的加法、乘法

- 设f和g是从A到R的函数，那么 $f+g$ 和 $f\ g$也是从A到R的函数，其定义为
  - $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$， $x \in A$
  - $f\ g(x) = f(x)\ g(x)$， $x \in A$

递增（递减）函数

- 设f的定义域和伴域都是实数(或其子集),
- f是递增的
  - $\forall x\ \forall y\ (x<y \rightarrow f(x) \leq f(y))$
- f是严格递增的
  - $\forall x\ \forall y\ (x<y \rightarrow f(x) < f(y))$

一个有趣的例子

- 自然数1,2,3,…,n^2+1的任何一种排列中，必然含一个长度不小于n+1的严格递增链或严格递减链。
  - 7,4,3,5,2,1,9,8,6,10//////10,3,2,6,4,7,5,9,1,8
  - 在所给的序列中，以k开始的严格递增序列长度为I(k), 以k开始的严格递减序列长度为D(k)。
  - f: $k \rightarrow$ (I(k), D(k)), k∈{1,2,…, n^2+1}
    - f(7)=(3,5),f(4)=(4,4),f(3)=(4,3),f(5)=(3,3),f(2)=(3,2),f(1)=(3,1)
    - f(9)=(2,3),f(8)=(2,2),f(6)=(2,1),f(10)=(1,1)
  - f是单射：对于$k_1<k_2$，如果k_1排在k_2前面，则I(k_1)>I(k_2)，如果k_2排在k_1前面，则D(k_2)>D(k_1)。
- 反证法：给定任一种排列，假设严格递增与递减序列最大长度均不大于n：
  - f的值域最多有n^2个元素
  - f不可能是单射

练习

设$f: A \to B$，$A_1 \subseteq A$，$B_1 \subseteq B$，证明：

$$f\left(A \cap f^{-1}(B_1)\right) = f(A) \cap B_1$$

备注：A改为A1比较合适

证明： 任取y，

$$y \in f\left(A \cap f^{-1}(B_1)\right) \Leftrightarrow \exists x(x \in A \cap f^{-1}(B_1) \land xfy)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(x \in A \land x \in f^{-1}(B_1) \land xfy) \Leftrightarrow \exists x(x \in A \land f(x) \in B_1 \land xfy)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(x \in A \land y \in B_1 \land xfy) \Leftrightarrow \exists x(x \in A \land xfy) \land y \in B_1$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \land y \in B_1 \Leftrightarrow y \in f(A) \cap B_1 \qquad \square$$

作业

- 教材[2.3]
  - P107-110：18, 30, 32, 39, 40 （第六版）
  - P129-130：22, 34, 36, 43, 44 （第七版）