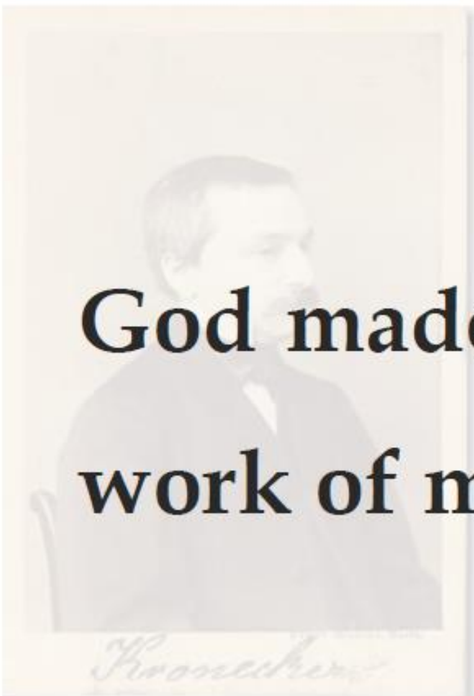
集合计数

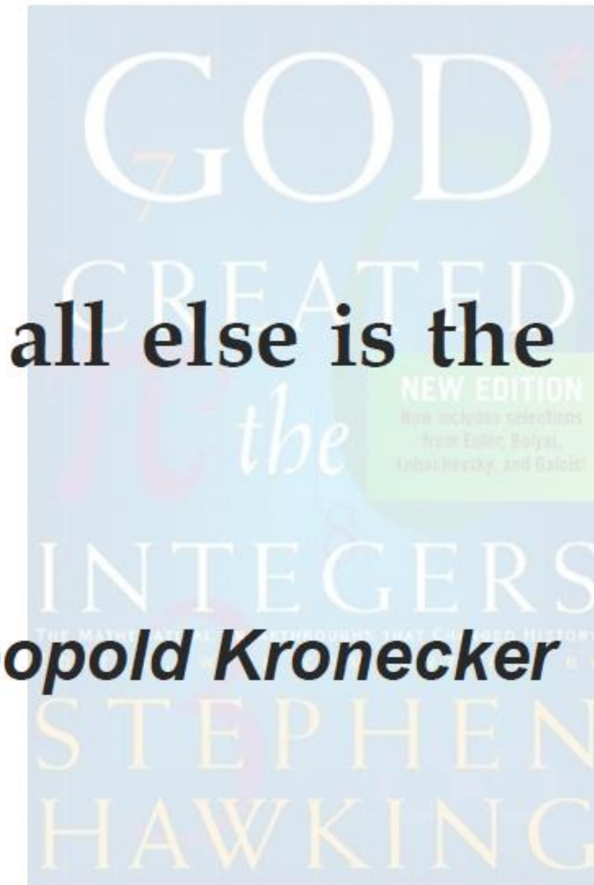
离散数学：第八讲

提要

- 集合的大小
- 无限集合
- 等势与优势关系
- 集合计数
- 容斥原理

自然数与无穷集合





God made the integers; all else is the work of man.

—— *Leopold Kronecker*

回顾：无穷公理

- 无穷公理（Axiom of Infinity，在ZF系统内）：

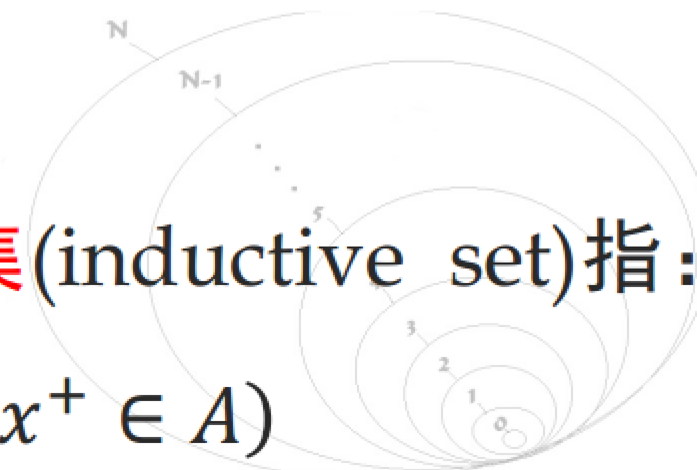
$$\exists A\big(\emptyset \in A \wedge (\forall x \in A)(x^{+} \in A)\big)$$

- 以往按照von Neumann的定义，$0 = \emptyset$，$n + 1 = n^{+}$，从而可以定义出单个的自然数，但不能说明全体自然数集合$\mathbb{N}$的存在性，而由无穷公理可以定义$\mathbb{N}$
- 在集合论中：$\mathbb{N} \overset{\text{def}}{=} \cap\{A | A\text{为归纳集}\}$

回顾：从集合构造自然数

- 设x为集合，x的后继(successor)x^+指$x \cup \{x\}$，

  令$0 = \emptyset, 1 = 0^+, 2 = 0^{++}, \cdots, n = 0^{\overbrace{+\cdots+}^{n}}$，这是von Neumann的定义



- 设A为集合，称A为归纳集(inductive set)指：

$$\emptyset \in A \wedge (\forall x \in A)(x^+ \in A)$$

自然数的Peano公理系统

- Peano系统的公理（*i.e.* 自然数五公设）为：
  - **Ax.1** $\mathbf{0} \in \mathbb{N}$
  - **Ax.2** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \rightarrow \boldsymbol{n}^{+} \in \mathbb{N}$
  - **Ax.3** $\boldsymbol{n}^{+} = \boldsymbol{m}^{+} \rightarrow \boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}$
  - **Ax.4** $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{n}^{+}$
  - **Ax.5** $\mathbf{0} \in \boldsymbol{A} \wedge (\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}^{+} \in \boldsymbol{A}) \rightarrow (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{N})(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A})$
- 由此可由集合构造出Peano算术(PA)：$\langle \mathbb{N}, \mathbf{0}, + \rangle$

有关自然数的若干命题

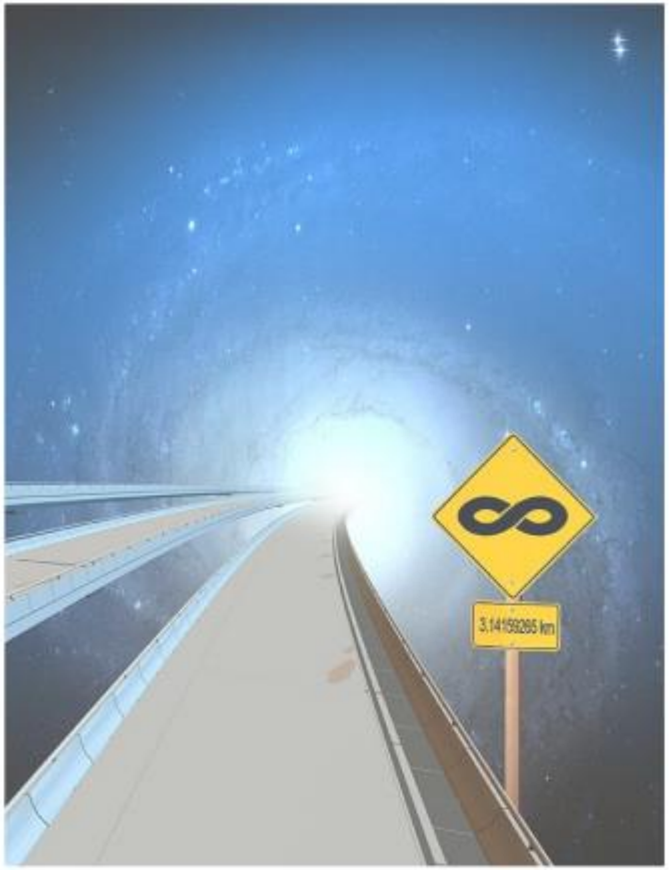
- 对于自然数的von Neumann定义，可定义：

  $m \le n \overset{\text{def}}{=} m \subseteq n$，于是有以下命题成立：

  - (1) $n+1=\{0,1,2,\cdots,n\}$
  - (2) $n \in n+1$
  - (3) $n \le n$
  - (4) $n \le m \le 1 \rightarrow n \le 1$； $n \le m \le n \rightarrow n = m$
  - (5) $m \le n \vee n \le m$

我们怎么比较集合的大小

- “数得清”的我们就数元素个数。
- “无数”的怎么办？
  - “常识”不一定经得起追问。
- 集合的大小称为集合的“势”(cardinality)
  - 集合S的势记为$|S|$



有限与无限：“宇宙旅馆”

啊？客满啦？

没关系，我让现在住在 k 号房间的客人移到 $k+1$ 号。你就住进第1号房间吧！

集合的等势关系

- 等势关系的定义：
  - 如果存在从集合A到集合B的**双射**，则称集合A与B**等势**。
  - 集合A与B等势记为：A≈B, 否则A≉B
  - A≈B意味着：A，B中的元素可以“**一一对应**”。
  - 要证明A≈B，找出*任意一个*从A到B的双射即可。
- “等势”的集合就被认为是“一样大”

自然数集是无限集

- **证明：** 自然数集$\mathbb{N}$是无穷集

反设$\mathbb{N}$有穷，从而存在n以及双射函数$f: n \to \mathbb{N}$，令

$\boldsymbol{m = f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1) + 1}$，从而有$\forall x \in n, f(x) \neq m$，故$f$非满射，矛盾！故$\mathbb{N}$为无穷集. $\square$

可列集

- 上述定义中，可列集的直观概念可以看作集合的元素可以按确定的顺序线性排列，所谓“确定的”顺序是指对序列中任一元素，可以说出它“前一个”、“后一个”元素是什么
- 例如：整数集与自然数集等势，故ℤ为可列集

  0，-1，1，-2，2，-3，3，-4，…

可列集

- 证明：构造如下$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$，易见$f$为双射.

将 Z 中元素以下列顺序排列并与 N 中元素对应：

$$
\begin{array}{llllllll}
Z: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3\ \ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
N: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ \ldots
\end{array}
$$

则这种对应所表示的函数是：

$$
f:\ Z \to N, f(x) = \begin{cases} 2x & \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}
$$

有限集与无限集

- S是有限集合，iff. 存在自然数n，使得S与n等势
- S不是有限集合(即：无限集)，iff. 存在S的真子集S’，使得S与S’等势

$\Rightarrow$ S一定包含一个与自然数集合等势的子集M = $\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$ (这实际上意味着：自然数集是“最小的”无限集)

令 $S' = S - \{a_1\}$，可以定义 $f: S \to S'$ 如下：

对于任意 $x \in M$, $f(a_i) = a_{i+1}$；　　对于任意 $x \in S-M$, $f(x) = x$

显然这是双射，即S与其真子集S'等势

$\Leftarrow$ 假设S是有限集，令$|S|=n$, 则给S任意的真子集S', 若$|S'|=m$，必有$m<n$, 因此从S'到S的任一单射不可能是满射。

有穷与无穷：差别不仅是数量

- 等势的涵义是两个集合元素的个数“一样多”
- 整体一定大于部分吗？
- Galileo佯谬(Galileo’s paradox, 1638)：
  - (1) 令$\mathbb{N}^{(2)}=\{0^2,1^2,2^2,3^2,\cdots\}$，显然：$\mathbb{N}^{(2)}\subset\mathbb{N}$；
    但G. Galileo发现$\mathbb{N}^{(2)}$与$\mathbb{N}$中的元素一一对应：
    令$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^{(2)}$如下：$f(x)=x^2$，易见$f$是双射，
    故$\mathbb{N}\approx\mathbb{N}^{(2)}$
  - (2) 令$\mathbb{N}^*=\{0,1^1,2^2,3^3,4^4,5^5,\cdots\}$，易见$\mathbb{N}\approx\mathbb{N}^*$

有穷与无穷：差别不仅是数量

- Hilbert 佯谬：$\{0, 1, 2, \cdots\} \approx \{1, 2, 3, \cdots\}$

  "宇宙旅馆"

客满了？没关系，让现在住在 k 号房间的客人移到 $k+1$ 号。新来的客人就住进第1号房间吧！

与自然数有关的若干命题

- (1) 自然数n的任何真子集为有限集
- (2) 任何自然数不等势于其真子集
- (3) 若集合A有穷，则A不与其任何真子集等势
- (4) 若集合A与其某个真子集等势，则A无穷
- 其中(2)即为“**鸽笼原理**”

证明无限集等势的例子

- 对于互异的$a, b \in \mathbb{R}$和互异的$c, d \in \mathbb{R}$，有：

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \approx [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}],\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \approx (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$$

对任何 $a, b \in R$, $a<b$, $[0,1]\approx[a,b]$.

双射函数 f: $[0,1]\to[a,b]$, $f(x)=(b-a)x+a$

类似地可以证明，对任何 $a, b \in R$, $a<b$，有$(0,1)\approx(a,b)$.

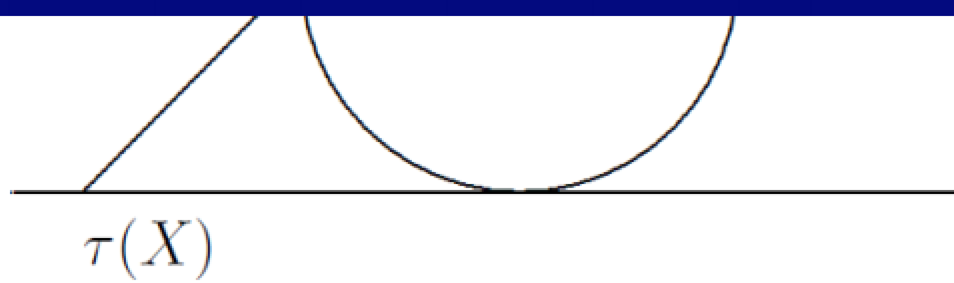
$\tau(X)$

证明无限集等势的例子

- 命题（**Riemann**）：设$a \neq b$，则$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \approx \mathbb{R}$

$(0,1) \approx R$. 其中实数区间 $(0,1)=\{x \mid x \in R \wedge 0<x<1\}$. 令

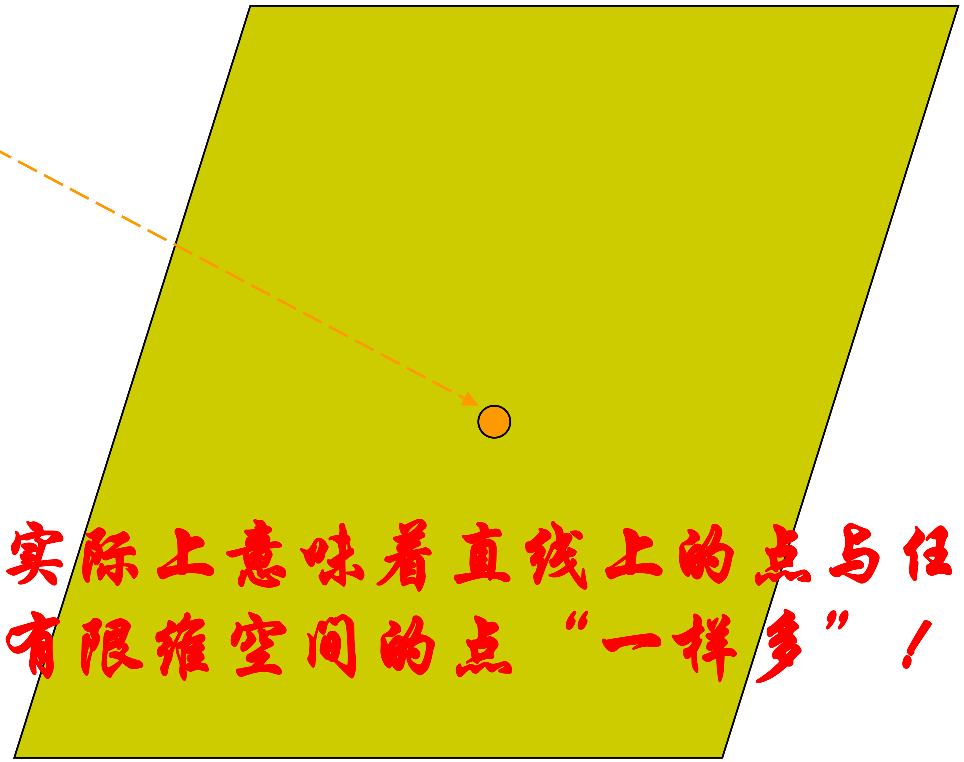
双射函数 $f:(0,1) \rightarrow R, \quad f(x)=\tan \pi \frac{2x-1}{2}$



直线上的点集与平面上的点集等势

$$\left\{\begin{array}{l} 0.a_1a_2a_3\ldots\ldots. \\ 0.b_1b_2b_3\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots..$$



这实际上意味着直线上的点与任意有限维空间的点“一样多”！

集合的优势关系

- 如果存在从集合A到集合B的**单射**，则称“集合B**优势于**集合A”
- 集合B优势于集合A 记为 A≼•B
- 如果集合B优势于集合A，且B与A***不等势***，则称“集合B**真优势于**集合A”，记为A≺•B

- 实数集合真优势于自然数集
- 例子：对任意集合A，A的幂集**真优势于**集合A

集合优势关系的性质

- 自反性：恒等函数
- 若A≼•B，且B≼•A，则A≈B **(比较:反对称性)**
  (Cantor-Bernstein定理)
- 传递性：单射的复合仍然是单射

优势关系的反对称性用于证明等势

- 有时候找双射不太容易
  - 证明实数集的两个子集(0,1)和[0,1]等势。

关键是如何安排在[0,1]中但不在(0,1)中的0和1。

想象那个“宇宙旅馆”。我们可以取(0,1)的一个与自然数集合等势的子集(一定有)$\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$,“腾出”前两个位置安排0和1

一种证法： $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & x=0\\ \dfrac{1}{2^2} & x=1\\ \dfrac{1}{2^{n+2}} & x=\dfrac{1}{2^n},\ n=1,2,3\ldots\\ x & x\text{为其它值}\end{cases}$$

优势关系的反对称性用于证明等势 (续)

- 证明实数集的两个子集(0,1)和[0,1]等势。
- 分别找两个一对一的映射往往比找一个双射容易

$$f:(0,1)\to[0,1]:\ f(x)=x$$

$$g:[0,1]\to(0,1):g(x)=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\qquad \text{注意}:g([0,1])=[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$$

集合A的基数

- 若A与自然数n等势，则card A = n
- 若A与自然数集合N等势，则card A = $\aleph_0$
- 若A与实数集合R等势，则card A = $\aleph$
- 如果存在从A到N的单射，则称A为可数集，或可列集。[card A $\leq$ $\aleph_0$]

自然数集的笛卡儿积是可列集

- 所有的整数对构成的集合与自然数集等势

<0,0>	<1,0>	<2,0>	<3,0>	<4,0>	•••
<0,1>	<1,1>	<2,1>	<3,1>	•••	
<0,2>	<1,2>	<2,2>	•••		
<0,3>	<1,3>	•••			
<0,4>					

类似的图形显示：
可列个可列集的并
集仍然是可列集合

<0,0>, <0,1>, <1,0>, <0,2>, <1,1>, <2,0>, <0,3>, ...

$$l(m,n)=\sum_{i=1}^{m+n} i+(m+1)$$

实数集不是可列集

- 命题：实数集非可列集
- 证明（**Cantor's diagonalization argument**, 1891）：

由于$\mathbb{R} \approx [0,1]$，故只需要说明$[0,1]$之间的实数点集不可列即可。首先约定实数$x \in [0,1]$，令$x = 0.x_1x_2x_3\cdots(0 \le x_i \le 9)$，对于无限循环小数$0.249999\cdots$与$0.250000\cdots$统一只采用后者的表示法表示；

■ **证明（Cantor's diagonalization argument）（续）：**

假设[0,1]之间用上述方法表示的实数~~可列~~，则[0,1]上的值可列举为：

$$
\begin{array}{l}
0.b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}\ldots \\
0.b_{21}b_{22}b_{23}b_{24}\ldots \\
0.b_{31}b_{32}b_{33}b_{34}\ldots \\
0.b_{41}b_{42}b_{43}b_{44}\ldots \\
\vdots
\end{array}
$$

今取实数$y \in [0,1]$，将其表为$\mathbf{0.}\boldsymbol{b_1 b_2 b_3}\cdots$，并令$\boldsymbol{b_i} \neq \boldsymbol{b_{ii}}\ (i = 1,2,3,\cdots)$。易见，$y$与上表中任何一个值均不等，上述假设错误。即实数集$\mathbb{R}$是不可列集. □

例子

- 一个例子：

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 0\,.\,5\,1\,0\,5\,1\,1\,0\,\ldots\\
r_2 &= 0\,.\,4\,1\,3\,2\,0\,4\,3\,\ldots\\
r_3 &= 0\,.\,8\,2\,4\,5\,0\,2\,6\,\ldots\\
r_4 &= 0\,.\,2\,3\,3\,0\,1\,2\,6\,\ldots\\
r_5 &= 0\,.\,4\,1\,0\,7\,2\,4\,6\,\ldots\\
r_6 &= 0\,.\,9\,9\,3\,7\,8\,3\,8\,\ldots\\
r_7 &= 0\,.\,0\,1\,0\,5\,1\,3\,5\,\ldots\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 0\,.\,\underline{\mathbf{5}}\,1\,0\,5\,1\,1\,0\,\ldots\\
r_2 &= 0\,.\,4\,\underline{\mathbf{1}}\,3\,2\,0\,4\,3\,\ldots\\
r_3 &= 0\,.\,8\,2\,\underline{\mathbf{4}}\,5\,0\,2\,6\,\ldots\\
r_4 &= 0\,.\,2\,3\,3\,\underline{\mathbf{0}}\,1\,2\,6\,\ldots\\
r_5 &= 0\,.\,4\,1\,0\,7\,\underline{\mathbf{2}}\,4\,6\,\ldots\\
r_6 &= 0\,.\,9\,9\,3\,7\,8\,\underline{\mathbf{3}}\,8\,\ldots\\
r_7 &= 0\,.\,0\,1\,0\,5\,1\,3\,\underline{\mathbf{5}}\,\ldots\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

幂集的基数

- 命题：$\mathcal{P}(A) \approx \{0,1\}^A = \{f \mid f: A \to \{0,1\}\}$

证：令τ：$\mathscr{P}(A) \to \{0,1\}^A$如下：设$X \subseteq A$

$\tau(X): A \to \{0,\ 1\}$被定义为

$$\tau(X)_{(x)} = \begin{cases} 1 & x \in X \\ 0 & x \notin X \end{cases}$$，即子集X之特征函数，

可验证τ为$1-1$ and onto

故$\mathscr{P}(A) \sim \{0,1\}^A$ $i.e.$ $\mathscr{P}(A) \sim A_I$ $\square$

康托尔定理

- **Cantor 定理（1891）：**

  (1) $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$

  (2) 对于任意集合A，$\boldsymbol{A \not\approx P(A)}$

- 证明：(1) 参见对角线法；

(2) 证明非$A \sim \mathscr{P}(A)$，

反设$f : A \xrightarrow[onto]{1-1} \mathscr{P}(A)$ 令 $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$，显然$B \in \mathscr{P}(A)$，

但$B \notin Ran(f)$，这是因为若$B = f(a)$则$a \in B \leftrightarrow a \notin f(a) \leftrightarrow a \notin B$矛盾！

故f非onto矛盾。 $\square$

0到1之间有理数多还是无理数多？

南京大学小百合站 -- 主题文章阅读 [讨论区: Pictures][回帖预定]

添加标签 +

追踪此人

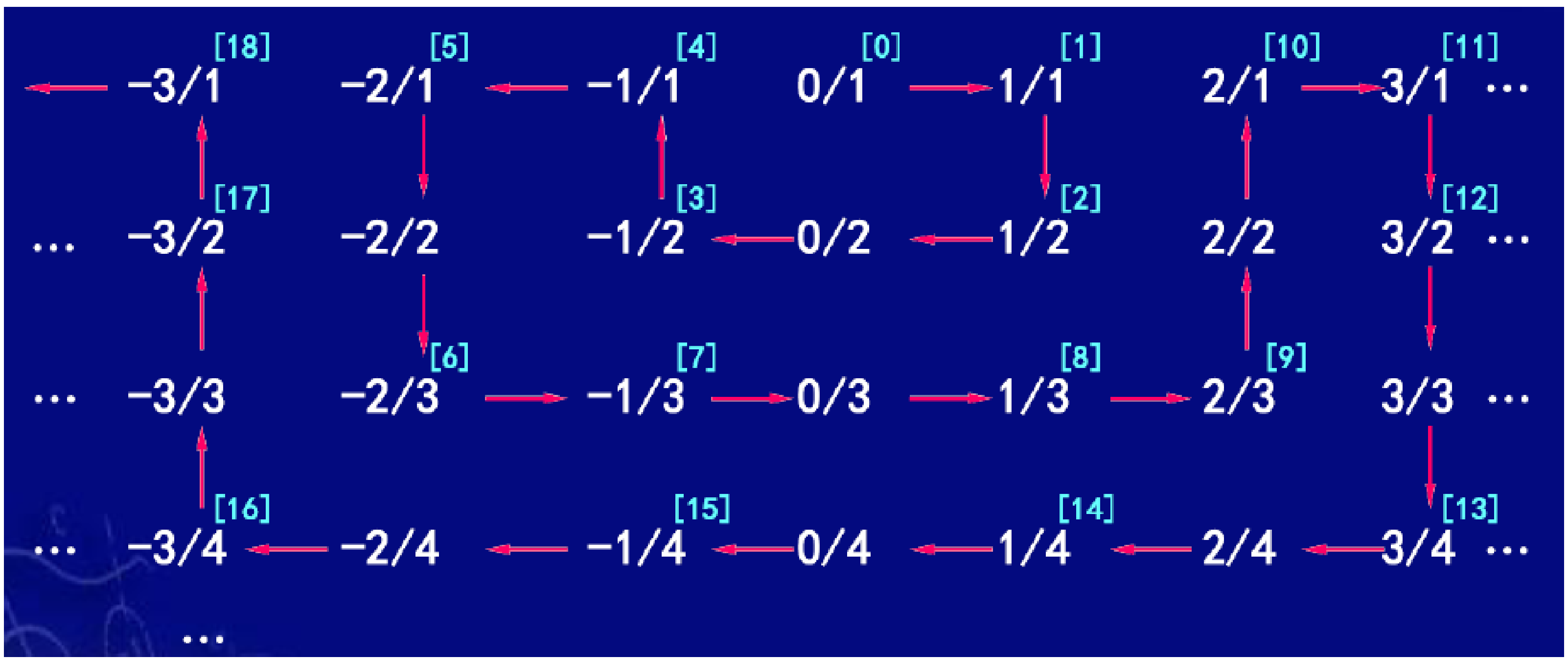
[本篇全文] [回复本文] [本篇作者: xuq(男生)] [本篇人气: 2251]

发信人: xuq (mossad), 信区: Pictures
标　题: 0到1之间有理数多还是无理数多
发信站: 南京大学小百合站 (Tue Mar 15 16:50:37 2011)

这是一个面试题，我觉得是无理数多，但不知道怎么解释。求证明！

- **证明：**

(1) 易构造如下双射$f:\mathbb{Q}\rightarrow\mathbb{N}$，故$\mathbb{Q}\approx\mathbb{N}$，为可列集



- 证明（续）：

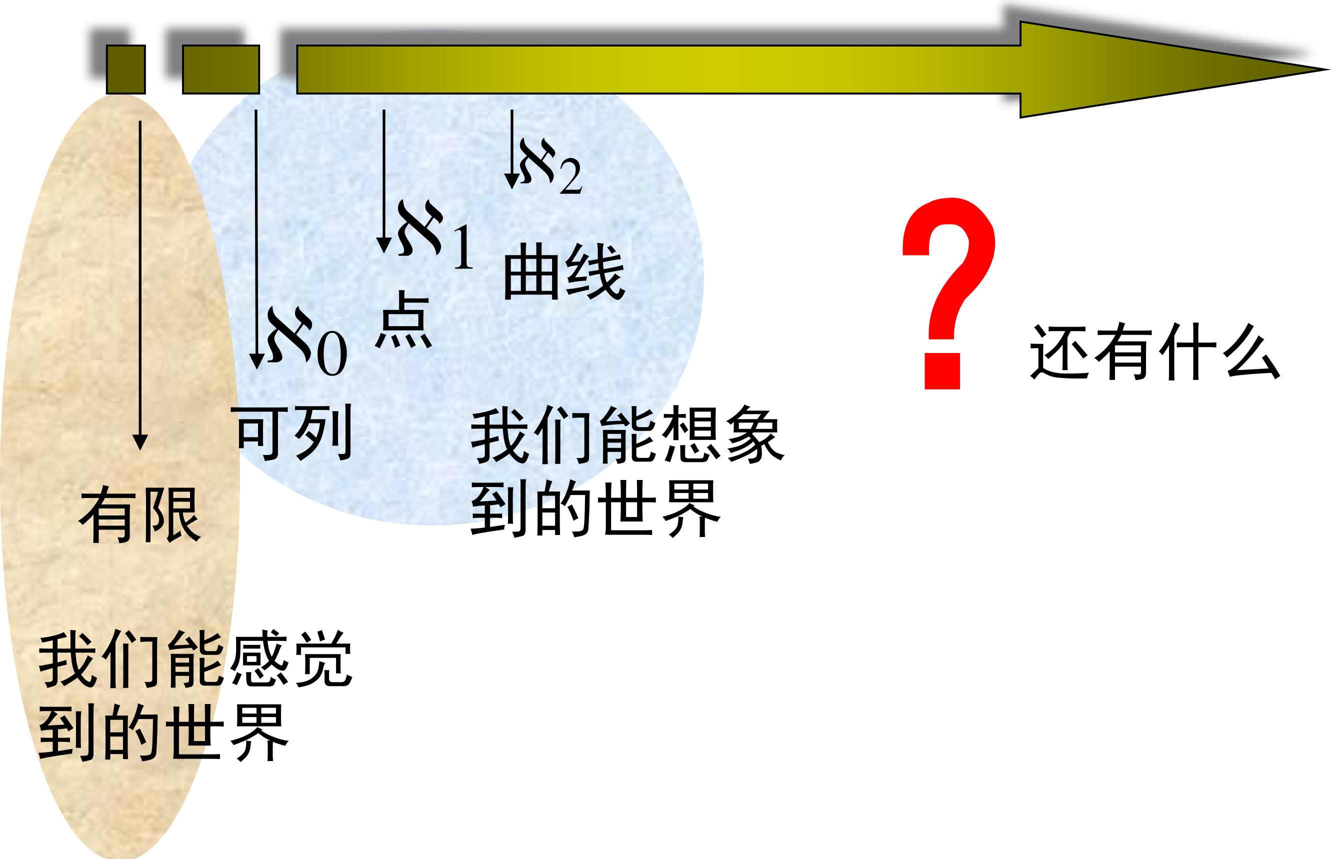
  (2) 用Cantor对角线法易证$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$不可列，故

  $|\mathbb{R}-\mathbb{Q}| = \aleph$

  因此$\mathbb{Q} \prec\cdot\ \mathbb{R}-\mathbb{Q}$，即[0,1]内无理数的基数比有理数大.

  $\square$

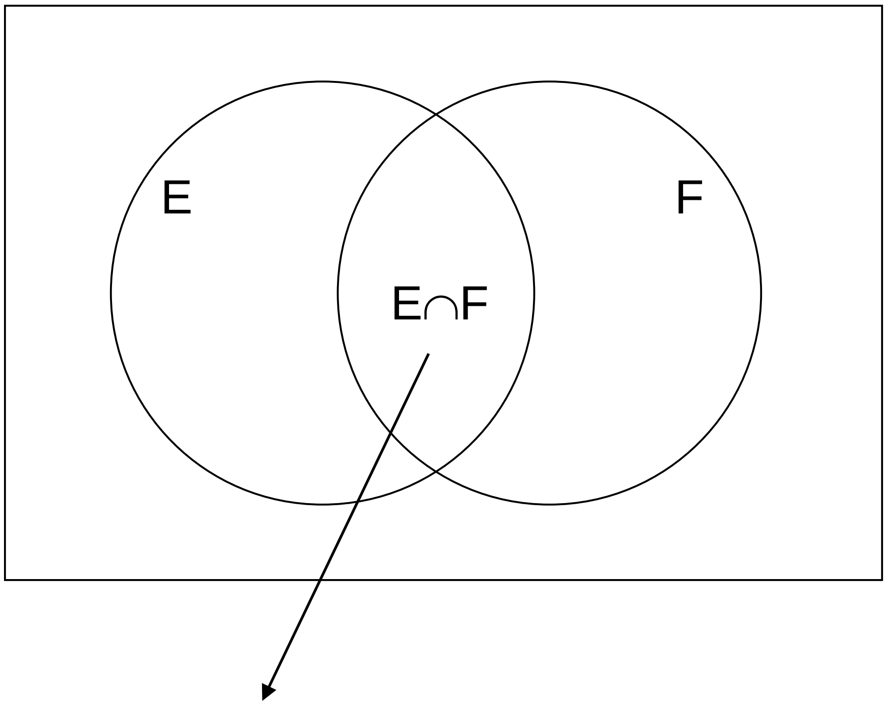
集合的“大小” – 基数



重要的等势优势关系

- $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q} \approx \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$
- $\mathbb{R} \approx [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \approx (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \approx \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^{\mathbb{N}} \approx \boldsymbol{P}(\mathbb{N}) \approx (\mathbf{0}, \mathbf{1})$
- $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^{A} \approx \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$
- $\mathbb{N} \prec\cdot\ \mathbb{R}$
- $\boldsymbol{A} \prec\cdot\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \prec\cdot\ \boldsymbol{PP}(\boldsymbol{A}) \prec\cdot \cdots$

集合用于分类



既学英语，又学法语的同学

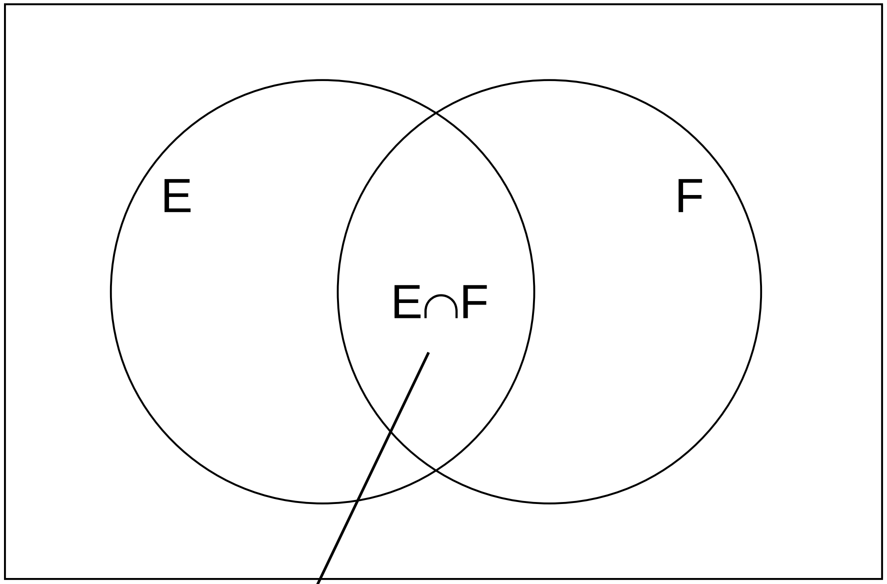
将属于某个集合的元素理解为“具有某种性质”的对象，则属于该集合的补集的元素则是“不具有某种性质”的对象。

例如：

将全班同学的集合视为全集。

其子集E是学英语的同学的集合，或理解为满足性质E的对象的集合。类似地，F是学法语的同学的集合，即满足性质F的对象的集合。

两个有限集合并集的计数



既学英语，又学法语的同学

假设全班共100人，记为

$$|U| = 100$$

学英语的50人，学法语的30人，分别记为：

$$|E| = 50;\ |F| = 30$$

显然，只要$E \cap F \neq \phi$，既不学英语，也不学法语的人数并非20人。

$$|E \cup F| = (|E|+|F|) - |E \cap F|$$

多少种排法？

- 将0,1,2,...,9排成一列，要求第1个数字大于1，最后一个数字小于8，共有多少种排法？
  - 这10个数字所有的排法构成全集U, $|U|=10!$
  - 第1个数字**不**大于1的排法构成子集A(即所有以0或者1开头的排法), $|A|=2 \cdot 9!$
  - 最后一个数字**不**小于8的排法构成子集B(即所有以8或者9结束的排法), $|B|=2 \cdot 9!$
  - $|A \cap B|=2 \cdot 2 \cdot 8!$
  - 题目要求的排法构成子集$(\sim A \cap \sim B)$
  - $|(\sim A \cap \sim B)| = |U| - |A \cup B| = |U| - |A| - |B| + |A \cap B| = 10! - 4 \cdot 9! + 4 \cdot 8! = 2{,}338{,}560$

三个有限集合并集的计数

- 假设定义全集的三个子集A,B,C。则：

  $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

  - 证明：
  - $|A\cup B\cup C|=|A\cup B|+|C|-|(A\cup B)\cap C|$
  - $=|A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)\cup(B\cap C)|$
  - $=|A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)|-|(B\cap C)|+|(A\cap B\cap C)|$
  - $=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

关于选课的例子

- 全班共有160个学生
  - 选数学课64人，选计算机课94人，选金融课58人
  - 选数学与金融的28人，选数学与计算机的26人，选计算机与金融的22人
  - 三种课全选的14人。
- 问：这三种课都没选的是多少？只选一门计算机的有多少？

问题的解

- M-数学、C-计算机、F-金融
- 包含-排斥原理

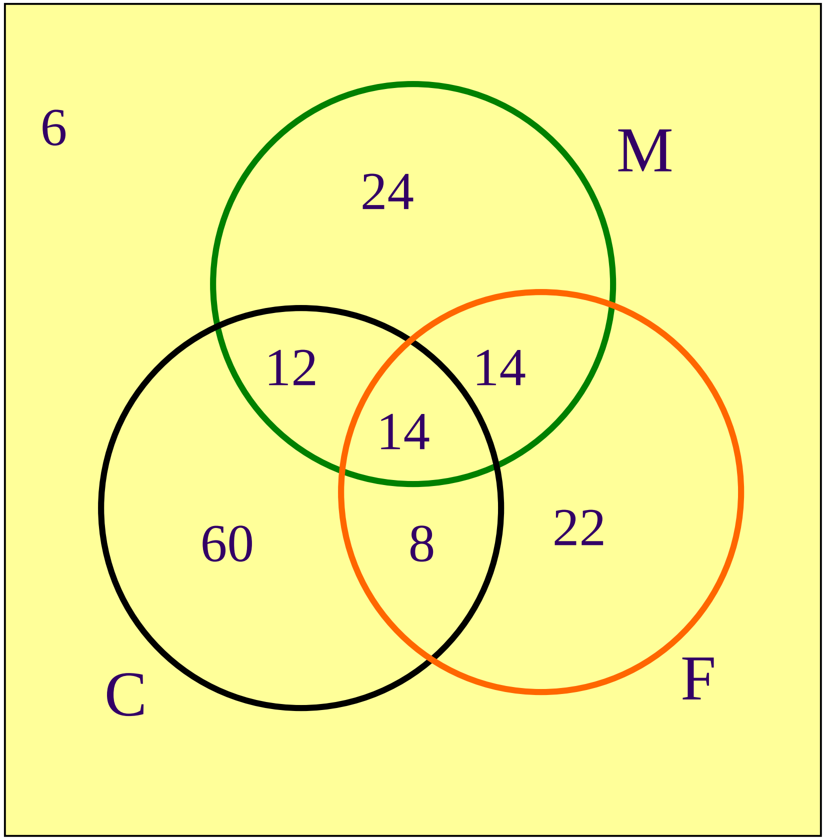
$|M \cup C \cup F| = |M|+|C|+|F|-|M \cap F|-|M \cap C|-|C \cap F|+|M \cap C \cap F|$

$=64+94+58-28-26-22+14$

$=154$

因此, 6人未选课。

只选了计算机课的60人



容斥原理

(Principle of Inclusion and Exclusion)

假设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个有限集合，则它们的并集的元素个数是：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{k-1} S_k + \ldots + (-1)^{n-1} S_n$$

其中，$S_k = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| \quad k = 1,2,\ldots,n$

例如：4个子集的公式为：

$|A_1|+ |A_2|+ |A_3|+ |A_4|$

$- (|A_1 \cap A_2|+|A_1 \cap A_3|+|A_1 \cap A_4|+|A_2 \cap A_3|+|A_2 \cap A_4|+|A_3 \cap A_4|)$

$+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|+|A_1 \cap A_2 \cap A_4|+|A_1 \cap A_3 \cap A_4|+|A_2 \cap A_3 \cap A_4|)$

$- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$

容斥原理的证明

- 公式：$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{k-1} S_k + \ldots + (-1)^{n-1} S_n$
- 我们证明在上述公式中:
  - 并集中的元素在右边式子中恰好被计数1次
  - 设并集中对象a出现在m个集合中
  - 则它在在S_1中被计数m 次，在S_2中被计数 C_2^m次
    - 以n=4，m=3为例：

      $|S_1|+ |S_2|+ |S_3|+ |S_4|$

      - **$(|S_1 \cap S_2|+|S_1 \cap S_3|+|S_1 \cap S_4|+|S_2 \cap S_3|+|S_2 \cap S_4|+|S_3 \cap S_4|)$**

      + $(|S_1 \cap S_2 \cap S_3|+|S_1 \cap S_2 \cap S_4|+|S_1 \cap S_3 \cap S_4|+|S_2 \cap S_3 \cap S_4|)$

      - $|S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4|$

容斥原理的证明

- 公式：$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{k-1} S_k + \ldots + (-1)^{n-1} S_n$
- 我们证明并集中的元素在右边式子中恰好被计数1次
  - 设并集中对象a出现在m个集合中
  - 则它在在S_1中被计数m 次，在S_k中被计数 C_k^m次

容斥原理的证明

- 计数公式：$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{k-1} S_k + \ldots + (-1)^{n-1} S_n$
- 第二步：满足1个或多个性质的元素恰好被计数0次：
  - 设对象a出现在m个集合中
  - a在S_1中被计数 C_1^m次，S_k中被计数恰好C_k^m 次
  - 将上述分析带入计数公式可得：

$$C_1^m - C_2^m + \ldots + (-1)^{k-1} C_k^m + \ldots + (-1)^{m-1} C_m^m$$

    - 该计算式值为1，因为当x=1时下式为0：

$$(1-x)^m = 1 - C_1^m x + C_2^m x^2 + \ldots + (-1)^k C_k^m x^k + \ldots + (-1)^m C_m^m x^m$$

  - a恰好被计数1次

埃拉托色尼的筛子

(Eratosthenes' Sieve)

- 用筛法求质数（以25以内的为例）

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

[2] 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

[3] 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

[5] 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

100以内有多少质数

- 100以内的任意合数必有不大于其平方根的质数为其因子。这样的质数只有4个：{2, 3, 5, 7}
- 设A_2, A_3, A_5, A_7 分别是可被相应质数整除的100以内大于1的自然数的集合。则100以内质数的数量为：

$$N(\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_5}\,\overline{A_7}) = 99 - \left\lfloor\frac{100}{2}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{100}{3}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{100}{5}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{100}{7}\right\rfloor$$

$$+\left\lfloor\frac{100}{2\cdot3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{2\cdot5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{2\cdot7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{3\cdot5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{3\cdot7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{5\cdot7}\right\rfloor$$

$$-\left\lfloor\frac{100}{2\cdot3\cdot5}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{100}{2\cdot3\cdot7}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{100}{2\cdot5\cdot7}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{100}{3\cdot5\cdot7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right\rfloor + \underline{4}$$

why?

$$= 99 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 - 0 + 0 + 4$$

$$= 25$$

教材和作业

- 教材：
  - 2.4.5;   5.1.4;   7.5;   7.6
- 习题：
  - P120：32；35；38 （第六版）；P150：3,17,19（第七版）
  - P386：8；21（第六版）；P468: 8, 21（第七版）