子群，群的分解

离散数学教学组

回顾

- 运算及其封闭性
- 运算的性质
- 运算表
- 代数系统
- 代数系统的同构与同态

提要

- 子群定义
- 子群判定定理
- 有限子群判定定理
- 元素的阶
- 陪集，集合的划分
- 拉格朗日定理

子群

- 子群是群的子代数

- **定义：**

设$(G,\ *,\ e,\ ^{-1})$为群，$H \subseteq G$，若

$(1)(\forall x,\ y \in H)(x * y \in H) \qquad (Closure)$

$(2) e \in H \qquad (Identity)$

$(3)(\forall x \in H)(x^{-1} \in H) \qquad (Inverses)$

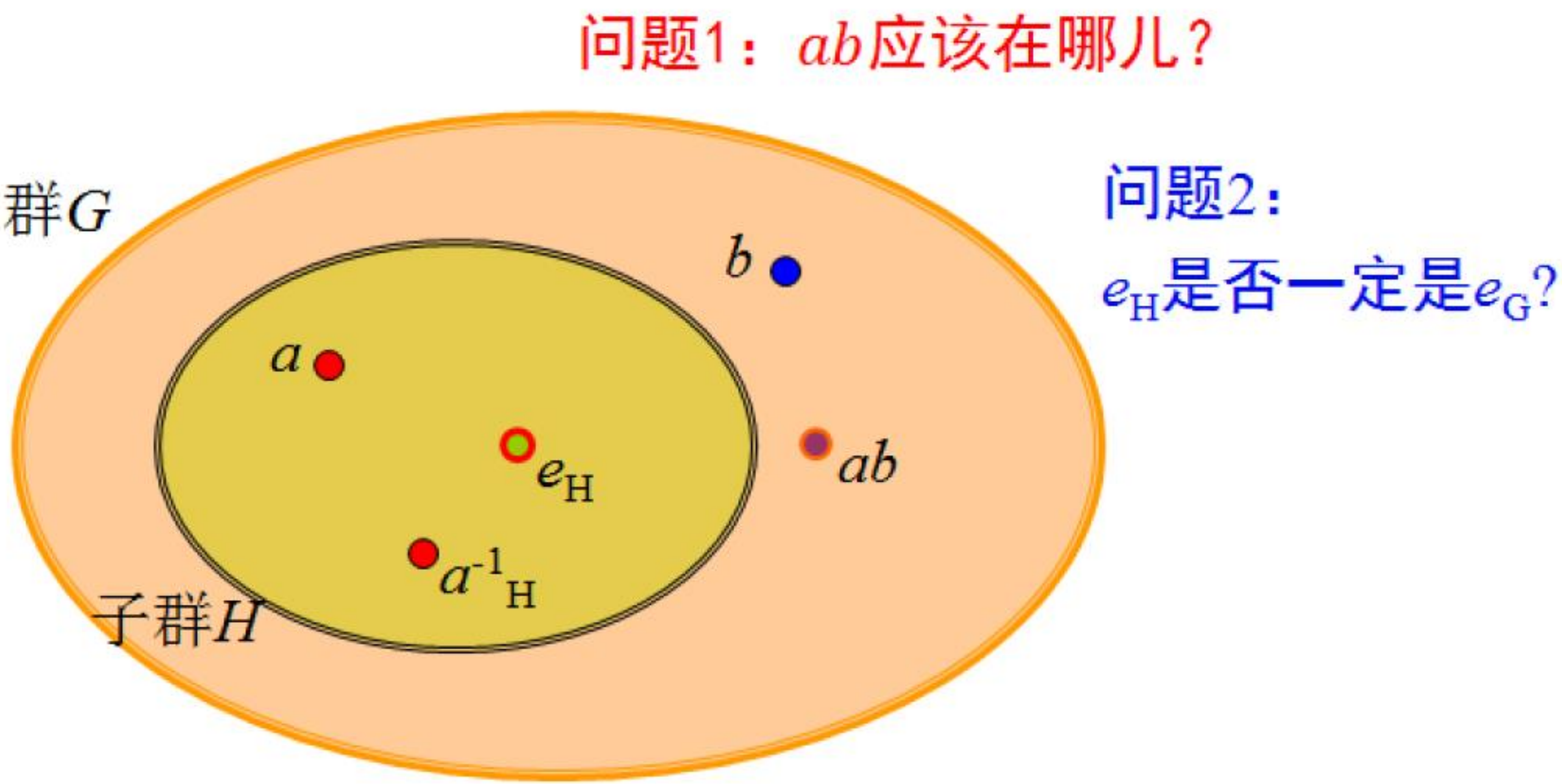
则称$(H,\ *)$为$(G,\ *)$的子群(Subgroup)，记为$(H,\ *) \leqslant (G,\ *)$，当$H \subset G$时，称$(H,\ *)$为$(G,\ *)$的真子群，记为$(H,\ *) < (G,\ *)$

子群

- 设$\langle G, *, e, ^{-1} \rangle$为群，则$\langle \{\boldsymbol{e}\}, * \rangle \leq \langle G, * \rangle$，
  $\langle \boldsymbol{G}, * \rangle \leq \langle G, * \rangle$，皆称为$G$的平凡子群
- 例如：
  - $\langle \mathbb{Z}, + \rangle \leq \langle \mathbb{R}, + \rangle$
  - $\langle b\mathbb{Z}, + \rangle \leq \langle \mathbb{Z}, + \rangle, b \in \mathbb{Z}$

子群的判定定理

- 考虑子群的存在条件：



子群的判定定理

- 定理（子群判定定理）：

设$(G, *, e, ^{-1})$为群，$H \subseteq G$，以下四点等价：

(a) $(H, *) \leqslant (G, *)$

(b) $(H, *, e, ^{-1})$为群

(c) (c.1) $H \neq \emptyset$

(c.2) $(\forall a, b \in H)(ab \in H)$

(c.3) $(\forall a \in H)(a^{-1} \in H)$

(d) (d.1) $H \neq \emptyset$ (d.2) $(\forall a, b \in H)(ab^{-1} \in H)$

子群的判定定理

证明：$(a) \Rightarrow (b)$：设$(H,\ *) < (G,\ *)$，由子群定义易得$(H,\ *,\ e,\ ^{-1})$为群。

$(b) \Rightarrow (c)$：设$(H,\ *,\ e,\ ^{-1})$为群

$\because e \in H$

$\therefore$(c.1) $H \neq \emptyset$ 成立。(c.2)与(c.3)易见。

$(c) \Rightarrow (d)$：$\forall a, b \in H$，由(c.3)知$b^{-1} \in H$，

又由(c.2)得$ab^{-1} \in H$。

$(d) \Rightarrow (a)$：由(d.1)知，$H \neq \emptyset$，取$b \in H$，

从而由(d.2)知$bb^{-1} = e \in H$，

从而$\forall a \in H$，由(d.2)得$ea^{-1} \in H$，即$a^{-1} \in H$.

又$\forall a,\ b \in H$，我们有$a,\ b^{-1} \in H$，

由(d.2)知，$a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$.

我们在验证$(H,\ *)$是否为$(G,\ *)$子群时，只需验证H非空且运算$*,\ ^{-1}$对H封闭。

有限子群的判定定理

- 定理（有限子群判定定理）：

  设G为群，H是G的非空有穷子集，则H是

  G的子群当且仅当：$\forall a,b \in H, ab \in H$

有限子群的判定定理

证 必要性显然. 为证充分性，只需证明 $a \in H$ 有 $a^{-1} \in H$.

任取 $a \in H$, 若 $a = e$, 则 $a^{-1} = e \in H$.

若 $a \neq e$，令 $S=\{a, a^2, \ldots\}$，则 $S \subseteq H$.

由于 H 是有穷集，必有 $a^i = a^j$（$i<j$）.

根据 G 中的消去律得 $a^{j-i} = e$，由 $a \neq e$ 可知 $j-i>1$，由此得

$$a^{j-i-1}a = e \quad 和 \quad aa^{j-i-1} = e$$

从而证明了 $a^{-1} = a^{j-i-1} \in H$.

群中元素的阶

- **定义（元素的阶）：**

设$(G, *)$为群，$n \in Z$, $a \in G$，以下定义a^n:

若$n \geq 0$，则a^n已在上讲定义。

若$n < 0$，则$a^n = (a^{-n})^{-1}$。

若$(\exists n \in \mathbb{N}^+)(a^n = e)$，则称$a$的阶(order)是有穷的且记$a$的阶$|a| = min\{n > 0 \mid a^n = e\}$。

若$\neg(\exists n \in \mathbb{N}^+)(a^n = e)$，则称$a$的阶是无穷的，且记$a$的阶$|a| = \infty$。

性质：

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

群中元素的阶

- **例：**

在Kleine 4群$(V, *)$中，$|e|=1$，当$a\neq e$时，$|a|=2$。

在$(\mathbb{Z}_7, +_7)$中，$|0|=1$, $a\neq 0$, $|a|=7$。

在$(\mathbb{Z}_6, +_6)$中，$|0|=1$

元素	0	1	2	3	4	5
阶	1	6	3	2	3	6

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

群中元素的阶

- 定理（元素的阶的性质）：

设$(G, *)$, a, $b \in G$, $|a|$, $|b|$为有穷

(1) 对$k \in \mathbb{Z}^+$, $a^k = e \Leftrightarrow |a| \mid k$

(2) $|a| = |a^{-1}|$

(3) $|ab| = |ba|$

(4) $|b^{-1}ab| = |a|$

群中元素的阶

- （1）对$k \in \mathbb{Z}^+$，$a^k = e \Leftrightarrow |a||k$

证明：(1) “$\Rightarrow$”，设$|a| = m > 0$，$m = min\{k \mid a^k = e \wedge k > 0\}$

故$k \geq m$，从而$k = q \times m + r$，这里$0 \leq r < m$

$\because a^k = a^{qm} * a^r = (a^m)^q * a^r = e^q * a^r = a^r$

$\therefore a^r = e$

$\because r < m$

$\therefore r = 0$，从而$k = q \times m$，故$m \mid k$。

“$\Leftarrow$”，设$|a| = r$

$|a| \mid k \rightarrow r \mid k \rightarrow k = n \times r \rightarrow a^k = a^{n \times r} = (a^r)^n = e^n = e$

群中元素的阶

(2)令$|a|=r$

$\because (a^{-1})^r=(a^r)^{-1}=e^{-1}=e$

$\therefore |a^{-1}| \mid |a|$，同理$|a| \mid |a^{-1}|$，故$|a^{-1}|=|a|$。

(3)$(ab)^{n+1}=abab\cdots ab=a(ba)^n b$

Case 1: ab的阶有穷，设为r

从而$(ab)^{r+1}=a(ba)^r b$

从而$ab=a(ba)^r b$，故$(ba)^r=e$

故ba的阶有穷，设为r'，由(1)知$r' \mid r$

同理$|ba|=r'$时有$|ab|$有穷，若为r,则$r \mid r'$

因此$|ab|=|ba|$.

(4) $|b^{-1}ab|=|abb^{-1}|=|ae|=|a|$

群中元素的阶

- **例题**：设$\langle G,*\rangle$为群，试证明：若$|G|=n$，则 G中阶大于2的元素有**偶数个**

证明：

对于$a\in G$，若$|a|>2$，则$a\neq a^{-1}$，若不然，则$a=a^{-1}$，从而$a^2=e$，故$|a|\leq 2$与$|a|>2$矛盾！因此我们有$|a|>2\rightarrow a\neq a^{-1}$，故$G$中阶$>2$的元素$a$与其逆$a^{-1}$成对出现，因此$G$有偶数个阶$>2$的元素。

陪集

- 以下讨论群论中一个深远的问题：

$$\boxed{\text{子群将群分解为陪集（coset）}}$$

- 定义（陪集）：设$\langle H,*\rangle < \langle G,*\rangle, a \in G$，令：

$$Ha = \{ha \mid h \in H\},\quad aH = \{ah \mid h \in H\}$$

称Ha（或aH）为子群H在G中的右（或左）陪集，H在G中右陪集的个数称为H在G中的指数（index），记为$[G:H]$

陪集

- 例1：令$H=\{2n|n\in\mathbb{Z}\}$，$\langle H,+\rangle<\langle\mathbb{Z},+\rangle$，$a\in\mathbb{Z}$，$Ha=\{2n+a|n\in\mathbb{Z}\}$，$\because H(2k+1)=\mathbb{Z}-H$，$H(2k)=H$，$\therefore[\mathbb{Z}:H]=2$，易见$\boldsymbol{aH=Ha}$

- 例2：$\langle\mathbb{Z}_6,\oplus_6\rangle$为群，令$H=\{0,3\}$，则$\langle H,\oplus_6\rangle<\langle\mathbb{Z}_6,\oplus_6\rangle$，且$H0=H,H1=\{1,4\},H2=\{2,5\}$ $H3=\{3,0\}=H,H4=\{4,1\}=H1,H5=\{5,2\}=H2$，因此$[\mathbb{Z}_6:H]=3$，易见$\cup\{\boldsymbol{Ha}|\boldsymbol{a}\in\mathbb{Z}_6\}=\mathbb{Z}_6$

陪集

- 定理（陪集与划分）：设$\langle H,*\rangle < \langle G,*\rangle$,

(1) $He = H$

(2) $(a \in G)(a \in Ha)$ 从而 $\cup\{Ha|a \in G\} = G$

(3) $(a, b \in G)(Ha = Hb \vee Ha \cap Hb = \emptyset)$

(4) $\{Ha|a \in G\}$为$\boldsymbol{G}$之划分

陪集

证 (1)易见

(2)$\because a = ea$而$e \in H$ $\therefore a \in Ha$从而$\cup\{Ha \mid a \in G\} = G$

(3) 任给$a,\ b \in H$, 欲证$Ha = Hb \vee Ha \cap Hb = \emptyset$, 只需证

$Ha \cap Hb \neq \emptyset \rightarrow Ha = Hb$. 设$Ha \cap Hb \neq \emptyset$, 则有$h_1, h_2 \in H$

使$h_1 a = h_2 b$, 从而任给$h \in H$, $ha = hh_1^{-1}h_2 b \in Hb$

故$Ha \subseteq Hb$同理$Ha \supseteq Hb$, 因此$Ha = Hb$.

(4) 由(1),(2),(3)即得

陪集

- 定义"左陪集关系"：设$\langle H,*\rangle < \langle G,*\rangle$，定义$G$上的二元关系$\boldsymbol{R}$：

$$(\forall a, b \in G)\ (a, b) \in R \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$$

则R是G上的等价关系，且$[a]_R = aH$

- 同样可定义下面的右陪集等价关系

陪集

定理 11.10　设 H 是群 G 的子群，在 G 上定义二元关系 R：$\forall a,b \in G$,

$$<a,b> \in R \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$$

则 R 是 G 上的等价关系，且$[a]_R = Ha$.

证　先证明 R 为 G 上的等价关系.

自反性. 任取 $a \in G$，$aa^{-1} = e \in H \Leftrightarrow <a,a> \in R$

对称性. 任取 $a,b \in G$，则

$$<a,b> \in R \Rightarrow ab^{-1} \in H \Rightarrow (ab^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow ba^{-1} \in H \Rightarrow <b,a> \in R$$

传递性. 任取 $a,b,c \in G$，则

$$<a,b> \in R \wedge <b,c> \in R \Rightarrow ab^{-1} \in H \wedge bc^{-1} \in H \Rightarrow ac^{-1} \in H \Rightarrow <a,c> \in R$$

下面证明：$\forall a \in G$，$[a]_R = Ha$. 任取 $b \in G$，

$$b \in [a]_R \Leftrightarrow <a,b> \in R \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \Leftrightarrow Ha=Hb \Leftrightarrow b \in Ha$$

陪集

- 事实上，以下5个命题等价：

(1) $a \in Hb$　　(2) $ab^{-1} \in H$

(3) $ba^{-1} \in H$　　(4) $b \in Ha$

(5) $Ha = Hb$

Lagrange定理

- 引理（陪集的势）：

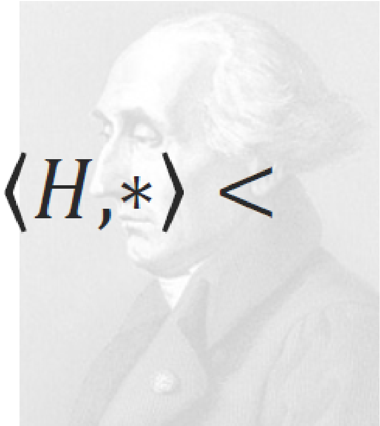
  设$\langle H,*\rangle < \langle G,*\rangle$，$a \in G$，则$H \approx Ha \approx aH$

- 证明：

  令$\tau: H \to Ha$为$\tau(h) = ha$，$\sigma: H \to aH$为$\sigma(h) = ah$，由消去律可知τ, σ为1-1，易见τ, σ亦为onto，故$H \approx Ha$，$H \approx aH$

Lagrange定理

- 由上面的讨论可知，右陪集构成群的元素的一个划分，每个元素恰属某个右陪集，对于有限群而言，我们即可得到以下具有重要地位的经典结果：
- Lagrange定理：设$\langle G,*\rangle$为有限群，$\langle H,*\rangle < \langle G,*\rangle$，则 $|G| = |H| \cdot [G:H]$



Lagrange定理

- Lagrange定理：设$\langle G,*\rangle$为有限群，$\langle H,*\rangle < \langle G,*\rangle$，则 $|G| = |H|\cdot[G:H]$

- **证明：** 由于$|G|$有穷，故$[G:H]$有穷且设为N，从而有$a_1,\cdots,a_N \in G$使$\{Ha_i|1 < i \le N\}$为G之划分，故$G = \bigcup_{i=1}^{N} Ha_i$；由引理，对任意$i,j$，$|Ha_i| = |Ha_j| = |H|$ $\therefore |G| = |H|\cdot N$即$|G| = |H|\cdot[G:H]$. $\square$

Lagrange定理

- 推论1：设$\langle G,*\rangle$为有限群，$a\in G$，则$|a|$为$|G|$的因子
- 证明*：$\because \langle\langle a\rangle,*\rangle \le \langle G,*\rangle \therefore |\langle a\rangle|$为$|G|$的因子，又由于$|a|$有穷，故$|\langle a\rangle| = |a|$，故$|a|$为$|G|$的因子． $\square$
  - 注：$\langle a\rangle = \{a^n | n\in\mathbb{Z}\}$，$\langle\langle a\rangle,*\rangle$称元素$a$的生成子群

Lagrange定理

- 推论2*：设$\langle G,*\rangle$为p阶群，若p为质数，则

$$(\exists a \in G)(\langle a\rangle = G)$$

证：设$|G| = p$为素数，可以取$a \neq e$，$a \in G$,由上推论知

$|\langle a\rangle|$为$|G|$的因子，$\because |\langle a\rangle| \geq 2 \ \therefore |\langle a\rangle| = p$

故$G = \langle a\rangle$

Lagrange定理

命题：如果群 G 只含 1 阶和 2 阶元，则 G 是 Abel 群.

证　设 a 为 G 中任意元素，有 $a^{-1}=a$. 任取 $x,y\in G$，则

$$xy=(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}=yx,$$

因此 G 是 Abel 群.

例　证明 6 阶群中必含有 3 阶元.

证　设 G 是 6 阶群，则 G 中元素只能是 1 阶、2 阶、3 阶或 6 阶.

若 G 中含有 6 阶元，设 6 阶元是 a，则 a^2 是 3 阶元.

若 G 中不含 6 阶元，下面证明 G 中必含有 3 阶元.

如若不然，G 中只含 1 阶和 2 阶元，即 $\forall a\in G$，有 $a^2=e$，

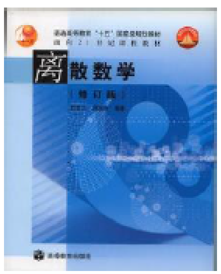
由命题知 G 是 Abel 群. 取 G 中 2 阶元 a 和 b，$a\neq b$，令

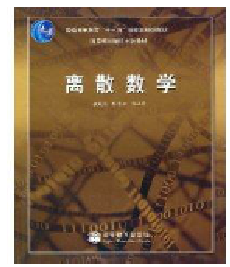
$$H=\{e, a, b, ab\}$$

则 $H\leq G$，但 $|H|=4$，$|G|=6$，与拉格朗日定理矛盾.

教材和练习

- 教材内容：[屈婉玲] 10.2节
- 课后习题：





- p. 230
  - 21 – 24
- pp. 203 – 204
  - 20 – 22
  - 24

伽罗瓦（1811-1832）

我请求我的爱国同胞们，我的朋友们，不要指责我不是为我的国家而死。

我是作为一个不名誉的风骚女人和她的两个受骗者的牺牲品而死的。我将在可耻的诽谤中结束我的生命。噢！为什么要为这么微不足道的，这么可鄙的事去死呢？我恳求苍天为我作证，只有武力和强迫才使我在我曾想方设法避开的挑衅中倒下。

我亲爱的朋友：

我已经得到分析学方面的一些新发现……

在我一生中，我常常敢于预言当时我还不十分有把握的一些命题。但是我在这里写下的这一切已经清清楚楚地在我的脑海里一年多了，我不愿意使人怀疑我宣布了自己未完全证明的定理。

请公开请求雅可比或高斯就这些定理的重要性（不是就定理的正确与否）发表他们的看法。然后，我希望有人会发现将这一堆东西整理清楚会是很有益处的一件事。

热烈地拥抱你，

—— 伽罗瓦