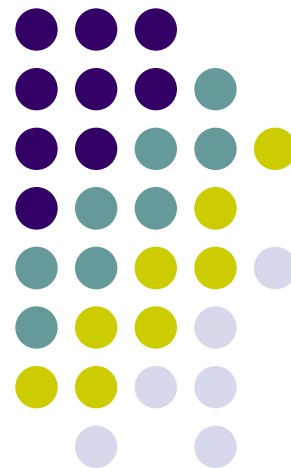
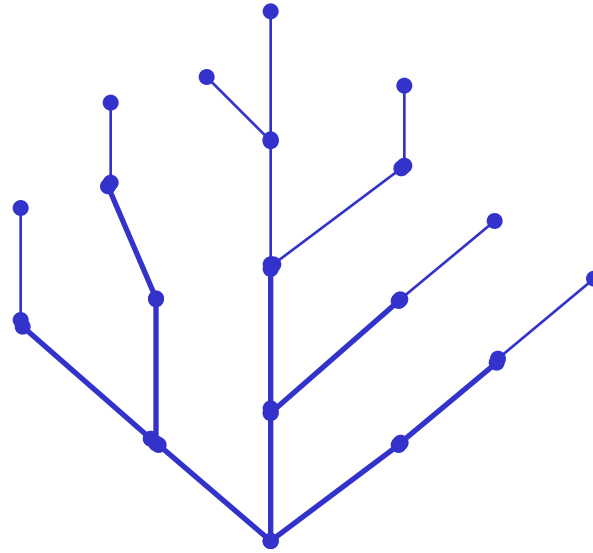


树的基本概念

离散数学—树

南京大学计算机科学与技术系

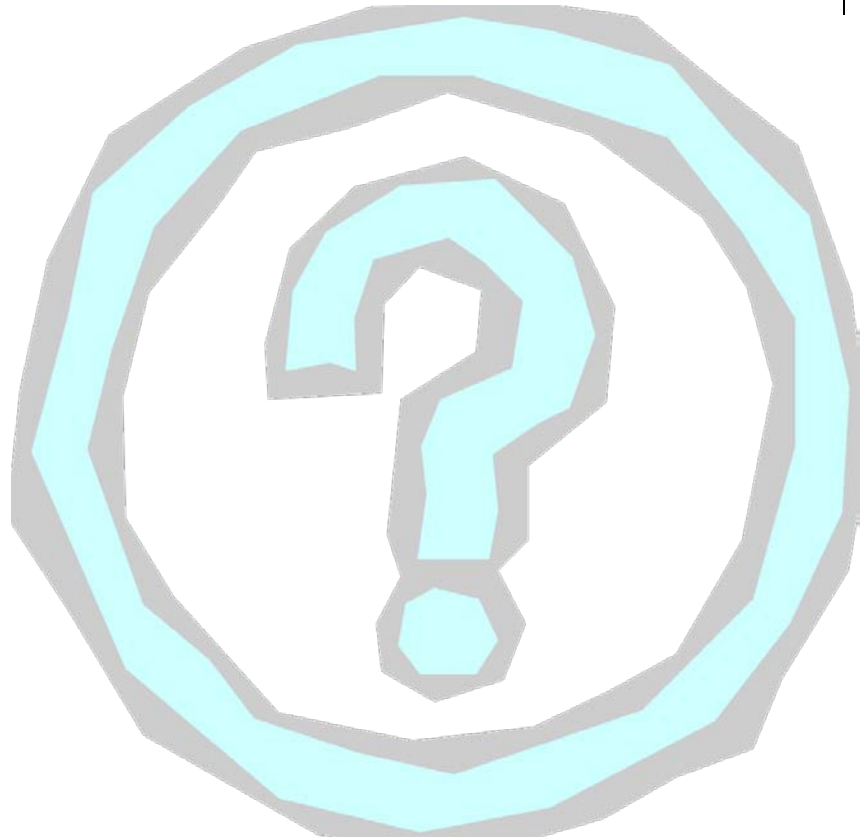






内容提要

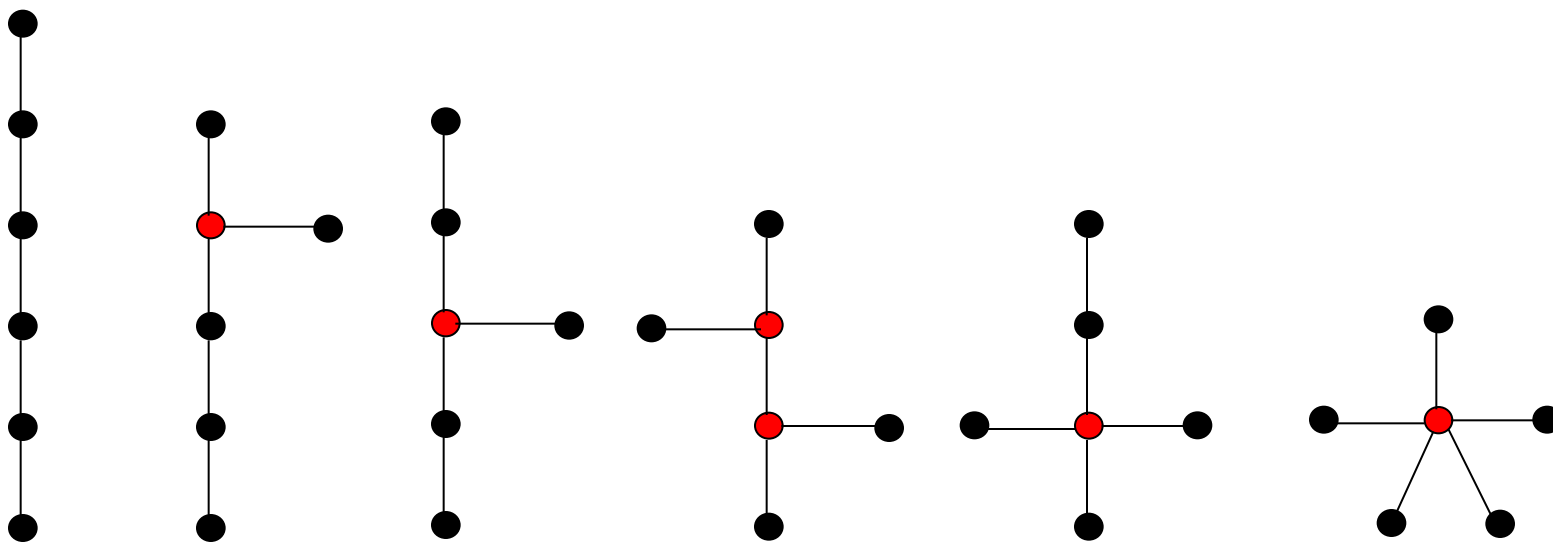
- 树的定义
- 树的性质
- 根树
- 有序根树的遍历



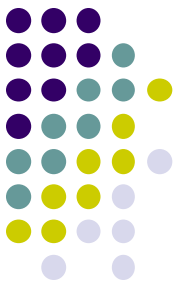


树的定义

- 定义：不包含简单回路的连通无向图称为树。
 - 森林（连通分支为树）
 - 树叶/分支点（度为1？）



互不同构的6个顶点的树

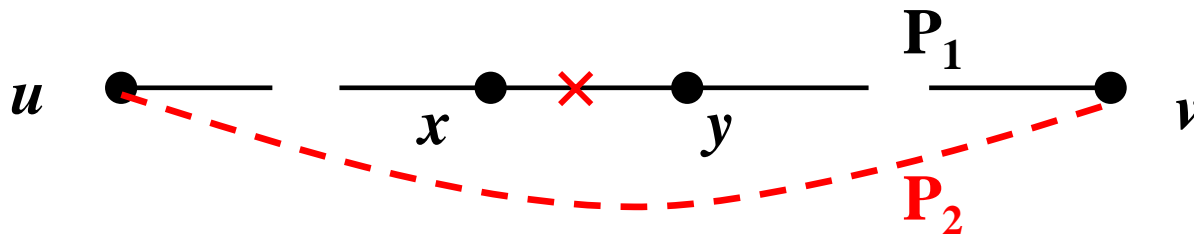


树中的通路

- 设 T 是树，则 $\forall u, v \in V_T$, T 中存在**唯一的 uv -简单通路**。

- 证明： T 是连通图， $\therefore \forall u, v \in V_T$, T 中存在 uv -简单通路。

假设 T 中有两条不同的 uv -简单通路 P_1, P_2 。不失一般性，存在 $e=(x,y)$ 满足： $e \in P_1$ 但 $e \notin P_2$ ，且在路径 P_1 上 x 比 y 靠近 u 。令 $T^*=T-\{e\}$ ，则 T^* 中包含 P_2 ，于是 $(P_1$ 中的 xu -段) $+P_2+(P_1$ 中的 vy -段)是 T^* 中的 xy -通路， $\therefore T^*$ 中含 xy -简单通路(记为 P')，则 $P'+e$ 是 T 中的简单回路，与树的定义矛盾。





有关树的几个等价命题

- 设 T 是简单无向图，下列四个命题等价：
 - (1) T 是不包含简单回路的连通图。//树的定义
 - (2) T 中任意两点之间有唯一简单通路。
 - (3) T 连通，但删除任意一条边则不再连通。
 - (4) T 不包含简单回路，但在任意不相邻的顶点对之间加一条边则产生唯一的简单回路。
- 备注：
 - 树是边最少的连通图
 - 树是边最多的无简单回路的图

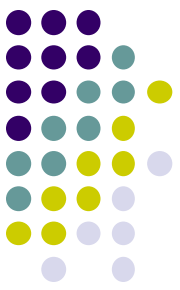


树中边和点的数量关系

- 设 T 是树，令 $n=|V_T|$, $m=|E_T|$, 则 $m=n-1$ 。
- 证明. 对 n 进行归纳证明。当 $n=1$, T 是平凡树，结论显然成立。
假设当 $n \leq k$ 是结论成立。

若 $n=k+1$ 。因为 T 中每条边都是割边，任取 $e \in E_T$, $T-\{e\}$ 含两个连通分支，设其为 T_1, T_2 , 并设它们边数分别是 m_1, m_2 , 顶点数分别是 n_1, n_2 , 根据归纳假设: $m_1=n_1-1, m_2=n_2-1$ 。
注意: $n_1+n_2=n, m_1+m_2=m-1$ 。

$$\therefore m = m_1 + m_2 + 1 = n - 1.$$



连通图边数的下限

- 顶点数为 n ($n \geq 2$) 的连通图, 其边数 $m \geq n-1$ 。

(对于树, $m=n-1$, “树是边最少的连通图”)

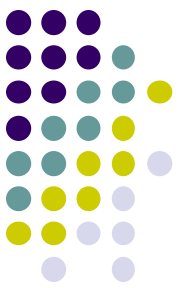
- 证明: 对 n 进行归纳证明。当 $n=2$ 时结论显然成立。

设 G 是边数为 m 的连通图, 且 $|V_G|=n>2$ 。任取 $v \in V_G$, 令 $G'=G-v$, 设 G' 有 ω ($\omega \geq 1$) 个连通分支 $G_1, G_2, \dots, G_\omega$, 且 G_i 的边数和顶点数分别是 m_i 和 n_i 。

我们有 $n=n_1+n_2+\dots+n_\omega+1$, $m \geq m_1+m_2+\dots+m_\omega+\omega$ (每个连通分支中至少有一个顶点在 G 中与删除的 v 相邻)。

由归纳假设, $m_i \geq n_i-1$ ($i=1, 2, \dots, \omega$)。

所以: $m \geq m_1+m_2+\dots+m_\omega+\omega \geq n_1+n_2+\dots+n_\omega-\omega+\omega=n-1$ 。



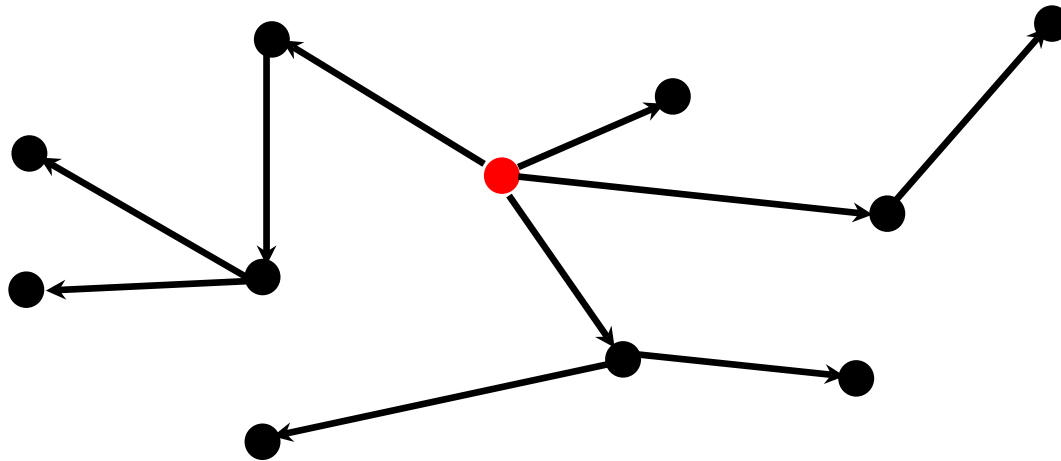
与边点数量关系有关的等价命题

- 设 T 是简单无向图，下列三个命题等价：
 - (1) T 是树。
 - (2) T 不含简单回路，且 $m=n-1$ 。
 - (3) T 连通，且 $m=n-1$ 。
- (1) \Rightarrow (2)，已证。
- (2) \Rightarrow (3)，若不连通，分支数 $\omega \geq 2$ ，各分支为树（无简单回路、连通），则 $m=n-\omega < n-1$ ，矛盾。
- (3) \Rightarrow (1)，设 e 是 T 中任意一条边，令 $T'=T-e$ ，且其边数和顶点数分别是 m' 和 n ，则 $m'=m-1=n-2 < n-1$ ， $\therefore T'$ 是非连通图。因此， G 的任意边均不在简单回路中， $\therefore G$ 中无简单回路。



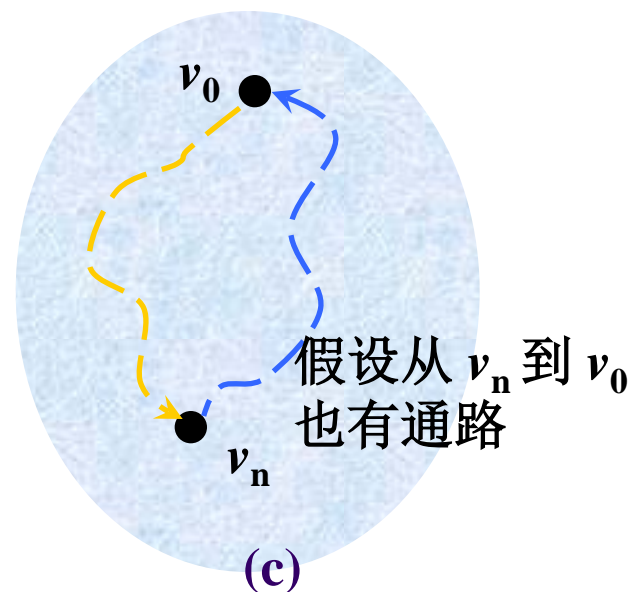
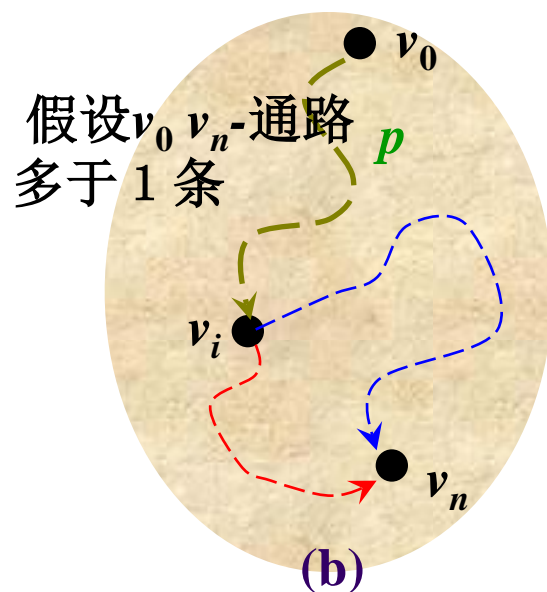
根树的定义

- 定义：底图为树的有向图称为 **有向树**。
- 定义：若有向树恰含一个入度为0的顶点，其它顶点入度均为1，则该有向树称为 **根树**，那个入度为0的顶点称为 **根**。





-
- Diagram (a) illustrates a network structure. It features four nodes: v_0 , v_k , v_n , and w_1 . A dashed red line connects v_0 to v_k , and a solid red line connects v_k to v_n . A dashed orange circle highlights v_k , with the text "入度>1" (In-degree > 1) next to it. A solid red line connects w_1 to v_k .





根树的图形表示

- 边上的方向用约定的位置关系表示

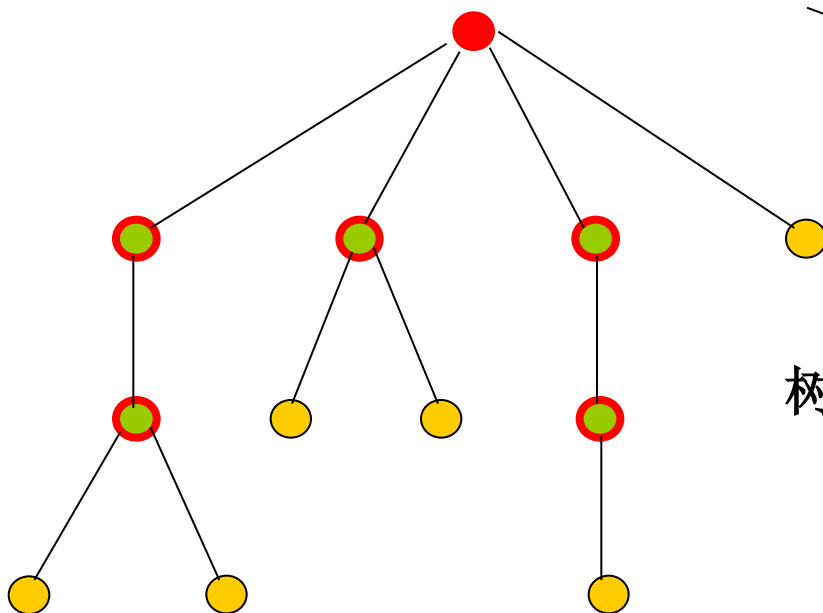
根也是内点，除非它是图中唯一顶点。

第0层

第1层

第2层

第3层



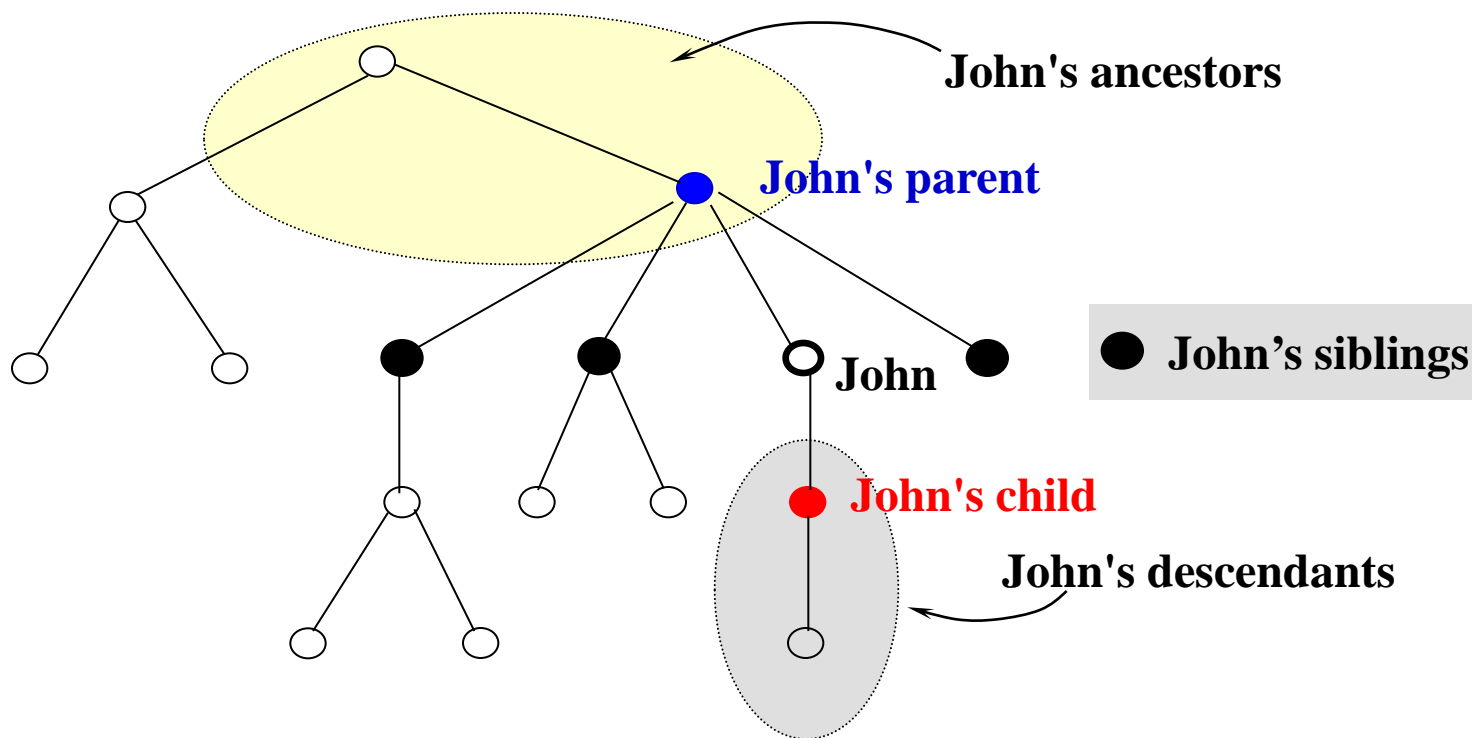
- 根
- 内点（有子女）
- 树叶（无子女）

树高=3（最大的通路长度）

根树与家族关系



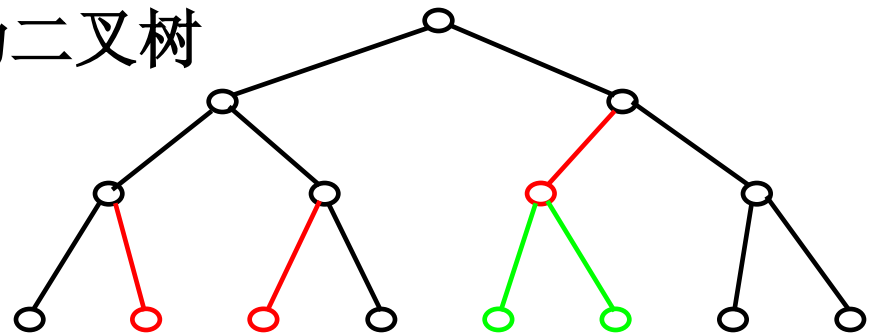
- 用根树容易描述家族关系，反之，家族关系术语被用于描述根树中顶点之间的关系。





根树的几个术语

- **m元树**: 每个内点至多有m个子女
 - 2元树也称为二叉树
- 完全m元树(*full m-ary tree*)
 - 每个内点恰好有m个子女
- 平衡: 树叶都在h层或(h-1)层, h为树高。
- 有序: 同层中每个顶点排定次序
 - 有序二叉树通常也简称为二叉树

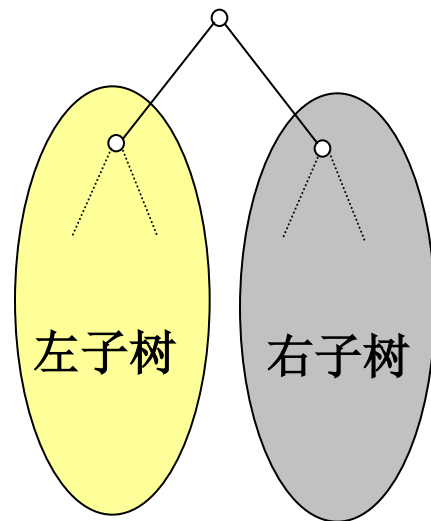


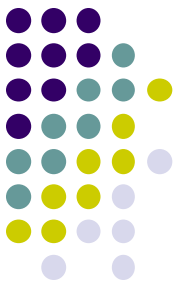


根树的几个术语（续）

- 定义：设 T 是根树， T 中任一顶点 v 及其所有后代的导出子图显然也是根树(以 v 为根)，称为 T 的**根子树**。
- 有序二叉树的子树分为左子树和右子树

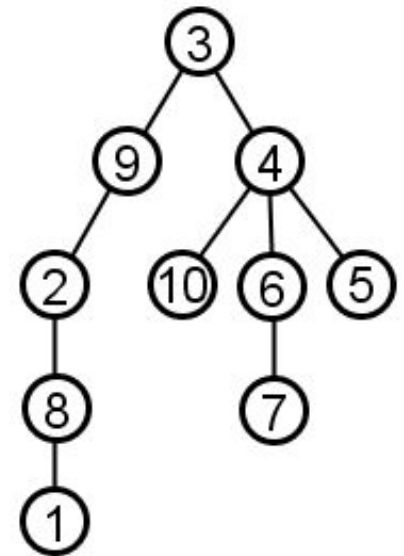
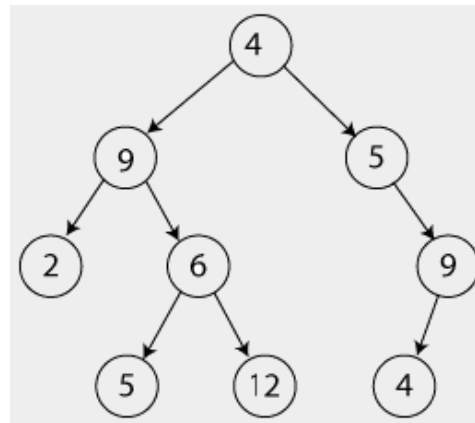
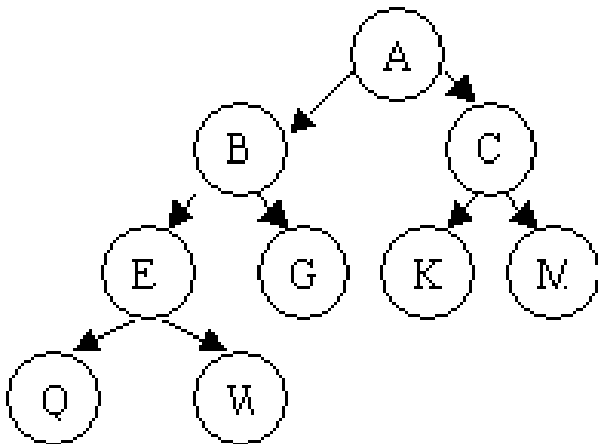
即使不是完全二叉数，也可以分左、右，必须注意顶点位置





根树（举例）

- 树的高度、各顶点所处的层数
- 完全、平衡





完全m元树的顶点数

- 设T是完全m元树，
 - 若T有n个顶点, 则有 $i=(n-1)/m$ 个内点和 $l=[(m-1)n+1]/m$ 个树叶.
 - 若T有i个内点, 则有 $n=mi+1$ 顶点和 $l=(m-1)i+1$ 个树叶.
 - 若T有l个树叶, 则有 $n=(ml-1)/(m-1)$ 个顶点和 $i=(l-1)/(m-1)$ 个内点.

$$n-1 = m \times i \quad (\text{入度总数}=\text{出度总数})$$

$$n = i + l \quad (\text{顶点分为内点和树叶})$$



高度为h的m元树的顶点数

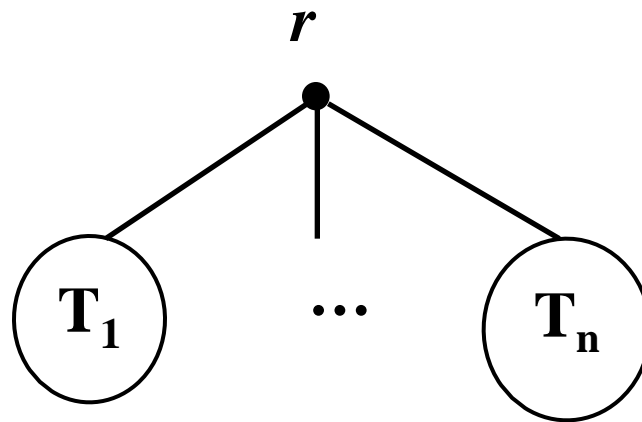
- 高度为h的m元树最多有个 m^h 个树叶。
 - 按照高度h进行归纳证明。（第1层顶点最多为m个）
- 若高度为h的m元树有l个树叶，则 $h \geq \lceil \log_m l \rceil$.
 - 如果这棵树是完全的且平衡的，则有 $h = \lceil \log_m l \rceil$.

$$m^{h-1} < l \leq m^h$$



有序根树的遍历

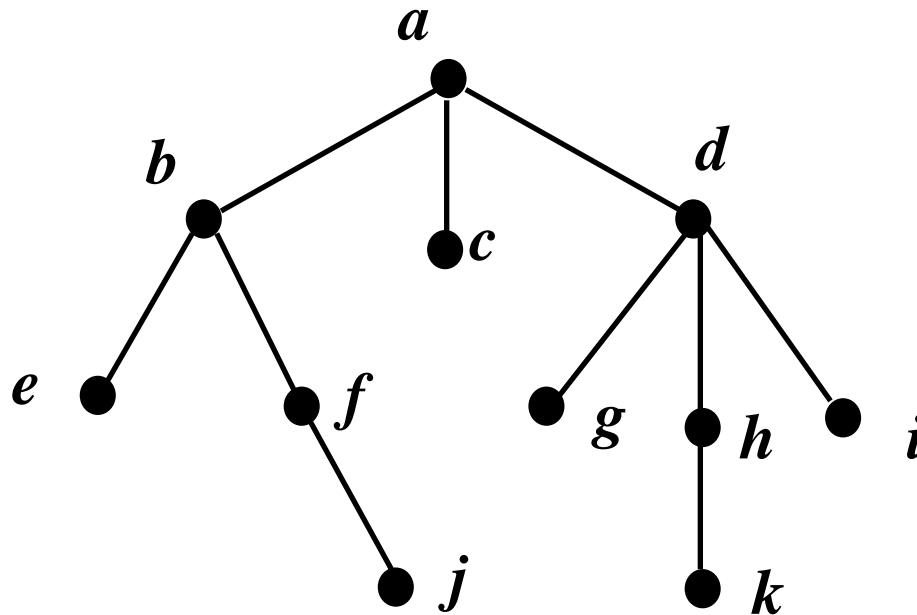
- 前序遍历 (preorder)
 - T 只包含根 r , 则为 r ;
 - T 的子树为 T_1, \dots, T_n , 则为 $r, \text{preorder}(T_1), \dots, \text{preorder}(T_n)$





有序根树的遍历

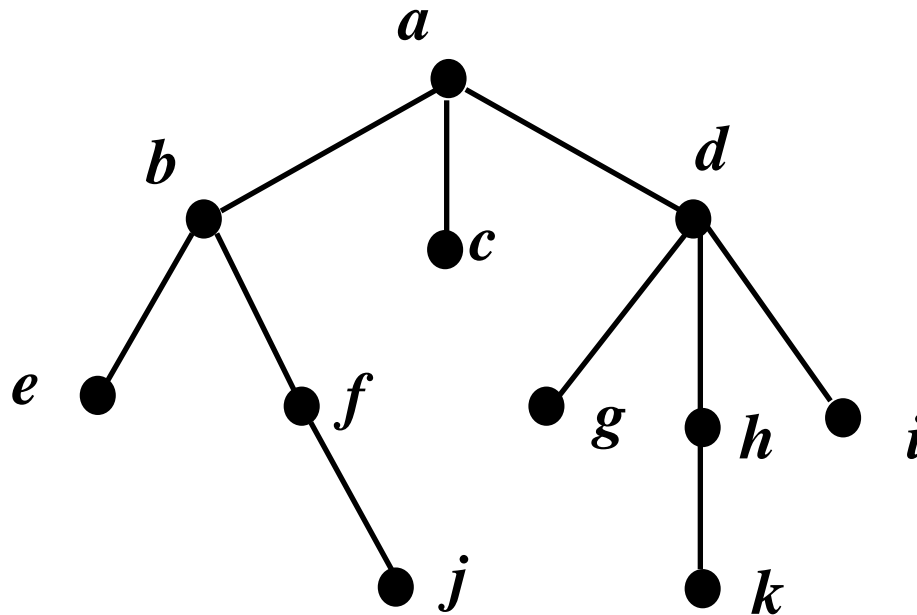
- 前序遍历 (preorder)





有序根树的遍历

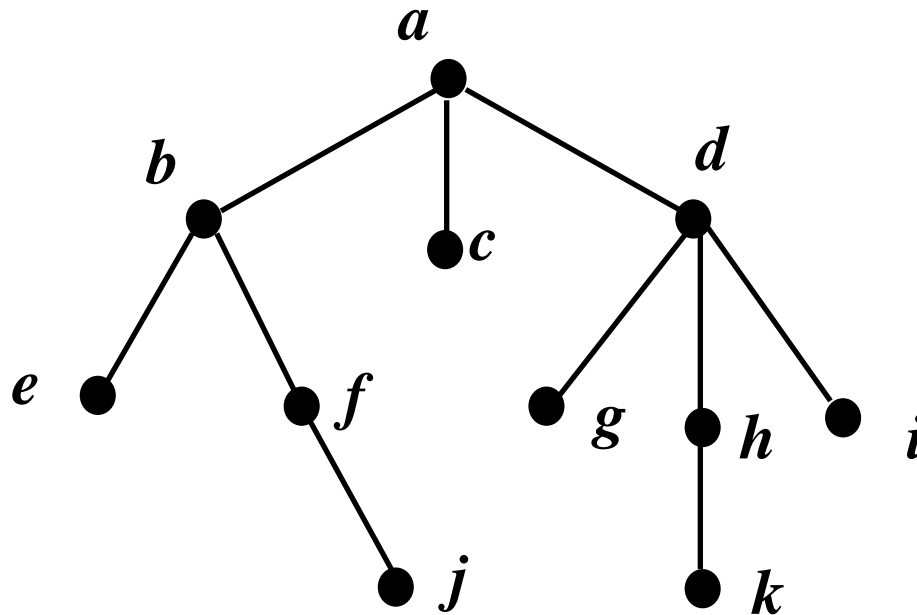
- 后序遍历 (postorder)





有序根树的遍历

- 中序遍历 (**inorder**) //先访问第一棵子树





作业

- 教材（第六版）[10.1, 10.3]
 - p.539: 4, 21, 26, 38, 43
 - p.564: 9, 25, 29
- 教材（第七版）[11.1, 11.3]
 - p.641: 4, 21, 26, 38, 43
 - p.666: 9, 25, 29