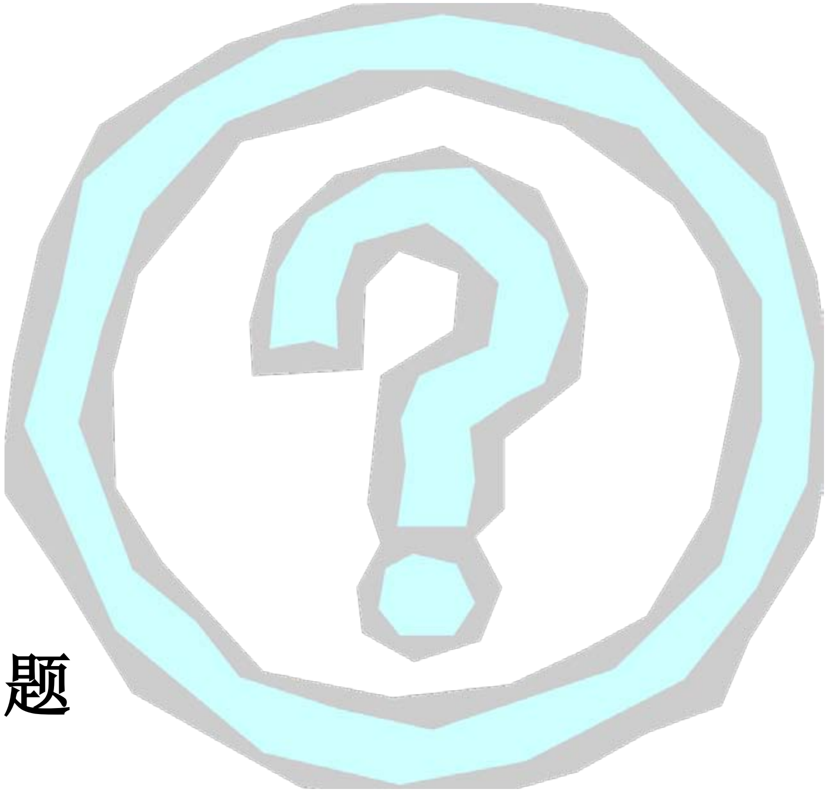
基本概念

离散数学—图论初步

南京大学计算机科学与技术系

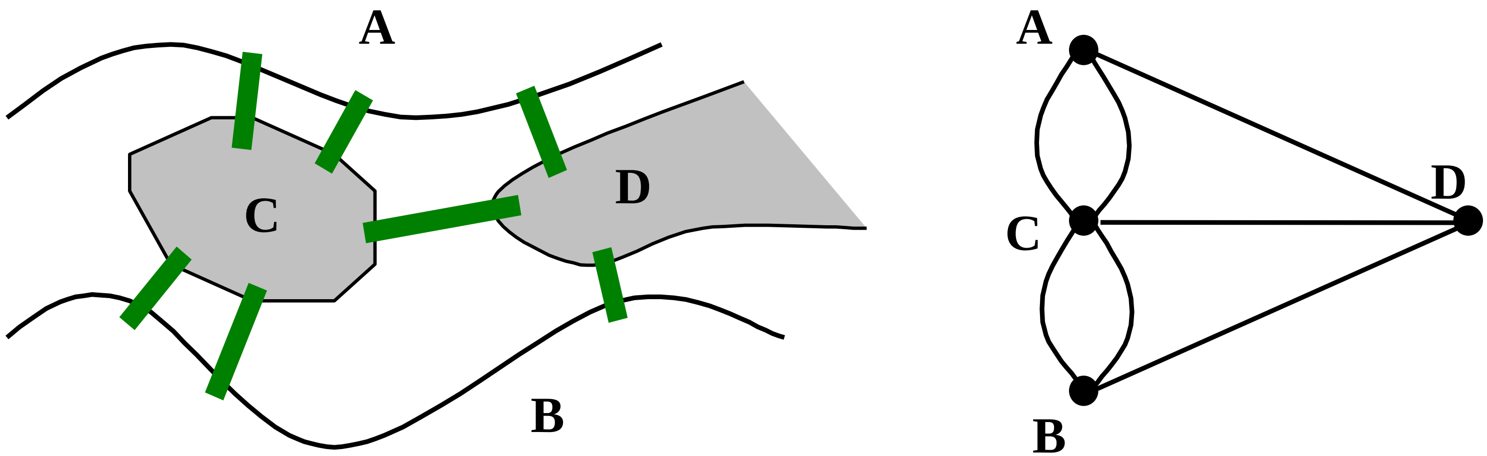
内容提要

- 图的定义
- 图模型
- 图的术语
- 几种特殊的图
- 二部图 （偶图）
- 图的运算
- 图结构上的经典问题



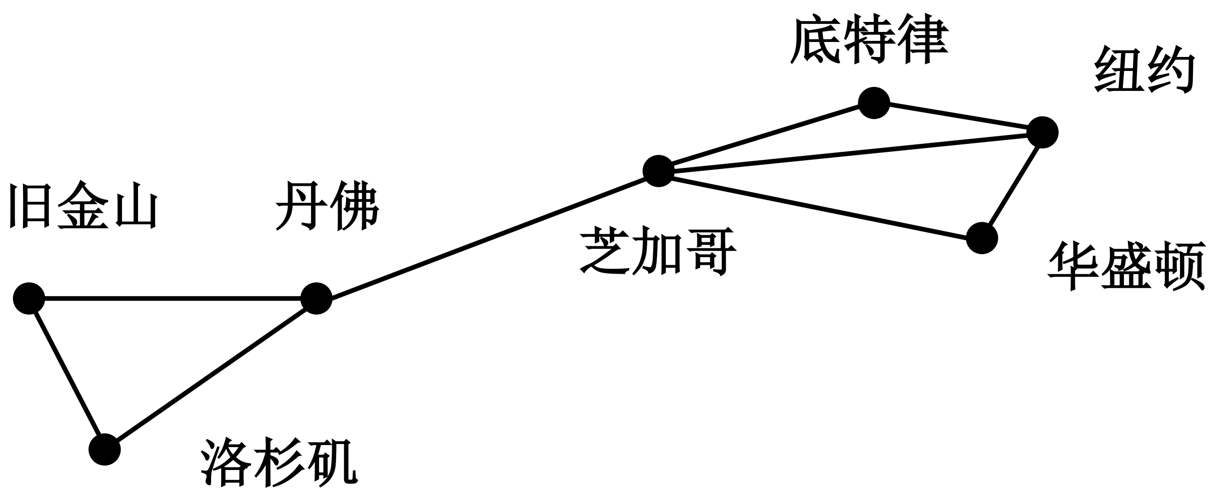
Königsberg七桥问题

- 问题的抽象：
  - 用顶点表示对象-“地块”
  - 用边表示对象之间的关系-“有桥相连”



图的定义

- 图G是一个三元组：G =(V, E, φ)
    - V是非空顶点集，E是边集，且V∩E=ϕ;
    - φ: E → P(V), 且∀e∈ E. 1≤|φ(e)|≤2. φ(e)称为边e的端点集.
- 举例（数据中心、通信链接）

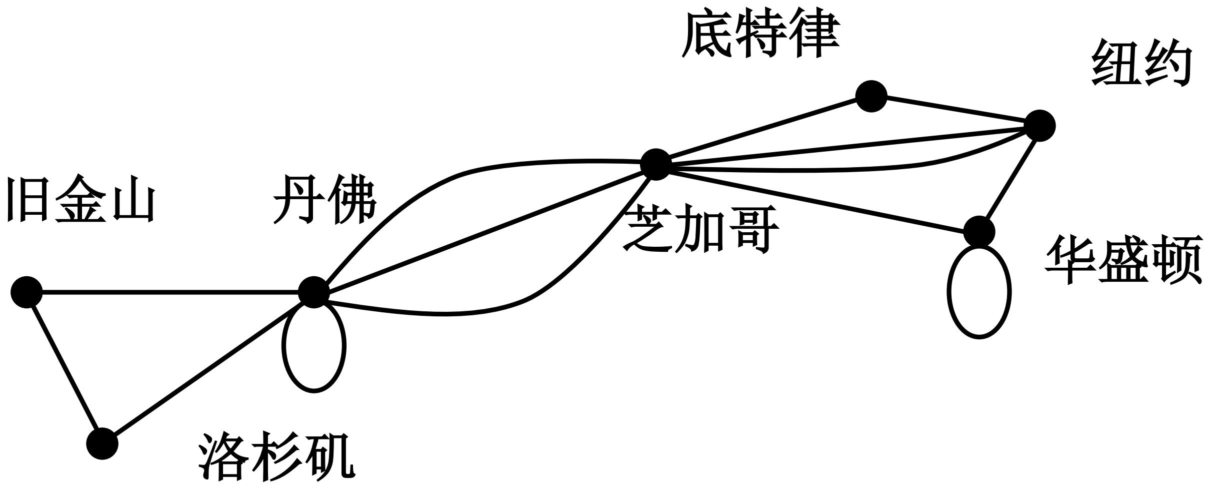


图的定义（续）

- 图$G = (V, E, \varphi)$是简单图，如果
  - 每条边有2个端点，即： $\forall e\in E. |\varphi(e)| = 2$，并且
  - 不同边有不同端点集，即：如果$e_1\neq e_2$，则$\varphi(e_1) \neq \varphi(e_2)$
- 图$G = (V, E, \varphi)$是伪图，如果
  - 存在一条只有1个端点的边，即: $\exists e_0\in E.|\varphi(e_0)| = 1$，或者
  - 有两条边具有相同的端点集，即:$\exists\, e_1\neq e_2.\varphi(e_1)=\varphi(e_2)$

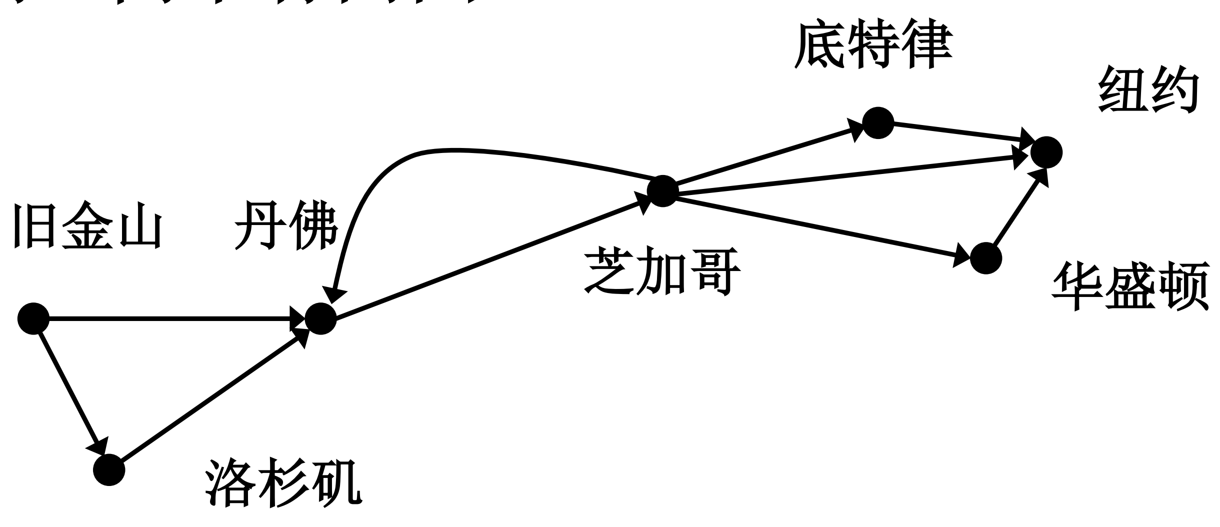
图的定义（续）

- 伪图（包含环或者多重边）示例



图的定义（有向图）

- 有向图G是一个三元组：G= (V, E, φ)
  - V是非空顶点集，E是有向边（弧）集，且V∩E=ϕ;
  - φ:E→V×V, 若φ(*e*)=(*u*, *v*), 则*u*和*v*分别称为*e*的起点和终点.
- 举例（简单有向图）

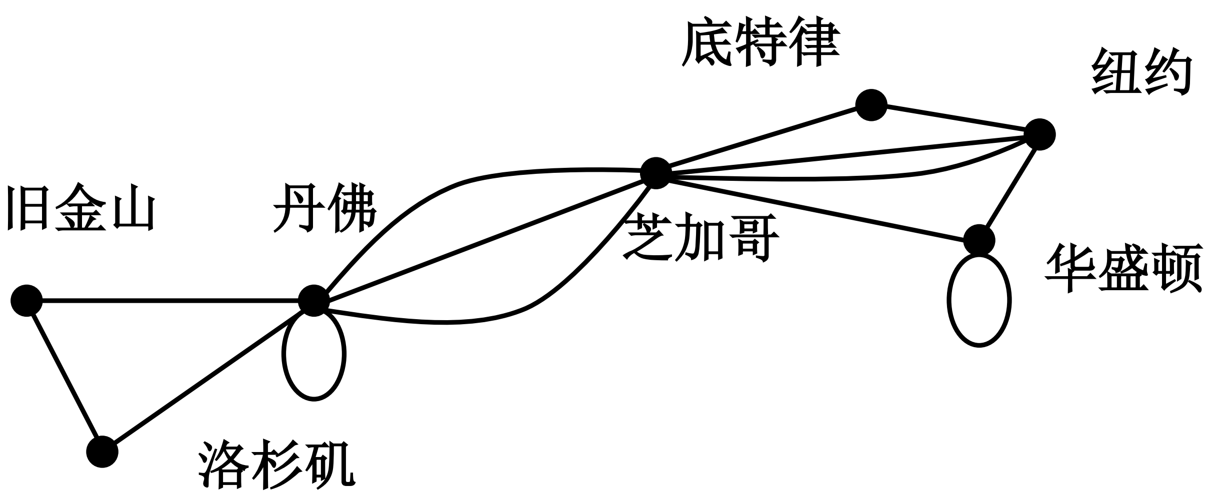


图模型

- 交通网络
  - 航空、公路、铁路
- 信息网络
  - 万维网图（**Web Graph**）
  - 引用图（**Citation Graph**）
- 社会网络
  - 熟人关系图
  - 合作图，好莱坞图
  - 呼叫图
- 体育（循环赛的图模型）

图的术语

- 无向图G = (V, E, φ), φ(*e*)={*u*, *v*} , *u*≠*v*
  - *u*和*v*在G里邻接（相邻）
  - *e*关联（连接）顶点*u*和*v*
- 图G中顶点*v*的度, deg(*v*)， $d_G(v)$
  - 与该顶点关联的边数，环为顶点的度做出双倍贡献。



握手定理

- 无向图G有m条边，n个顶点$v_1, \ldots v_n$.

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

- 推论：无向图中奇数度顶点必是偶数个。

图的术语（续）

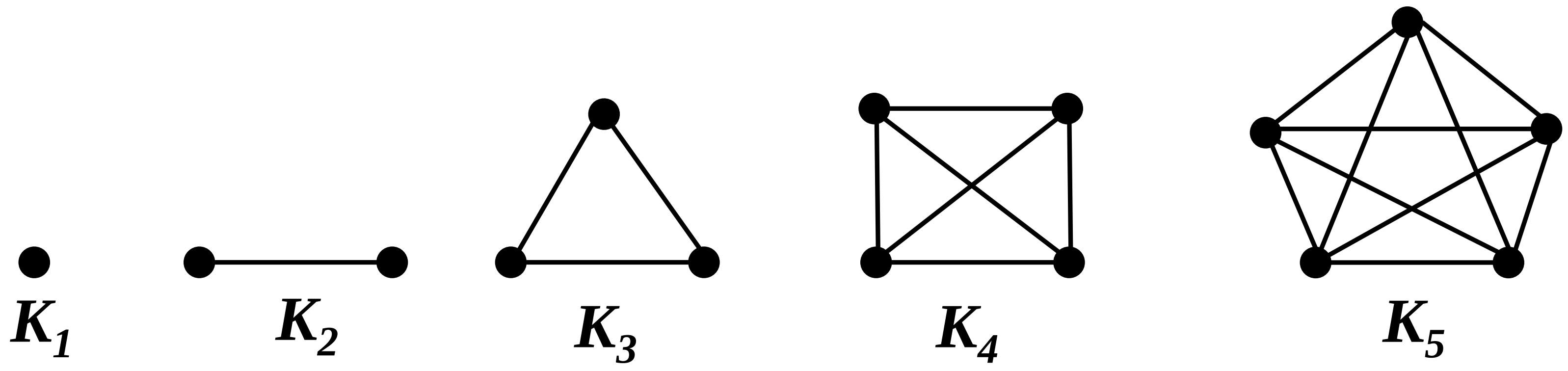
- 有向图G =(V, E, φ), φ(e)=(u, v)
  - u是e的起点，v是e的终点
  - 假设 $u \neq v$，u邻接到v，v从u邻接
- 有向图中顶点的出度和入度
  - $d_G^+(v)$ = 以v为始点的边的条数， $\deg^+(v)$
  - $d_G^-(v)$ = 以v为终点的边的条数， $\deg^-(v)$
- 有向图中各顶点的出度之和等于入度之和。

$$\Sigma_{v\in V}\, deg^+(v) = \Sigma_{v\in V}\, deg^-(v) = |E|$$

- 有向图的底图

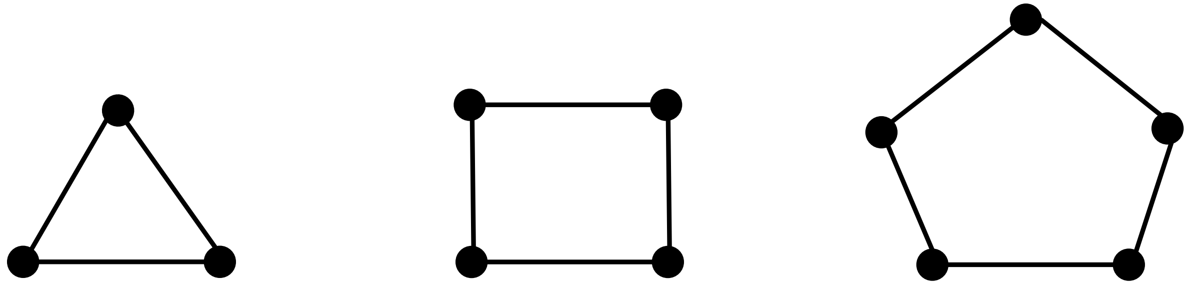
特殊的简单图（完全图）

- 若简单图G中任意两点均相邻，则称为完全图。记为K_n, 其中n是图中顶点数。
  - K_n中每个顶点皆为n-1度，总边数为n(n-1)/2。
  - 边数达到上限的简单图。



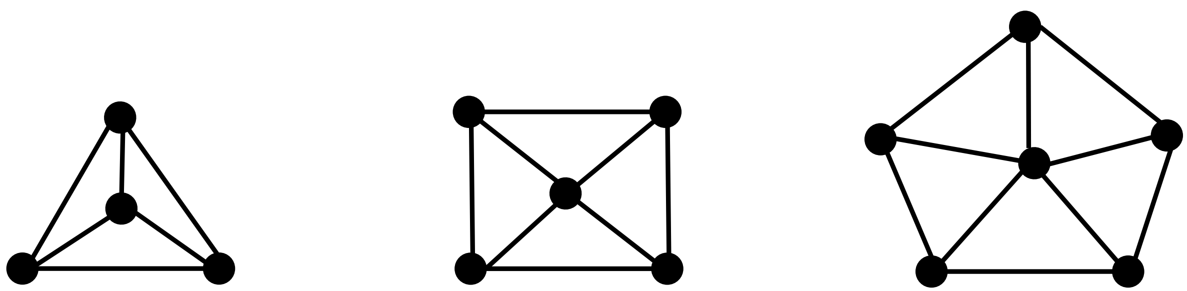
特殊的简单图（圈图与轮图）

Cycle



C_3 C_4 C_5

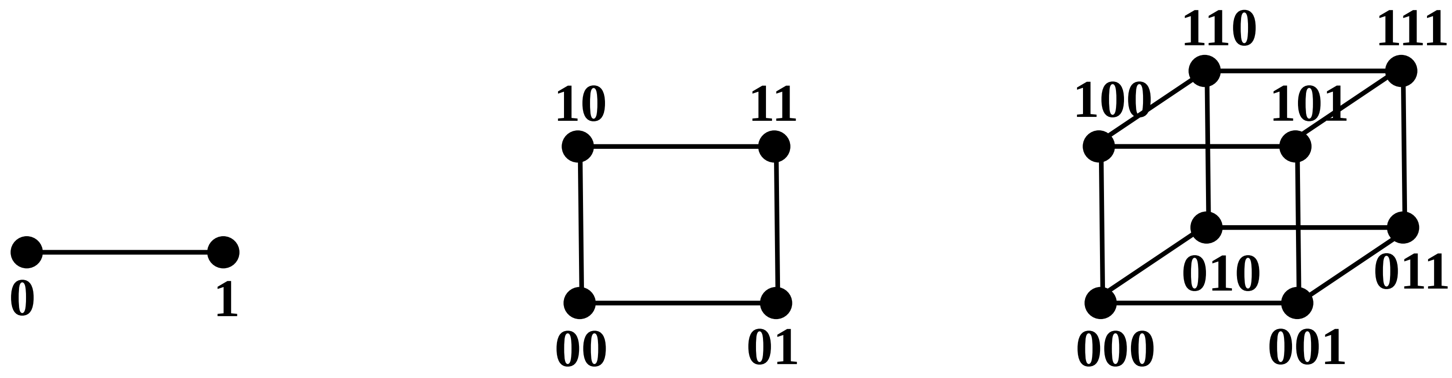
Wheel



W_3 W_4 W_5

特殊的简单图（立方体图）

n-cube

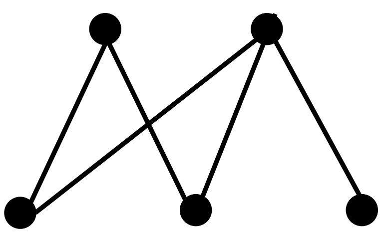


Q_1 Q_2 Q_3

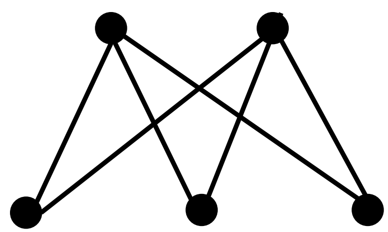
正则图：顶点度相同的简单图

二部图(bipartite graph)

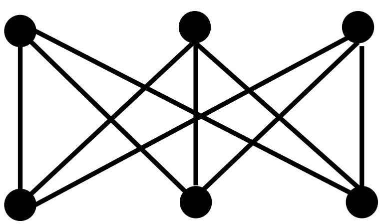
- 二部图：顶点集划分为2个类别(不相交)，边的端点在不同类别中。
- 完全二部图：来自不同类别的两个顶点均有边。



G



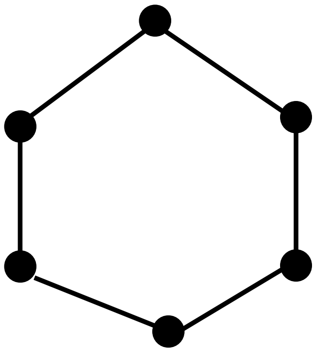
$K_{2,3}$



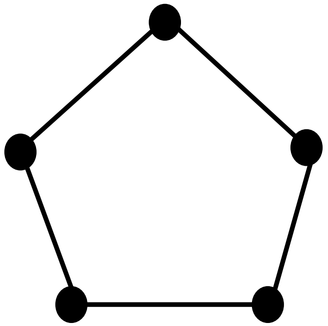
$K_{3,3}$

二部图的判定

- C_6是否是二部图？



- 二种颜色对顶点着色，相邻顶点赋以不同颜色



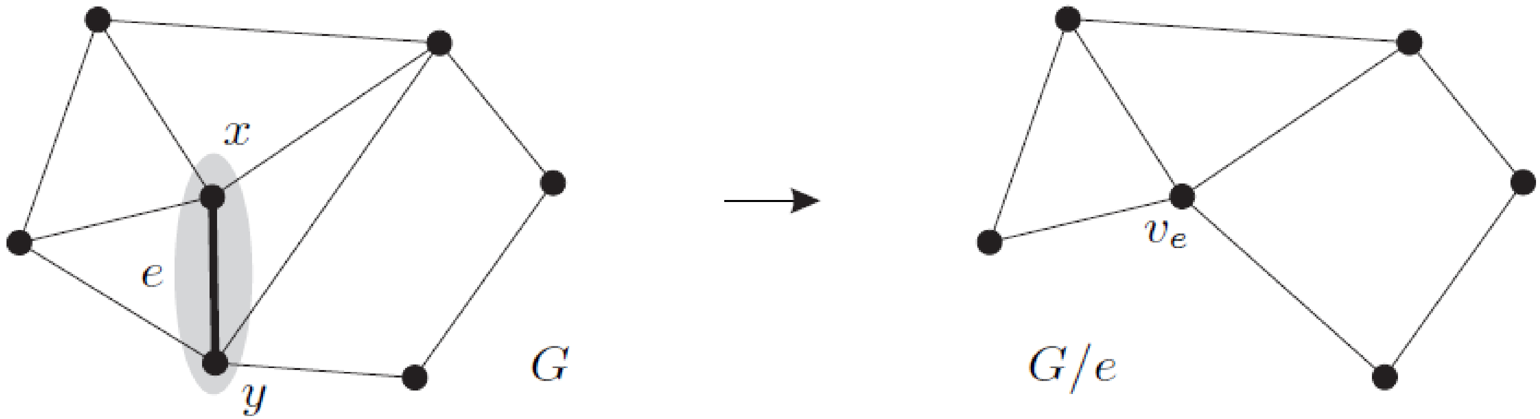
二部图？

子图

- **设$G=<V,E>$, $G'=<V',E'>$, 如果$V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, 则称G'是G的子图。**
- **如果$V' \subset V$, 或者$E' \subset E$, 则称为真子图。**
- **诱导(导出)子图：可以由顶点集的子集，或者由边集的子集导出一个子图。**

图的运算

- 加新边:G+e
- 减边或边集： G-*e*
- 减点或点集: G-*v* （*同时删除与v关联的边*）
- 边的收缩: G/e

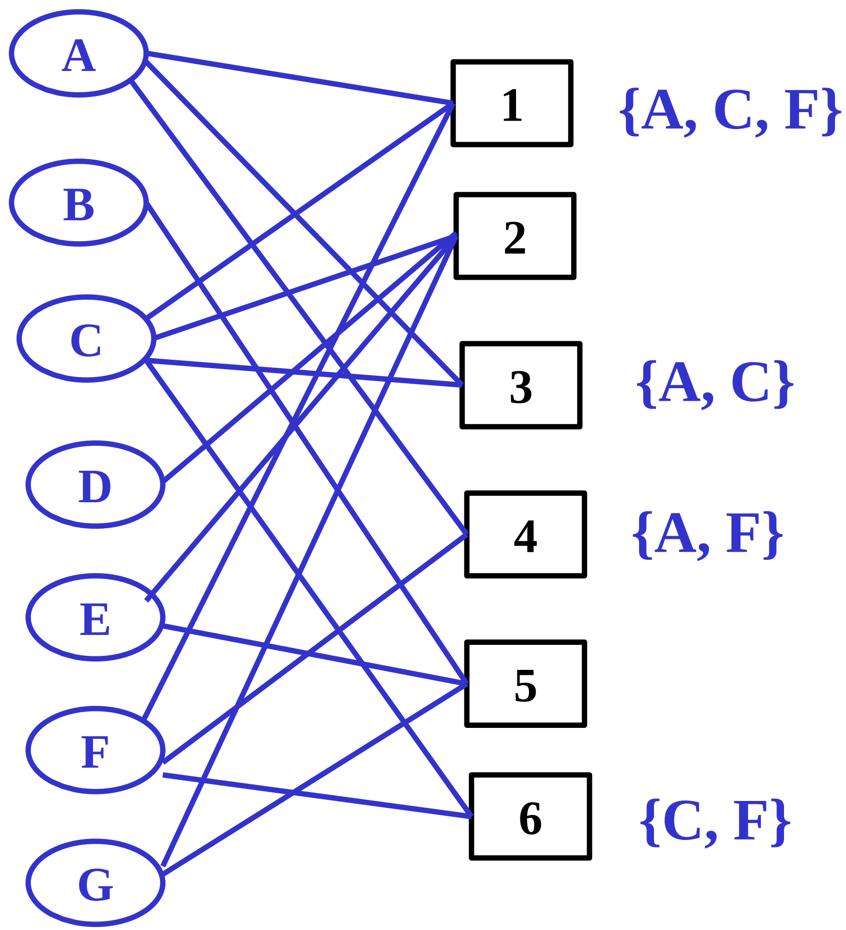


图的运算

- **G∪G’：以V(G)∪V(G’)中的顶点组成的集合为顶点集,以E(G)∪E(G’)为边集。 //简单图的并**
- **假设G和G’是不交的无向图, 定义G∗G’如下：**
  - **以V(G)∪V(G’)为顶点集**
  - **以E(G)∪E(G’)∪{{x, y}| x∈V(G), y∈V(G’)}为边集**
- **举例, $K_2 * K_3 = K_5$.**
- **简单图G的补图（complement graph）， 记为 G**
  - **G=(V, E) 的补图定义为 (V, $[V]^2$ \E)**

图结构上的经典问题–孤岛上的婚姻

- 孤岛上有m个男子和n个女子，每个人均有一个可选配偶列表，如何成就尽可能多的幸福婚姻？
- 最大匹配问题。



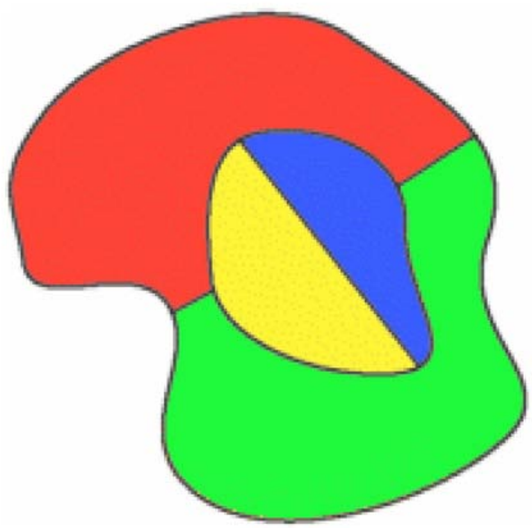
中国邮递员问题（管梅谷，1960）

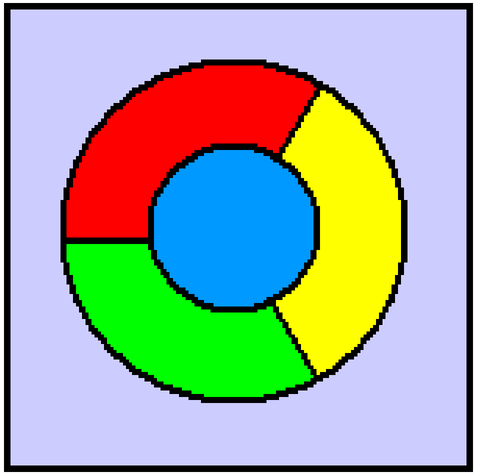
- 邮递员从邮局出发，走过辖区内每条街道*至少一次*，再回邮局，如何选择最短路线？
- Euler回路？添加重复边（权和最小）。

旅行商(TSP)问题

- n个城市间均有道路，但距离不等，旅行商从某地出发，走过其它n-1个城市，且只经过一次，最后回到原地，如何选择最短路线？
- 最短Hamilton回路。

地图与平面图着色（四色猜想）





作业

- **教材[9.1, 9.2]**
  - **p. 459:　5-8, 16, 20**
  - **p. 468:　5, 8, 31, 36(a, c, e, g), 53**

教材（第7版）[10.1,10.2]
P.547: 5-8,16,20
P.559: 5,8,37,42(a,c,e,g),59