逻辑与证明(2)

南京大学离散数学教学组

课堂热身题

有 A、B、C 3 个人，其中 C 被蒙住了双眼。3 个人各带一个帽子，帽子有白、黑 2 种，但不全为白色的。3 个人都看不见自己头上的帽子，A 先看看 B 和 C，说无法确定自己帽子什么颜色；B 看看 A 和 C，说也不能确定自己头上帽子颜色；这时候 C 说他知道自己帽子的颜色了。请问：C 的帽子是什么颜色？请用命题逻辑进行演算，证明结论正确性。

命题表达式及其真值确定

- 命题表达式的递归定义：
  - 命题变元是命题表达式
  - 若A是命题表达式，则（ $\neg$A ）也是命题表达式。
  - 若A和B均是命题表达式，则（A$\wedge$B), (A$\vee$B), (A$\rightarrow$B), (A$\leftrightarrow$B)均是命题表达式。
  - 只有有限次应用上述规则形成的符号串才是命题表达式。
- 例子：
  - $(p\rightarrow q)\wedge(q\leftrightarrow r)$, $p\rightarrow(q\rightarrow r)$是命题表达式
  - $pq\rightarrow r$, $p\rightarrow\wedge q$不是命题表达式。

命题表达式的真值确定

* 表达式：$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg r$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1			1
0	1	0	1			1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1

该表达式的一种“成真指派”

该命题表达式的所有指派

重言式、矛盾式与可能式

- 所有指派均为成真指派：重言式
  - $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$ 对任意的p,q值均为1，为重言式。
- 所有指派均为成假指派：矛盾式
  - $p \wedge \neg p$ 对任意的p值均为0，为矛盾式。
- 同时存在成真和成假指派：可能式
  - $(p \to q) \wedge (p \vee q)$:
    - 成真指派：$(p,q) = (1,1)$ or $(0,1)$
    - 成假指派：$(p,q) = (1,0)$ or $(0,0)$

逻辑等价

$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$

p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	$p\leftrightarrow q$	$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

双蕴含连接符连接的命题表达式，如果所有指派均成真，称该符号连接的两个命题表达式逻辑等价，并记为： $A\equiv$B

$$(p\leftrightarrow q) \equiv ((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$$

常用的逻辑等价(1)

名称	等价
双重否定律	$A\equiv\neg\neg A$
幂等律	$A\equiv A\vee A$, $A\equiv A\wedge A$
交换律	$A\vee B\equiv B\vee A$, $A\wedge B\equiv B\wedge A$
结合律	$(A\vee B)\vee C\equiv A\vee(B\vee C)$ $(A\wedge B)\wedge C\equiv A\wedge(B\wedge C)$
分配律	$A\vee(B\wedge C)\equiv(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ $A\wedge(B\vee C)\equiv(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$
德摩根律	$\neg(A\vee B)\equiv\neg A\wedge\neg B$ $\neg(A\wedge B)\equiv\neg A\vee\neg B$
吸收律	$A\vee(A\wedge B)\equiv A$ $A\wedge(A\vee B)\equiv A$

常用的逻辑等价(2)

否定律

名称	等价
支配律	$A \vee 1 \equiv 1$, $A \wedge 0 \equiv 0$
恒等律	$A \vee 0 \equiv A$, $A \wedge 1 \equiv A$
排中律	$A \vee \neg A \equiv 1$
矛盾律	$A \wedge \neg A \equiv 0$
	$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
	$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
假言易位	$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$
	$A \leftrightarrow B \equiv \neg B \leftrightarrow \neg A$
归缪论	$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \equiv \neg A$

置换规则-等价式的应用

- 逻辑等价式在逻辑演算(表达式推演)和证明中起重要作用。
- 置换规则：设$\Phi(A)$是含表达式A的命题表达式，$\Phi(B)$是用表达式B置换了$\Phi(A)$中*所有*的A后得到的表达式。若$B\equiv A$，则$\Phi(B)\equiv\Phi(A)$。

$$(p\vee q)\to r\equiv(p\to r)\wedge(q\to r)$$

证明:$(p\to r)\wedge(q\to r)$

$\equiv(\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)$ （蕴涵等价式）

$\equiv(\neg p\wedge\neg q)\vee r$ （分配律）

$\equiv\neg(p\vee q)\vee r$ （德摩根律）

$\equiv(p\vee q)\to r$ （蕴涵等价式）

逻辑等价的判定

- $\neg(p\rightarrow q)$和$p\wedge\neg q$是否逻辑等价？

- $p\wedge q \rightarrow p\vee q$是否永真？

逻辑等价的判定

- $\neg(p \to q)$和$p \wedge \neg q$是否逻辑等价？

$$
\begin{aligned}
\neg(p \to q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) \\
&\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q \\
&\equiv p \wedge \neg q
\end{aligned}
$$

- $p \wedge q \to p \vee q$是否永真？

$$
\begin{aligned}
p \wedge q \to p \vee q &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) \\
&\equiv \neg p \vee p \vee \neg q \vee q \\
&\equiv \mathrm{T}
\end{aligned}
$$

命题符号化若干例

* 符号化下列命题：
  * 只有计算机系学生和老师，才能参加迎新晚会
* 几点提醒：
  * 复合命题的“原子命题”及其内部逻辑连接！
  * 自然语言有一定的歧义，注意观察和分析！

命题符号化及其应用

We know that Bill, Jim and Sam are from Boston, Chicago and Detroit, respectively. Each of following sentence is half right and half wrong:

Bill is from Boston, and Jim is from Chicago.
Sam is from Boston, and Bill is from Chicago.
Jim is from Boston, and Bill is from Detroit.

Tell the truth about their home town.

命题符号化及其应用

* We set :
  * P1 = Bill is from Boston
  * P2 = Jim is from Chicago.
  * P3 = Sam is from Boston
  * P4 = Bill is from Chicago.
  * P5 = Jim is from Boston
  * P6 = Bill is from Detroit.
* So, We have:
  * $((p1\wedge\sim p2)\vee(\sim p1\wedge p2))\wedge((p3\wedge\sim p4)\vee(\sim p3\wedge p4))\wedge((p5\wedge\sim p6)\vee(\sim p5\wedge p6))$ 应该可满足

命题符号化及其应用

析取范式

等价替换：

$((p_1\wedge\sim p_2)\vee(\sim p_1\wedge p_2)) \wedge ((p_3\wedge\sim p_4) \vee(\sim p_3\wedge p_4))$

$\equiv(((p_1\wedge\sim p_2)\vee(\sim p_1\wedge p_2)) \wedge(p_3\wedge\sim p_4))\vee(((p_1\wedge\sim p_2)\vee(\sim p_1\wedge p_2)) \wedge(\sim p_3\wedge p_4))$

$\equiv(p_1\wedge\sim p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4) \vee(\sim p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4) \vee(p_1\wedge\sim p_2\wedge\sim p_3\wedge p_4)$
$\vee(\sim p_1\wedge p_2\wedge\sim p_3\wedge p_4))$

$\equiv \mathbf{F}\vee(\sim p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4) \vee\mathbf{F}\vee\mathbf{F}$

$\equiv \sim p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4$

由题意

继续：

$(\sim p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4)\wedge((p_5\wedge\sim p_6)\vee(\sim p_5\wedge p_6))$

$\equiv (\sim p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4\wedge\sim p_5\wedge p_6)$ 可满足

So, Jim is from Chicago, Sam is from Boston, and Bill is from Detroit.

析取（合取）范式的存在性

- 求 $(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$ 的析取范式
  - $(\neg p\vee q)\leftrightarrow r$ （消去→）
  - $((\neg p\vee q)\wedge r)\vee(\neg(\neg p\vee q)\wedge\neg r)$ （消去↔ ）
  - $((\neg p\vee q)\wedge r)\vee((p\wedge\neg q)\wedge\neg r)$ （否定号内移）
  - $(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ （分配律、结合律）

主析取（合取）范式的唯一性

- 求 $(p\to q)\leftrightarrow r$ 的主析取范式
  - $(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ （析取范式）

$$\neg p\wedge r\equiv\neg p\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$$
$$\equiv(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$$
$$q\wedge r\equiv(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$$

  - $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$
  - $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$
  - 001 011 100 111

作业

* ROSEN第七版
  * P30-32：10, 15, 20, 24, 58