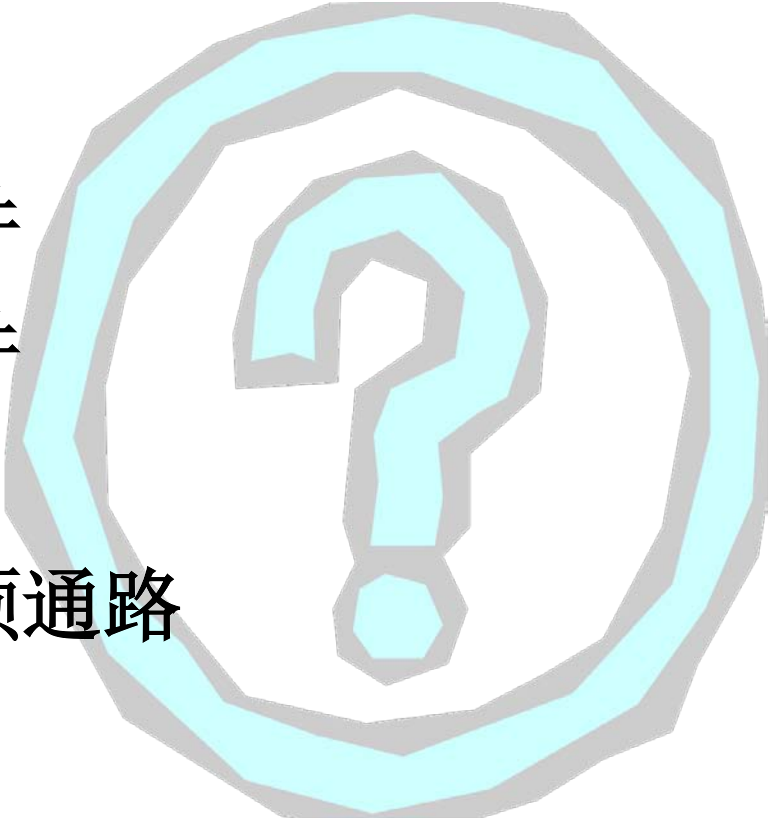
哈密尔顿图

离散数学—图论

南京大学计算机科学与技术系

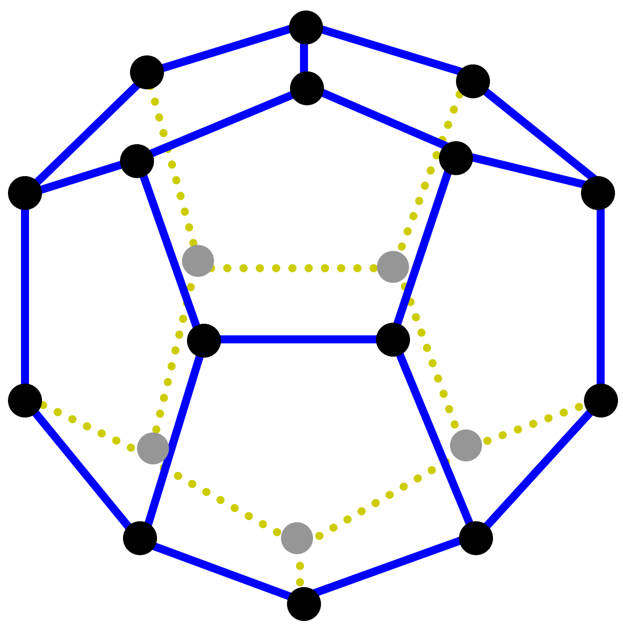
内容提要

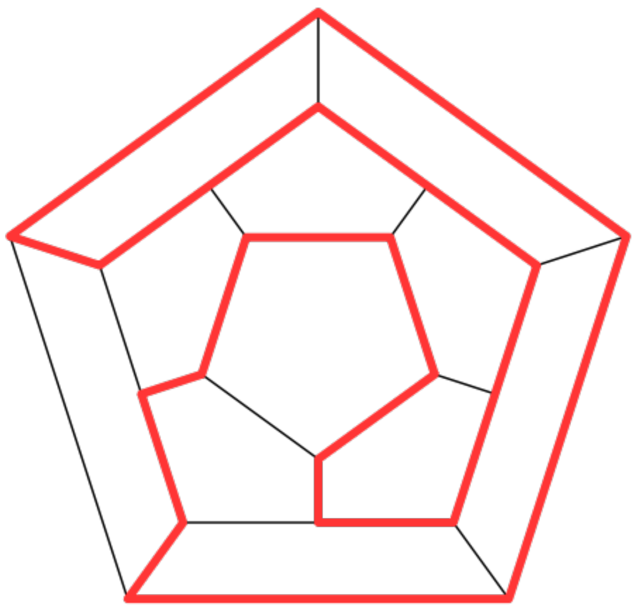
- 哈密尔顿通路
- 哈密尔顿回路
- 哈密尔顿图的必要条件
- 哈密尔顿图的充分条件
- 哈密尔顿图的应用
- 竞赛图与有向哈密尔顿通路



周游世界的游戏

- 沿着正十二面体的棱寻找一条旅行路线, 通过每个顶点恰好一次又回到出发点. (Hamilton 1857)





Hamilton通路/回路

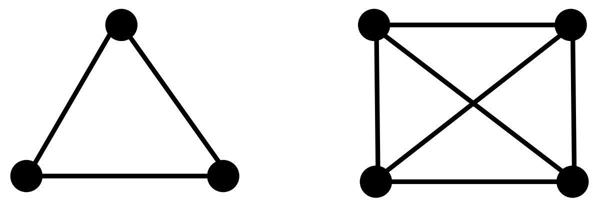
- **G中Hamilton通路**
  - 包含G中所有顶点
  - 通路上各顶点不重复
- **G中Hamilton回路**
  - 包含G中所有顶点
  - 除了起点与终点相同之外，通路上各顶点不重复。
- **Hamilton回路与 Hamilton通路**
  - **Hamilton通路问题可转化为Hamilton回路问题**
  - **$G*K_1$**

Hamilton回路的基本特性

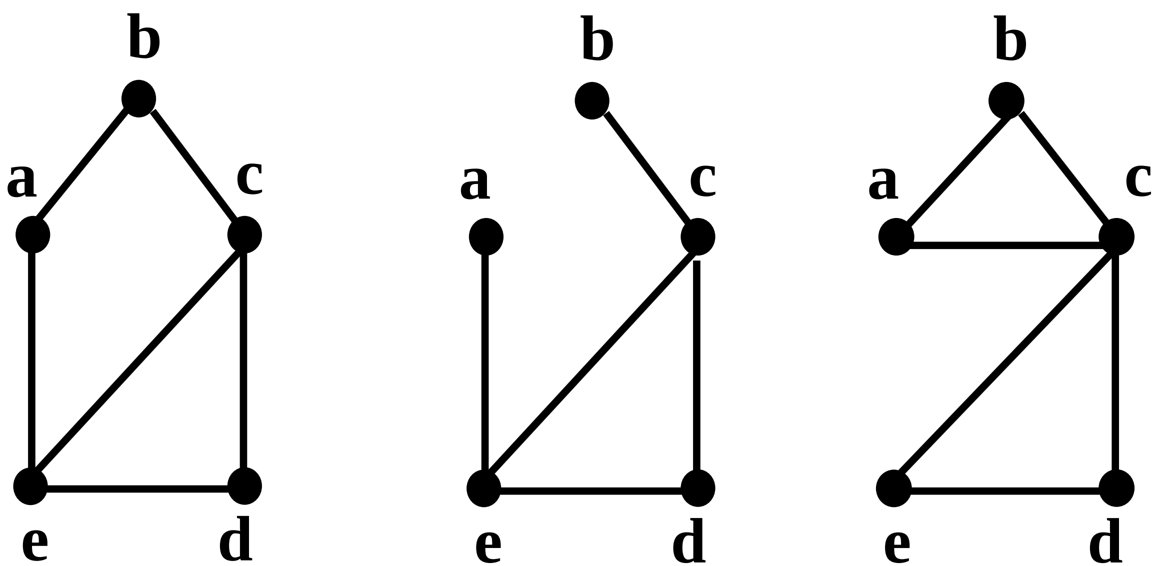
- Hamilton回路:无重复地<u>遍历图中诸点</u>,

  Euler回路:无重复地<u>遍历图中诸边</u>.
- 若图G中有一顶点的度为1, 则无Hamilton回路.
- 设图G中有一顶点的度大于2, 若有Hamilton回路, 则只用其中的两条边.
- 若图中有n个顶点, 则Hamilton回路恰有n条边.
- 注：Hamilton回路问题主要针对简单图。

Hamilton回路的存在性问题

K_3  K_4

$K_n(n\geq3)$有Hamilton回路



一个基本的必要条件

- 如果图G=(V, E)是Hamilton图，则对V的任一非空子集S，都有

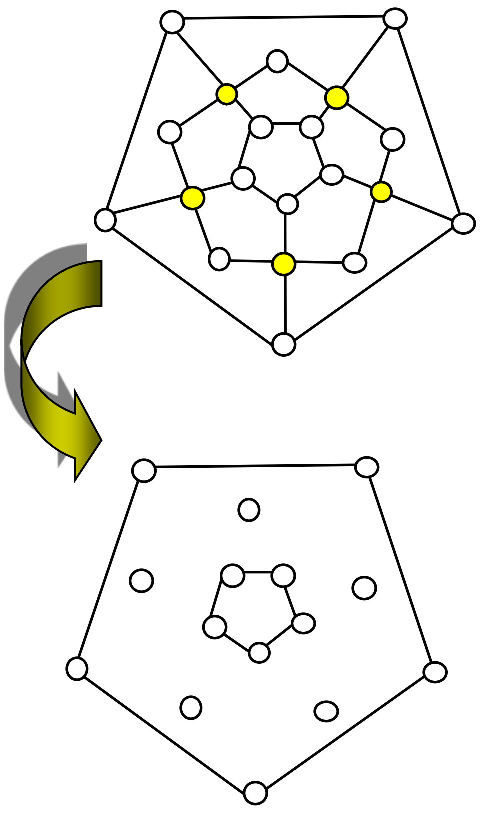
$$P(G-S) \leq |S|$$

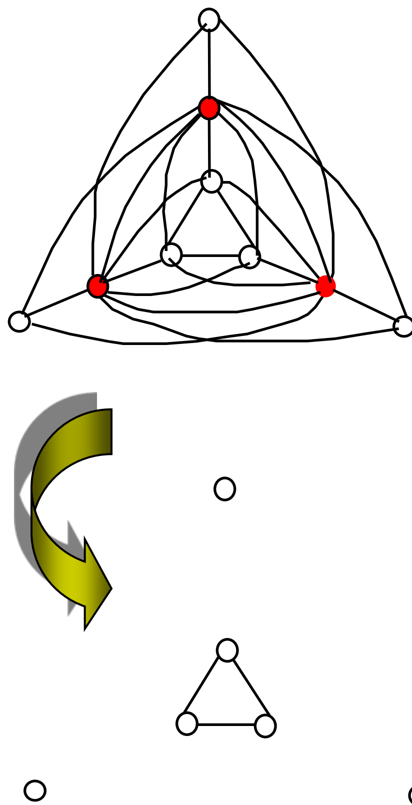
其中， P(G-S)表示图G-S的连通分支数.

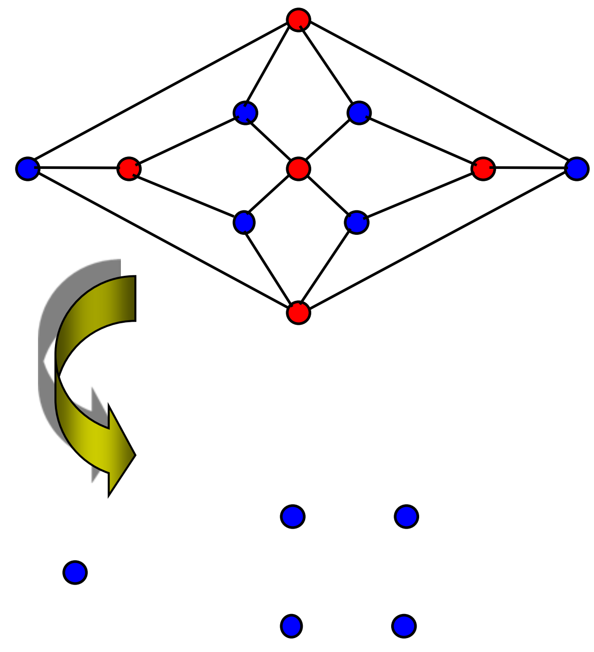
理由：设C是G中的Hamilton回路, $P(G-S) \leq P(C-S) \leq |S|$

向一个图中顶点之间加边不会增加连通分支。

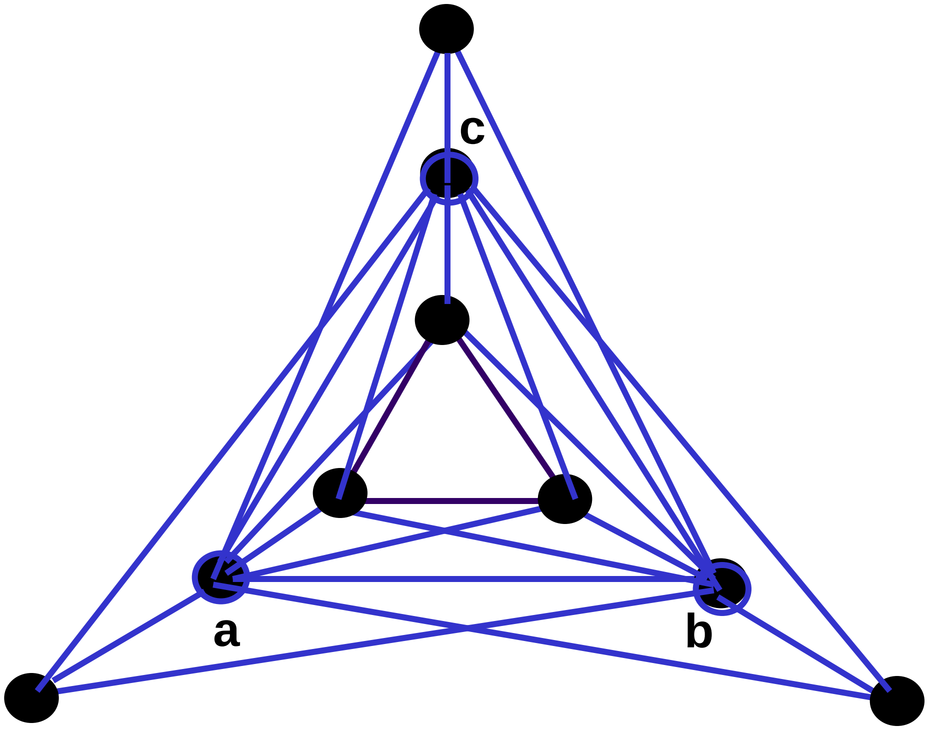
必要条件的应用







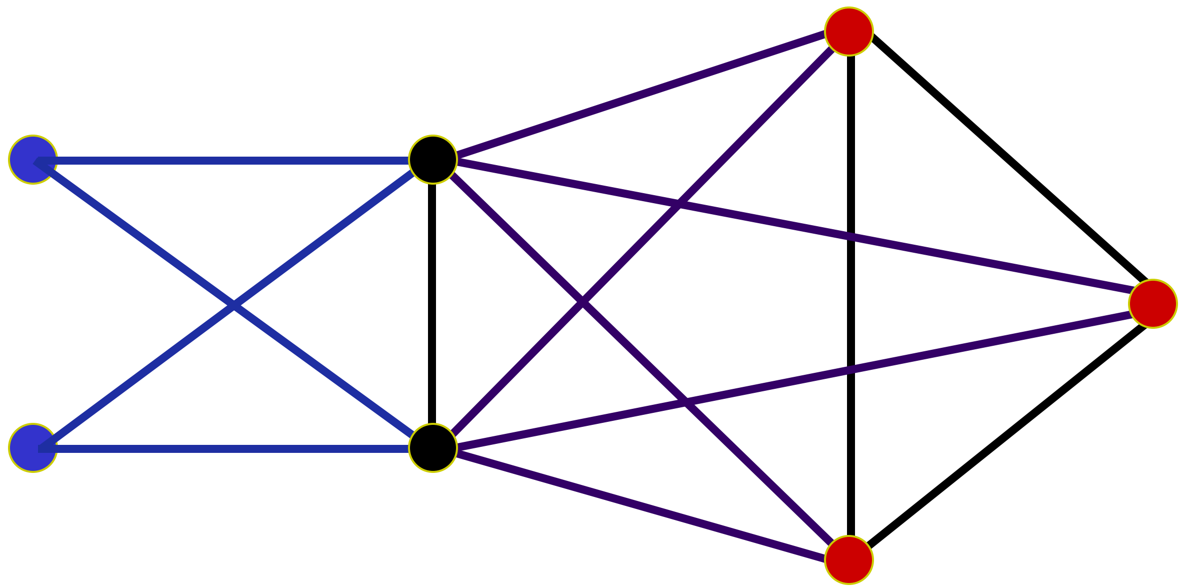
举例



将图中点a, b, c的集合记为S, G-S有4个连通分支,而|S|=3. G不是Hamilton图.

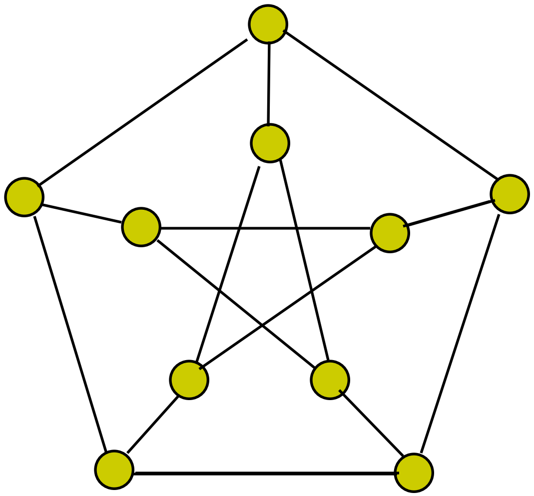
$$\overline{K_h} \longleftrightarrow K_h \longleftrightarrow K_{n-2h}$$

下图给出的是 $C_{2,7}$的具体图 (h=2,n=7)



必要条件的局限性

- 必要条件只能判定一个图不是哈密尔顿图
  - Petersen图满足上述必要条件，但不是哈密尔顿图。



哈密尔顿图的充分条件

- **Dirac定理（狄拉克, 1952）**

  设G是无向简单图，|G|=n≥3， 若δ (G)≥ n/2，则G有哈密尔顿回图.

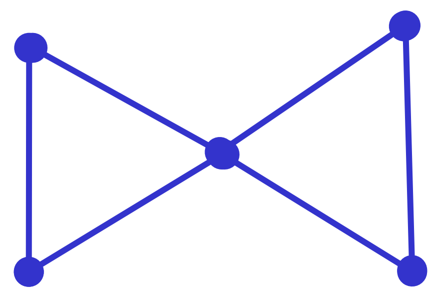
- **Ore定理（奥尔, 1960）**

  设G是无向简单图，|G|=n≥3 ，若G中任意不相邻的顶点对u,v均满足： $d(u)+d(v)\geq n$，则G有哈密尔顿回图。

- 设G是无向简单图，|G|=n≥2，若G中任意不相邻的顶点对u,v均满足：$d(u)+d(v)\geq n-1$，则G是连通图。
  - 假设G不连通，则至少含2个连通分支，设为G_1，G_2。取$x\in V_{G1}$，$y\in V_{G2}$，则：$d(x)+d(y)\leq(n_1-1)+(n_2-1)\leq n-2$ (其中n_i是G_i的顶点个数)，矛盾。

充分条件的讨论

- “δ (G)≥ n/2”不能减弱为： δ (G)≥ $\lfloor n/2 \rfloor$
- 举例， n=5， δ (G)=2 . G不是Hamilton图.



- 存在哈密尔顿通路的充分条件（Ore定理的推论）

设G是无向简单图，|G|=n≥2 ， 若G中任意不相邻的顶点对u,v均满足： $d(u)+d(v)\geq n-1$ ， 则G有哈密尔顿通路。

Ore定理的证明

- **Ore定理（1960）**

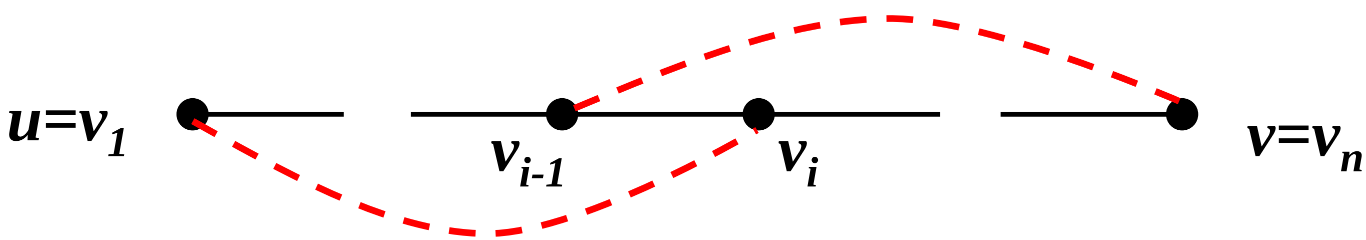
  设G是无向简单图，|G|=n≥3，若G中任意不相邻的顶点对u,v均满足：$d(u)+d(v)\geq n$，则G有哈密尔顿回图。

- **证明.反证法, 若存在满足（*）的图G，但是G没有Hamilton回路.**

  不妨假设G是边极大的非Hamilton图，且满足（*）。若G不是边极大的非Hamilton图，则可以不断地向G增加若干条边, 把G变成边极大的非Hamilton图G'，G'依然满足（*），因为对$\forall v\in V(G)$，$d_G(v)\leq d_{G'}(v)$。

Ore定理的证明

设u, v是G中不相邻的两点，于是G+uv是Hamilton图，且其中每条Hamilton回路都要通过边uv. 因此，G中有起点为u，终点为v的Hamilton通路:



不存在两个相邻的顶点 v_{i-1}和v_i,使得v_{i-1}与v相邻且v_i 与u相邻. 若不然, $(v_1,v_2, \dots v_{i-1}, v_n, \dots, v_i, v_1)$是G的Hamilton回路. 设在G中$u$与$v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}$相邻, 则$v$与$v_{i1-1}, v_{i2-1}, \dots v_{ik-1}$都不相邻, 因此 $d(u)+d(v) \le k+n-1-k<n$. 矛盾.

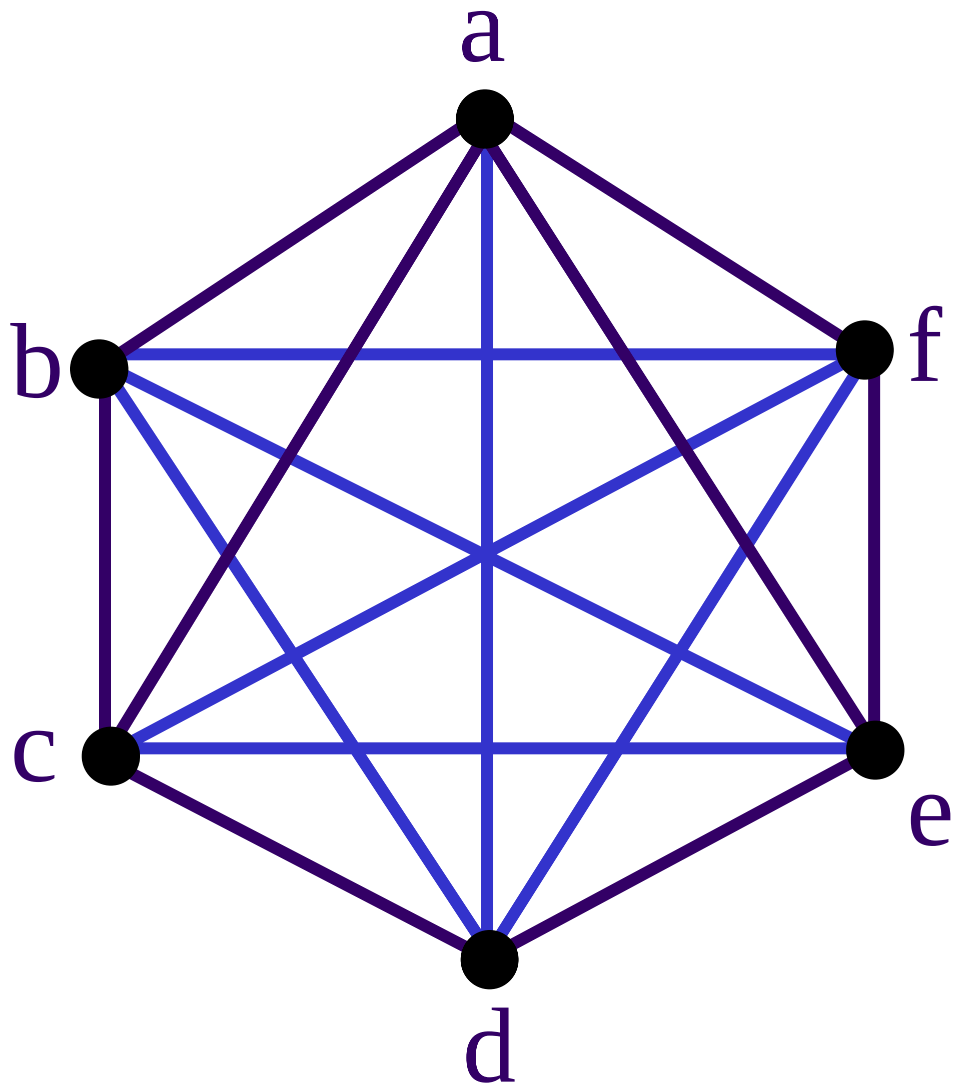
Ore定理的延伸

- 引理. 设G是有限图，u, v是G中不相邻的两个顶点，并且满足：$d(u)+d(v) \geq |G|$，则

  G是Hamilton图 $\Leftrightarrow$ $G \cup \{uv\}$是Hamilton图.
- 证明：类似于Ore定理的证明.

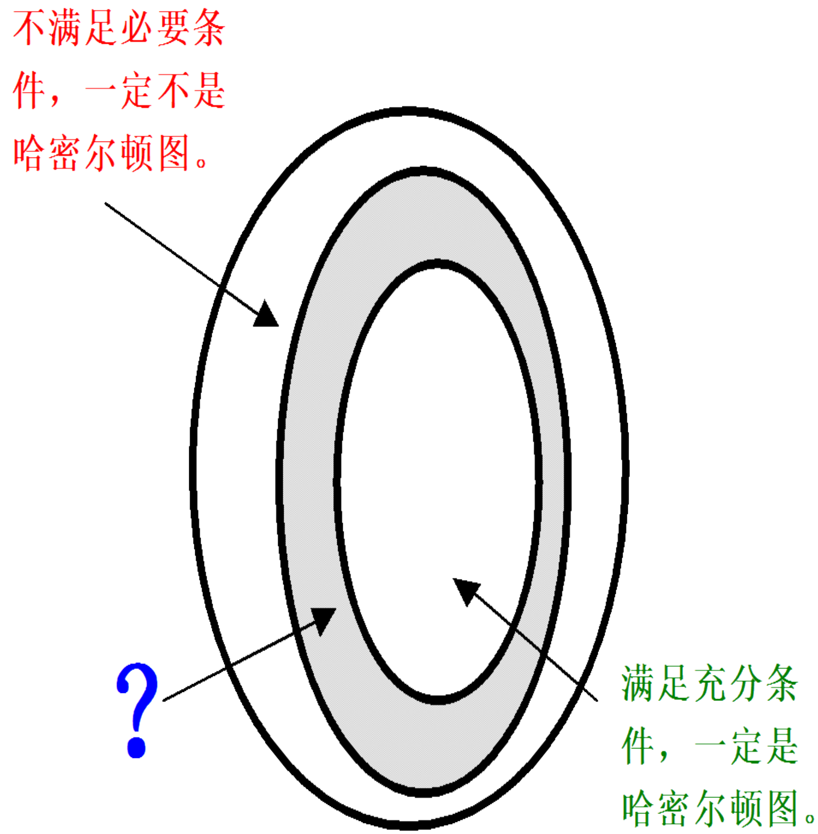
- G的闭合图, 记为C(G): 连接G中不相邻的并且其度之和不小于 $|G|$ 的点对, 直到没有这样的点对为止.
- 有限图G是Hamilton图充分必要其闭合图C(G)是Hamilton图.

闭合图(举例)



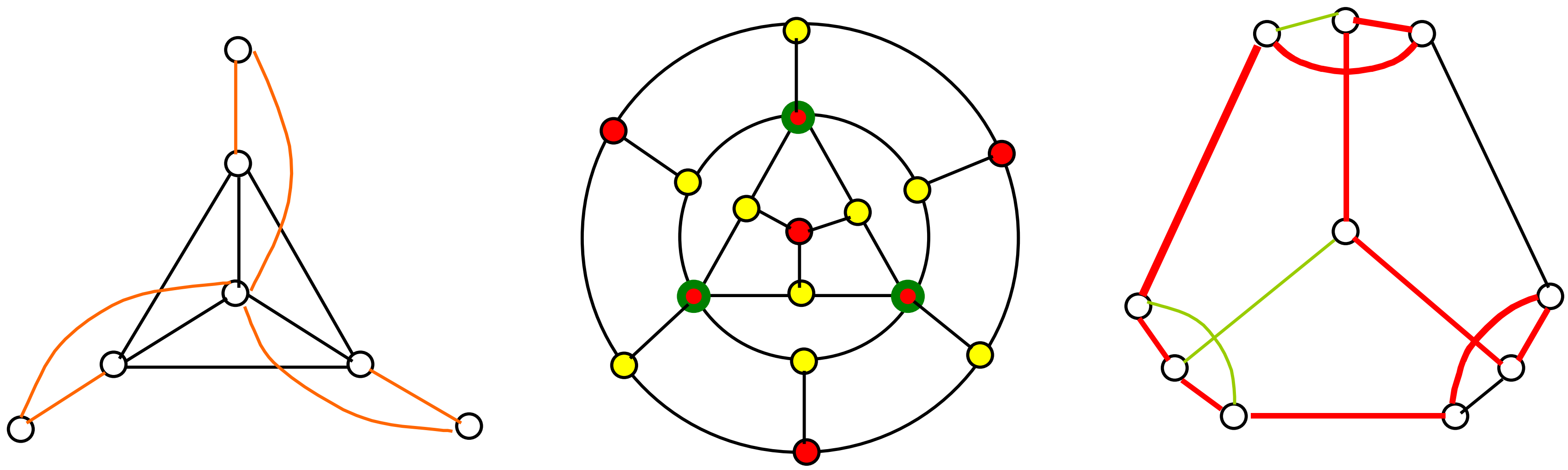
判定定理的盲区

- 从“常识”出发个案处理
  - 一顶点关联的边中恰有两条边在哈密尔顿回路中。
  - 哈密尔顿回路中不能含真子回路。
  - 利用对称性
  - 利用二部图特性
  - …



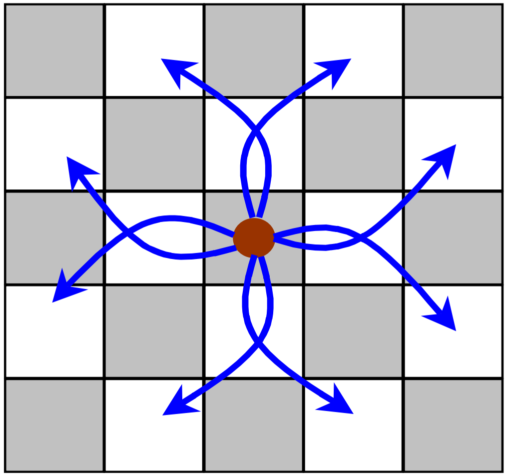
判定哈密尔顿图的例子

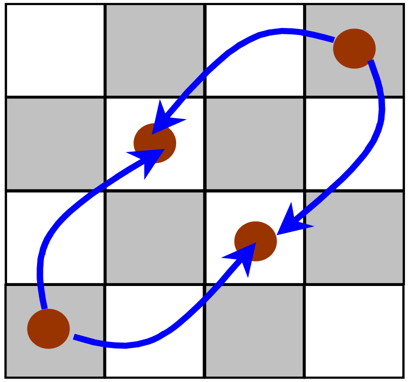
- 下列图中只有右图是哈密尔顿图。



棋盘上的哈密尔顿回路问题

- 在4×4或5×5的缩小了的国际象棋棋盘上，马(Knight)不可能从某一格开始，跳过每个格子一次，并返回起点。



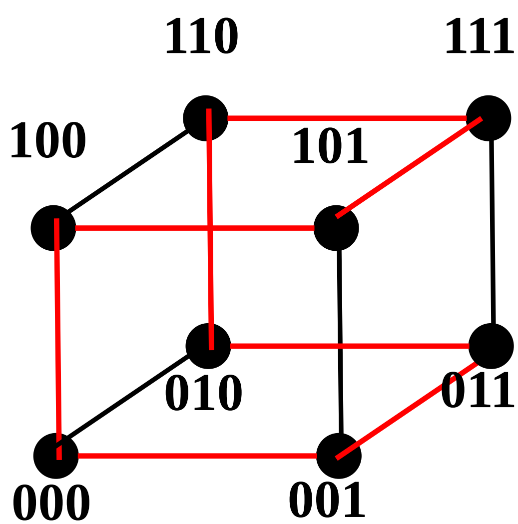


哈密尔顿图问题

- 基本问题
  - 判定哈密尔顿回路的存在性
  - 找出哈密尔顿回路/通路
- （在最坏情况下）时间复杂性为多项式的算法？

应用（格雷码）

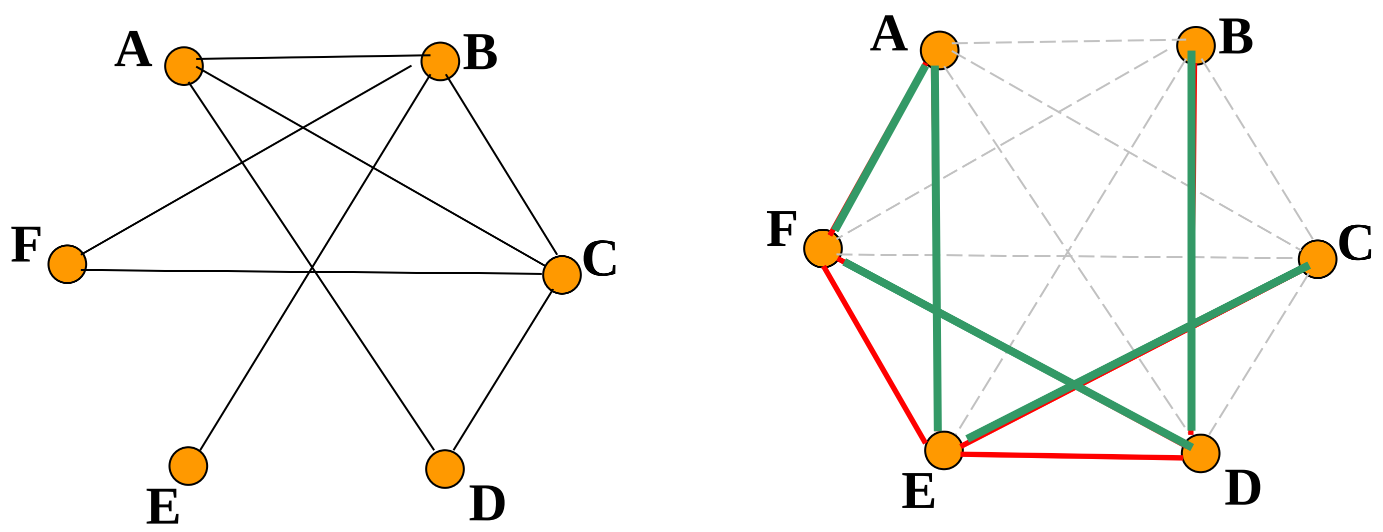
- 给定一个立方体图，求出哈密尔顿回路



Q_3

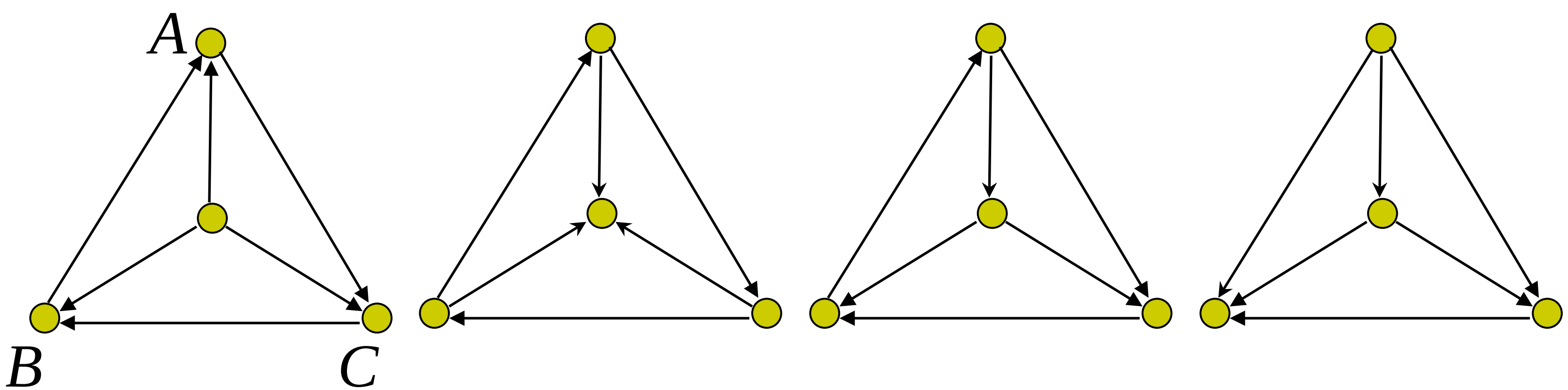
安排考试日程（哈密尔顿通路）

- 问题: 在6天里安排6门课 – A,B,C,D,E,F -的考试，每天考1门。假设每人选修课的情况有如下的4类：DCA，BCF，EB，AB。如何安排日程，使得没有人必须连续两天有考试?



竞赛图

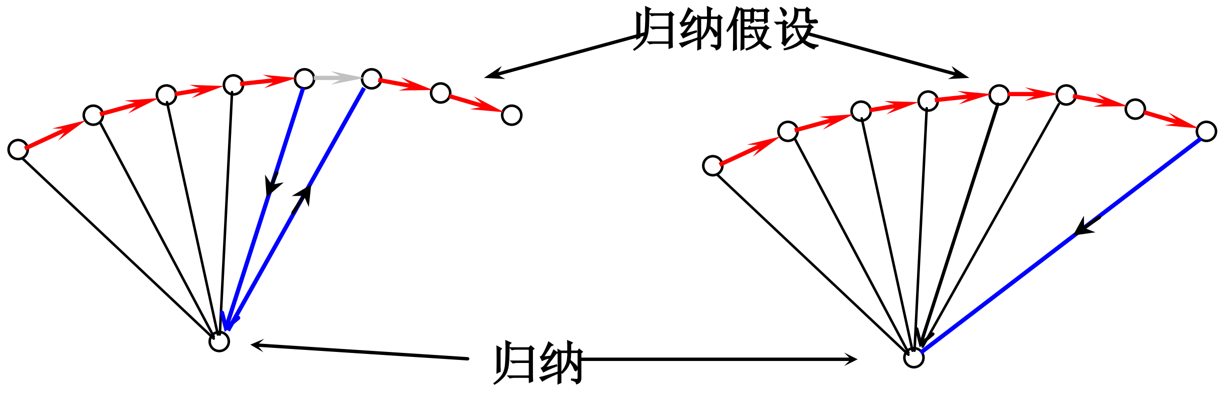
底图为K_4的竞赛图：



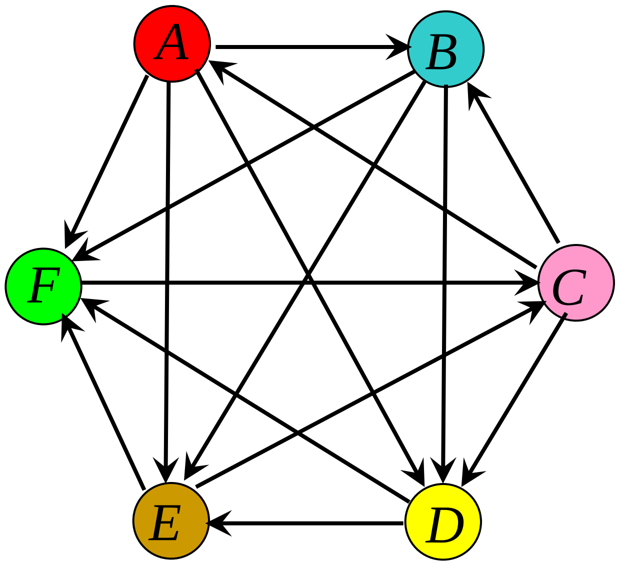
以上每个图可以看作4个选手参加的循环赛的一种结果

竞赛图与有向哈密尔顿通路

- 底图是完全图的有向图称为竞赛图。
- 利用归纳法可以证明竞赛图含有向哈密尔顿通路。



循环赛该如何排名次



按照在一条有向Hamilton通路(一定存在)上的顺序排名：

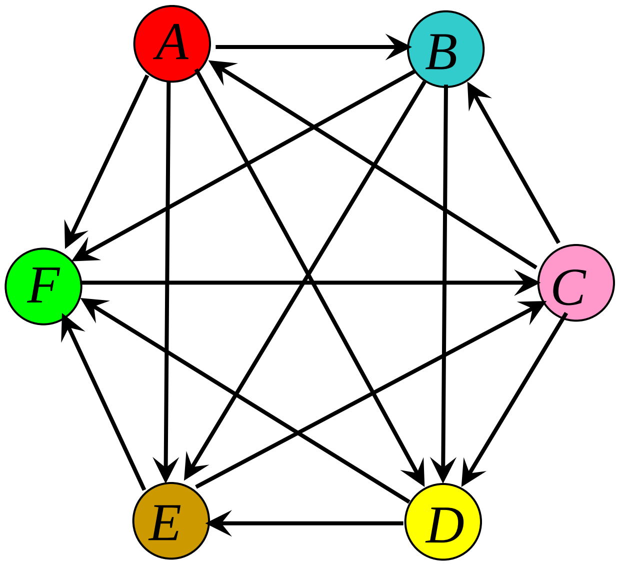
C A B D E F

问题：Hamilton通路路不是唯一的，例如：也可以得到另一排名

A B D E F C

C 从第一名变成了最后一名

循环赛该如何排名次

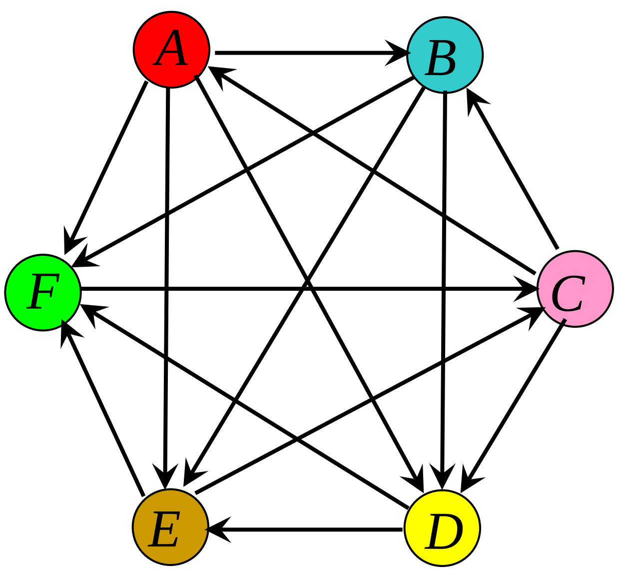


按照得胜的竞赛场次(得分)排名：

A(胜4) ***B*,*C***(胜3) ***D*, *E***(胜2) ***F***(胜1)

问题：很难说***B*,*C***并列第二名是否公平，毕竟***C***战胜的对手比***B***战胜的对手的总得分更高(9比5)。

循环赛该如何排名次



建立对应与每个对手得分的向量

$$s_1 = (a_1, b_2, c_3, d_4, e_5, f_6)$$

然后逐次求第k级的得分向量s_k, 每个选手的第k级得分是其战胜的对手在第k-1级得分的总和。

对应于左图所示的竞赛结果，得分向量：

s_1=(4,3,3,2,2,1)　s_2=(8,5,9,3,4,3)
s_3=(15,10,16,7,12,9) s_4=(38,28,32,21,25,16)
s_5=(90,62,87,41,48,32)　......

当问题竞赛图是强连通且至少有4个选手时，这个序列一定收敛于一个固定的排列，这可以作为排名：**A C B E D F**。

作业

- 教材（第六版）[9.5]
  - p.498: 40, 41, 42
  - p.499: 45, 46, 49, 63
- 教材（第七版）[10.5]
  - p.595: 40, 41, 42
  - p.596: 45, 46, 49, 63
- 补充
  - 考虑在7天安排7门课程的考试，使得同一位老师所任的两门课程考试不排在接连的两天中，试证明如果没有老师担任多于4门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的.