关系及其运算

离散数学一集合论

南京大学计算机科学与技术系

回顾

- 集合的基本概念
  - 集合及其描述
  - 集合相等、子集关系
  - 幂集、笛卡尔乘积
- 集合运算
  - 交并补、广义交、广义并
  - 集合恒等式
  - 集合相关命题的证明方式

提要

- 关系的定义
- 关系的表示
- 关系的运算
- 0-1矩阵运算
- 关系的性质

有序对（Ordered pair）

- (a, b)是集合$\{\{a\}, \{a, b\}\}$的简写【Kuratowski 1921】
- 次序的体现
  - $(x,y)=(u,v)$ iff $x=u$ 且 $y=v$

若$\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{u\},\{u,v\}\}$，则$\{x\}=\{u\}$或$\{x\}= \{u,v\}$, 因此$x=u$。

假设$y\neq v$

(1) 若$x=y$, 左边$=\{\{x\}\}$, 而$v\neq x$, $\therefore$右边$\neq\{\{x\}\}$;

(2) 若$x\neq y$,则必有$\{x,y\}= \{u,v\}$, 但y既非u,又非v, 矛盾。

笛卡尔乘积（Cartesian Product）

- 对任意集合A, B
  笛卡尔积 $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

- 例：$\{1,2,3\} \times \{a,b\} = \{(1, a), (2, a), (3, a),$
  $(1, b), (2, b), (3, b)\}$

- 若A，B是有限集合，$|A \times B| = |A| \times |B|$

例题

- $A=\{1,2\}$, $\rho(A)\times A=?$
- $|A|=m$, $|B|=n$, $|A\times B|=?$

笛卡尔乘积若干命题

- (1) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- (2) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow [(A = \emptyset) \vee (B = \emptyset) \vee (A = B)]$
- (3) 分配律：$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

（二元）关系的定义

- 若A, B是集合,从A到B的一个关系是$A \times B$的一个子集.
  - 集合, 可以是空集
  - 集合的元素是有序对

- 关系意味着什么？
  - 两类对象之间建立起来的联系！

从A到B的二元关系

- 笛卡尔乘积的子集
  - “从A到B的关系”R；$R\subseteq A\times B$
  - 若$A=B$： 称为“集合A上的（二元）关系”
- 例子
  - 常用的数学关系：不大于、整除、集合包含等
  - 网页链接、文章引用、相互认识

特殊的二元关系

- 集合A上的空关系$\varnothing$: 空关系即空集
- 全域关系 E_A: $E_A = \{ (x, y) \mid x, y \in A \}$
- 恒等关系 I_A : $I_A = \{(x, x) \mid x \in A \}$

函数是一种特殊的关系

- 函数 $f: A \to B$
- $R = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$是一个从$A$到$B$的一个关系

关系的表示

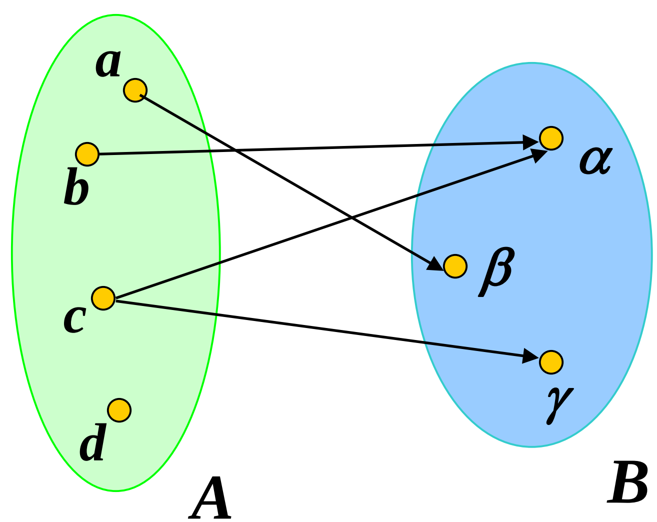
假设$A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ // 假设为有限集合

- 集合表示: $R_1=\{(a, \beta), (b, \alpha), (c, \alpha),(c, \gamma)\}$

0-1矩阵

$$\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\gamma} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

有向图



二元关系和有向图

关系 $R\subseteq A\times B$ ⟷ 有向图 (V_D, E_D)

*A*和*B*是集合

有序对集合

$(x,y)\in R$

若A=B, R中存在序列：(x_1,x_2), (x_2,x_3),…,(x_{n-1},x_n)

顶点集 $V_D = A\cup B$

有向边集E_D

从x到y有一条边

图D中存在从 x_1 到 x_n 的长度为 n-1的通路

关系的运算（1）

- 关系是集合, 所有的集合运算对关系均适用
  - 例子:
    - 自然数集合上: "$<$" $\cup$ "$=$" 等同于 "$\leq$"
    - 自然数集合上: "$\leq$" $\cap$ "$\geq$"等同于"$=$"
    - 自然数集合上: "$<$" $\cap$ "$>$"等同于$\varnothing$

关系的运算（2）

- 与定义域和值域有关的运算
  - $\mathrm{dom}\ R = \{x \mid \exists y\ (x,y)\in R\}$
  - $\mathrm{ran}\ R = \{y \mid \exists x\ (x,y)\in R\}$
  - $\mathrm{fld}\ R = \mathrm{dom}\ R \cup \mathrm{ran}\ R$
  - $R\uparrow A = \{(x,y) \mid x\in A \wedge xRy\} \subseteq R$
  - $R[A] = \{y \mid \exists x\ (x\in A \wedge (x,y)\in R)\} = \mathrm{ran}(R\uparrow A) \subseteq \mathrm{ran}R$

关系的运算（3）

- 逆运算
  - $R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y,x) \in \mathrm{R} \}$
    - 注意:如果R是从A到B的关系,则R^{-1}是从B到A的。
  - $(R^{-1})^{-1} = R$
  - 例子：$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$
    - $(x, y) \in (R_1 \cup R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in (R_1 \cup R_2)$
    - $\Leftrightarrow (y, x) \in R_1$ 或 $(y, x) \in R_2$
    - $\Leftrightarrow (x, y) \in R_1^{-1}$ 或 $(x, y) \in R_2^{-1}$

关系的运算（4）

- 关系的复合（合成, Composition）

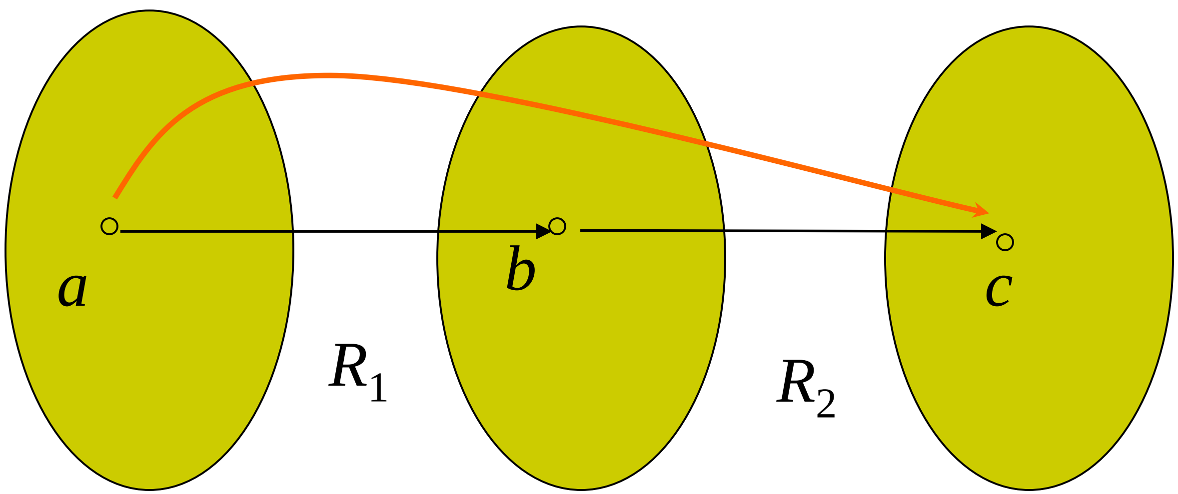
设 $R_1 \subseteq A\times B$, $R_2 \subseteq B\times C$,

R_1与R_2的复合（合成）, 记为 $R_2 \circ R_1$, 定义如下：

$R_2 \circ R_1 = \{(a, c) \in A\times C \mid \exists b \in B\ ((a, b) \in R_1 \land (b, c) \in R_2)\}$

复合关系的图示

- $(a, c) \in R_2 \circ R_1$ 当且仅当 $a \in A, c \in C$, 且存在$b \in B$, 使得$(a, b) \in R_1$, $(b, c) \in R_2$



关系的复合运算：举例

- 设$A=\{a, b, c, d\}$, R_1, R_2为A上的关系，其中：

  $R_1 = \{ (a, a), (a, b), (b, d)\}$

  $R_2 = \{(a, d), (b, c), (b, d), (c, b)\}$

  则：

  $R_2 \circ R_1 = \{(a, d), (a, c)\}$

  $R_1 \circ R_2 = \{(c, d)\}$

  $R_1^2 = \{(a, a), (a, b), (a, d)\}$

关系的复合运算的性质（1）

- 结合律
  - 给定$R_1 \subseteq A\times B$, $R_2 \subseteq B\times C$, $R_3 \subseteq C\times D$, 则：

$$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$$

- 证明左右两个集合相等.

关系的复合运算的性质（2）

- 复合关系的逆关系
  - 给定$R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$, 则：

$$(R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$$

- 同样，证明左右两个集合相等
  - $(x, y) \in (R_2 \circ R_1)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R_2 \circ R_1 \Leftrightarrow$

$$\exists t \in B \ \ ((y, t) \in R_1 \wedge (t, x) \in R_2) \Leftrightarrow$$

$$\exists t \in B \ ((t, y) \in R_1^{-1} \wedge (x, t) \in R_2^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$(x, y) \in R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$$

关系的复合运算的性质（3）

- 对集合并运算满足分配律
  - 给定$F\subseteq A\times B$, $G\subseteq B\times C$, $H\subseteq B\times C$, 则：

    $(G\cup H)\circ F = (G\circ F) \cup (H\circ F)$
- 对集合交运算：$(G \cap H)\circ F \subseteq (G\circ F) \cap (H\circ F)$
  - 注意：等号不成立。

    $A=\{a\}$, $B=\{s,t\}$, $C=\{b\}$;

    $F=\{(a,s), (a,t)\}$, $G=\{(s,b)\}$, $H=\{(t,b)\}$;

    $G\cap H=\varnothing$, $(G\circ F) \cap (H\circ F)=\{(a,b)\}$

关系的幂

- 定义(关系的幂):

  设$R \subseteq A \times A$，以下归纳定义关系R的n次幂：

$$R^0 = I_A, \quad R^{n+1} = R^n \circ R$$

- 一般来说，计算关系的高次幂R^n是比较复杂的，然而我们可以方便地通过关系矩阵M_R来计算M_{R^n}

关系的幂

关于关系的幂的定理：设R为集合A上的关系

- (1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$，$m, n \in \mathbb{N}$
- (2) $(R^m)^n = R^{mn}$，$m, n \in \mathbb{N}$
- (3) 若存在$S \in \mathbb{N}, T \in \mathbb{N}^+$使$R^S = R^{S+T}$，则：
  - ① $(\forall k \geq S)(R^k = R^{k+T})$
  - ② $(\forall k \geq S)(\forall n \in \mathbb{N})\left(R^k = R^{k+nT}\right)$
  - ③ $\left\{R^0, R^1, \cdots, R^{S+T-1}\right\} = \left\{R^0, R^1, \cdots, R^n, \cdots\right\}$
- (4) 若$|A| = n$, 则$(\exists s, t \in \mathbb{N})(R^s = R^t \wedge 0 \leq s < t \leq 2^{n^2})$

0-1 矩阵运算

- 令0-1矩阵$M_1=[a_{ij}]$,$M_2=[b_{ij}]$:
  - $C=M_1 \wedge M_2$: $c_{ij}=1$ iff. $a_{ij}=b_{ij}=1$
  - $C=M_1 \vee M_2$: $c_{ij}=1$ iff. $a_{ij}=1$或$b_{ij}=1$
- 令r×s矩阵$M_1=[a_{ij}]$；s×t矩阵$M_2=[b_{ij}]$:
  - $C=M_1 \otimes M_2$: $c_{ij}=1$ iff. $\exists k(a_{ik}=1 \wedge b_{kj}=1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

关系运算的矩阵法（1）

- 命题

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$$

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \otimes M_{R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \otimes M_{R_2}$$

证明：

令$R_1 : X \to Y ; R_2 : Y \to Z;$

令$\mathrm{A} = \mathrm{M}_{\mathrm{R}_1}$，$\mathrm{B} = \mathrm{M}_{\mathrm{R}_2}$，$\mathrm{C} = \mathrm{M}_{\mathrm{R2 \circ R1}}$，$\mathrm{D} = \mathrm{M}_{\mathrm{R}_1} \otimes \mathrm{M}_{\mathrm{R}_2}$有

$$c_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle x_i, z_j \rangle \in R_2 \circ R_1 \Leftrightarrow \exists y_k \in Y (\langle x_i, y_k \rangle \in R_1 \wedge \langle y_k, z_j \rangle \in R_2)$$

$$\Leftrightarrow a_{ik} = 1 \wedge b_{kj} = 1 \Leftrightarrow d_{ij} = 1$$

For $n \geq 2$, and R a relation on a finite set A, we have

$$M_{R^n} = M_R \otimes M_R \otimes \cdots \otimes M_R \quad (n \text{ factors})$$

关系的性质：自反性 reflexivity

- 集合A上的关系 R 是:
  - 自反的 reflexive：定义为：对所有的 $a\in A$, $(a,a)\in R$
  - 反自反的 irreflexive：定义为：对所有的$a\in A$, $(a,a)\notin R$

注意区分"非"与"反"

- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$
  - $\{(1,1), (1,3), (2,2), (2,1), (3,3)\}$ 是自反的
  - $\{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ 是反自反的
  - $\{(1,2), (2,2), (2,3), (3,1)\}$ 既不是自反的，也不是反自反的

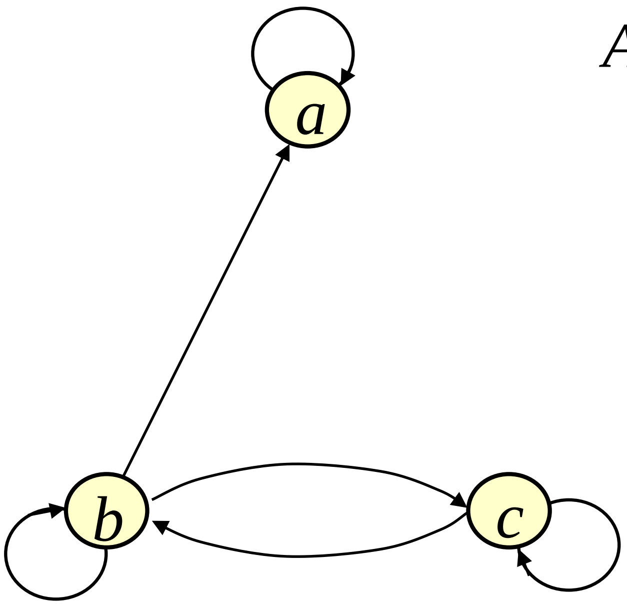
自反性与恒等关系

- R 是 A 上的自反关系 $\Leftrightarrow$ $I_A \subseteq R$,
  这里I_A是集合A上的恒等关系,即: $I_A=\{(a,a)|\ a\in A\ \}$

  直接根据定义证明:

  - $\Rightarrow$ 只需证明：对任意(a,b)，若$(a,b)\in I_{\mathrm{A}}$, 则$(a,b)\in R$
  - $\Leftarrow$ 只需证明：对任意的a, 若$a\in A$, 则$(a,a)\in R$

自反关系的有向图和0-1矩阵



$A=\{a,b,c\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

关系的性质：对称性 Symmetry

- 集合A上的关系R是:
  - 对称的 symmetric：定义为：若 $(a,b)\in R$, 则 $(b,a)\in R$
  - 反对称的 anti-~：定义为：若$(a,b)\in R$ 且$(b,a)\in R$，则$a=b$
- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$
  - $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,3)\}$ 是对称的
  - $\{(1,2),(2,3),(2,2),(3,1)\}$ 是反对称的

理解对称性

- 关系R满足对称性：对任意(a,b)，若 $(a,b)\in R$, 则 $(b,a)\in R$

  关系R是对称的 $\Leftrightarrow \forall <a,b> (<a,b> \in R \Rightarrow <b,a> \in R)$

- 注意：$\varnothing$是对称关系。

- 反对称并不是对称的否定:

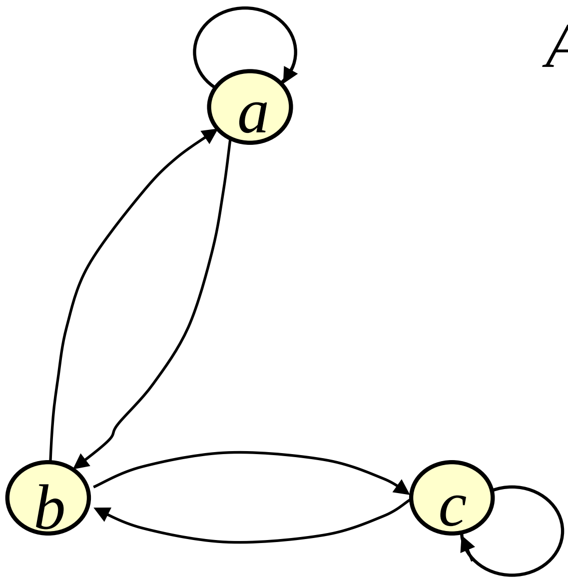
  (令：$A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$)

  - $\{(1,1),(2,2)\}$ 既是对称的，也是反对称的
  - $\varnothing$是对称关系，也是反对称关系。

对称性与逆关系

- R 是集合A上的对称关系 $\Leftrightarrow R^{-1}=R$
  - $\Rightarrow$ 证明一个集合等式 $R^{-1}=R$
    - 若$(a,b)\in R^{-1}$, 则$(b,a)\in R$, 由R的对称性可知$(a,b)\in R$, 因此：$R^{-1}\subseteq R$; 同理可得：$R\subseteq R^{-1}$;
  - $\Leftarrow$ 只需证明：对任意的(a,b) 若$(a,b)\in R$, 则$(b,a)\in R$

对称关系的有向图和0-1矩阵



$A=\{a,b,c\}$

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

关系的性质：传递性 transitivity

- 集合A上的关系R是
  - 传递的 transitive: 若 $(a,b)\in R$, $(b,c)\in R$, 则 $(a,c)\in R$
- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$
  - $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ 传递的
  - $\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ 是非传递的
  - $\{(1,3)\}$?
  - $\varnothing$?

关系R是传递关系 $\Leftrightarrow \forall(a,b,c)(((a,b)\in R\wedge(b,c)\in R)\Rightarrow(a,c)\in R)$

传递性与关系的乘幂

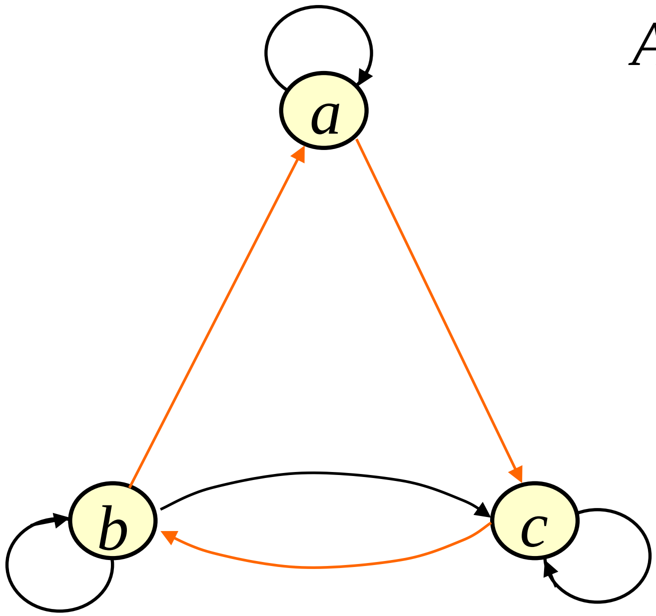
- 关系的复合(乘)运算满足结合律，可以用 R^n 表示

  $$R \circ R \circ \ldots \circ R \qquad (n\text{是正整数})$$

- 命题：$(a,b)\in R^n$ 当且仅当：存在$t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}\in A$, 满足：$(a,t_1),(t_1,t_2),\ldots,(t_{n-2},t_{n-1}),(t_{n-1},b)\in R$。
  - 对n>=1用数学归纳法：n=1, trivial. 奠基n=2,直接由关系复合的定义可得；归纳基于：$R^n=R^{n-1}\circ R$

- 集合A上的关系R是传递关系 $\Leftrightarrow R^2\subseteq R$
  - 必要性：$\Rightarrow$任取$(a,b)\in R^2$,根据上述命题以及R的传递性可得$(a,b)\in R$
  - 充分性：$\Leftarrow$ 若$(a,b)\in R$, $(b,c)\in R$, 则$(a,c)\in R^2$, 由$R^2\subseteq R$可得：$(a,c)\in R$，则 R是传递关系

传递关系的有向图和0-1矩阵



$A=\{a,b,c\}$

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

一些常用关系的性质

	$=$	$\leq$	$<$	$\mid$	$\equiv_3$	$\varnothing$	E
自反	✓	✓	✗	✓	✓	✗	✓
反自反	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✗
对称	✓	✗	✗	✗	✓	✓	✓
反对称	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗
传递	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

关系运算与性质的保持

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cup R_2$	✓	✓	✓	✗	✗
$R_1 \circ R_2$	✓	✗	✗	✗	✗

习题举例一

下列关系是否自反的、对称的、反对称的或可传递的？关系S为：$r_1 \leq |r_2|$ $(r_1, r_2 \in R)$时

解：s是自反的，因为对任意的$r \in R$，有$r \leq |r|$。

s不是对称的，如$-1 \leq |3|$，但$3 > |-1|$。

s不是反对称的，如$-3 \leq |2|$，$2 \leq |-3|$，但$-3 \neq 2$。

s不是可传递的，$100 \leq |-101|$，$-101 \leq |2|$，但$100 > |2|$

小结

- 关系：笛卡尔积的子集
- 关系的运算
  - 集合运算；复合运算；逆
- 0-1矩阵运算
- 关系的性质
  - reflexivity, ir-~; symmetry, anti-~; transitivity
  - 图特征；矩阵特征

作业

- 教材内容：[Rosen] 2.1.3、8.1 节 8.3节
- 课后习题：
  - 第六版
  - pp. 404-405（英文教材 pp. 528-529 ）: 25, 30, 37, 39, 43
  - pp. 41-417： 14, 32, 34

  - 第七版
  - pp.487-488: 27, 32, 39, 41, 45
  - pp.499-500: 14, 32, 34