布尔代数与格

离散数学一代数结构

南京大学计算机科学与技术系

回顾

- 偏序关系
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特殊元素
- 特殊元素的性质
- 偏序格

提要

- 布尔函数
- 代数系统与布尔代数
- 作为有补分配格的布尔代数
- 布尔代数与逻辑电路
- 卡诺图与逻辑电路的化简

一个逻辑电路设计的例子

- 举重比赛中三个裁判中两个或者两个以上判定为成功则该次成绩有效, 设计一个电子打分器, 输出一个结果: “成功”或”失败”。

布尔函数: $f(x,y,z)=1$ iff. x,y,z 至少有两个为1。

相应的布尔表达式:

$(x'\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y'\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge y\wedge z)$

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

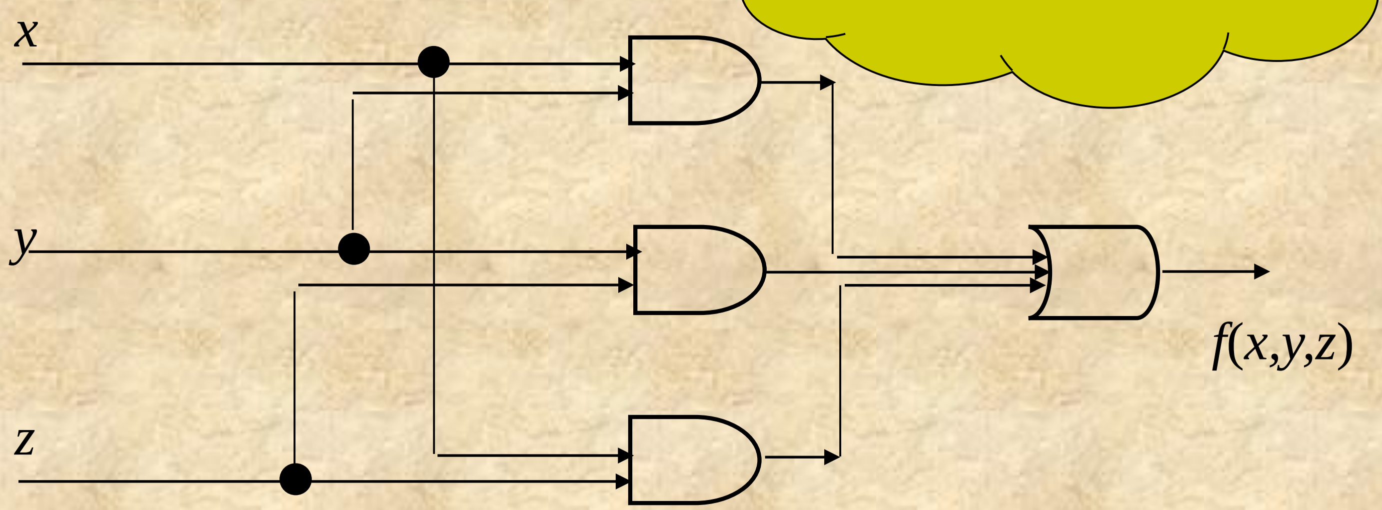
集合{0, 1}上的运算

- 令B={0, 1},取值范围为B的变元称为布尔变元，$x \in B$。
- 布尔和
  - 1+1=1, 1+0=1, 0+1=1, 0+0=0
- 布尔积
  - $1 \cdot 1=1$, $1 \cdot 0=0$, $0 \cdot 1=0$, $0 \cdot 0=0$
- 补
  - $\overline{0}=1$, $\overline{1}=0$

布尔函数

- $B^n=\{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in B, i=1, \ldots, n\}$,函数$f: B^n \to B$称为$n$度布尔函数
  - $f(x,y,z)=(y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$

总共有多少个不同的n度布尔函数？

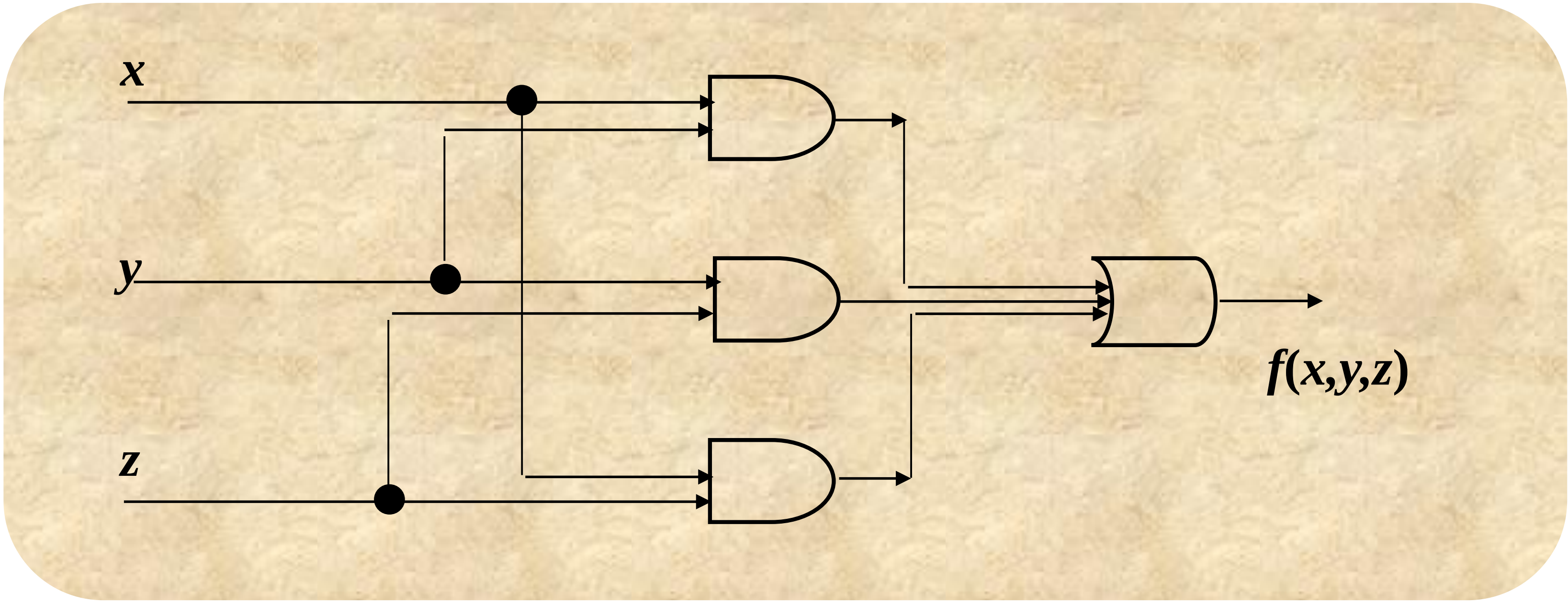


布尔函数上的运算

- 布尔和
  - $(f+g)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + g(x_1, \ldots, x_n)$
- 布尔积
  - $(f\,g)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, \ldots, x_n)$
- 补函数
  - $\bar{f}\,(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}$

布尔函数

- $f(x,y,z)=(y\wedge z)\vee(x\wedge z)\vee(x\wedge y)$



回顾：命题表达式的主析取范式

- 求 $(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$ 的主析取范式

$(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ （析取范式）

$$\neg p\wedge r\leftrightarrow\neg p\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$$
$$\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$$
$$q\wedge r\leftrightarrow(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$$

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

001 011 100 111

布尔恒等式（1）

等 式	名 称
$\overline{\overline{x}} = x$	双重补律
$x+x = x$ $x \cdot x = x$	幂等律
$x+0 = x$ $x \cdot 1 = x$	同一律
$x+1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$	支配律
$x+y = y+x$ $x \cdot y = y \cdot x$	交换律

布尔恒等式（2）

等 式	名 称
$x+(y+z)=(x+y)+z$ $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$	结合律
$x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$ $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$	分配律
$\overline{(x\cdot y)}=\overline{x}+\overline{y}$ $\overline{(x+y)}=\overline{x}\cdot\overline{y}$	德摩根律
$x+(x\cdot y)=x$ $x\cdot(x+y)=x$	吸收律
$x+\overline{x}=1$ $x\cdot\overline{x}=0$	补律

代数系统--运算的定义

- 函数f: $A^n \to A$称为A上的n元运算。
  - 举例，利用普通四则运算定义实数集上的二元运算“*”：

    $$x*y = x+y-xy$$

    则：$2*3 = -1$； $0.5*0.7 = 0.85$
- 对于A上的n元运算f:$A^n \to A$，若$B \subseteq A$，且$f(B) \subseteq B$，则称该运算f在集合B上封闭。
  - 集合A={1,2,3,…,10}, gcd封闭，lcm则否。

代数系统

- 一个代数系统
  - 一个非空集合（元素可以是任何对象）
  - 有一个或者若干个运算：×，&
  - 上述运算在上述集合上封闭
- 记法: (S, × ,&)
- 例子：
  - 整数集与普通加法：(Z, +)

布尔代数的抽象定义

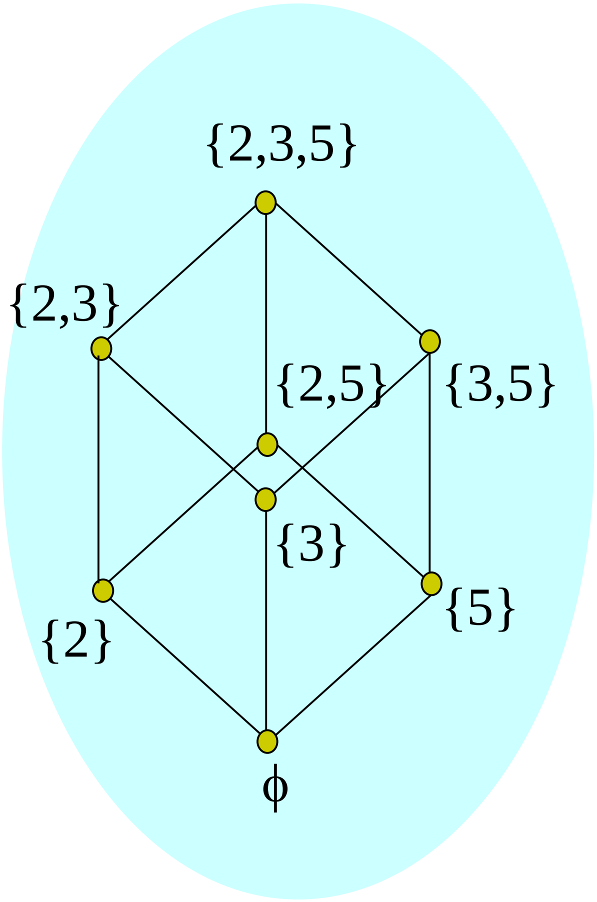
- 布尔代数：特殊的代数系统：
  - 包含特殊元素0和1的集合B
  - 集合B上的二元运算$\vee$和$\wedge$、一元运算~
  - $\forall x, y, z \in$ B，下列性质成立：

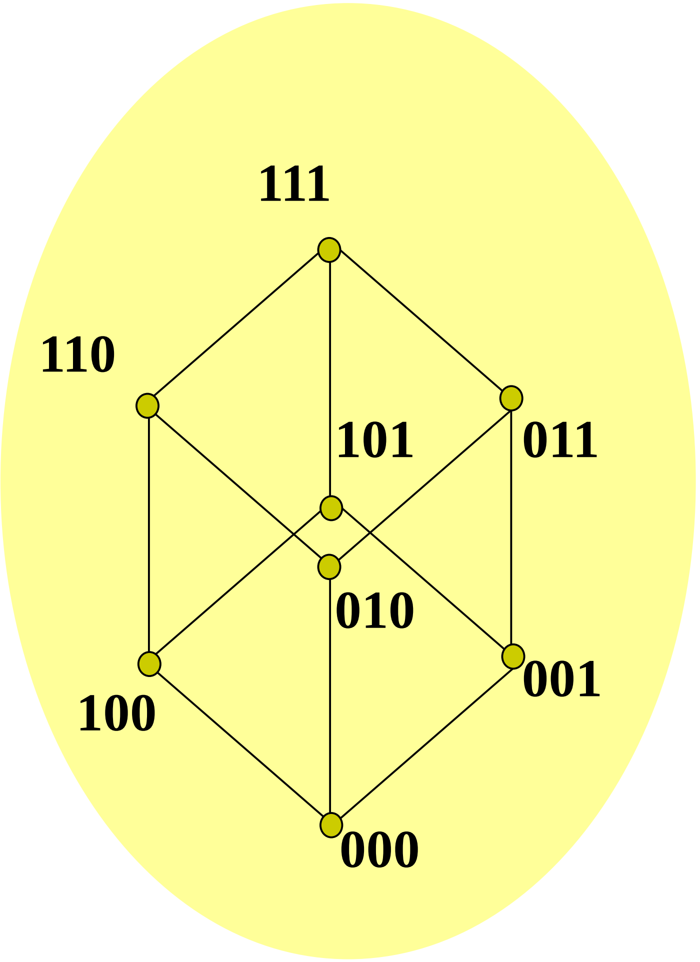
$x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$ $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$	结合律
$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$ $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$	分配律
$x\wedge y=y\wedge x$ $x\vee y=y\vee x$	交换律
$x\vee 0=x$ $x\wedge 1=x$	同一律
$x\vee\overline{x}=1$ $x\wedge\overline{x}=0$	补律

布尔代数举例

- $(\{0, 1\}, +, \cdot, \sim, 0, 1)$为布尔代数
- A的幂集也构成一个布尔代数$(\rho(A), \cap, \cup, \sim, \varnothing, A)$
- $(B^n, \wedge, \vee, \sim, 0\ldots0, 1\ldots1)$构成布尔代数,其中:
  - $x = (a_1, \ldots, a_n)$, $y = (b_1, \ldots, b_n)$, $a_i \in B$, $b_i \in B$
    - $x \wedge y = (c_1, \ldots, c_n)$, where $c_i = a_i + b_i$
    - $x \vee y = (d_1, \ldots, d_n)$, where $d_i = a_i \cdot b_i$
    - $\overline{x} = (e_1, \ldots, e_n)$, where $e_i = \overline{a_i}$

$\rho(\{2,3,5\})$和B^3





布尔代数举例

- n度布尔函数全体也构成一个布尔代数
  - $\{f : B^n \to B\}$
  - 布尔和、布尔积、补函数
  - 全取0的函数、全取1的函数

布尔代数是一种特殊的格
（有补分配格）

偏序格

- 定义：

lub : “least upper bound”

glb : “greatest lower bound

- (S, ≼)是偏序集
- $\forall x,y \in S$, 存在$\{x,y\}$的最小上界lub$\{x,y\}$
- $\forall x,y \in S$, 存在$\{x,y\}$的最大下界glb$\{x,y\}$

- **则称S关于≼构成格。**

在格中定义运算

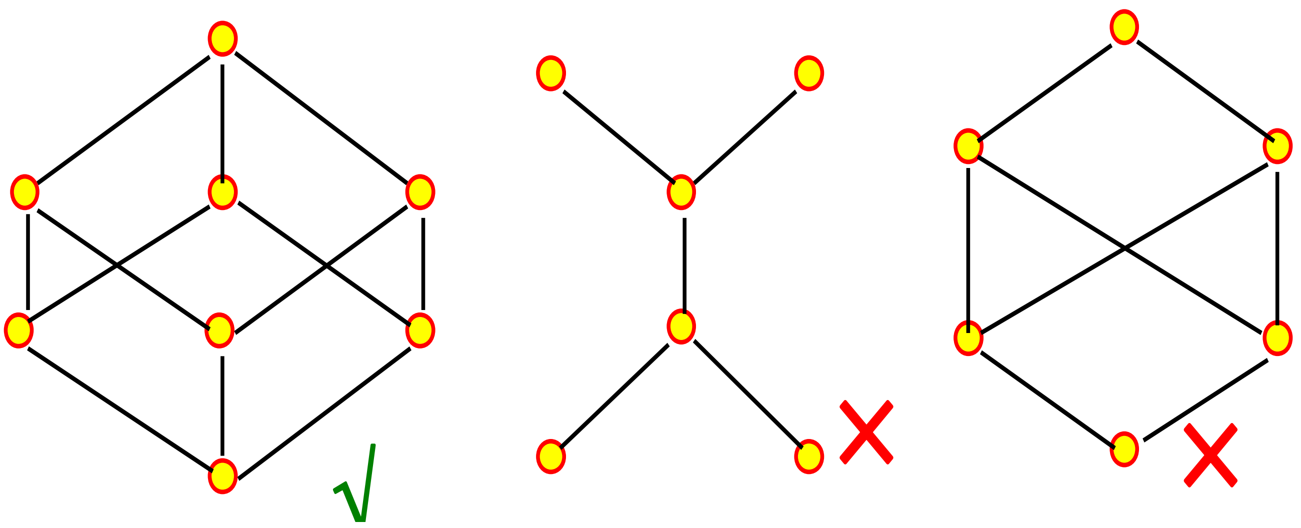
- 在格中可以定义如下的运算：
  - "**保联**"：$\forall x,y \in S$, $x \vee y = \text{lub}\{x,y\}$
  - "**保交**"：$\forall x,y \in S$, $x \wedge y = \text{glb}\{x,y\}$

偏序格的例子

- $(\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}, \mid)$
  - $x \wedge y = \gcd(x,y)$, $x \vee y = \mathrm{lcm}(x,y)$
- $(\rho(B), \subseteq)$
  - $x \wedge y = x \cap y$, $x \vee y = x \cup y$
- (整数集，$\leq$)
  - $x \wedge y = \min\{x,y\}$, $x \vee y = \max\{x,y\}$

格与哈斯图

- 右边两个哈斯图所表示的偏序集不是格



格的基本关系式

- 根据“最小上界”和“最大下界”的定义，有如下关系式：
  - $a \preccurlyeq a \vee b$, $b \preccurlyeq a \vee b$
  - 如果$a \preccurlyeq c$, $b \preccurlyeq c$, 则$a \vee b \preccurlyeq c$
  - $a \wedge b \preccurlyeq a$, $a \wedge b \preccurlyeq b$
  - 如果$c \preccurlyeq a$, $c \preccurlyeq b$, 则$c \preccurlyeq a \wedge b$

关于格的对偶命题

- 对偶命题的例子(a,b是格中元素)
  - $a \wedge b \preccurlyeq a$和$a \vee b \succcurlyeq a$互为对偶命题
- 对偶命题构成规律
  - 格元素名不变
  - $\preccurlyeq$与$\succcurlyeq$，$\wedge$与$\vee$***全部***互换。
- 格的对偶原理：
  - 如果命题P对**一切**格为真，则P的对偶命题P^*也对**一切**格为真

格的性质

- 若(S, ≼)是格，则：$\forall a,b \in S$:

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

  - **采用循环证明：**
  - $a \preccurlyeq b \ \Rightarrow \ a \wedge b = a$：由下界定义：$a \wedge b \preccurlyeq a$，而$a \preccurlyeq a$，$a \preccurlyeq b$，由最大下界定义：$a \preccurlyeq a \wedge b$，$\therefore a \wedge b = a$
  - $a \wedge b = a \ \Rightarrow \ a \vee b = b$：由上界定义：$b \preccurlyeq a \vee b$，而由$a \wedge b \preccurlyeq b$和$a \wedge b = a$可知：$a \preccurlyeq b$，又$b \preccurlyeq b$，由最小上界定义可知：$a \vee b \preccurlyeq b$，$\therefore a \vee b = b$
  - $a \vee b = b \Rightarrow a \preccurlyeq b$: $a \preccurlyeq a \vee b$，而$a \vee b = b$，$\therefore a \preccurlyeq b$

格导出的代数系统

- 若(S, $\preccurlyeq$)是格，则〈S, ∧, ∨〉称为格S导出的代数系统。
- 〈S, ∧, ∨〉满足下列性质：

  (证明利用偏序的反对称性 以及 格命题的对偶原理)

  - ***交换律***：$a\wedge b=b\wedge a$, $a\vee b=b\vee a$
    - ∵$a\wedge b\preccurlyeq b$, $a\wedge b\preccurlyeq a$, ∴$a\wedge b\preccurlyeq b\wedge a$, 同理可得$b\wedge a\preccurlyeq a\wedge b$
  - ***结合律***：$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$, $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$
    - 注意：$(a\wedge b)\wedge c\preccurlyeq a\wedge b\preccurlyeq a$, $(a\wedge b)\wedge c\preccurlyeq a\wedge b\preccurlyeq b$，当然还有$(a\wedge b)\wedge c\preccurlyeq c$
  - ***等幂律***：$a\wedge a=a$, $a\vee a=a$
    - 由偏序的自反性：$a\preccurlyeq a$且$a\preccurlyeq a$, ∴$a\preccurlyeq a\wedge a$, 当然还有$a\wedge a\preccurlyeq a$
  - ***吸收律***：$a\wedge(a\vee b)=a$, $a\vee(a\wedge b)=a$
    - 由$a\preccurlyeq a$和$a\preccurlyeq a\vee b$可得：$a\preccurlyeq a\wedge(a\vee b)$，当然还有$a\wedge(a\vee b)\preccurlyeq a$

代数格

- 定义：设 $\langle L, *, \circ \rangle$ 是代数系统，其中$*, \circ$是二元运算，且满足**交换律、结合律、吸收律**，则称 $\langle L, *, \circ \rangle$ 是**(代数)格**。
- 代数格满足**等幂律**：即$\forall a \in L$, $a*a=a$, $a\circ a=a$
  - 根据吸收律：$a=(a\circ(a*a))=(a*(a\circ a))$, $\therefore a*a=a*(a\circ(a*a))=a$, $a\circ a=a\circ(a*(a\circ a))=a$
- $a\circ b=b$ 当且仅当 $a*b=a$
  - $\Rightarrow$ 若$a\circ b=b$, 则$a*b=a*(a\circ b)=a$
  - $\Leftarrow$ 若$a*b=a$, 则$a\circ b=(a*b)\circ b=b\circ(b*a)=b$

在代数格中定义偏序关系

- 设〈L, *, ∘〉是代数格，定义L上的关系R如下：

$$\forall a,b\in L,\ aRb \Leftrightarrow a\circ b=b$$

则R是偏序。

- 自反性：注意∘满足等幂律
- 反对称性：若aRb, bRa, 则$a\circ b=b$, $b\circ a=a$, 但$a\circ b=b\circ a$, $\therefore a=b$
- 传递性：若aRb, bRc, 则$a\circ b=b$, $b\circ c=c$, 则 $a\circ c=a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c=b\circ c=c$, 即aRc

$a \circ b$即$\{a,b\}$的最小上界

- $a \circ b$即$\{a,b\}$的上界
  - $\because a\circ(a\circ b)=(a\circ a)\circ b=a\circ b$, $\therefore aR(a\circ b)$
  - $\because b\circ(a\circ b)=(a\circ b)\circ b=a\circ(b\circ b)=a\circ b$ $\therefore bR(a\circ b)$
- $a \circ b$即$\{a,b\}$的最小上界
  - 任给$c\in L$, 若c也是$\{a,b\}$的上界， 则$a\circ c=c$, $b\circ c=c$
  - 于是：$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)=a\circ c=c$，即 $(a\circ b)\ R\ c$

a*b即{a,b}的最大下界

注意：$a \circ b=b$ 当且仅当 $a*b=a$，因此aRb $\Leftrightarrow$ $a*b=a$

- $a*b$即$\{a,b\}$的下界
  - $\because (a*b)*a=a*(a*b)=(a*a)*b=a*b$， $\therefore (a*b)Ra$
  - $\because (a*b)*b=a*(b*b)=a*b$， $\therefore (a*b)Rb$
- $a*b$即$\{a,b\}$的最大下界
  - 任给 $c \in L$, 若c也是$\{a,b\}$的下界，则 $c*a=c$, $c*b=c$
  - 于是：$c*(a*b)=(c*a)*b=c*b=c$, 即c R (a*b)

偏序格与代数格的等价

- 〈L,R〉即偏序格
- *和∘即相应的“保交”和“保联”运算
- 代数格〈L, *, ∘〉即相应的导出代数系统。

布尔代数VS格

- 布尔代数是代数格、也是（偏序）格
  - 结合律、交换律、吸收律
  - 最小上界$x \vee y$，最大下界$x \wedge y$
- 布尔代数是有补的分配格
  - 分配律、同一律、补律

格中的原子

- 定义：设L是格，L中有最小元(全下界)0，给定元素$a \neq 0$, 若$\forall b \in L$, 有：

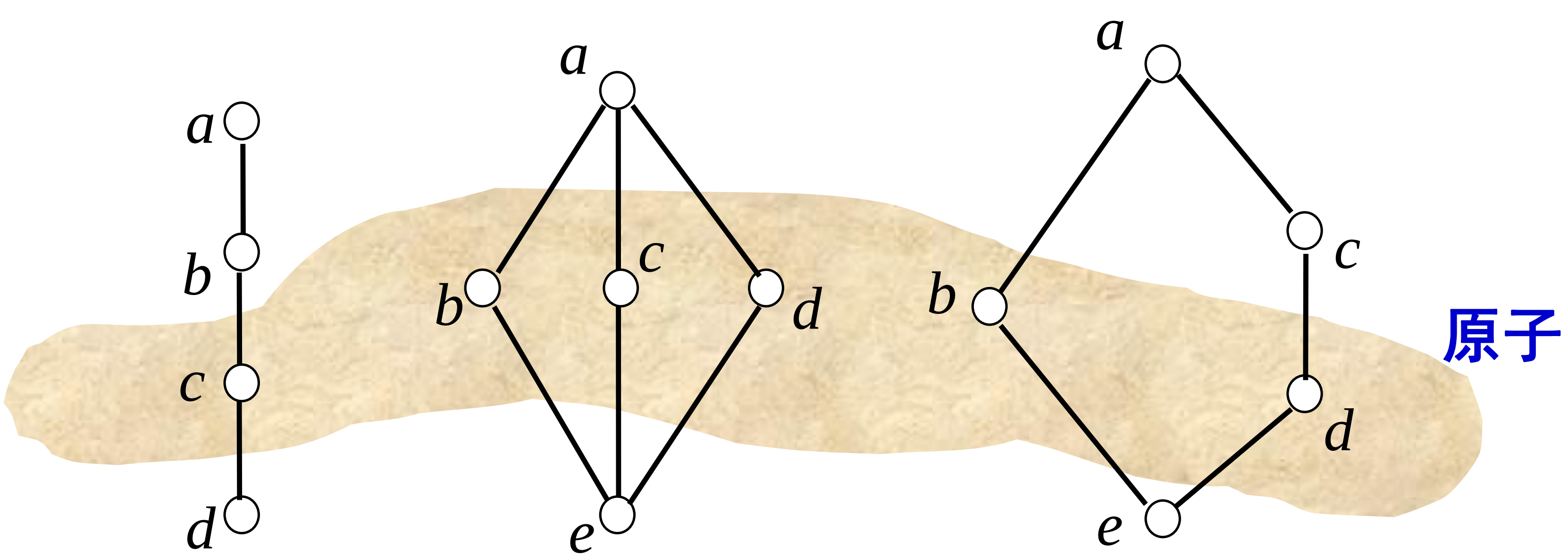
  $$0 \prec b \preccurlyeq a \Rightarrow b=a$$

  则称a是L中的原子

  （原子是覆盖最小元的那些元素。）

- 设a, b是格L中的原子，若$a \neq b$, 则$a \wedge b=0$
  - 假设$a \wedge b \neq 0$, 注意：$a \wedge b \preccurlyeq a$且$a \wedge b \preccurlyeq b$，由原子的定义：$a \wedge b=a$, $a \wedge b=b$, $\therefore a=b$, 矛盾。

格中的原子



(1)　(2)　(3)

有限布尔代数的表示定理

- 任一有限布尔代数B 同构于 B中所有的原子构成的集合A的幂集代数系统P(A)。

  即$(B, \wedge, \vee, ', 0, 1) \cong (P(A), \cap, \cup, \sim, \varnothing, A)$

有限布尔代数基数是2的整数次幂

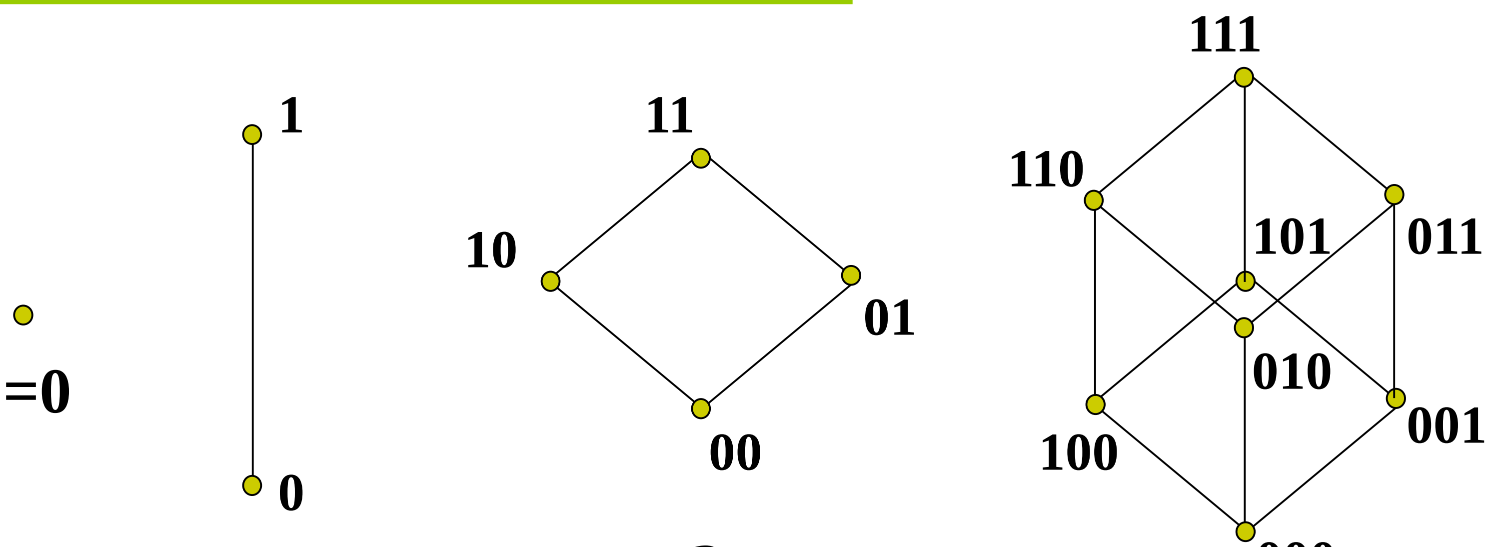
- 任何有限布尔代数的基数为2^n, n是自然数。
  - 设B是有限代数系统，A是B中所有原子的集合。

  则：$B \cong P(A)$, $\therefore |B|=|P(A)|=2^{|A|}$

- 等势的有限布尔代数均同构

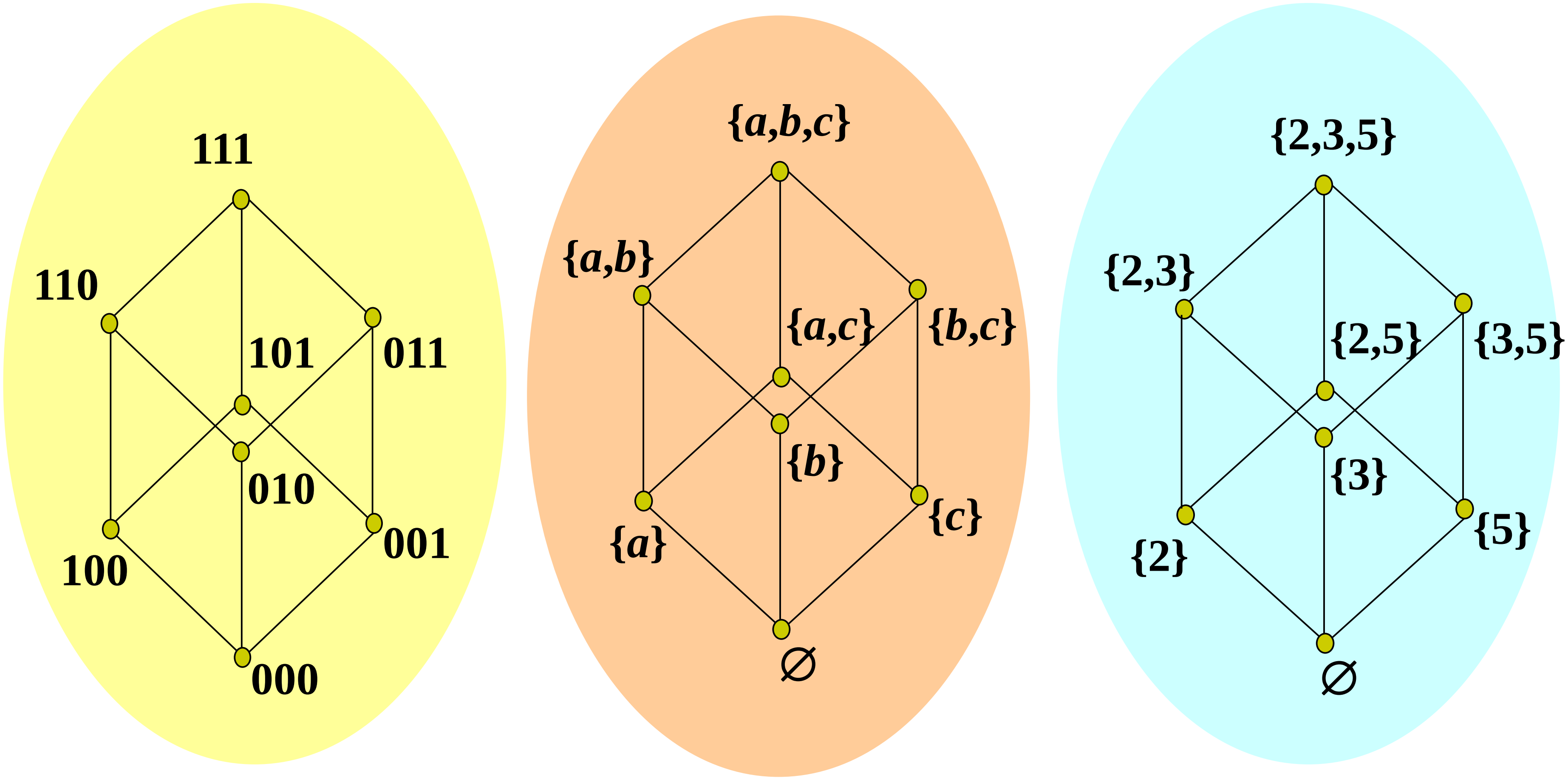
最小的几个有限布尔代数

与含n个元素的集合的幂集代数系统同构的布尔代数记为B_n。



n=0 n=1 n=2 n=3

Hasse Diagrams of Isomorphic Lattices



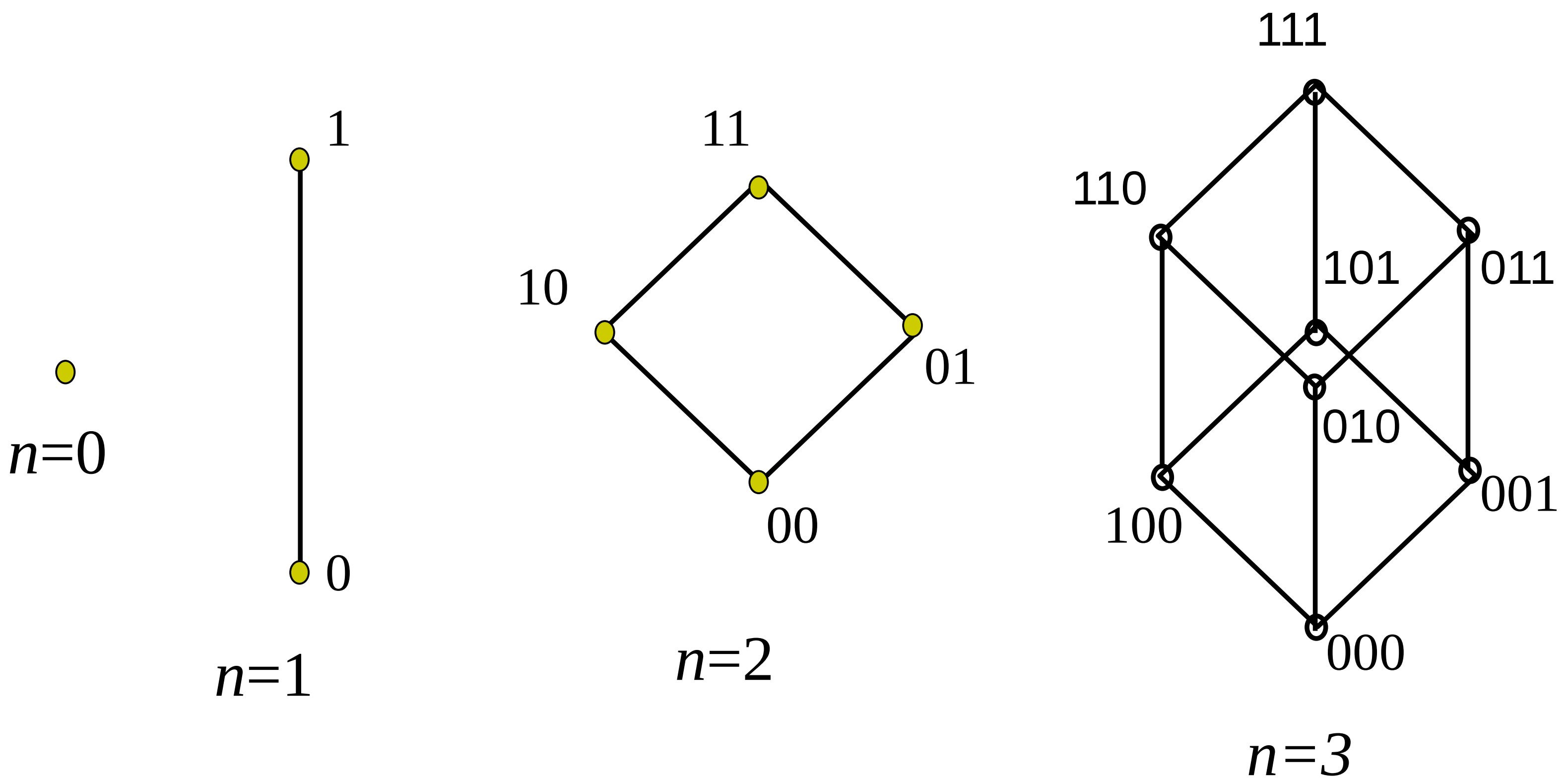
B_n as Product of n B's

- B_1, $(\{0,1\}, \wedge, \vee, 1, 0, ')$, is denoted as B.
- For any $n \geq 1$, B_n is the product $B \times B \times \ldots \times B$ of B, n factors, where $B \times B \times \ldots \times B$ is given the product partial order.

Product partial order:

$x \leq y$ if and only if $x_k \leq y_k$ for all k.

Hasse Diagrams of B_n



布尔代数与数字逻辑电路设计

- B_n的每一个元素可以看做一个长度为n的二进字符串。
- 一个有n个输入、一个输出的逻辑电路对应于一个用含n个布尔变量的布尔代数表达式定义的布尔函数 f: $B_1^n \to B_1$, 也可以看做 $f: B_n \to B_1$ 。
- 在确定表示该函数的布尔表达式后，很容易用门电路元件搭出所需要的逻辑电路。
- 因此，关键问题是如何确定所需的布尔表达式，并将其化为最简形式。

一个逻辑电路设计的例子

- 举重比赛中三个裁判中两个或者两个以上判定为成功则该次成绩有效, 设计一个电子打分器, 输出一个结果: "成功"或"失败"。

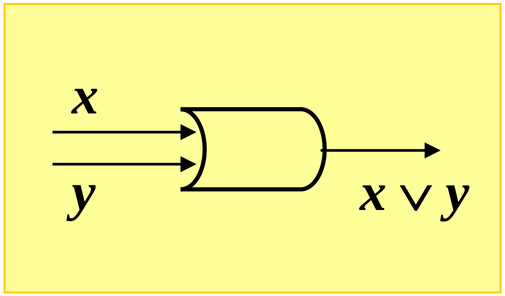
布尔函数: $f(x,y,z)=1$ **iff.** x,y,z **至少有两个为1。**

相应的布尔表达式:

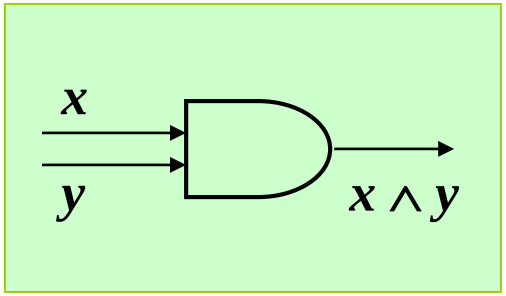
$(x'\wedge y\wedge z)\vee (x\wedge y'\wedge z)\vee$
$(x\wedge y\wedge z')\vee (x\wedge y\wedge z)$

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

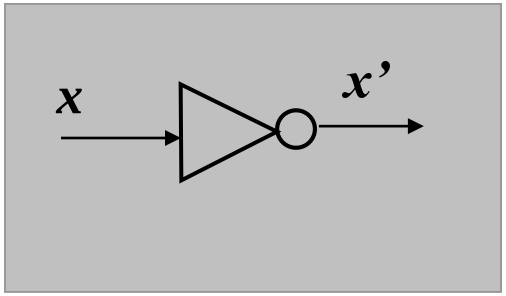
基本逻辑元件



“或”门



“与”门



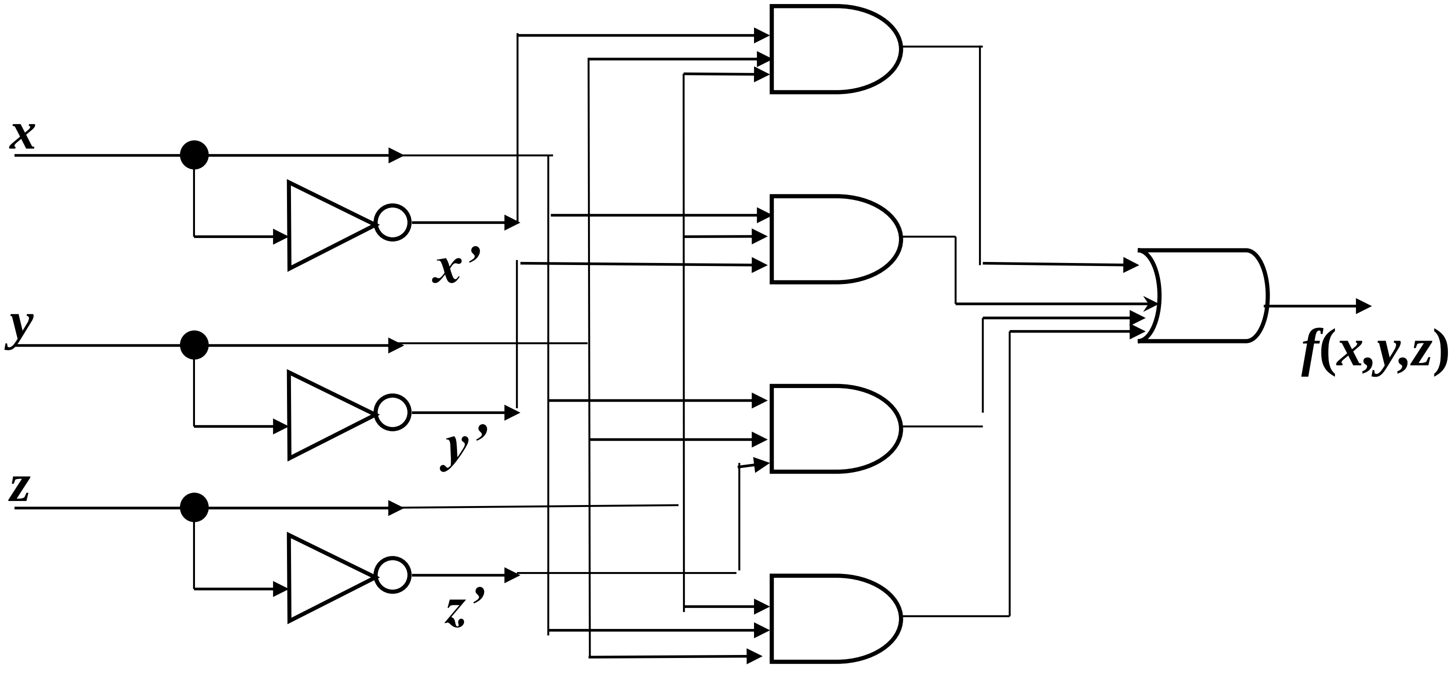
反相器

电路设计

相应的布尔表达式:

$(x'\wedge y\wedge z)\vee (x\wedge y'\wedge z)\vee (x\wedge y\wedge z')\vee (x\wedge y\wedge z)$

太复杂!



用卡诺图化简布尔表达式

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

	$y'z'$	$y'z$	yz	yz'
x'	0	0	1	0
x	0	1	1	1

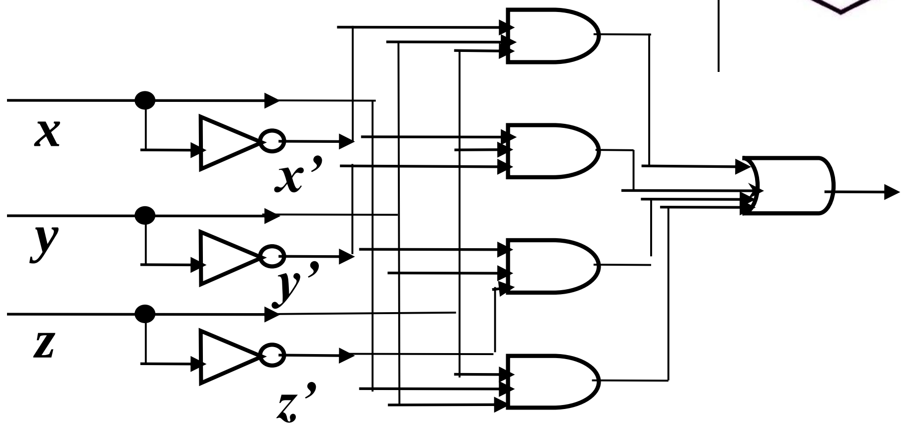
简化后的表达式:

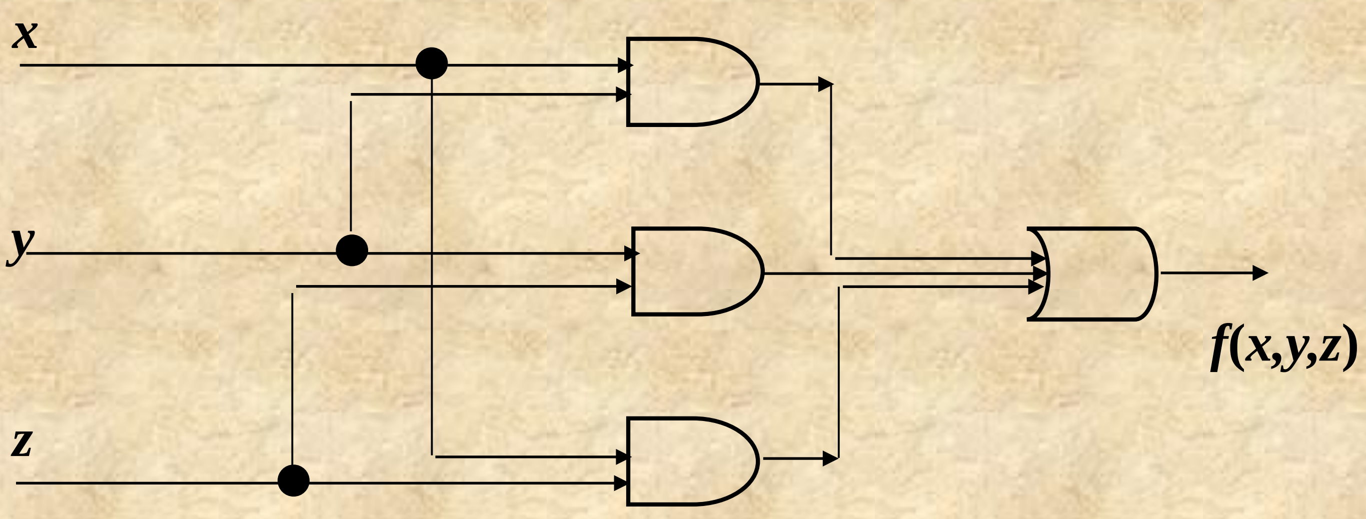
$(y\wedge z)\vee (x\wedge z)\vee (x\wedge y)$

改进后的电路设计

相应的布尔表达式:

$(y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$





作业

- 教材[11.1, 11.2]
  - p.593（第六版） p.696（第七版）: 9, 10, 24, 25, 27, 29
  - p.596（第六版）p.698 （第七版）: 3(a, b), 12(c, d)
- 设 (B, $\wedge$, $\vee$)是代数格. $\forall$ $x, y \in$B, 定义 $x \preccurlyeq y$ iff $x \wedge y = x$. 证明这个关系($\preccurlyeq$)满足自反性、反对称性和传递性。

卡诺图（Karnaugh map）n=2

$f\colon B_2 \to B$

基本位置

00	01
10	11

	y'	y
x'	$x' \wedge y'$	$x' \wedge y$
x	$x \wedge y'$	$x \wedge y$

$f(x,y)=(x' \wedge y') \vee (x' \wedge y)$

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

我们知道：

$f(x, y)=x'$！

	y'	y
x'	1	1
x	0	0

用卡诺图化简布尔表达式

$f: B_2 \to B$

基本位置

00	01
10	11

	y'	y
x'	$x' \wedge y'$	$x' \wedge y$
x	$x \wedge y'$	$x \wedge y$

$f(x,y)=(x' \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee (x \wedge y')$

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$f(x,y) = x' \vee y'$

	y'	y
x'	1	1
x	1	0

卡诺图 n=3

	00	01	11	10
0	0 0 0	0 0 1	0 1 1	0 1 0
1	1 0 0	1 0 1	1 1 1	1 1 0

	y'		y	
	$y'\wedge z'$	$y'\wedge z$	$y\wedge z$	$y\wedge z'$
x'	$x'\wedge y'\wedge z'$	$x'\wedge y'\wedge z$	$x'\wedge y\wedge z$	$x'\wedge y\wedge z'$
x	$x'\wedge y'\wedge z'$	$x\wedge y'\wedge z$	$x\wedge y\wedge z$	$x\wedge y\wedge z'$
	z'	z		

化简三个变量的布尔表达式

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

	$y'z'$	$y'z$	yz	yz'
x'	1	0	0	1
x	1	0	1	1

z'

表达式:

$(x'\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')\vee$
$(x\wedge y'\wedge z')\vee(x\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge y\wedge z)$

So, $z'\vee(x\wedge y)$

理解布尔代数的性质

- 结合律、交换律、分配律、同一律、补律
  - 蕴含：支配律、吸收律、幂等律、双重补律、德摩根律
- 证明支配律： $\forall x \in B,\ x \vee 1=1,\ \ x \wedge 0=0$
  - $x \vee 1= 1 \wedge (x \vee 1)= (x \vee \bar{x}) \wedge (x \vee 1)= x \vee (\bar{x} \wedge 1)= x \vee \bar{x}=1$
  - $x \wedge 0= 0 \vee (x \wedge 0) =(x \wedge \bar{x}) \vee (x \wedge 0)= x \wedge (\bar{x} \vee 0)= x \wedge \bar{x}=0$

理解布尔代数的性质

- 证明吸收律
  - $x \vee (x \wedge y) = (x \wedge 1) \vee (x \wedge y) = x \wedge (1 \vee y) = x \wedge 1 = x$
  - $x \wedge (x \vee y) = (x \vee 0) \wedge (x \vee y) = x \vee (0 \wedge y) = x \vee 0 = x$
- 证明幂等律（方法一）
  - $x \vee (x \wedge x) = x$ (应用吸收律）
  - $x \wedge x = x \wedge (x \vee (x \wedge x)) = x$ (应用吸收律）
- 证明幂等律（方法二）
  - $x \wedge x = x \wedge (x \vee 0) = x$ (应用同一律、吸收律）

理解布尔代数的性质

- **引理**：$\forall x, y, z \in B$, 若 $x \wedge z = y \wedge z$ 且 $x \vee z = y \vee z$，则 $x = y$
  - $x = x \vee (x \wedge z) = x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ //吸收律/分配律
  - $y = y \vee (y \wedge z) = y \vee (x \wedge z) = (y \vee x) \wedge (y \vee z)$
- **证明双重补律**
  - $x \vee \bar{x} = 1 = \bar{\bar{x}} \vee \bar{x}$
  - $x \wedge \bar{x} = 0 = \bar{\bar{x}} \wedge \bar{x}$
  - $x = \bar{\bar{x}}$

理解布尔代数的性质

- **证明德摩根律：** $\forall\, x, y \in B,\ \overline{(x \wedge y)} = \overline{x} \vee \overline{y};$
  - 根据补元的唯一性，只需证明$\overline{x} \vee \overline{y}$是$x \wedge y$的补元。
  - $(x \wedge y) \vee (\overline{x} \vee \overline{y}) = (x \vee \overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (y \vee \overline{x} \vee \overline{y}) = 1$
  - $(x \wedge y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}) = (x \wedge y \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge y \wedge \overline{y}) = 0$

理解布尔代数的性质

结合律　交换律　分配律　同一律　补律

⇓

吸收律　幂等律　支配律　双重补律　德摩根律

吸收律 ⇒ 幂等律

$x \vee (x \wedge x) = x$ (应用吸收律)

$x \wedge x = x \wedge (x \vee (x \wedge x)) = x$ (应用吸收律)