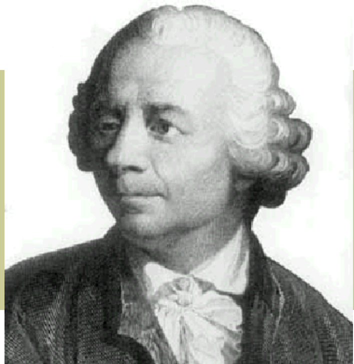
NANJING UNIVERSITY



离 散 数 学
Discrete Mathematics

第十六讲：循环群与群同构

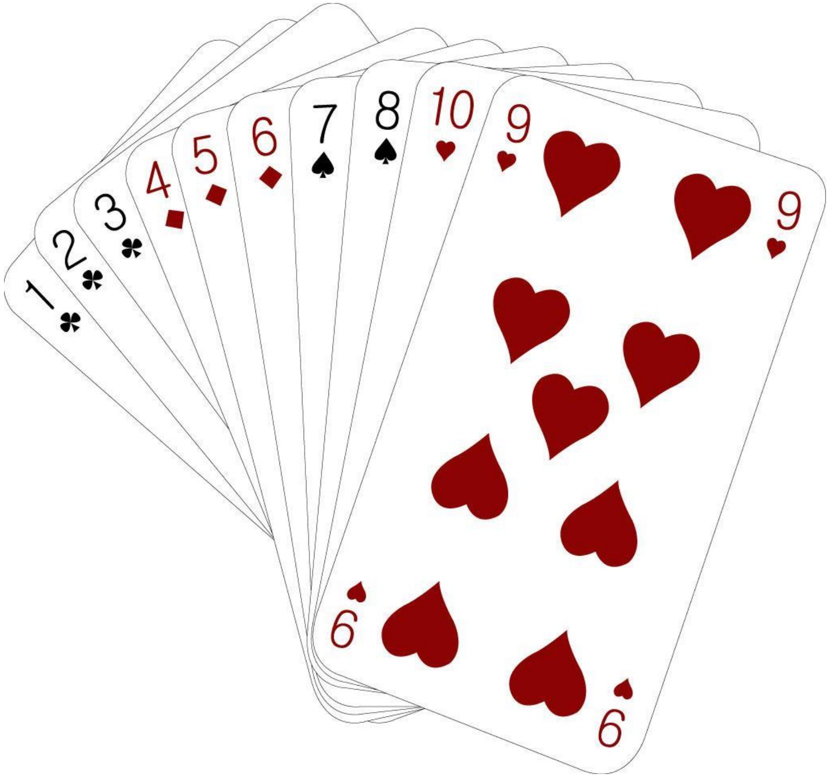
南京大学计算机科学与技术系

前 情 提 要

- 子群的定义
- 子群的判定定理
- 有限子群的判定定理
- 群中元素的阶
- 陪集与集合的划分
- Lagrange定理

本讲主要内容

- 循环群与生成元
- 循环群的子群
- 群的同构与同态
- 无限循环群的同构群
- 有限循环群的同构群



循环群与生成元

- **定义（循环群）：**

设$\langle G,*\rangle$为循环群（cyclic group）指：

$$(\exists a \in G)(G = \langle a \rangle)$$

这里，$\langle a \rangle = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$，$a$称为$G$之生成元（generator）

循环群与生成元（续）

- **定义（有限循环群）**：若循环群G的生成元a的阶为n，则称G为有限循环群，即n阶循环群：$\boldsymbol{G=\{a^0,a^1,a^2,\cdots,a^{n-1}\}}$，其中$a^0$为幺
- **定义（无限循环群）**：若循环群G的生成元a为无限阶元，则称G为无限循环群：$\boldsymbol{G=\{a^0,a^{\pm1},a^{\pm2},\cdots\}}$，其中$a^0$为幺

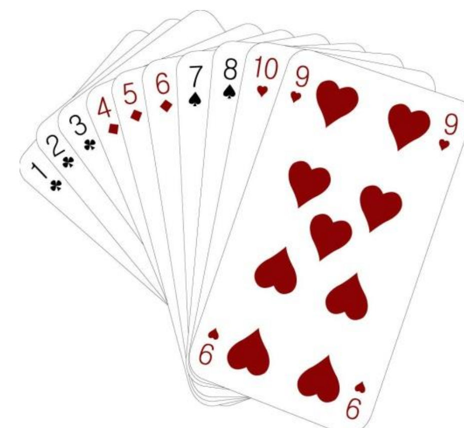
循环群与生成元（续）

- 例1：有限循环群$\langle \mathbb{Z}_6, \oplus_6 \rangle$

模6剩余加群$\langle \mathbb{Z}_6, \oplus_6 \rangle$是循环群，恰有2个生成元：1 和 5

$$5^0 = 0,\ 5^1 = 5,\ 5^2 = 4,$$

$$5^3 = 3,\ 5^4 = 2,\ 5^5 = 1.$$



循环群与生成元（续）

- 例2：无限循环群$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$是循环群，恰有2个生成元：1和 -1

$\because n$为$\mathbb{Z}$之生成元$\Leftrightarrow \mathbb{Z} = \langle n \rangle \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) n^k = 1 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(k \cdot n = 1) \Leftrightarrow n \in \{1, -1\}$

$\therefore$ 1和 -1均是其生成元

循环群与生成元（续）

- 例3：非循环群

Klein四元群$\langle V,*\rangle$不是循环群，因为对任何$x\in V$，$\langle x\rangle=\{e,x\}$：

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

无限循环群的生成元

- **命题：** 若a是无限循环群的生成元，则a^{-1}也是该无限循环群的生成元

- **证明：** 设群$G = \langle a \rangle = \{a^k | a \in G, k \in \mathbb{Z}\}$，$a^k = (a^{-1})^{-k}$，令$p = -k$，则$G = \{(a^{-1})^p | p \in \mathbb{Z}\}$，故$G = \langle a^{-1} \rangle$

无限循环群的生成元（续）

- **命题**：无限循环群**有且只有2个生成元**
- **证明**：设群$G=\langle a\rangle=\{a^k | a\in G,k\in\mathbb{Z}\}$，若$b$亦为$G$的生成元，则：$(\exists m,t\in\mathbb{Z})(a^m=b\wedge b^t=a)$，故$a=b^t=(a^m)^t=a^{mt}$，由消去律，$a^{mt-1}=e$
  $\because a$是无限阶元$\therefore mt-1=0\Rightarrow(m=t=1)\vee(m=t=-1)$，故有$b=a$或者$b=a^{-1}$

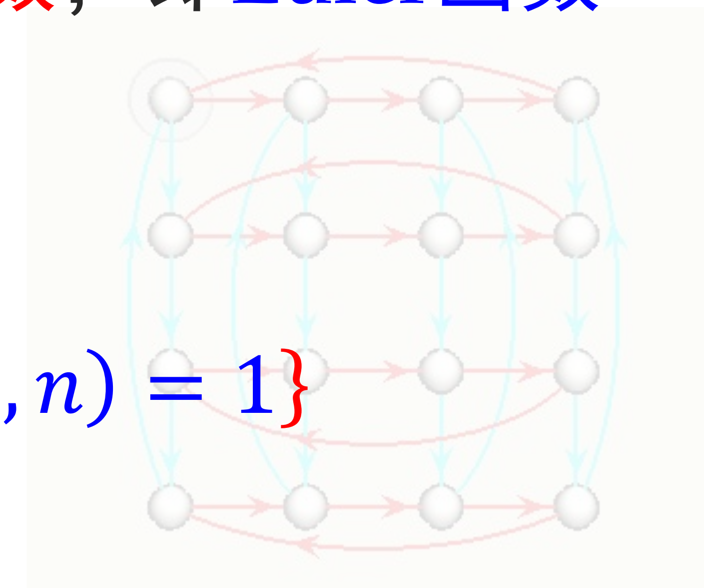
有限循环群的生成元

- **命题：** 设有限群$G=\langle a\rangle$，且$|a|=n$，则对任意不大于n的正整数r，$\boldsymbol{G=\langle a^r\rangle \Leftrightarrow \gcd(n,r)=1}$
  - “$\Leftarrow$”：设$\gcd(n,r)=1$，则$(\exists u,v\in\mathbb{Z})(ur+vn=1)$，因此$a=a^{ur+vn}=(a^r)^u(a^n)^v=(a^r)^u$。故而$G$中任意元素$a^k$可表为$(a^r)^{uk}$，故有$G=\langle a^r\rangle$；
  - “$\Rightarrow$”：设a^r是G的生成元，令$\gcd(n,r)=d$且$r=dt$，则$(a^n)^t=(a^n)^{r/d}=(a^r)^{n/d}=e$，故$|a^r|\,|\,(n/d)$，但$|a^r|=n$故$n|\frac{n}{d}\Rightarrow d=1$，故有$\gcd(n,r)=1$即$n$与$r$互质

有限循环群的生成元（续）

- n阶循环群G的生成元的个数恰好等于不大于n且与n互质的正整数的个数，即Euler函数$\varphi(n)$，其生成元集为：

$$\{i \mid 0 < i \leq n \wedge \gcd(i,n) = 1\}$$



有限循环群的生成元（续）

例（1）设 $G=\{e,a,\ldots,a^{11}\}$是 12 阶循环群，则$\varphi(12)=4$. 小于或等于 12 且与 12 互素的数是 1, 5, 7, 11，由定理 11.19 可知 a，a^5，a^7 和 a^{11} 是 G 的生成元.

（2）设 $G=\langle Z_9,\oplus\rangle$是模 9 的整数加群，则$\varphi(9)=6$. 小于或等于 9 且与 9 互素的数是 1, 2, 4, 5, 7, 8. 根据定理 11.19, G 的生成元是 1, 2, 4, 5, 7 和 8.

（3）设 $G=3Z=\{3z \mid z\in Z\}$,G 上的运算是普通加法. 那么 G 只有两个生成元：3 和−3.

循环群的子群

- **命题：** 设$G = \langle a \rangle$为循环群

(1) G的子群为循环群

(2) 若$|a| = \infty$，则G的子群除$\{e\}$外皆为无限循环群

证:

(1) 令$(H, *) \leqslant (G, *)$,从而$H \subseteq \langle a \rangle$,若$H = \{e\}$ 自然成立

否则取a^m为H中最小正方幂元.下证$H = \langle a^m \rangle$ 只需证$H \subseteq \langle a^m \rangle$,任取$h \in H \subseteq \langle a \rangle$,故$h = a^n$。

令$n = qm + r$, $0 \le r < m$,从而$h = a^n = a^{qm+r} = (a^m)^q a^r$,从而$a^r = h(a^m)^{-q} \in H$，故由$m$的最小性得$r = 0$，从而$h = (a^m)^q \in \langle a^m \rangle$，因此$H$为循环群。

(2) 设$H \leqslant G$，由(1)得$H = \langle a^m \rangle$，若$H \neq \{e\}$则$m \neq 0$,从而若$|H|$有穷则$|a^m|$有穷与$|a|$无穷矛盾。

循环群的子群（续）

- 命题：对n的每个因子d，n阶循环群G中恰有一个d阶子群

- 证明：
  - 令$H = \langle a^{n/d} \rangle$，显然$H$是$G$的$d$阶子群
  - 若令$H_1 = \langle a^m \rangle$亦为$d$阶子群，则$(a^m)^d = a^{md} = e$，故有$n|md$，即$\frac{n}{d}|m$，因此$a^m = \left(a^{n/d}\right)^k \in H$，即$H_1 \subseteq H$，但$H_1 \approx H$，故有$H_1 = H$

循环群的子群（续）

$G=Z_{12}$ 是 12 阶循环群. 12 的正因子是 1,2,3,4,6 和 12，因此 G 的子群是:

1 阶子群	$\langle 12\rangle=\langle 0\rangle=\{0\}$
2 阶子群	$\langle 6\rangle=\{0,6\}$
3 阶子群	$\langle 4\rangle=\{0,4,8\}$
4 阶子群	$\langle 3\rangle=\{0,3,6,9\}$
6 阶子群	$\langle 2\rangle=\{0,2,4,6,8,10\}$
12 阶子群	$\langle 1\rangle=Z_{12}$

群同构与同构映射

- **定义（群同构）：** 群$\langle G_1,\circ\rangle$与$\langle G_2,*\rangle$同构($G_1 \cong G_2$)当且仅当存在双射函数$f: G_1 \to G_2$，满足：

$$\forall x, y \in G_1,\ f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

- **例：**

正实数乘群$\langle \mathbb{R}^+, \cdot\rangle$和实数加群$\langle \mathbb{R}, +\rangle$，同构映射$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}: f(x) = \ln x$

群同构关系是等价关系

- **自反性：** 对任意群$\langle G,\circ\rangle$，$G \cong G$
  - 此时同构映射为恒等映射$f(x) = x$
- **对称性：** 对任意群G_1, G_2，若$G_1 \cong G_2$则$G_2 \cong G_1$
  - 后者的同构映射为前者同构映射的逆函数
- **传递性：** 对任意群G_1, G_2, G_3，若$G_1 \cong G_2$且$G_2 \cong G_3$则$G_1 \cong G_3$
  - 设前二者同构映射分别为$f: G_1 \to G_2$，$g: G_2 \to G_3$，则$f \circ g: G_1 \to G_3$

群同构与同构映射（续）

- 回忆第十四讲中提到的四阶群以下的同构性：
  - 任意两个三阶群同构

1→a　2→b　3→c

∘	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

群同构与同构映射（续）

- 回忆第十四讲中提到的四阶群以下的同构性：
  - 不同构的四阶群

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

四元循环群

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

Klein四元群

同态与同态映射

- 群同态对映射的要求远低于群同构，只需找到符合条件的函数即可
- **定义（群同态）：** 群$\langle G_1,\circ\rangle$与$\langle G_2,*\rangle$同态($G_1 \sim G_2$)当且仅当存在函数$f: G_1 \to G_2$，满足：

$$\forall x, y \in G_1,\ f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

- 如果上述映射是满射，则称为满同态；如映射是单射，则称为单同态；若$G_1 = G_2$，则称φ为自同态

同态与同态映射（续）

- **命题：** 设f为从群$\langle G,*\rangle$到群$\langle H,\circ\rangle$的同态，则

(1) $\boldsymbol{f(e_G) = e_H}$；

(2) $\boldsymbol{f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}, \ \forall a \in G}$

证明：(1) $\because f(e_G) = f(e_G e_G) = f(e_G) f(e_G)$

$$\therefore f(e_G) = f(e_G)(f(e_G))^{-1} = e_H$$

(2) $\because f(a^{-1}) f(a) = f(a^{-1}a) = f(e_G) = e_H$

$$f(a) f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e_G) = e_H$$

$$\therefore f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$$

同态与同态映射（续）

- **例：** 整数加系统$\langle \mathbb{Z}, +\rangle$与模3剩余加系统$\langle \mathbb{Z}_3, \oplus_3\rangle$同态，同态映射为

$$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3,\ f(3k+r) = r,\ k \in \mathbb{Z}$$

  此同态为满同态

- **趣味问题：** 由$1, 2, \cdots, 1000$这一千个自然数按照任意的组合进行加减，能否得到1001？

同态与同态映射（续）

- **趣味问题：** 由$1, 2, \cdots, 1000$这一千个自然数按照任意的组合进行加减，能否得到1001？
- **定义系统（奇偶加群）：** $\langle\{e, o\}, *\rangle$，运算表如下：

$*$	e	o
e	e	o
o	o	e

则 $f: \mathbb{Z} \to \{e, o\}$

$$f(x) = \begin{cases} e & x\text{是偶数} \\ o & x\text{是奇数} \end{cases}$$

是从$(\mathbb{Z}, +)$到$(\{e, o\}, *)$的满同态映射

无限循环群的同构群

- **定理：设$\langle G,*\rangle$为无限循环群，则$\langle \boldsymbol{G},*\rangle \cong \langle \mathbb{Z},+\rangle$**

- **证明：** $|a| = \infty$，令$f{:}\,\mathbb{Z} \to G$如下：$f(n) = a^n$，

$\because f(n+m) = a^{n+m} = a^n * a^m = f(n) * f(m) \therefore f$为同态；又$\because f(n) = f(m) \Rightarrow a^n = a^m \Rightarrow a^{|n-m|} = e \Rightarrow |n-m| = 0 \Rightarrow n = m \therefore f$为1-1，onto易见，从而$\langle G,*\rangle \cong \langle \mathbb{Z},+\rangle$

有限循环群的同构群

- **定理：设$\langle G,*\rangle$为有限循环群，则$\langle \boldsymbol{G},*\rangle \cong \langle \mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}},\oplus_{\boldsymbol{n}}\rangle$**
- **证明：** $|a| = n > 0$从而$G = \{a^0, a^1, \cdots, a^{n-1}\}$，令$f: \mathbb{Z}_n \to G$如下：$f(i) = a^i (i = 0,1,\cdots,n-1)$，由于$f(i \oplus_n j) = a^{i \oplus_n j} = a^i * a^j = f(i) * f(j)$，故$f$为同态。又由于$f(i) = f(j) \Rightarrow a^i = a^j \Rightarrow a^{|i-j|} = e \Rightarrow n \,|\, |i-j| \Rightarrow i \equiv j \pmod n \Rightarrow i = j$，故$f$为单射，$f$的满射性易见，因此$\langle G,*\rangle \cong \langle \mathbb{Z}_n,\oplus_n\rangle$

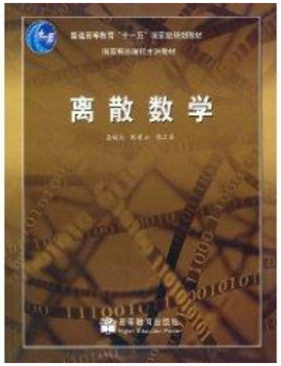
循环群的同构群

- **定理：** 设$\langle G,*\rangle$为无限循环群，则$\langle \boldsymbol{G},*\rangle \cong \langle \mathbb{Z},+\rangle$
- **定理：** 设$\langle G,*\rangle$为有限循环群，则$\langle \boldsymbol{G},*\rangle \cong \langle \mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}},\oplus_{\boldsymbol{n}}\rangle$

推论：循环群皆为阿贝尔群

本次课后作业

- 教材内容：[屈婉玲] 10.3节
- 课后习题：



- p. 231
  - 30—35
- pp. 204
  - 25—28

Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

- “拉格郎日是数学科学界高耸的金字塔” —— 拿破伦·波那巴
- “在短得令人难以置信的时间内，他就完全靠自学掌握了他那个时代的现代分析。十六岁时（可能不太准确），拉格郎日成了在都灵的皇家炮兵学院的数学教授。然后开始了数学史上最光辉的经历之一。”
- “他的杰作《分析力学》是他作为一个十九岁的少年在都灵设想出来的。”
- 这位十八世纪最伟大，最谦虚的数学家的最著名的语录是：“我不知道。”
  —— 以上摘自 E.T. 贝尔《数学精英》
- **法国伟大的数学传统 – “4L”**
  - **L**agrange(1736-1813); **L**aplace(1749-1827); **L**egendre(1752-1833); **L**ebesgue(1875-1941)

    (拉格朗日、拉普拉斯、勒让德、勒贝格)

Tip：Lagrange