欧拉图

离散数学—图论初步

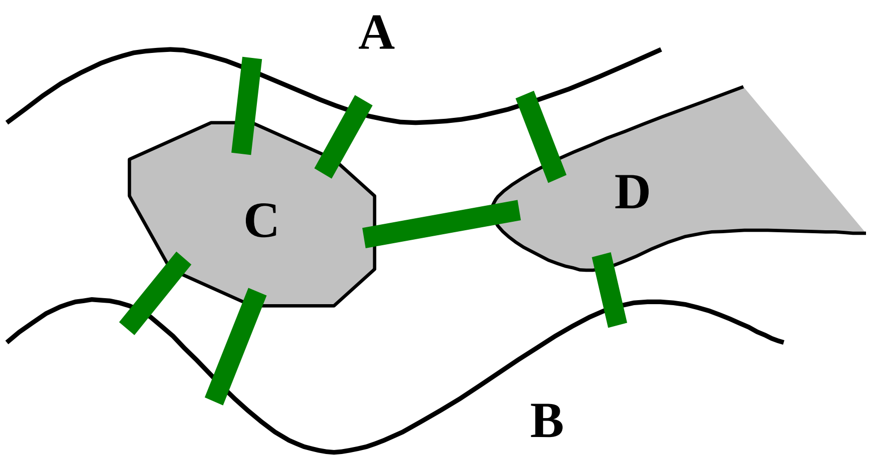
南京大学计算机科学与技术系

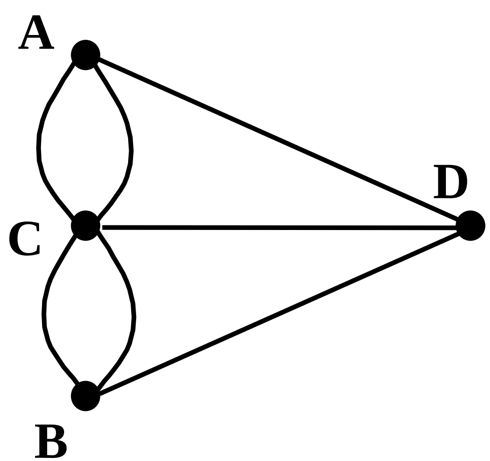
内容提要

- 欧拉通路/回路
- 欧拉图的充要条件
- 半欧拉图的充要条件
- 构造欧拉回路的Fleury算法
- *随机欧拉图*
- *中国邮递员问题*

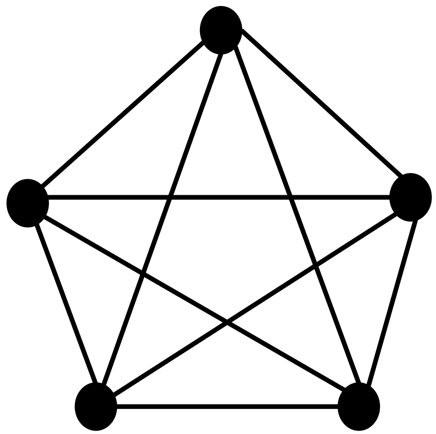
Königsberg七桥问题

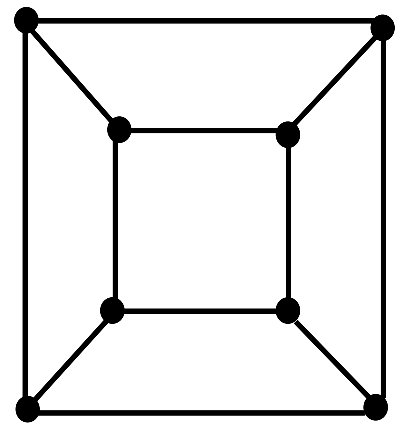
- 问题的抽象：
  - 用顶点表示对象-“地块”
  - 用边表示对象之间的关系-“有桥相连”
  - 原问题等价于：“右边的图中是否存在包含每条边一次且恰好一次的回路？”

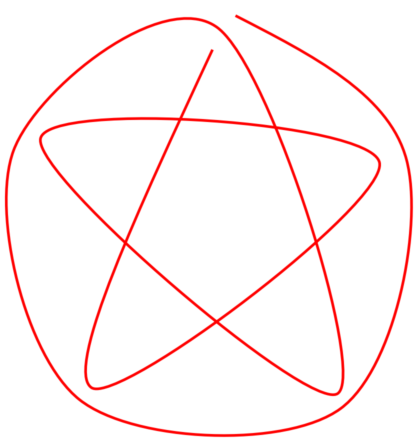




“一笔划”问题







?

欧拉通路和欧拉回路

- 定义：包含图（无向图或有向图）中每条边的简单通路称为*欧拉通路*。

注意：欧拉通路是简单通路（边不重复），但顶点可重复

- 定义：包含图中每条边的简单回路称为*欧拉回路*。
- 如果图G中含欧拉回路，则G称为*欧拉图*。如果图G中有欧拉通路，但没有欧拉回路，则G称为*半欧拉图*。

//备注：通常假设G是连通的。

欧拉图中的顶点度数

- **连通图G是欧拉图 当且仅当 G中每个顶点的度数均为偶数。**
  - **证明：**

⇒设C是G中的欧拉回路，则$\forall v \in V_G$, $d(v)$必等于v在C上出现数的2倍(起点与终点看成出现一次)。

⇐可以证明：

（1）G中所有的边可以分为若干边不相交的简单回路。

（2）这些回路可以串成一个欧拉回路。

全偶度图中的回路

- 若图G中任一顶点均为偶度点，则G中所有的边包含在若干边不相交的简单回路中。
- 证明：对G的边数m施归纳法。
  - 当m=1, G是环，结论成立。
  - 对于k≥1，假设当m≤k时结论成立。
  - 考虑m=k+1的情况：注意$\delta_G \geq 2$, G中必含简单回路，记为C，令G‘=G-E_C, 设G’中含s个连通分支，显然，每个连通分支内各点均为偶数(包括0)，且边数不大于k。则根据归纳假设，每个非平凡的连通分支中所有边含于没有公共边的简单回路中，注意各连通分支以及C两两均无公共边，于是，结论成立。

若干小回路串成欧拉回路

- 若连通图G中所有的边包含在若干边不相交的简单回路中，则G中含欧拉回路。
  - 证明：对G中简单回路个数d施归纳法。当d=1时显然。
  - 假设$d \le k(k \ge 1)$时结论成立。考虑$d=k+1$.
  - 按某种方式对k+1个简单回路排序，令$G'=G-E(C_{k+1})$，设G’中含s个连通分支，则每个非平凡分支所有的边包含在相互没有公共边的简单回路中，且回路个数不大于k。由归纳假设，每个非平凡连通分支G_i均为欧拉图，设其欧拉回路是C_i'。因G连通，故C_{k+1}与诸C_i'都有公共点。
  - G中的欧拉回路构造如下：从C_{k+1}上任一点(设为v_0)出发遍历C_{k+1}上的边，每当遇到一个尚未遍历的C_i'与C_{k+1}的交点(设为v_i'), 则转而遍历C_i'上的边，回到v_i'继续沿C_{k+1}进行。

关于欧拉图的等价命题

- 设G是非平凡连通图，以下三个命题等价：

(1) G是欧拉图。

(2) G中每个顶点的度数均为偶数。

(3) G中所有的边包含在相互没有公共边的简单回路中。

半欧拉图的判定

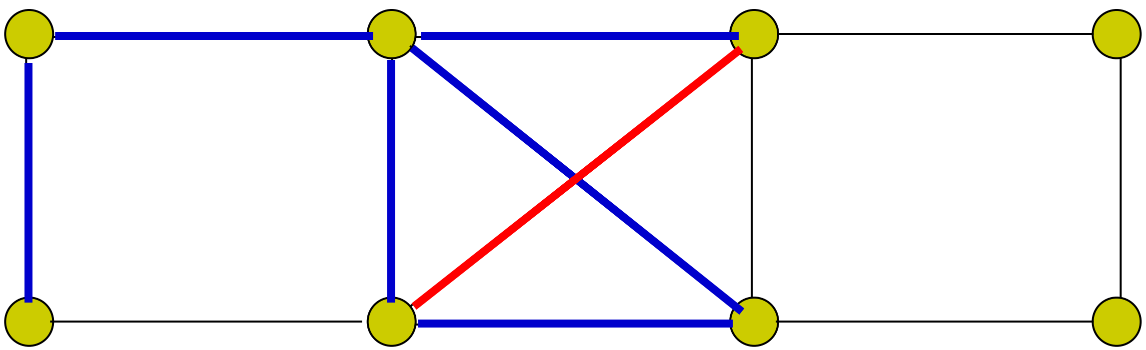
- 设G是连通图，G是半欧拉图 *当且仅当* G恰有两个奇度点。
  - 证明:

$\Rightarrow$ 设*P*是G中的欧拉通路(非回路)，设*P*的始点与终点分别是u,v, 则对G中任何一点x, 若*x*非u,v，则*x*的度数等于在*P*中出现次数的2倍，而u,v的度数则是它们分别在*P*中间位置出现的次数的两倍再加1。

$\Leftarrow$ 设G中两个奇度顶点是u,v, 则G+uv是欧拉图，设欧拉回路是C, 则C中含uv边，$\therefore$ C-uv是G中的欧拉通路。(这表明：如果试图一笔画出一个半欧拉图，必须以两个奇度顶点为始点和终点。)

构造欧拉回路

思想：在画欧拉回路时，已经经过的边不能再用。因此，在构造欧拉回路过程中的任何时刻，假设将已经经过的边删除，剩下的边必须仍在同一连通分支当中。



构造欧拉回路-Fleury算法

- 算法:
  - 输入：欧拉图G
  - 输出：简单通路P = $v_0e_1v_1e_2,\ldots,e_iv_ie_{i+1},\ldots,e_mv_m$, 其中包含了$E_G$中所有的元素。

1. 任取$v_0 \in V_G$, 令$P_0=v_0$;
2. 设$P_i=v_0e_1v_1e_2,\ldots,e_iv_i$, 按下列原则从$E_G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中选择$e_{i+1}$。
   (a) e_{i+1}与v_i相关联;
   (b) 除非别无选择，否则e_{i+1}不应是$G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中的割边。
3. 反复执行第2步，直到无法执行时终止。

Fleury算法的证明

- 算法的终止性显然。
- 设算法终止时，$P_m = v_0e_1v_1e_2,\ldots,e_iv_ie_{i+1},\ldots,e_mv_m$,
- 其中诸e_i互异是显然的。只须证明：

(1) P_m是回路，即$v_0=v_m$。

(2) P_m包括了G中所有的边。

令$G_i=G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$

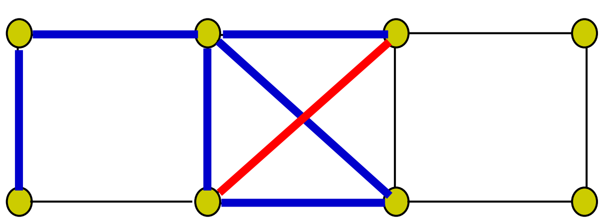
(1) (证明是回路)假设$v_0 \neq v_m$。由算法终止条件，在G_m中已没有边与v_m相关联。假设除最后一次外，v_m在P_m中出现k次，则v_m的度数是$2k+1$, 与G中顶点度数是偶数矛盾。

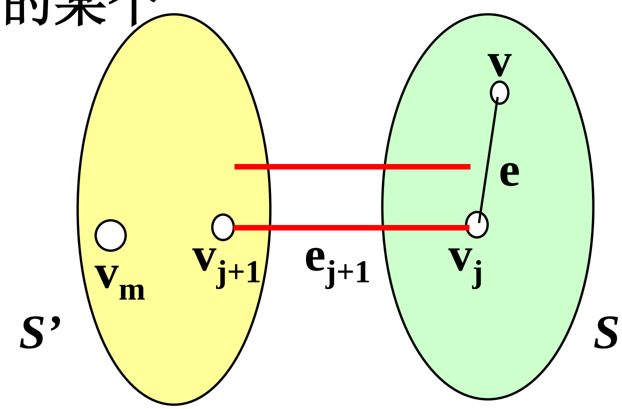
Fleury算法的证明(续)

(2) (证明含所有边)假设P_m没有包括G中所有的边，令G_m中所有非零度顶点集合为S（非空），令$S'=V_G-S$, 则$v_m \in S'$。

考察序列$e_1,e_2,\ldots,e_j,e_{j+1},\ldots,e_m$。假设j是满足$v_j \in S$，而$v_{j+1} \in S'$的最大下标。如果没有这样的j，G就不连通，矛盾。因为P_m的终点在S'中，因此e_{j+1}一定是G_j中的割边。

令e是在G_j中与v_j相关联的异于e_{j+1}的边(非零度点一定有)，根据算法选择e_{j+1}(割边)的原则，e也一定是割边。但是，G_m中任意顶点的度数必是偶数，e在G_m中的连通分支是欧拉图，e在G_m的某个欧拉回路中，不可能是G_j的割边。矛盾。





有向欧拉图

- 有向图中含所有边的有向简单回路称为有向欧拉回路。
- 含有向欧拉回路的有向图称为有向欧拉图。

下面的等价命题可以用于有向欧拉图的判定：

- 若G是弱连通的有向图，则下列命题等价：
  - G中含有向欧拉回路。
  - G中任一顶点的入度等于出度。
  - G中所有的边位于若干个边互不相交的有向简单回路当中。

(证明与无向欧拉图类似。)

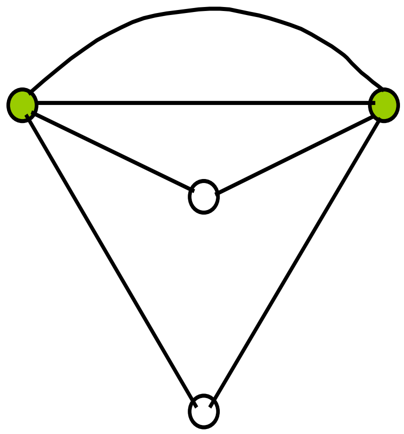
作业

- 教材（第六版）[9.5]　　教材（第七版）[10.5]
  - p.497: 18, 20, 28　　p.594: 18, 20, 28
- 给定简单图G（|G|≥3），构造另一个图G’如下：
  - 对G中的每条边，G’中恰好有一个顶点与之对应；
  - G’中任意两点相邻当且仅当它们在G中对应的两条边相邻（即有一个公共顶点）。

证明：若G是欧拉图，则G’是欧拉图。举例说明反之不一定成立。

附：随机欧拉图

- 设G是欧拉图，$v \in V_G$，从v开始，每一步从当前点所关联边中随机选边，均可构造欧拉回路，则G称为以v为始点的随机欧拉图。
- 注意，若G是以v为始点的随机欧拉图，则任何一个以v为始点的不包含G中所有边的回路都应该能扩充成欧拉回路。反之，若G不是以v为始点的随机欧拉图，则一定存在已经包含了v所关联的所有边，却未包含G中所有边的简单回路。



随机欧拉图的判定

- 欧拉图G是以v为始点的随机欧拉图*当且仅当*G中任一回路均包含v。

  ⇒ 若G是以v为始点的随机欧拉图，*假设有回路C不包含v*. 令G‘=G-C，(G’可能不连通)，G’中包含v的那个连通分支一定是欧拉图，相应的欧拉回路包含了v关联的所有边，但不包含G中的所有边，与G是以v为始点的随机欧拉图矛盾。

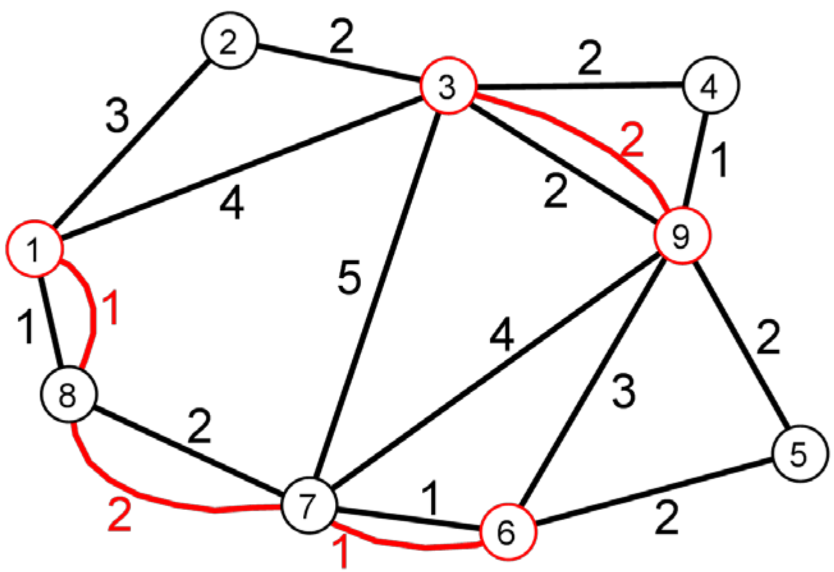
  ⇐ 若欧拉图G中任意回路均包含v。假设G不是以v为始点的随机欧拉图，则一定存在已经包含了v所关联的所有边，却未包含G中所有边的简单回路C，假设e是不在C中的一条边，e的端点必异于v，设一个是u。令从G中删除C中所有边的图为G‘，显然在G’中v是孤立点。而包含u的连通分支是欧拉图，因此u必包含在一回路中，但此回路不含v，矛盾。 (易推知：欧拉图G是以任一顶点为始点的随机欧拉图 当且仅当G本身是一个初级回路)

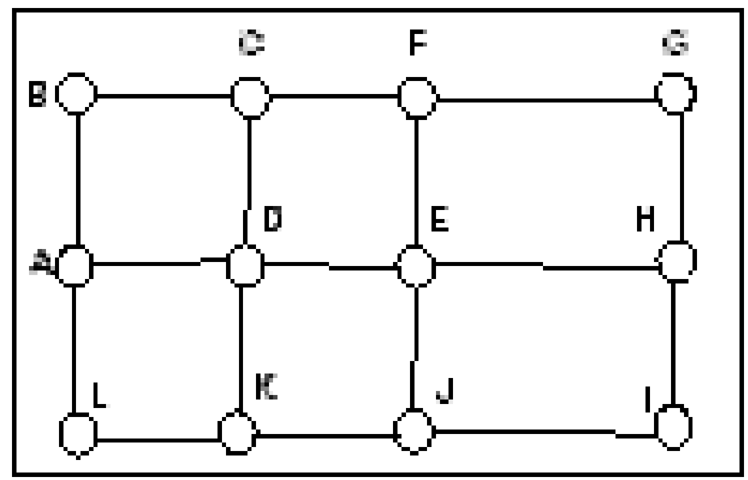
中国邮递员问题（管梅谷，1962）

- 问题：邮递员从邮局出发，走过辖区内每条街道*至少一次*，再回邮局，如何选择最短路线？
- 数学模型
  - 无向带权图G：E_G中元素对应于辖区内的街道，V_G中的元素对应于街道的交叉点，街道长度用相应边的权表示。
  - 问题的解：G中包含所有边的权最小的回路，称为最优回路(注意：未必是简单回路)。
  - 当G是欧拉图，则最优回路即欧拉回路。
  - 若G不是欧拉图，则通过加边来消除G中的奇度顶点，要求使加边得到的欧拉图G*中重复边的权和最小。

中国邮递员问题

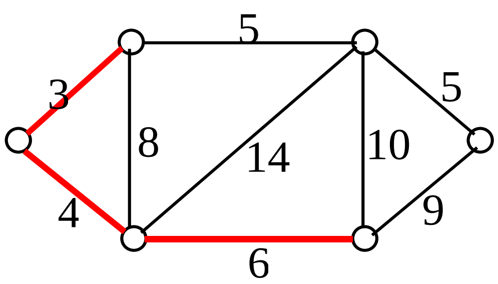
- 通过加边来消除G中的奇度顶点，使得加边得到的欧拉图G*中重复边的权和最小。

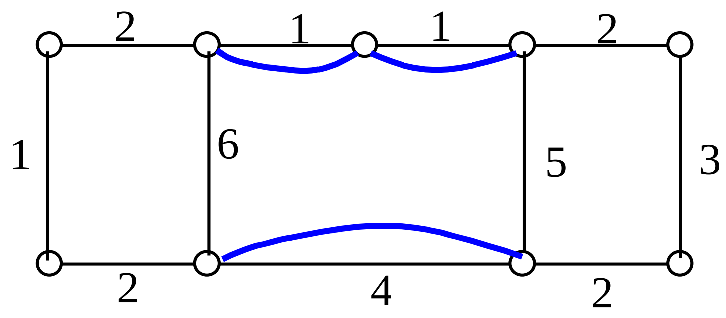




中国邮递员问题-算法

- 算法过程
  - **1．用Dijkstra算法求所有奇度顶点对之间的最短路径。(若G是欧拉图，直接用Fleury算法)**
  - **2．以G中所有奇度顶点构造带权完全图G_{2k}，每边的权是两顶点间最短路径长度。**
  - **3．求G_{2k}中的最小权完美匹配M。**
  - **4．按照M中的各个路径添加重复边。再用Fleury算法求欧拉回路。**





中国邮递员问题-求解原理

- C是带正权无向连通图G中的最优回路 当且仅当 对应的欧拉图G*满足：

  (1) G的每条边在G*中至多重复一次；

  (2) G的每个(初级)回路在G*中重复边权的和不超过该回路权的一半。

- ⇒ (1) 两点之间添加的重复边条数若大于1，则删除其中的两条，不影响端点的奇偶性，得到的仍是欧拉图，但重复边权和减少了，显然原来的C不是最优。

  (2) 若G中的回路C_1在G*中重复边的权和大于C_1的权的一半，按如下方式改造G*：C_1上原有的重复边均删除，而原来未重复的边均添加重复边，设得到的图为G"。显然，G"中每个顶点的度数仍是偶数，但G"中重复边的权和小于G*中相应的值，矛盾。

中国邮递员问题-求解原理（续）

- $\Leftarrow$ 只需证明：满足上述两个条件的回路的权均相等。

假设C_1和C_2是满足上述条件的两个回路，相应的欧拉图是G_1*和G_2*，添加的重复边集合分别是F_1和F_2。令$F=F_1 \oplus F_2$, G[F]是F生成的导出子图。注意：构造G_1*和G_2*时，在G的任意顶点上添加的边数同奇偶性(与该点在G中度数同奇偶性)，因此G[F]中各顶点度数均为偶数，$\therefore$ G[F]是若干边不重复的初级回路的并集。

考虑G[F]的任一回路C', C'上属于F_1的边的权和与属于F_2的边的权和都不能超过C'的权的一半，因此必然相等。由此易知，构造G_1*和G_2*时添加的边的权和必然相等。于是G_1*和G_2*的权相等，即C_1和C_2的权相等。