优化方法 HW1

1. $\langle \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}\rangle = tr\left(\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}\right) = 26+44=70$

2. $\cancel{|\lambda I - A| = (\lambda-1)(\lambda-4)-6 = \lambda^2-5\lambda-2=0}$

$|\lambda I - A^TA| = \left|\lambda I - \begin{bmatrix}10&14\\14&20\end{bmatrix}\right| = (\lambda-10)(\lambda-20)-196 = \lambda^2-30\lambda+4=0.$

$\lambda_{1,2} = \frac{30\pm\sqrt{884}}{2}$ ∴ $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

$\Rightarrow \|A\|_* = \sqrt{15+\sqrt{221}} + \sqrt{15-\sqrt{221}}$

3. $\|y\|_M^* = \sup_{\|x\|_M\le 1} y^Tx = \sup_{x^TMx\le1} y^Tx$

设 由于M正定 ∴可设 $z = M^{\frac{1}{2}}x$ 则 $\|y\|_M^* = \sup_{|z|\le1} y^TM^{-\frac{1}{2}}z$

$\le \|y^TM^{-\frac{1}{2}}\|_2\cdot\|z\| = \|y^TM^{-\frac{1}{2}}\|_2$

当 $z = \frac{y^TM^{-\frac{1}{2}}}{\|y^TM^{-\frac{1}{2}}\|}$ 时取到. ∴ $\|y\|_M^* = \|y^TM^{-\frac{1}{2}}\|_2 = \sqrt{y^TM^{-1}y}$

也即 $\|y\|_M^* = \|y\|_{M^{-1}}$

4. 解: 设 $s = (x^T, y^T)^T = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\|(x^T,y^T)^T\|_{(a,A,B)} = \sqrt{a\|x\|_A^2 + \|y\|_B^2}$

$t = (c^T, d^T)^T.$

则 $\|t\|^*_{(a,A,B)} = \sup_{\|s\|_{(a,A,B)}\le1} t^Ts = \sup_{\|s\|_{(a,A,B)}\le1} (c^T,d^T)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \sup_{\|s\|_{(a,A,B)}\le1} c^Tx+d^Ty$

$= \sup_{\|s\|_{(a,A,B)}\le1} \frac{c^T}{\sqrt a}\sqrt a x + d^Ty$ $\cancel{\le \sup_{\|s\|_{(a,A,B)}\le1} \|\frac{c^T}{a}+d^T\|_{(a,A,B)}}$

$\le \sup_{\|s\|_{(a,A,B)}\le1} \|\frac{c}{\sqrt a}\|_{A^*}\cdot\|\sqrt a x\|_A + \|d\|_{B^*}\|y\|_B$

$\le \sqrt{\left(\frac{1}{a}\|c\|_{A^*}^2+\|d\|_{B^*}^2\right)\left(a\|x\|_A^2+\|y\|_B^2\right)} \le \sqrt{\frac{1}{a}\|c\|_{A^*}^2+\|d\|_{B^*}^2}$

易知等号能够取到 ∴ $\|t\|^*_{(a,A,B)} = \sqrt{\frac{1}{a}\|c\|_{A^*}^2+\|d\|_{B^*}^2}$ 其中 $\|\cdot\|_{A^*}, \|\cdot\|_{B^*}$ 是 $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B$ 的对偶范数