李健宁
机器学习中的优化问题
2025 年 5 月 21 日

Homework 12

Question 1.

$\nabla f(x) = 2\mathbf{D}^\top(\mathbf{D}\mathbf{x}-\mathbf{y})$，限制条件为 $\|\cdot\|_1$ 时，

$$\mathbf{s}_k = \arg\min_{\mathbf{s}\in\mathbf{D}}\langle \mathbf{s},\mathbf{g}\rangle = -\mathrm{sign}(g_i)\mathbf{e}_i,\ i=\arg\max_j |g_j|.$$

限制条件为 $\|\cdot\|_\infty$ 时，

$$\mathbf{s}_k = \arg\min_{\mathbf{s}\in\mathbf{D}}\langle \mathbf{s},\mathbf{g}\rangle = -\mathrm{sign}(\mathbf{g}).$$

设向量 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$，投影到 ℓ_1 范数球上的问题是

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{x}\|_1 \le \tau$$

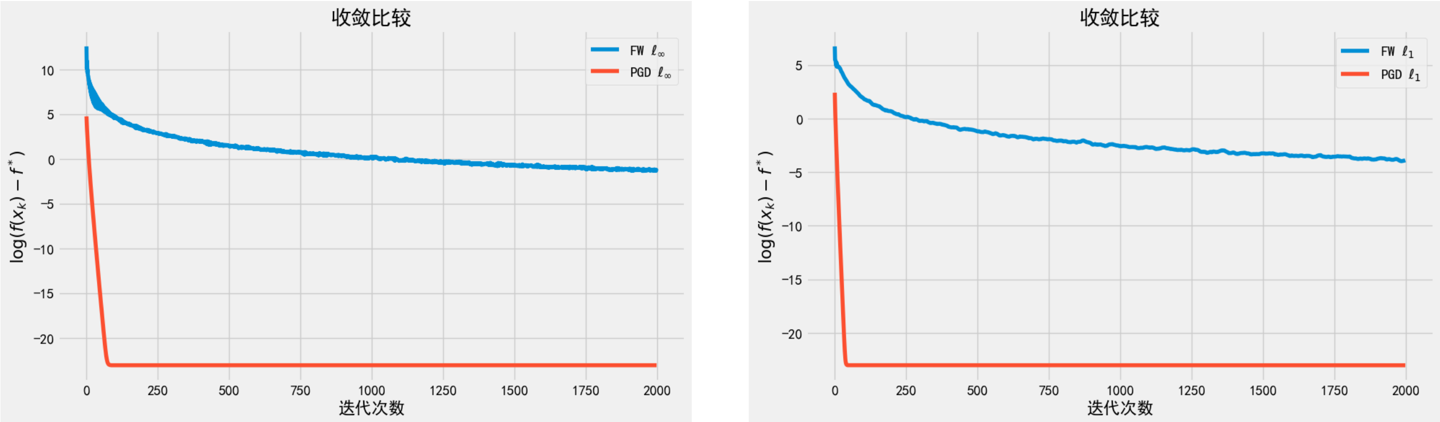
这个问题的解是

$$x_i = \mathrm{sign}(v_i)\cdot\max\left(|v_i|-\theta, 0\right)$$

θ 通过以下步骤计算：

1) 令 $u=\mathrm{sort}(|\mathbf{v}|)$，按降序排列。
2) 计算累计和 $S_k=\sum_{j=1}^k u_j$。
3) 找到最大的 ρ 满足 $u_\rho > \frac{1}{\rho}\left(S_\rho-\tau\right)$
4) $\theta=\frac{1}{\rho}\left(S_\rho-\tau\right)$

投影梯度法选择固定步长 $\alpha=0.0001$，f^* 通过运行 5000 次两个方法比较较小值获得，实验中分别迭代两种方法 2000 次，实验结果如图1，能够看出投影梯度法无论是收敛速度还是稳定性上都更占据优势。



(A) ℓ_∞ 范数　　(B) ℓ_1 范数

图 1. 收敛速度对比

Question 2.

$$\min_{\mathbf{x},\mathbf{y}} f(\mathbf{x})+g(\mathbf{y}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{x}=\mathbf{y}$$

其中:

$$f(\mathbf{x})=\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|_2, \quad g(\mathbf{y})=\|\mathbf{y}-\mathbf{b}\|_1, \quad \mathbf{a}\neq\mathbf{b}\in\mathbb{R}^{100}$$

Dual Ascent 方法推导. 拉格朗日函数为:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\lambda})=f(\mathbf{x})+g(\mathbf{y})+\boldsymbol{\lambda}^\top(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

对偶函数为:

$$d(\boldsymbol{\lambda})=\inf_{\mathbf{x}}\left(f(\mathbf{x})+\boldsymbol{\lambda}^\top\mathbf{x}\right)+\inf_{\mathbf{y}}\left(g(\mathbf{y})-\boldsymbol{\lambda}^\top\mathbf{y}\right)$$

Dual Ascent 迭代更新如下:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^k &= \arg\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})+\boldsymbol{\lambda}^{k\top}\mathbf{x}\\
\mathbf{y}^k &= \arg\min_{\mathbf{y}} g(\mathbf{y})-\boldsymbol{\lambda}^{k\top}\mathbf{y}\\
\boldsymbol{\lambda}^{k+1} &= \boldsymbol{\lambda}^k+\eta(\mathbf{x}^k-\mathbf{y}^k)
\end{aligned}$$

可以求出

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{a}-\mathrm{proj}_{\mathcal{B}_2(1)}(\boldsymbol{\lambda}^k)=\mathbf{a}-\boldsymbol{\lambda}^k\cdot\min\left(1,\frac{1}{\|\boldsymbol{\lambda}^k\|_2}\right)\\
\mathbf{y}^{k+1} &= \mathbf{b}-\mathrm{clip}(\boldsymbol{\lambda}^k,-1,1,-1,1)
\end{aligned}$$

ADMM 方法推导. 增广拉格朗日函数为:

$$\mathcal{L}_\beta(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\lambda})=f(\mathbf{x})+g(\mathbf{y})+\boldsymbol{\lambda}^\top(\mathbf{x}-\mathbf{y})+\frac{\beta}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2^2$$

定义

$$\mathbf{u}^k=\frac{1}{\beta}\boldsymbol{\lambda}^k$$

ADMM 的迭代更新步骤如下:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{k+1} &= \arg\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})+\frac{\tau\beta}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}^k+\mathbf{u}^k\|_2^2\\
\mathbf{y}^{k+1} &= \arg\min_{\mathbf{y}} g(\mathbf{y})+\frac{\tau\beta}{2}\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{y}+\mathbf{u}^k\|_2^2\\
\mathbf{u}^{k+1} &= \mathbf{u}^k+\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{y}^{k+1}
\end{aligned}$$

可以求出

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{a}+\max\left(1-\frac{1}{\tau\beta\|\mathbf{z}-\mathbf{a}\|_2},0\right)(\mathbf{a}-\mathbf{z}),\ \mathbf{z}=\mathbf{y}^k-\mathbf{u}^k\\
\mathbf{y}^{k+1} &= \mathrm{soft}_{1/(\tau\beta)}(\mathbf{v}-\mathbf{b})+\mathbf{b},\ \mathbf{v}=\mathbf{x}^{k+1}+\mathbf{u}^k
\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{soft}_\lambda(z_i)=\mathrm{sign}(z_i)\cdot\max(|z_i|-\lambda,0).$$

测试时，取 ADMM 的步长 $\beta\in[1,10,100],\tau=[0.5,1.0,1.5]$，迭代次数均为 600 次。$f^*$ 通过运行 3000 次 $\beta=1,\tau=0.5$ 获得。实验结果如图2，可以看出 $\tau\beta$ 越小，收敛越快。

另外，Dual Ascent 方法未能收敛，可能是因为 $f(x)$ 和 $g(y)$ 的性质不佳，$f(x)$ 非强凸，而 $g(x)$ 不可导，导致 Dual Ascent 方法在迭代时可能会出现不收敛。

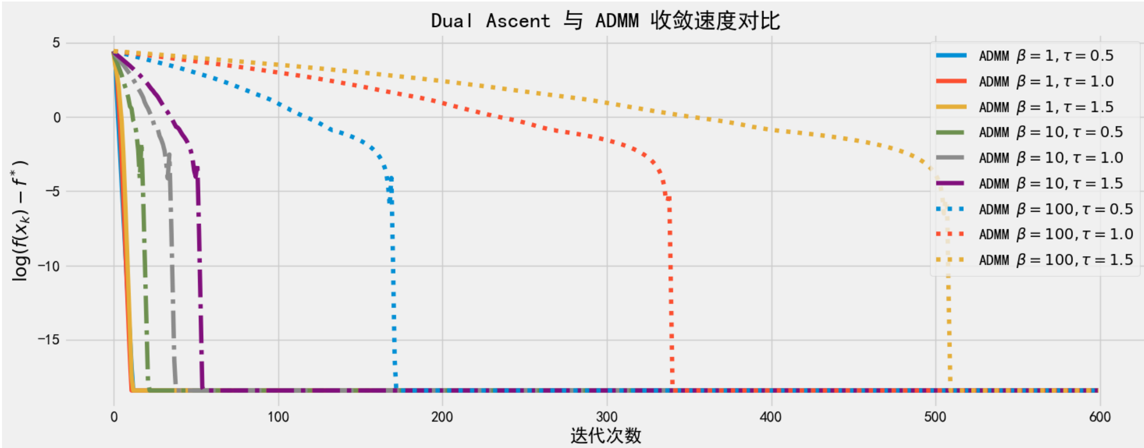


图 2. ADMM 收敛对比

Question 3.

引入拉格朗日乘子 $Y_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$Y_2 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$，增广拉格朗日函数为:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(Z,E,Y_1,Y_2) =& \|Z\|_* + \lambda\|E\|_{2,1} + \langle Y_1, D-DZ-E\rangle + \frac{\beta}{2}\|D-DZ-E\|_F^2 \\ &+ \langle Y_2, Z^\top\mathbf{1}-\mathbf{1}\rangle + \frac{\beta}{2}\|Z^\top\mathbf{1}-\mathbf{1}\|_2^2\end{aligned}$$

更新 Z**.** 我们线性化增广拉格朗日中关于 Z 的二次项，得到以下更新:

$$Z^{k+1} = \arg\min_Z \|Z\|_* + \frac{\beta_k}{2}\|Z-G^k\|_F^2$$

其中:

$$G^k = Z^k - \frac{1}{\eta_D}\left(D^\top(DZ^k+E^k-D) + \mathbf{1}(Z^{k\top}\mathbf{1}-\mathbf{1})^\top + \frac{1}{\beta_k}D^\top Y_1^k + \frac{1}{\beta_k}\mathbf{1}Y_2^{k^\top}\right)$$

该子问题的解为奇异值软阈值:

$$Z^{k+1} = \mathrm{SVT}_{1/\eta_D\beta_k}(G^k)$$

更新 E**.** 对 E 的更新为:

$$E^{k+1} = \arg\min_E \lambda\|E\|_{2,1} + \frac{\beta_k}{2}\left\|E-\left(D-DZ^{k+1}+\frac{1}{\beta_k}Y_1^k\right)\right\|_F^2$$

这是 $\ell_{2,1}$ 范数的近端问题，解为对每列进行缩放:

$$E_{:,j}^{k+1} = \left[1-\frac{1}{\beta_k\|R_{:,j}\|_2}\right]_+ R_{:,j}, \quad R = D-DZ^{k+1}+\frac{1}{\beta_k}Y_1^k$$

更新拉格朗日乘子.

$$Y_1^{k+1} = Y_1^k + \beta_k(D-DZ^{k+1}-E^{k+1})$$
$$Y_2^{k+1} = Y_2^k + \beta_k(Z^{k+1^\top}\mathbf{1}-\mathbf{1})$$

自适应步长更新. 使用如下策略自适应更新 β_k：

$$\beta_{k+1} = \min(\rho\beta_k, \beta_{\max})$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_0, & \text{if } \beta_k \max\left(\sqrt{\eta_D}\,\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|, \|\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k\|\right)/\|\mathbf{c}\| < \varepsilon_2 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

收敛条件.

$$\frac{\|DZ^k + E^k - D\|}{\|D\|} \leq \epsilon_1, \text{ or } \max\left(\frac{\|D^k - D^{k-1}\|}{\|D\|}, \frac{\|E^k - E^{k-1}\|}{\|D\|}\right) < \epsilon_2$$

数据实验. 参数选取上，$\epsilon_1 = 10^{-6}$, $\epsilon_2 = 10^{-5}$, $\beta_0 = \min(n, m)\epsilon_2 = 200\epsilon_2$, $\beta_{\max} = 10^{10}$, $\rho_0 = 1.9$, $\eta_D = 1.02\sigma^2_{\max}(\mathrm{D})$，$\lambda = 0.1$，最大迭代次数 5000 次。最终实验结果如图3

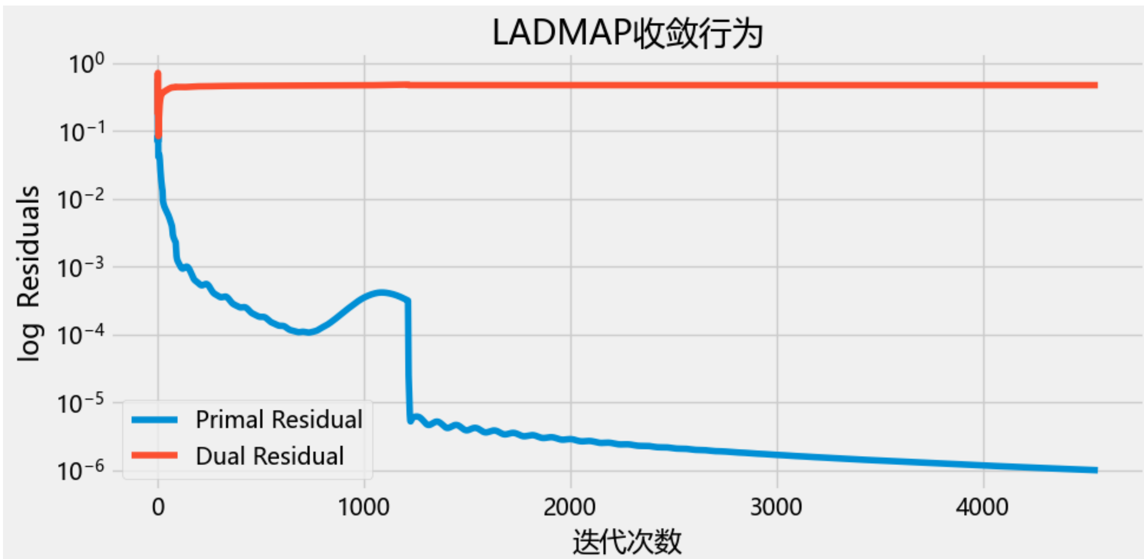


图 3. LADMAP 收敛行为