优化作业3

1. $F_\theta(z)=\int_0^z \theta e^{-\theta x}dx = 1-e^{-\theta z}$.

$F_\theta^{-1}(z) = -\frac{1}{\theta}\ln(1-z))$ 设 $U\sim U[0,1]$ 则

$P(F_\theta^{-1}(u)\le x) = P(U\le F_\theta(x)) = F_\theta(x) \Rightarrow F_\theta^{-1}(u)\sim exp(\theta)$.

∴ $L(\theta)=E_{u\sim U[0,1]}[f(-\frac{1}{\theta}\ln(1-u))] = E_{u\sim U[0,1]} f(-\frac{1}{\theta}\ln u)$

2. 设题集合为H.

(a) 凸 $H=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \alpha\le a^Tx\}\cap\{x\in\mathbb{R}^n \mid a^Tx\le\beta\}$ 是两个半平面(凸集)之交 ∴ H凸.

(b) 凸 $H=\{x\in\mathbb{R}^n \mid a_1^Tx\le b_1\}\cap\{x \mid a_2^Tx\le b_2\}$ 同(a)之理 H凸

(c) 凸 $H=\bigcap_{y\in S}\{x \mid \|x-x_0\|_2\le\|x-y\|_2\}$.

$\|x-x_0\|_2\le\|x-y\|_2 \Leftrightarrow -2x_0^Tx+x_0^Tx_0\le -2y^Tx+y^Ty \Leftrightarrow 2(y-x_0)^Tx\le c$. c常数

因此也是半空间,是凸的 ∴ H也凸.

(d) 非凸(不定) 考虑 $\mathbb{R}^2$ $S=\{(0,0),(0,1),(1,-1)\}$ $T=\{(\frac{3}{2},0)\}$ 易知 $A(1,\frac{99}{100})$ $B(1,-\frac{99}{100})\in H$ 但 $\frac{A+B}{2}=(1,0)\notin H$.

(e)

集. 凸, $H=\bigcap_{s_2\in S_2}\{x \mid x\in S_1-s_2\}$ $\forall s_2$ S_1-s_2 凸 ∴ H凸

(f) 凸 ① $\theta=1$ 为半平面 H凸

② $0<\theta<1$ $h(x)=\|x-a\|^2-\theta^2\|x-b\|^2=(1-\theta^2)x^Tx-2(a-\theta^2b)^Tx+(a^Ta-\theta^2b^Tb)$.

$\nabla^2h(x)=2(1-\theta^2)I \succ 0$ ∴ $h(x)$ 凸函数

$\Rightarrow H=\{x \mid h(x)\le0\}$ 凸. (若 $h(x_1)\le0$, $h(x_2)\le0$ 则 $h(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda h(x_1)+(1-\lambda)h(x_2)\le0$.)

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

3. (a) $\text{conv}\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2=x_2\} = \{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2 \le x_2\}$.

(b) $\text{conv}\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2=x_2,\ x_1\ge 0\} = \{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2\le x_2,\ x_1>0\} \cup \{(0,0)\}$

(c) $\text{conv}\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_1x_2=1\} = \mathbb{R}^2$

第四题在下一页。

5. $K=\{Ax \mid x\ge 0\}$.　　$K^*=\{\underset{\in\mathbb{R}^m}{y} \mid A^Ty\ge 0\}$

只需证 $y^TAx\ge 0\ \ \forall x\ge 0 \iff A^Ty\ge 0$.

① 若 $y^TAx\ge 0$. $\forall x\ge 0$. 取 $x=e_i$（单位向量，仅第 i 行为 1）知 (A^Ty) 的第 i 行 ≥ 0　$1\le i\le n$.

$\therefore A^Ty\ge 0$

② 若 $A^Ty\ge 0$ 对 $\forall x\ge 0$　设 $A^Ty=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)^T$. $\alpha_i\ge 0$.　$x=(x_1,\dots,x_n)^T$.

$$y^TAx=(A^Ty)^Tx=\sum \alpha_i x_i\ge 0$$

综上 $K^*=\{y\in\mathbb{R}^m \mid A^Ty\ge 0\}$

6. 下证 $K_{m+}^*=\{y\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k y_i\ge 0.\ 1\le k\le n\}$.

只需证 $y^Tx\ge 0\ \ \forall x\in K_{m+} \iff \sum_{i=1}^k y_i\ge 0\ \ 1\le k\le n$

① 若 $y^Tx\ge 0\ \ \forall x\in K_{m+}$.

设 $(\underbrace{1,1,\dots,1}_{k\text{个}1},\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-k\text{个}0})=\vec{\mu}_k\in K_{m+}$, $y^T\vec{\mu}_k=\sum_{i=1}^k y_i\cdot 1=\sum_{i=1}^k y_i\ge 0$　$1\le k\le n$

② 若 $\sum_{i=1}^k y_i\ge 0$　$1\le k\le n$　$\forall x\in K_{m+}$. $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$　$x_1\ge x_2\ge\dots\ge x_n\ge 0$.

$\Rightarrow y^Tx=\sum_{i=1}^n x_iy_i=\sum_{i=1}^{n-1}\left[(x_i-x_{i+1})\sum_{j=1}^i y_j\right]+x_n\left(\sum_{j=1}^n y_j\right)$ (Abel变换)

上式每一项都是正的　故 $y^Tx\ge 0$.　~~Abel~~

综上 $K_{m+}^*=\{y\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k y_i\ge 0\ \ 1\le k\le n\}$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

这个链接有我写的latex版本的解答（需要VPN）。

4\. 设 $A=\{\pm uu^T \mid \|u\|_2=1\}$. $B=\{M\in\mathbb{R}^{n\times n} \mid M=M^T, \|M\|_*\le 1\}$.

下证 $B=\operatorname{conv}A$.

① $A\subseteq B$ $\forall \|u\|_2=1$ $\|\pm uu^T\|_* = \|uu^T\|_* = 1 \le 1$. ∴ $\pm uu^T\in B \Rightarrow A\subseteq B$

$\left(\operatorname{rank}(uu^T)=1 \Rightarrow \lambda_1=tr(uu^T)=tr(u^Tu)=tr(1)=1,\ \lambda_i=0\ \forall i>1\right)$.

② $B\subseteq \operatorname{conv}A$

$\forall M\in B$

设 $M=P\Lambda P^T$ P是正交矩阵. $\Lambda=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$. $P=(p_1,p_2,\dots,p_n)^T\in\mathbb{R}^{n\times n}$

则 $M=\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i p_i^T$ ∵ P正交 ∴ $\|p_i\|_2=1$.

$=\sum_{i=1}^n sgn(\lambda_i)|\lambda_i| p_i p_i^T$ ∵ $\|M\|_*\le 1$ ∴ $\sum|\lambda_i|\le 1$.

$=\sum_{i=1}^n |\lambda_i| (sgn(\lambda_i) p_i p_i^T) + \frac{(1-\sum_{i=1}^n|\lambda_i|)}{2}(uu^T - uu^T)$ $\|u\|_2=1$

∴ M 能写成 A中元素的凸组合. ⇒ $B\subseteq\operatorname{conv}A$.

③ B是凸的

$\forall M_1,M_2\in B, \theta\in[0,1]$. $\theta M_1+(1-\theta)M_2=:M_0$

$\|\cdot\|_*$是凸函数

$M_0^T=\theta M_1^T+(1-\theta)M_2^T=\theta M_1+(1-\theta)M_2=M_0$.

$\|M_0\|_*=\|\theta M_1+(1-\theta)M_2\|_*\le\theta\|M_1\|_*+(1-\theta)\|M_2\|_*\le\theta+(1-\theta)=1$

∴ $M_0\in B$ ⇒ B是凸的

综合①②③ 知 B是包含A的最小凸集 ∴ $B=\operatorname{conv}A$.

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

7. $A=\{x \mid \|x\|_2=1\}$ $B=\{x \mid \|x\|_2\le 1\}$ $S_a=\{x \mid a^Tx\le 1\}$

则 $B=\bigcap_{a\in A} S_a$

① $B\subseteq \bigcap_{a\in A} S_a$. $\forall a\in A$ $\forall x\in B$ 有 $\|a\|_2=1$. $\|x\|_2\le 1$

则 $a^Tx\le \|a\|_2\|x\|_2\le 1$ $\Rightarrow$ $x\in S_a$. 由 a 任意性 知 $B\subseteq \bigcap_{a\in A} S_a$

②

$\bigcap_{a\in A} S_a\subseteq B$ $\forall x\in \bigcap_{a\in A} S_a$ 有 $\max_{\|a\|=1} a^Tx\le 1$ 取 $a=\frac{x}{\|x\|_2}$ 则 $\|a\|=1$

$$\|x\|_2=x^Tx\le\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right)^Tx=a^Tx\le 1$$

$\therefore x\in B$ $\Rightarrow$ $\bigcap_{a\in A} S_a\subseteq B$.

综上. $B=\bigcap_{a\in A} S_a$ $A=\{x \mid \|x\|_2=1\}$ $S_a=\{x \mid a^Tx\le 1\}$.

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App