Марков, Баес и все-все-все

Дмитрий Грошев

СПбГУ

28.03.2013

- Баесовская вероятность
- Моделирование окружающего мира и его задачи
- Предположение Маркова
- Марковские цепи
- HMMs
- Активные действия — FSMs
- Неуверенность в исходе: MDPs
- Неуверенность в измерении: POMDPs

HARDCORE

Баесовский взгляд на вероятность
aka The Red Pill

Классическая вероятность

100 бросков, 53 раза решка $\Longrightarrow$ P = 0.53

Описание окружающего мира

Баесовская вероятность

100 бросков, 53 раза решка $\Longrightarrow$
на 53% я уверен, что выпадет решка

Описание уверенности наблюдателя

Баесовская вероятность

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- A — предположение
- B — свидетельство
- $P(A)$ — prior, начальная степень уверенности в A
- $P(A|B)$ — posterior, степень уверенности в A с учётом B
- $P(B|A)$ — «модель мира», вероятность B при полной уверенности в A

Баесовская вероятность: пример

- A: монета честная ($\bar{A}$: монета выпадает орлом в 0.9 случаев)
- B: очередное выпадение монеты (решка=1, орёл=0)
- $P(A)$: начальная уверенность в честности монеты; 0.5 (uniform prior)
- $P(B|A)$: при условии честности монеты, $P(1|A) = 0.5, P(0|A) = 0.5$
- $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$

Баесовская вероятность: пример

1

- A: монета честная ($\bar{A}$: монета выпадает орлом в 0.9 случаев)
- B: очередное выпадение монеты (решка=1, орёл=0)
- $P(A)$: начальная уверенность в честности монеты; 0.5 (uniform prior)
- $P(B|A)$: при условии честности монеты, $P(1|A) = 0.5, P(0|A) = 0.5$
- $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$
- $P(A|1) = \frac{0.5*0.5}{0.5*0.5+0.1*0.5} = 0.833$

Баесовская вероятность: пример

1 1

- A: монета честная ($\bar{A}$: монета выпадает орлом в 0.9 случаев)
- B: очередное выпадение монеты (решка=1, орёл=0)
- $P(A)$: начальная уверенность в честности монеты; 0.833 (новый prior)
- $P(B|A)$: при условии честности монеты, $P(1|A) = 0.5, P(0|A) = 0.5$
- $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$
- $P(A|1) = \frac{0.5*0.83}{0.5*0.83+0.1*0.17} = 0.96$

Баесовская вероятность: пример

1 1 1

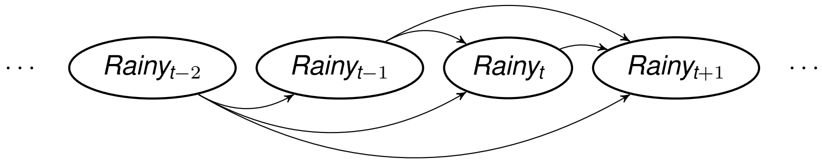
- A: монета честная ($\bar{A}$: монета выпадает орлом в 0.9 случаев)
- B: очередное выпадение монеты (решка=1, орёл=0)
- $P(A)$: начальная уверенность в честности монеты; 0.96 (новый prior)
- $P(B|A)$: при условии честности монеты, $P(1|A) = 0.5, P(0|A) = 0.5$
- $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$
- $P(A|1) = \frac{0.5*0.96}{0.5*0.96+0.1*0.04} = 0.99$

Баесовская вероятность: пример

- баесовский взгляд на вероятность использует «уверенность» (belief)
- наблюдения за окружающим миром меняют уверенность
- правило Баеса характеризует процесс обучения

Моделирование окружающего мира

Мир дождя



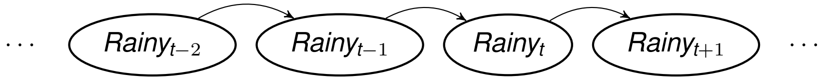
$$P(\mathit{Rainy}_t) = P(\mathit{Rainy}_t | \mathit{Rainy}_{t-1}, \mathit{Rainy}_{t-2}, \mathit{Rainy}_{t-3}, \ldots)$$

Мир боли и унижения

Марков спешит на помощь!

Предположение Маркова (Markov assumption):

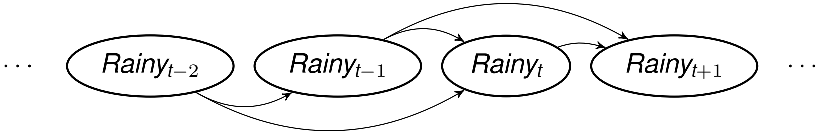
текущее состояние зависит от конечного фиксированного количества предыдущих состояний



$$P(Rainy_t) = P(Rainy_t | Rainy_{t-1})$$

Марковская цепь 1 порядка

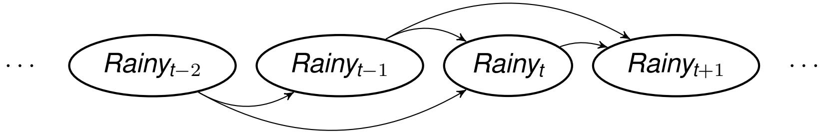
Мир дождя, попытка 2



$$P(Rainy_t) = P(Rainy_t | Rainy_{t-1}, Rainy_{t-2})$$

Марковская цепь 2 порядка

Мир дождя: зачем, что, почём

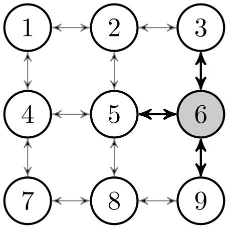


$$P(Rainy_t) = P(Rainy_t | Rainy_{t-1}, Rainy_{t-2})$$

Зачем всё это?

- обучение: $P(Rainy_t | Rainy_{t-1}, Rainy_{t-2}) = \frac{c(Rainy_t, Rainy_{t-1}, Rainy_{t-2})}{c(Rainy_{t-1}, Rainy_{t-2})}$
- предсказание: $argmax(P(X | Rainy_{t-1}, Rainy_{t-2}))$
- объяснение: $argmax(P(Rainy_t | Y, Z))$

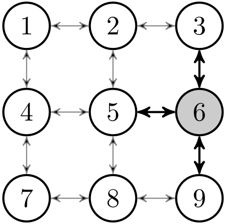
Мир лягушки



$$x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$$
$$P(x) = P(x_t | x_{t-1})$$

Марковская цепь 1 порядка

Мир лягушки



Матрица переходов P:

	1	2	3	…
1	0	$\frac{1}{2}$	0	
2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	
3	0	$\frac{1}{2}$	0	
4	$\frac{1}{3}$	0	0	
⋮				

Симуляция! (frog_sim.m, frog1.mp4, frog2.mp4)

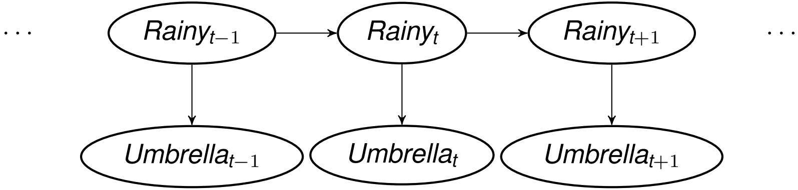
Мир лягушки

И что?

- более сложные миры (3D)
- симуляция случайных процессов (броуновское движение)
- положение автомобиля в городе, пакета в сети, атома в кристаллической решётке, ...

Hidden Markov Models (HMMs)

Мир дождя и зонтиков

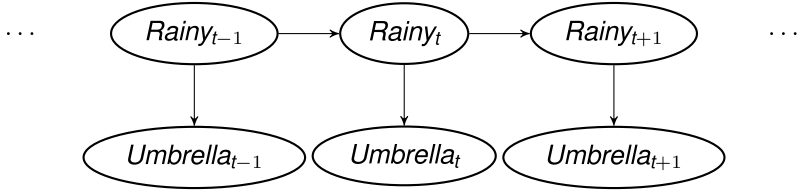


$$P(Rainy_t) = P(Rainy_t | Rainy_{t-1}) \text{ (модель мира)}$$
$$P(Umbrella_t) = P(Umbrella_t | Rainy_t) \text{ (модель сенсоров)}$$

HMM 1 порядка

- истинное состояние мира неизвестно
- состояние мира измеряется ненадёжными сенсорами

Мир дождя и зонтиков



$$P(Rainy_t) = P(Rainy_t | Rainy_{t-1}) \text{ (модель мира)}$$
$$P(Umbrella_t) = P(Umbrella_t | Rainy_t) \text{ (модель сенсоров)}$$

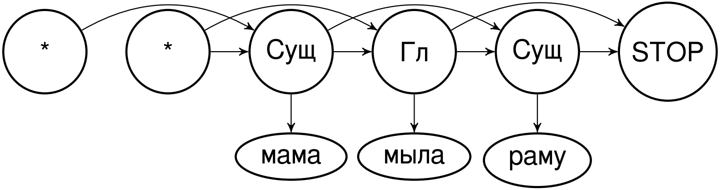
Зачем всё это?

- Наблюдается только $Umbrella_{1 \ldots t}$ (с ошибкой)
- То же, что у простых марковских моделей (обучение, предсказание, объяснение)
- Восстановление сигнала (сигнал скрыт, известны измерения)

Пример: части речи

Задача: «мама мыла раму» $\iff$ |Сущ Гл Сущ STOP|

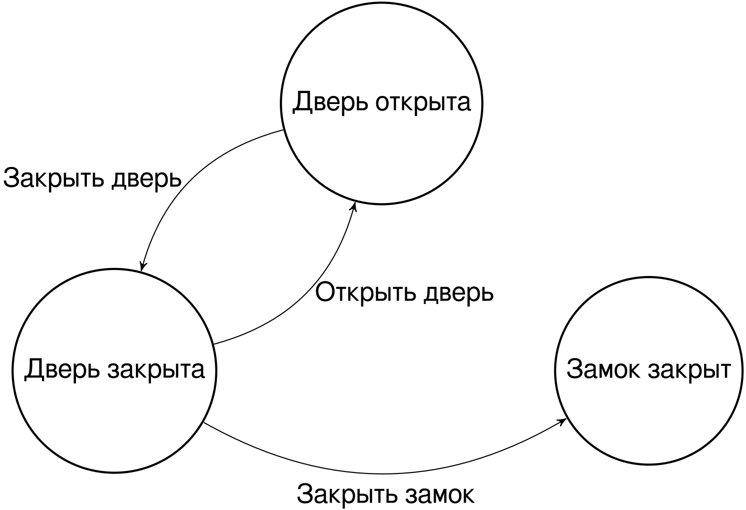
Пример: части речи



- HMM 2 порядка
- P(раму|Сущ),P(мыла|Гл),P(мыла|Сущ),P(Сущ|Гл, Сущ), ...
- |Сущ Гл Сущ STOP| — наиболее вероятная цепочка, объясняющая «мама мыла раму»
- $argmax(P(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m))$

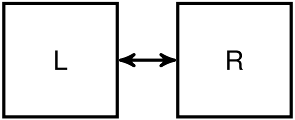
Конечные автоматы

Конечный автомат

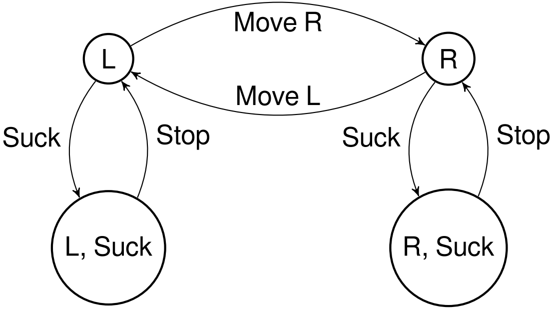


Мир пылесоса

Мир:

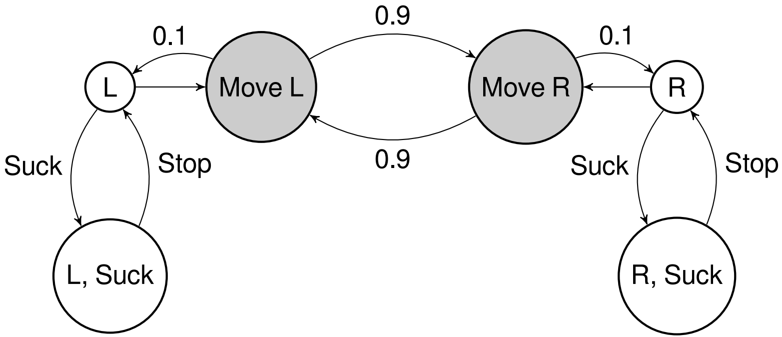


Конечный автомат:



Markov Decision Processes (MDPs), Partially Observable MDPs (POMPDs)

Мир глючного пылесоса



Действия не всегда приводят к ожидаемому результату

Обобщим

Управление:	Состояние:	известно	неизвестно
нет		Цепь Маркова	HMMs
есть		MDPs	POMDPs

- самая важная часть презентации ↑
- везде используется предположение Маркова
- посмотрим на цепи, HMMs и MDPs ещё раз

Спасибо за внимание!

`https://github.com/sil4/uni-prob-markov-2013-03/`

Использовались картинки:

- http://en.wikipedia.org/wiki/File:Coin_tossing.JPG
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:AAMarkov.jpg