

Марков, Баес и все-все-все

Дмитрий Грошев



СПбГУ

28.03.2013

- ▶ Баесовская вероятность
- ▶ Моделирование окружающего мира и его задачи
- ▶ Предположение Маркова
- ▶ Марковские цепи
- ▶ HMMs
- ▶ Активные действия — FSMs
- ▶ Неуверенность в исходе: MDPs
- ▶ Неуверенность в измерении: POMDPs

HARDCORE

Баесовский взгляд на вероятность aka The Red Pill

Классическая вероятность



100 бросков, 53 раза решка $\Rightarrow P = 0.53$

Описание окружающего мира

Баесовская вероятность



100 бросков, 53 раза решка \Rightarrow
на 53% я уверен, что выпадет решка

Описание уверенности наблюдателя

Баесовская вероятность

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- ▶ A — предположение
- ▶ B — свидетельство
- ▶ $P(A)$ — prior, начальная степень уверенности в A
- ▶ $P(A|B)$ — posterior, степень уверенности в A с учётом B
- ▶ $P(B|A)$ — «модель мира», вероятность B при полной уверенности в A

Баесовская вероятность: пример

- ▶ A : монета честная (\bar{A} : монета выпадает орлом в 0.9 случаев)
- ▶ B : очередное выпадение монеты (решка=1, орёл=0)
- ▶ $P(A)$: начальная уверенность в честности монеты; 0.5 (uniform prior)
- ▶ $P(B|A)$: при условии честности монеты,
 $P(1|A) = 0.5, P(0|A) = 0.5$
- ▶ $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$

1

- ▶ A : монета честная (\bar{A} : монета выпадает орлом в 0.9 случаев)
- ▶ B : очередное выпадение монеты (решка=1, орёл=0)
- ▶ $P(A)$: начальная уверенность в честности монеты; 0.5 (uniform prior)
- ▶ $P(B|A)$: при условии честности монеты,
 $P(1|A) = 0.5, P(0|A) = 0.5$
- ▶ $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$
- ▶ $P(A|1) = \frac{0.5*0.5}{0.5*0.5+0.1*0.5} = 0.833$

1 1

- ▶ A : монета честная (\bar{A} : монета выпадает орлом в 0.9 случаев)
- ▶ B : очередное выпадение монеты (решка=1, орёл=0)
- ▶ $P(A)$: начальная уверенность в честности монеты; 0.833 (новый prior)
- ▶ $P(B|A)$: при условии честности монеты,
 $P(1|A) = 0.5, P(0|A) = 0.5$
- ▶ $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$
- ▶ $P(A|1) = \frac{0.5*0.83}{0.5*0.83+0.1*0.17} = 0.96$

Баесовская вероятность: пример

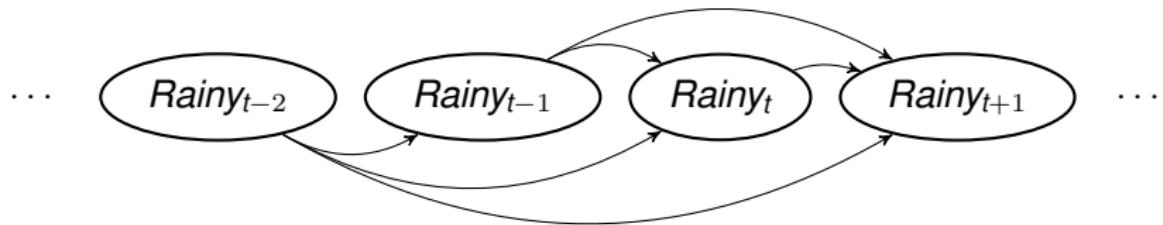
1 1 1

- ▶ A : монета честная (\bar{A} : монета выпадает орлом в 0.9 случаев)
- ▶ B : очередное выпадение монеты (решка=1, орёл=0)
- ▶ $P(A)$: начальная уверенность в честности монеты; 0.96 (новый prior)
- ▶ $P(B|A)$: при условии честности монеты,
 $P(1|A) = 0.5, P(0|A) = 0.5$
- ▶ $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$
- ▶ $P(A|1) = \frac{0.5 * 0.96}{0.5 * 0.96 + 0.1 * 0.04} = 0.99$

Баесовская вероятность: пример

- ▶ баесовский взгляд на вероятность использует «уверенность» (belief)
- ▶ наблюдения за окружающим миром меняют уверенность
- ▶ правило Баеса характеризует процесс обучения

Моделирование окружающего мира



$$P(Rainy_t) = P(Rainy_t | Rainy_{t-1}, Rainy_{t-2}, Rainy_{t-3}, \dots)$$

Мир боли и унижения

Марков спешит на помощь!

Предположение Маркова (Markov assumption):

текущее состояние зависит от конечного
фиксированного количества предыдущих
состояний

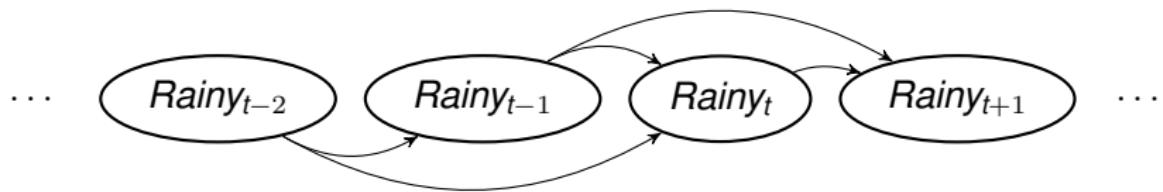
Мир дождя, попытка 2



$$P(Rainy_t) = P(Rainy_t | Rainy_{t-1})$$

Марковская цепь 1 порядка

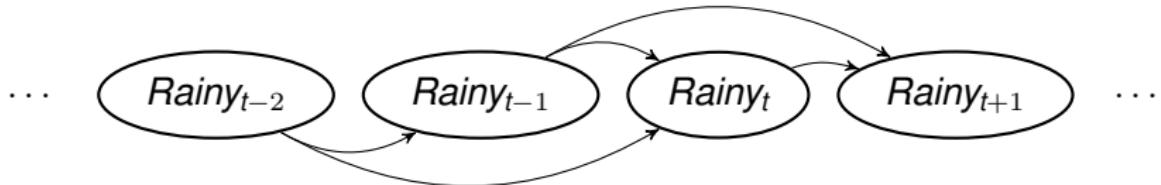
Мир дождя, попытка 2



$$P(Rainy_t) = P(Rainy_t | Rainy_{t-1}, Rainy_{t-2})$$

Марковская цепь 2 порядка

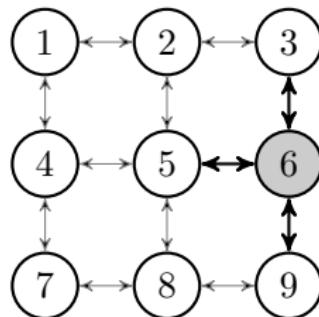
Мир дождя: зачем, что, почём



$$P(\text{Rainy}_t) = P(\text{Rainy}_t | \text{Rainy}_{t-1}, \text{Rainy}_{t-2})$$

Зачем всё это?

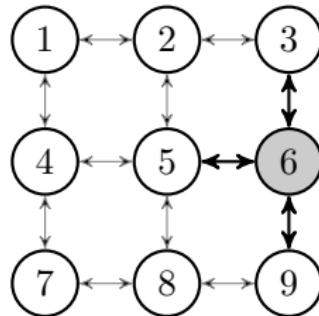
- ▶ обучение: $P(\text{Rainy}_t | \text{Rainy}_{t-1}, \text{Rainy}_{t-2}) = \frac{c(\text{Rainy}_t, \text{Rainy}_{t-1}, \text{Rainy}_{t-2})}{c(\text{Rainy}_{t-1}, \text{Rainy}_{t-2})}$
- ▶ предсказание: $\text{argmax}(P(X | \text{Rainy}_{t-1}, \text{Rainy}_{t-2}))$
- ▶ объяснение: $\text{argmax}(P(\text{Rainy}_t | Y, Z))$



$$x \in \{1, 2, \dots, 9\}$$
$$P(x) = P(x_t | x_{t-1})$$

Марковская цепь 1 порядка

Мир лягушки



Матрица переходов P :

| | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---------------|---------------|---------------|-----|
| 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | |
| 2 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | |
| 3 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | |
| 4 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | |
| : | | | | |

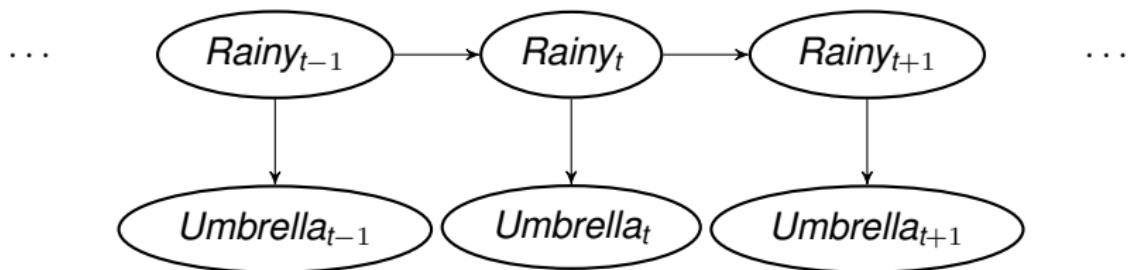
Симуляция! (frog_sim.m, frog1.mp4, frog2.mp4)

И что?

- ▶ более сложные миры (3D)
- ▶ симуляция случайных процессов (броуновское движение)
- ▶ положение автомобиля в городе, пакета в сети, атома в кристаллической решётке, ...

Hidden Markov Models (HMMs)

Мир дождя и зонтиков

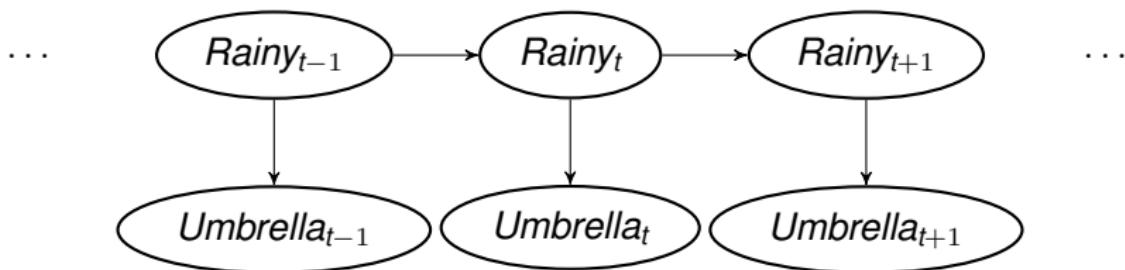


$$P(Rainy_t) = P(Rainy_t | Rainy_{t-1}) \text{ (модель мира)}$$
$$P(Umbrella_t) = P(Umbrella_t | Rainy_t) \text{ (модель сенсоров)}$$

HMM 1 порядка

- истинное состояние мира неизвестно
- состояние мира измеряется ненадёжными сенсорами

Мир дождя и зонтиков



$$P(Rainy_t) = P(Rainy_t | Rainy_{t-1}) \text{ (модель мира)}$$
$$P(Umbrella_t) = P(Umbrella_t | Rainy_t) \text{ (модель сенсоров)}$$

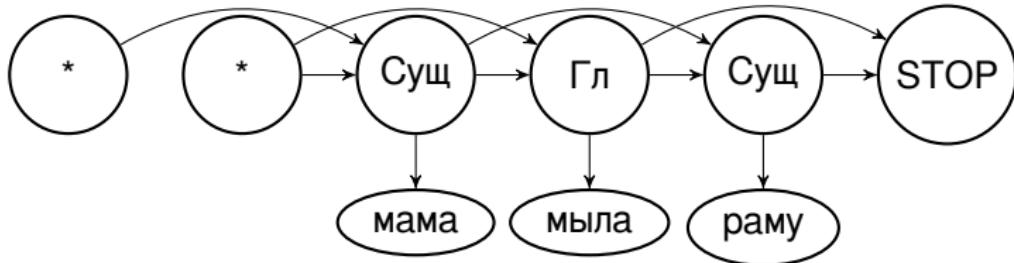
Зачем всё это?

- ▶ Наблюдается только $Umbrella_{1\dots t}$ (с ошибкой)
- ▶ То же, что у простых марковских моделей (обучение, предсказание, объяснение)
- ▶ Восстановление сигнала (сигнал скрыт, известны измерения)

Пример: части речи

Задача: «мама мыла раму» \iff |Сущ Гл Сущ STOP|

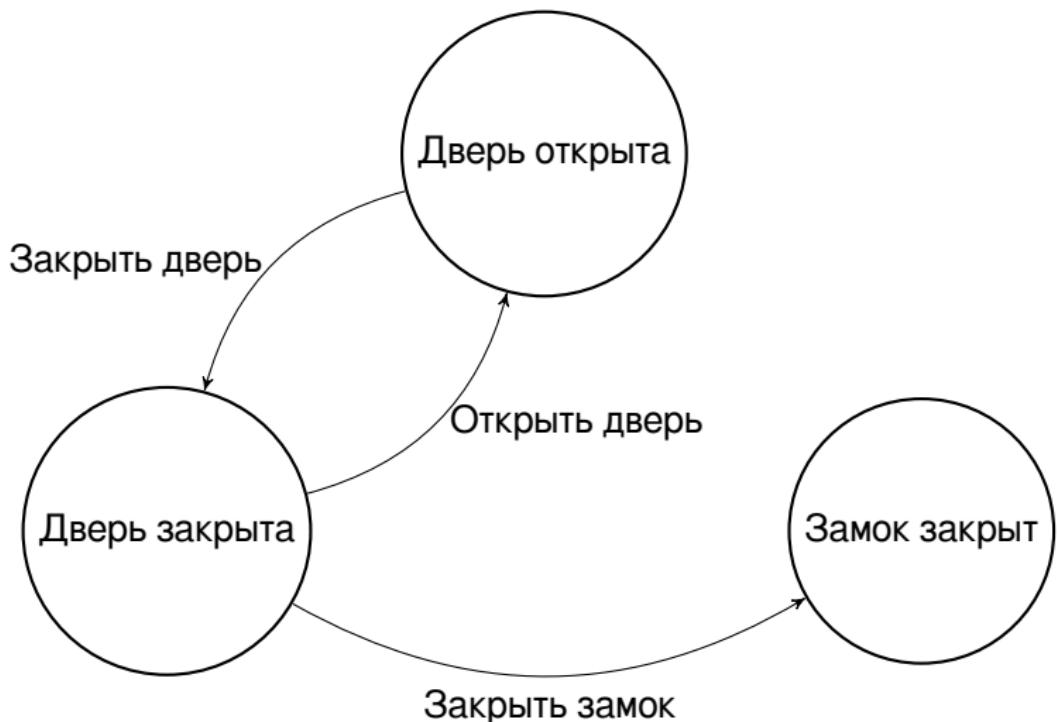
Пример: части речи



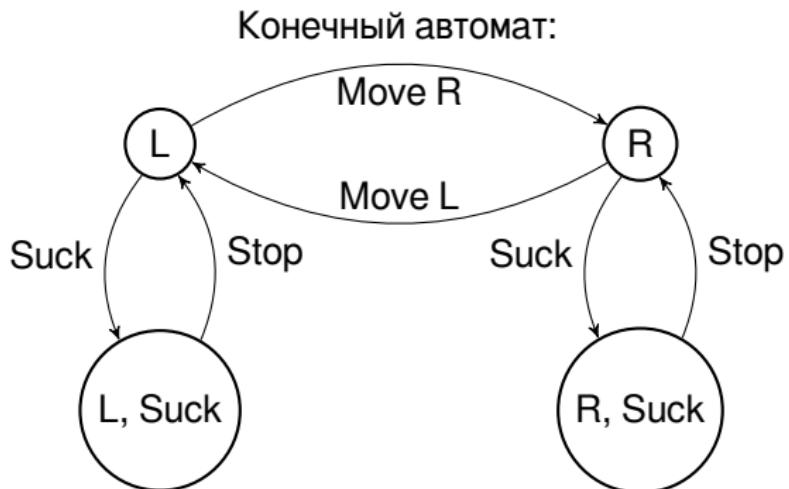
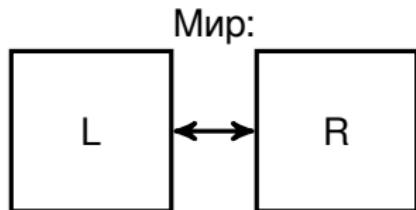
- ▶ HMM 2 порядка
- ▶ $P(\text{раму}|\text{Сущ}), P(\text{мыла}|\text{Гл}), P(\text{мыла}|\text{Сущ}), P(\text{Сущ}|\text{Гл, Сущ}), \dots$
- ▶ $|\text{Сущ Гл Сущ STOP}|$ — наиболее вероятная цепочка, объясняющая «мама мыла раму»
- ▶ $\operatorname{argmax}(P(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m))$

Конечные автоматы

Конечный автомат

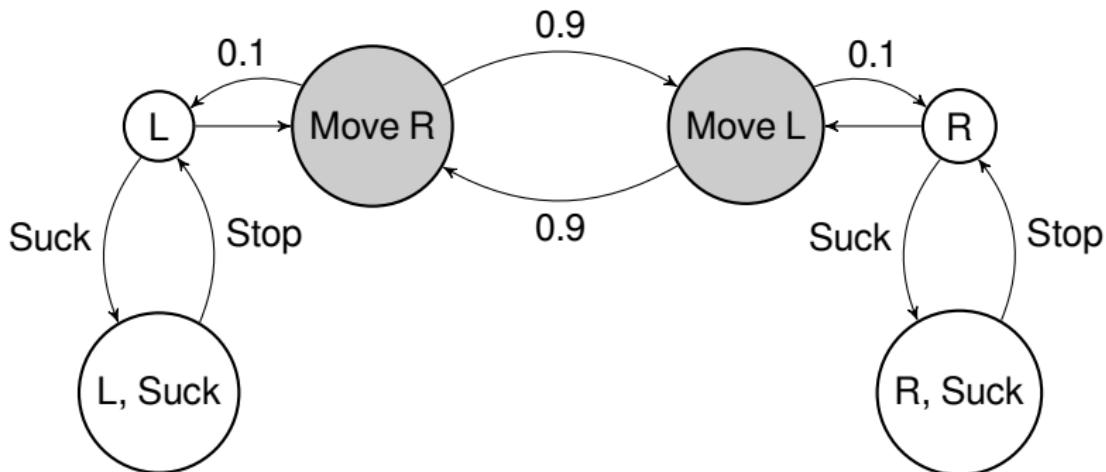


Мир пылесоса



Markov Decision Processes (MDPs),
Partially Observable MDPs (POMDPs)

Мир глючного пылесоса



Действия не всегда приводят к ожидаемому результату

Обобщим

| Управление: | Состояние: | известно | неизвестно |
|-------------|------------|--------------|------------|
| нет | | Цепь Маркова | HMMs |
| есть | | MDPs | POMDPs |

- ▶ самая важная часть презентации ↑
- ▶ везде используется предположение Маркова
- ▶ посмотрим на цепи, HMMs и MDPs ещё раз

Спасибо за внимание!

<https://github.com/si14/uni-prob-markov-2013-03/>

Использовались картинки:

- ▶ http://en.wikipedia.org/wiki/File:Coin_tossing.JPG
- ▶ <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:AAMarkov.jpg>