

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого»

Институт компьютерных наук и кибербезопасности
Направление: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Цифровой практикум
Отчет о выполнении практических работ №1 и №2

**Верстка математических формул в
редакторе L^AT_EX**

Студент,
группы 5130201/40002

_____ Семенов И. А.

Руководитель,
доцент ВШТИИ

_____ Попов С. Г.

«_____» _____ 2024г.

Санкт-Петербург, 2024

Аннотация

В данном отчёте по проделанной работе приведён анализ выполнения двух лабораторных работ по цифровому практикуму. Лабораторные работы заключались в повторении и вёрстке двух документов. В результате выполнения работ были получены точные (удалось повторить математические формулы, изображения, текст и их расположение на листах) копии данных документов в *.pdf* файлах, а также их код в *.tex* файлах. Во время выполнения этих работ мной были получены навыки работы с \LaTeX , достаточные для оформления курсовых работ.

Содержание

Введение	4
1 Постановка задачи	5
2 Ход выполнения работы	6
2.1 Выбор редактора для вёрстки 1-го и 2-го листов	6
2.2 Изучение структуры проекта	6
2.3 Выбор пакетов	6
2.3.1 Ниже приведены примеры используемых пакетов:	7
2.4 Выравнивание и позиционирование текста	7
2.5 Вёрстка математических формул	8
2.6 Создание графических изображений	9
2.6.1 Код для построения векторного изображения:	12
3 Возникшие проблемы	14
Заключение	15
Список литературы	16
Приложение А. Работа №1. Страница со списком математических формул	17
А.1. Исходный лист	17
А.2. Полученный лист	18
А.3. Код	19
Приложение Б. Работа №2. Страница из учебника, описывающая «симплектические многообразия»	23
Б.1. Исходный лист	23
Б.2. Полученный лист	24
Б.3. Код	25

Введение

\TeX — это система компьютерной вёрстки, созданная американским профессором информатики Дональдом Кнудом для реализации компьютерной типографии. Она предоставляет инструменты для секционирования документов, работы с перекрёстными ссылками и точной вёрстки текста. Благодаря этим функциям, \TeX пользуется популярностью в академической среде, особенно среди математиков и физиков. \TeX — универсальное средство для создания официальных документов. Использование кода для оформления позволяет пользователю сосредоточиться на содержании. Кроме того, такая особенность упрощает совместную работу, когда несколько авторов добавляют свои части в общий документ.

\LaTeX — это наиболее широко используемый набор макрорасширений системы \TeX , предназначенный для упрощения подготовки сложных документов. Типографский набор системы \TeX обычно оформляется с использованием \LaTeX . Этот пакет автоматизирует множество задач, включая набор текста на нескольких языках, нумерацию разделов и формул, создание перекрёстных ссылок, размещение иллюстраций и таблиц, ведение библиографии и многое другое. Помимо базового набора, существует большое количество пакетов для расширения возможностей \LaTeX .^[2]

1 Постановка задачи

Цель: в точности повторить два выданных листа, используя систему компьютерной вестки \LaTeX .

Задачи.

1. Выбрать и установить среду для вёстки документов.
2. Сверстать точную копию листа №1 с математическими формулами.
3. Сверстать точную листа №2, включающего в себя текст, математические формулы и два рисунка.
4. Сделать отчёт по проделанной работе.

2 Ход выполнения работы

2.1 Выбор редактора для вёрстки 1-го и 2-го листов

Для работы с \LaTeX существует множество редакторов: онлайн-редакторы, где компиляция происходит на удалённом сервере, редакторы, специально предназначенные для вёрстки \LaTeX , как, например, TeXstudio, или редакторы, специально не предназначенные для вёрстки \LaTeX , однако в них за счёт сторонних расширений эту вёрстку можно осуществлять, как, например, Visual Studio Code.

Для вёрстки первого листа использовался Visual Studio Code v1.95, так как в нём есть широкие возможности для редактирования текста и подсветки синтаксиса. Редактор был скачан с этого сайта: <https://code.visualstudio.com/>. Объём дистрибутива составил 136 МБ, объём программы — 1,5 ГБ. Была использована среда разработки TeX Live. Компиляция осуществлялась на ноутбуке с относительно производительным процессором (AMD Ryzen 5 5500U with Radeon Graphics @ 2.10 GHz), 16,00 ГБ оперативной памяти, 64-разрядной операционной системой. Работа осуществлялась на Linux (Fedora Workstation 40)¹.

Вёрстка второго листа осуществлялась в онлайн-редакторе Overleaf, из-за возможности использовать браузерное расширение PerfectPixel² для наложения исходного изображения на итоговый документ. Был использован браузер Google Chrome v130. Работа осуществлялась на Windows.

2.2 Изучение структуры проекта

Для изучения структуры проекта использовалась книга « \LaTeX 2 ϵ в примерах»[1]. В \LaTeX код делится на две части: преамбулу — в ней объявляются все пакеты, которые используются в документе, а также тип и формат документа и макроподстановки (например, `\newcommand\s[2]{\scalebox{#1}{#2}}`) — и основную часть, заключённую между командами `\begin{document}` и `\end{document}`. В основной части размещаются текст, формулы, рисунки и таблицы.

2.3 Выбор пакетов

Выбор пакетов стал непростой задачей, так как существует множество пакетов, которые решают одну и ту же проблему. Из-за этой неоднозначности приходилось искать, какой из способов будет оптимальным в том

¹Дистрибутив Linux, предназначенный для персональных компьютеров (<https://docs.fedoraproject.org/en-US/releases/f40/>)

²Браузерное расширение, работающее в Google Chrome и Safari (<https://chromewebstore.google.com/detail/perfectpixel-by-welldonec/dkaagdgmdbnecmcefdhjekcoceebi>).

или ином случае, а какой способ может привести к последующим проблемам. С выбором пакетов мне помогли ответы людей на таких ресурсах, как *stackoverflow* (<https://stackoverflow.com/>) и *tex.stackexchange* (<https://tex.stackexchange.com/>).

2.3.1 Ниже приведены примеры используемых пакетов:

- Для управления параметрами страницы
`\usepackage[textwidth=16cm, textheight=24cm]{geometry}`
- Для вставки изображений в документ
`\usepackage{graphicx}`
- Для русской локализации
`\usepackage[russian,english]{babel}`
- Для добавления красивого русского шрифта
`\usepackage[T2C]{fontenc}`
- Для более тонкой работы с таблицами
`\usepackage{tabularx}`
- Для добавления математических символов
`\usepackage{amssymb}`
- Для векторных рисунков
`\usepackage{tikz}`
- Для создания мультистраничных таблиц
`\usepackage{tabularray}`

2.4 Выравнивание и позиционирование текста

Так как нужно было получить точную копию исходного листа, позиционирование текста стало отдельной задачей. Нужно было учесть отступы от краёв документа, между строками, словами и абзацами.

Для того чтобы задать отступы от краёв документа, был использован пакет *geometry*. В нём можно задать параметры *left*, *right*, *top*, *bottom*, которые регулируют отступы слева, справа, сверху и снизу соответственно. Таким образом, были заданы отступы от краёв документа для 1-го и 2-го листов.

Чтобы задать отступы между строками, словами и абзацами, были использованы команды `\hspace{}`, `\vspace{}` и вручную введённые пробелы, такие как: `,`, `;`, `\quad`. Также были использованы такие теги, как `\centering` (позволяет центрировать текст на странице).

2.5 Вёрстка математических формул

Так как $\text{T}_\text{E}\text{X}$ создавался во многом для литературы, связанной с математическим языком, в нём есть очень продвинутая система вёрстки формул. Существует множество справочников, описывающих способы задания формул, включая различные операторы, символы, математические структуры и их стили отображения.

В $\text{T}_\text{E}\text{X}$ можно легко комбинировать текст с формулами, а также задавать их в различных режимах — от простых алгебраических выражений до сложных интегралов, матриц, сумм и пределов. Чтобы понять, как вёрстать формулы в $\text{L}_\text{A}\text{T}_\text{E}\text{X}$, были использованы как материалы из книги « $\text{L}_\text{A}\text{T}_\text{E}\text{X} 2_\epsilon$ в примерах»[1], так и ответы людей на форумах[7] и документация Overleaf[4].

Формулы задаются в «математическом режиме», который объявляется с помощью знаков $\$$ или $\backslash[\dots \backslash]$. С помощью $\$$ можно вставлять формулы прямо внутрь строки, например, код формулы $x^n + y^n = z^n$ будет выглядеть так: $\$x^n + y^n = z^n\$$. Тогда как формулы, заданные с помощью $\backslash[\dots \backslash]$, выносятся за пределы строки и помещаются в центр:

$$x^n + y^n = z^n$$

Также стоит отметить, что при вёрстке первого файла мне встретились многострочные формулы, как, например, эта:

$$\begin{aligned} 13.^7 \int_0^\pi \sin^{2n+1} x \cos 2mx \, dx = \\ = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \cos 2mx \, dx = \frac{(-1)^{m2n+1} n! (2n+1)!!}{(2m-2n-3)!! (2m+2n+1)!!} \quad [n \geq m-1] \\ = \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1} n! (2m-2n+3)!! (2n+1)!!}{(2m+2n+1)!!} \quad [n < m-1] \end{aligned}$$

GX2 (332)(12c)

Ниже приведён код этой формулы:

```
1 \begin{align*}
2   \hspace{-5pt} \makebox[0pt][l]{\$13.^{7}\$} \hspace{5pt}
   \hspace{23.5pt} \int_{0}^{\pi} \sin^{2n+1}x\cos 2mx \, dx = \hspace{-2.5pt}
3   & \hspace{5pt} = 2\hspace{-2pt}\int_{0}^{\pi/2} \sin^{2n+1}x\cos 2mx
   \hspace{-2pt}\, dx = \frac{(-1)^{m}2^{n+1}n!(2n+1)!!}{(2m-2n-3)!!(2m+2n+1)!!}
   & \hspace{-3pt}, [n \geq m - 1] \hspace{-3pt} & \hspace{5pt} =
   \hspace{-2pt}\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}n!(2m-2n+3)!!(2n+1)!!}{(2m+2n+1)!!}
   & \hspace{-3pt}, [n < m - 1] \hspace{-3pt} \\
4   \tag*{GX2 (332)(12c)} \hspace{-.5pt}\}
5 \end{align*}
```

Как нетрудно заметить, выравнивание формул в $\text{L}_\text{A}\text{T}_\text{E}\text{X}$ можно делать с помощью $\backslash\text{begin}\{\text{align}\} \dots \backslash\text{end}\{\text{align}\}$ [5].

2.6 Создание графических изображений

TeX, позволяет вставлять в документ растровые и векторные изображения, для которых были использованы пакеты *graphics* и *TikZ* соответственно.

Пакет *graphics* позволяет вставлять в документ *png* изображения. Можно задавать ширину, высоту, увеличение (*scale*) и другие параметры.

Например, так выглядит код для добавления растровой картинке, вставленной с помощью пакета *graphics*:

```
\begin{figure}
  \includegraphics{graph.png} % Загрузка изображения graph.png
  \caption{$y=\sigma(x)$} % Подпись под изображением
\end{figure}
```

Пакет *TikZ*, в свою очередь, позволяет строить комплексные векторные изображения, состоящие из множества элементов. С помощью него можно строить графики функций, геометрические фигуры, схемы, диаграммы, блок-схемы, иллюстрации процессов, а также оформлять сложные научные и технические чертежи. Пакет предоставляет пользователю гибкий язык разметки для определения и настройки каждой детали изображения: от расположения узлов и соединений до управления цветами, стилями линий и параметрами текста.

Чтобы упростить верстку векторного изображения, была использована таблица, описывающая его параметры. Для исходного изображения (Рис. 1) была построена таблица с каждым объектом, его типом, расположением и параметрами (Таблица 1). На основе этой таблицы было построено изображение (Рис. 2), которое путём наложения с помощью PixelPerfect было доведено до полного совпадения с оригиналом.

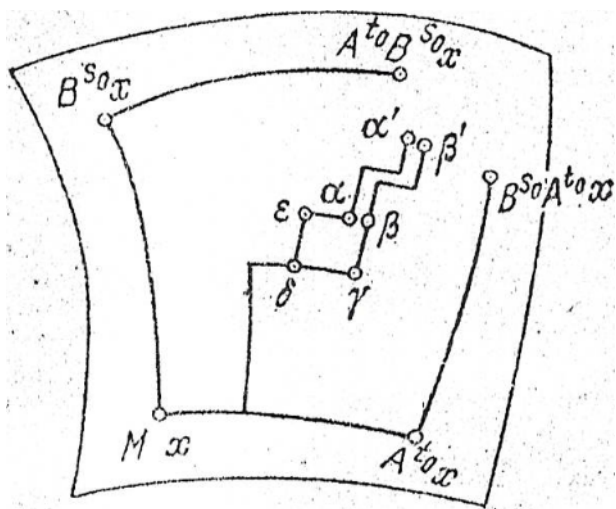


Рис. 1: Оригинал изображения

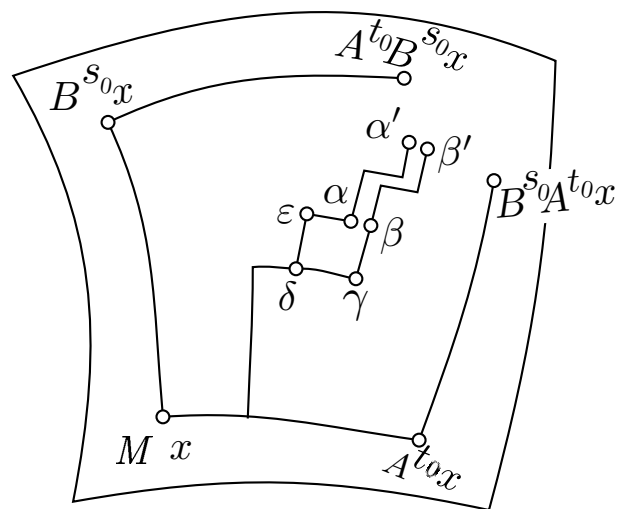


Рис. 2: Полученное изображение

Таблица 1: Объекты, использованные для векторного изображения

Тип объекта	Примерные координаты	Параметры
Кривая	$(0,0) \xrightarrow[\text{in}=10]{\text{out}=168} (-2.5,.05) \xrightarrow[\text{in}=-60]{\text{out}=79} \rightarrow (-2.86,2.61) \xrightarrow[\text{in}=158]{\text{out}=18.5} (.4,2.7) \xrightarrow[\text{in}=75]{\text{out}=-92} (0,0)$	тонкая
Кривая	$(.03,1.98) \xrightarrow[\text{in}=70]{\text{out}=-100} (-.42,.42) \xrightarrow[\text{in}=4]{\text{out}=172} \rightarrow (-1.96,.56) \xrightarrow[\text{in}=-65]{\text{out}=95} (-2.29,2.33) \xrightarrow[\text{in}=177]{\text{out}=-25} \rightarrow (-.51,2.595)$	тонкая
Ломаная	$(-1.16,1.45) \rightarrow (-1.095,1.78) \rightarrow (-.83,1.735) \rightarrow \rightarrow (-.52,2) \rightarrow (-.48,2.21)$	тонкая
Кривая	$(-1.45,.55) \xrightarrow[\text{in}=-90]{\text{out}=88} (-1.42,1.46) \xrightarrow[\text{in}=177]{\text{out}=5} \rightarrow (-1.16,1.45) \xrightarrow[\text{in}=170]{\text{out}=3} (-.8,1.39) \rightarrow \rightarrow (-.71,1.71) \rightarrow (-.65,1.95) \rightarrow \rightarrow (-.43,1.91) \rightarrow (-.37,2.17)$	тонкая
Текст	B в $(.13,1.85)$, s в $(.25,1.98)$, A в $(.39,1.88)$, x в $(.7,1.89)$	поворот 5° , увел. в 0.7 раза
Текст	0 в $(.33,1.91)$, 0 в $(.59,1.93)$	поворот -10° , увел. в 0.42 раза
Текст	t в $(.51,1.98)$	поворот 5° , увел. в 0.6 раза
Текст	A в $(-.55,.28)$	поворот -22° , увел. в 0.6 раза
Текст	t в $(-.4,.32)$, x в $(-.24,.18)$	поворот -22° , увел. в 0.7 раза
Текст	0 в $(-.34,.24)$	поворот -32° , увел. в 0.4 раза
Текст	M в $(-2.13,.36)$, x в $(-1.85,.36)$, B в $(-2.55,2.49)$, β в $(-.2,2.14)$, β в $(-.58,1.65)$, δ в $(-1.21,1.29)$, ε в $(-1.22,1.78)$, α в $(-.92,1.9)$, α' в $(-.63,2.33)$	поворот 0° , увел. в 0.7 раза
Текст	s в $(-2.39,2.62)$	поворот 0° , увел. в 0.72 раза
Текст	0 в $(-2.3,2.55)$	поворот -10° , увел. в 0.4 раза

Continued on next page

Таблица 1: Объекты, использованные для векторного изображения (Continued)

Тип объекта	Примерные координаты	Параметры
Текст	t в $(-.68, 2.88)$	поворот -10° , увел. в 0.65 раза
Текст	0 в $(-.62, 2.81)$	поворот -20° , увел. в 0.42 раза
Текст	B в $(-.53, 2.75)$, s в $(-.35, 2.85)$, x в $(-.2, 2.7)$	поворот -15° , увел. в 0.7 раза
Текст	0 в $(-.28, 2.78)$	поворот -30° , увел. в 0.42 раза
Текст	γ в $(-.8, 1.23)$	поворот 0° , увел. в 0.8 раза
Узел	в $(.03, 1.98)$, в $(-.42, .42)$, в $(-1.96, .56)$, в $(-2.29, 2.33)$, в $(-.51, 2.595)$, в $(-1.095, 1.78)$, в $(-.83, 1.735)$, в $(-.48, 2.21)$, в $(-1.16, 1.45)$, в $(-.8, 1.39)$, в $(-.71, 1.71)$, в $(-.37, 2.17)$	мин. размер 2.2пт, заливка белая, круг

2.6.1 Код для построения векторного изображения:

```
% Макросы для векторного рисунка
\newcommand{\circlenode}[3]{node[minimum size=2.2pt, inner sep=0pt,
outer sep=0pt, draw, circle, fill=white] {}}
\newcommand\textnode[3]{node[minimum size=0pt, inner sep=0pt, outer
sep=0pt, rotate=#2] {\scalebox{#3}{\footnotesize#1}}}%
\newcommand\backgroundnode[3]{node[rotate=#3, fill=white, minimum
width=#1, minimum height=#2] {}}

\begin{tikzpicture}[scale=1.35, transform shape]
  % Внешняя фигура
  \draw [thick]
    (0,0) to[out=168,in=10]
    (-2.5,.05) to[out=79,in=-60]
    (-2.86,2.61) to[out=18.5,in=158]
    (.4,2.7) to[out=-92,in=75] (0,0);

  % Внутренняя фигура
  \draw [thick]
    (.03,1.98) \circlenode to[out=-100,in=70]
    (-.42,.42) \circlenode to[out=172,in=4]
    (-1.96,.56) \circlenode to[out=95,in=-65]
    (-2.29,2.33) \circlenode to[out=25,in=177]
    (-.51,2.595) \circlenode;

  % Внутренняя фигура 2
  \draw [thick]
    (-1.16,1.45) --
    (-1.095,1.78) \circlenode --
    (-.83,1.735) \circlenode --
    (-.75,2.04) --
    (-.52,2) --
    (-.48,2.21) \circlenode;

  % Внутренняя фигура 3
  \draw [thick]
    (-1.45,.55) to[out=88,in=-90]
    (-1.42,1.46) to[out=5,in=177]
    (-1.16,1.45) \circlenode to[out=3,in=170]
    (-.8,1.39) \circlenode --
    (-.71,1.71) \circlenode --
    (-.65,1.95) --
    (-.43,1.91) --
    (-.37,2.17) \circlenode;

  % Текстовые подписи
  \draw
    (.5,1.9) \backgroundnode{20pt}{7.5pt}{5}
    (.13,1.85) \textnode{$B$}{5}{.7}
    (.25,1.98) \textnode{$s$}{5}{.7}
```

```

(.33,1.91) \textnode{$0$}{-10}{.42}
(.39,1.88) \textnode{$A$}{5}{.7}
(.51,1.98) \textnode{$t$}{5}{.6}
(.59,1.93) \textnode{$0$}{-10}{.42}
(.7,1.89) \textnode{$x$}{5}{.7}

(-.55,.28) \textnode{$A$}{-22}{.6}
(-.4,.32) \textnode{$t$}{-22}{.7}
(-.34,.24) \textnode{0}{-32}{.4}
(-.24,.18) \textnode{$x$}{-22}{.7}

(-2.13,.36) \textnode{\textit{M}}{0}{.7}
(-1.85,.36) \textnode{$x$}{0}{.7}

(-2.55,2.49) \textnode{$B$}{0}{.7}
(-2.39,2.62) \textnode{$s$}{0}{.72}
(-2.3,2.55) \textnode{$0$}{-10}{.4}
(-2.2,2.5) \textnode{$x$}{10}{.7}

(-.83,2.8) \textnode{$A$}{-10}{.7}
(-.68,2.88) \textnode{$t$}{-10}{.65}
(-.62,2.81) \textnode{$0$}{-20}{.42}
(-.53,2.75) \textnode{$B$}{-15}{.7}
(-.35,2.85) \textnode{$s$}{-15}{.7}
(-.28,2.78) \textnode{$0$}{-30}{.42}
(-.2,2.70) \textnode{$x$}{-15}{.7}

(-.2,2.14) \textnode{$\beta'$}{0}{.7}
(-.58,1.65) \textnode{$\beta$}{0}{.7}
(-.8,1.23) \textnode{$\gamma$}{0}{.8}
(-1.21,1.29) \textnode{$\delta$}{0}{.7}
(-1.22,1.78) \textnode{$\epsilon$}{0}{.7}
(-.92,1.9) \textnode{$\alpha$}{0}{.7}
(-.63,2.33) \textnode{$\alpha'$}{0}{.7};
\end{tikzpicture}

```

3 Возникшие проблемы

1. На первом листе возникла проблема выравнивания формул по левому краю. При использовании `\begin{align} ... \end{align}` формулы были выровнены по центру. Решить эту проблему мне помог ответ на *Stack Overflow*[\[7\]](#).
2. На первом листе возникла проблема подключения *sans-serif*³ шрифтов. При подключении стороннего шрифта программа при компиляции выдавала ошибку. Проблема была решена сменой среды с *pdflatex* на *lualatex*. Помог мне решить эту проблему ответ на *Stack Overflow*[\[6\]](#).
3. На первом листе возникла проблема изменения размера шрифта колонтитула. Проблема была частично решена с помощью `\relscale{.93}`, однако итоговый размер шрифта колонтитула оказался немного меньше, чем в оригинале.
4. При вёрстке второго листа возникла проблема с масштабом векторного рисунка. Эта проблема была решена с помощью документации[\[8\]](#) пакета *TikZ*. Были использованы параметры `scale=1.35`, `transform shape`.
5. При вёрстке второго листа возникла проблема с выбором инструмента для создания круглых вершин с белой заливкой и чёрной рамкой криволинейного четырёхугольника. В итоге это было сделано с помощью инструмента пакета *TikZ* — `node`. Решить эту проблему мне помогла документация[\[9\]](#) пакета *TikZ*.

³ *sans-serif* — шрифты без засечек.

Заключение

В итоге получилось 2 листа, достаточно точно повторяющих исходные, — настолько, что расхождения можно считать незначительными.

На вёрстку первого листа в сумме было потрачено около 18 часов. Большая часть из них, конечно, была потрачена на то, чтобы разобраться в документации \LaTeX и установить на компьютер среду разработки. Также большая часть времени была потрачена на выравнивание 10 формул, чтобы итоговый лист можно было наложить на исходный. Размер *.tex* файла составил 5,46 КБ, сам файл состоял из 124 строчек кода.

На вёрстку второго листа было потрачено около 13 часов. Большая часть времени ушла на то, чтобы сверстать векторный рисунок: разобраться с документацией пакета *TikZ* и решить проблемы, связанные с вёрсткой векторного рисунка. Также значительная часть времени ушла на выравнивание и позиционирование текста: нужно было в точности повторить исходный лист. В итоге удалось сверстать векторное изображение, вставить 22 формулы как в сам текст, так и отдельно (с новой строки), вставить растровый рисунок. Объём *.tex* файла составил 11,7 КБ, сам файл состоял из 209 строчек кода.

Список литературы

- [1] Книга « \LaTeX 2_ε в примерах» - Воронцов К. В.
- [2] «What are LaTeX Packages?» – [Электронный ресурс].
URL: <https://guides.lib.wayne.edu/latex/packages>
(Дата обращения: 08.09.2024)
- [3] «LaTeX/Boxes» – [Электронный ресурс].
URL: <https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Boxes>
(Дата обращения: 20.09.2024)
- [4] «Mathematical expressions» – [Электронный ресурс].
URL: https://www.overleaf.com/learn/latex/Mathematical_expressions
(Дата обращения: 08.09.2024)
- [5] «Aligning equations with amsmath» – [Электронный ресурс].
URL: https://www.overleaf.com/learn/latex/Aligning_equations_with_amsmath
(Дата обращения: 10.09.2024)
- [6] «pdflatex missing T2A fonts?» – [Электронный ресурс].
URL: <https://stackoverflow.com/questions/73484468/pdflatex-missing-t2a-fonts>
(Дата обращения: 25.09.2024)
- [7] «Left align block of equations» – [Электронный ресурс].
URL: <https://stackoverflow.com/questions/2632628/left-align-block-of-equations>
(Дата обращения: 12.09.2024)
- [8] «The TikZ and PGF Packages» – [Электронный ресурс].
URL: <https://tikz.dev/>
(Дата обращения: 22.10.2024)
- [9] «A Petri-Net for Hagen» – [Электронный ресурс].
URL: <https://tikz.dev/tutorial-nodes>
(Дата обращения: 20.10.2024)

Приложение А. Работа №1. Страница со списком математических формул

А.1. Исходный лист

А.2. Полученный лист

А.3. Код

```
1 \%!TEX program = lualatex
2 \documentclass[9pt,fleqn]{article}
3 \usepackage[height=24cm, left=2.5cm, right=2.5cm]{geometry}
4 \usepackage{graphicx}
5 % \usepackage[condensed,math]{iwona}
6 \usepackage[russian,english]{babel}
7 \usepackage[T2C]{fontenc}
8 % \usepackage{cmbright}
9 % \usepackage{unicode-math}
10 % \usepackage{polyglossia}
11 \usepackage[no-math,no-config]{fontspec}
12 \setmainfont{calibri.ttf}
13 \usepackage{tabularx}
14 \usepackage{ragged2e}
15 \usepackage{amsmath}
16 \usepackage{relsize}
17 % \setdefaultlanguage{russian}
18 % For russian controls
19 \usepackage{amssymb}
20 \title{Степени тригонометрических функций и линейных функций}
21 \author{Илья Семенов}
22 \pagenumbering{gobble}
23 \newcommand{\verticalGap}{-24pt}
24 % Makes possible using vars
25 \makeatletter
26 % Document margins correction
27 \sloppy
28 % Add new table column styles
29 \newcolumntype{C}[1]{>\centering\let\newline\\arraybackslash
  \hspace{0pt}}m{#1}}
30 \newcolumntype{R}[1]{>\RaggedLeft\arraybackslash}p{#1}}
31 \setlength{\tabcolsep}{0pt}
32 \renewcommand{\arraystretch}{1}
33 % Replace eng >= <= to rus ones
34 \renewcommand{\leq}{\leqslant}
35 \renewcommand{\geq}{\geqslant}
36 % Remove space around align
37 \setlength{\abovedisplayskip}{0pt}
38 \setlength{\belowdisplayskip}{0pt}
39 \setlength{\abovedisplayshortskip}{0pt}
40 \setlength{\belowdisplayshortskip}{0pt}
41 % Set default latex font
42 \newcommand{\Lcs}[1]{\normalfont\ttfamily\textbackslash#1}}
43 \begin{document}
44 \begin{tabularx}{16cm}{m{1.6cm} C{12.8cm} R{1.6cm}}
45 \relscale{.93}3.631 & \relscale{.93}\@title & \relscale{.93}
  \textbf{401}\ll[-7pt]
46 \rule{16cm}{.6pt}\ll[-9pt]
47 \rule{16cm}{.6pt}\ll
48 \end{tabularx}
```

```

49 \vspace{4pt}
50 \begin{align*}
51 \hspace{-5pt} \makebox[0pt][l]{$7.$} \hspace{5pt} \hspace{23.5pt}
   \int_0^{\pi} \sin^n x \cos(2m+1)x \, dx = 0 \quad \backslash\backslash
52 & \tag*{IX2 (332)(12a)} \hspace{-.5pt}}
53 \end{align*}
54 \vspace{\verticalGap}
55 \vspace{6pt}
56 \begin{align*}
57 \hspace{-5pt} \makebox[0pt][l]{$8.$} \hspace{5pt} \hspace{23.5pt}
   \int_0^{\pi} \sin^{\nu-1} x \cos ax \, dx = \frac{\pi \cos \frac{a}{2}}{\pi^2} \int_0^{\nu-1} \frac{1}{\nu} \mathcal{B} \left( \frac{\nu+a+1}{2}, \frac{\nu-a+1}{2} \right) \quad \backslash\backslash
58 & \hspace{-6pt} [\mathrm{Re} \nu > 0] \tag*{\mathbb{M}6 V 121(68)\text{и}, Br 337\text{и}}
   \hspace{-.5pt}}
59 \end{align*}
60 \vspace{\verticalGap}
61 \begin{align*}
62 \hspace{-5pt} \makebox[0pt][l]{$9.$} \hspace{5pt} \hspace{23.5pt}
   \int_0^{\pi/2} \cos^{\nu-1} x \cos ax \, dx = \frac{\pi}{2^{\nu} \nu} \mathcal{B} \left( \frac{\nu+a+1}{2}, \frac{\nu-a+1}{2} \right) \quad \backslash\backslash
63 & \hspace{-5pt} [\mathrm{Re} \nu > 0] \tag*{IX2 (332)(9c)}
   \hspace{-.5pt}}
64 \end{align*}
65 \vspace{\verticalGap}
66 \begin{align*}
67 \hspace{-5pt} \makebox[0pt][l]{$10.$} \hspace{5pt} \hspace{23.5pt}
   \int_0^{\pi/2} \sin^{\nu-2} x \cos \nu x \, dx = \frac{1}{2^{\nu} \nu} \sin \frac{\pi}{2} \quad \backslash\backslash
68 & \hspace{43pt} [\mathrm{Re} \nu > 1] \tag*{IX2 (332)(16b), \Phi x II}
   15 \hspace{2pt}}
69 \end{align*}
70 \vspace{\verticalGap}
71 \vspace{6pt}
72 \begin{align*}
73 \hspace{-5pt} \makebox[0pt][l]{$11.$} \hspace{5pt} \hspace{23.5pt}
   \int_0^{\pi} \sin^{\nu} x \cos \nu x \, dx = \frac{\pi}{2^{\nu}} \cos \frac{\pi}{2} \quad \backslash\backslash
74 & \hspace{1.3cm} [\mathrm{Re} \nu > -1] \tag*{\mathbb{M}6 V 121(70)\text{и}}
   \hspace{-.5pt}}
75 \end{align*}
76 \vspace{\verticalGap}
77 \vspace{6pt}
78 \begin{align*}
79 \hspace{-5pt} \makebox[0pt][l]{$12.$} \hspace{5pt} \hspace{23.5pt}
   \int_0^{\pi} \sin^{2n} x \cos 2mx \, dx \hspace{-1pt} &= \\
   2 \hspace{-1.5pt} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \cos 2mx \, dx &= \frac{(-1)^{n-m}}{2^{2n}} \hspace{-2pt} \begin{pmatrix} 2n \\ m \end{pmatrix} \\
80 2n \quad \backslash\backslash \\
81 n-m \\
82 \end{pmatrix} \pi \quad \backslash\backslash \\
83 &= 0 \quad [n < m] \hspace{48pt} \backslash\backslash

```

```

84 \tag*{Бн (40)(16), ГХ2 (332)(12b) \hspace{-.5pt}}
85 \end{align*}
86 \vspace{\verticalGap}
87 \vspace{-.5pt}
88 \begin{align*}
89 \hspace{-5pt} \makebox[0pt][l]{$13.^{7}$} \hspace{5pt} \hspace{23.5pt}
\int_0^{\pi} \sin^{2n+1}x \cos 2mx \, dx = \backslash
90 & \hspace{5pt} = 2 \hspace{-2pt} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}x \cos 2mx
\, dx = \frac{(-1)^{m-2n+1} n! (2n+1)!!}{(2m-2n-3)!! (2m+2n+1)!!} \quad
[n \geq m-1] \backslash
91 & \hspace{5pt} = \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1} n! (2m-2n+3)!! (2n+1)!!}{
(2m+2n+1)!!} \quad [n < m-1] \backslash
92 \tag*{ГХ2 (332)(12c) \hspace{-.5pt}}
93 \end{align*}
94 \vspace{\verticalGap}
95 \vspace{-3.5pt}
96 \begin{align*}
97 & \hspace{-6pt} \makebox[0pt][l]{$14.$} \hspace{5pt} \hspace{23.5pt}
\int_0^{\pi/2} \cos^{\nu-2}x \sin \nu x \, dx = \frac{1}{\nu-1}
\hspace{2.3cm} \backslash
98 & [\mathrm{Re} \nu > 1] \tag*{ГХ2 (332)(16c), \Phi x II 152}
99 \end{align*}
100 \vspace{\verticalGap}
101 \vspace{6pt}
102 \begin{align*}
103 \hspace{-6pt} \makebox[0pt][l]{$15.$} \hspace{5pt} \hspace{23.5pt}
\int_0^{\pi} \cos^m x \sin nx \, dx \hspace{-1pt} & = [1 - (-1)^{m+n}]
\hspace{2pt} \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin nx \, dx = \backslash
104 & = [1 - (-1)^{m+n}] \hspace{5pt} \mathrm{Biggl} \backslash \sum_{k=0}^{r-1} \frac{m!}{
(m-k)!} \frac{(m+n-2k-2)!!}{(m+n)!!} + s \frac{m! (n-m-2)!!}{(m+n)!!} \mathrm{Biggr} \backslash \backslash
105 \end{align*}
106 \vspace{\verticalGap}
107 \vspace{-16pt}
108 \begin{align*}
109 & \hspace{-2pt} \quad \quad \backslash; \hspace{1cm} \hspace{3pt} \left[ \backslash
\hspace{-2pt} r = \begin{cases}
110 m, & \text{если } m \leq n \\
111 n, & \text{если } m \geq n \\
112 \end{cases}, \hspace{12pt} s = \backslash
113 \begin{cases}
114 2, & \text{если } n-m = 4l+2 > 0 \\
115 1, & \text{если } n-m = 2l+1 > 0 \\
116 0, & \text{если } n-m = 4l \text{ или } n-m < 0
117 \end{cases} \right] \tag*{ГХ2 (332)(13a)}
118 \end{align*}
119 \vspace{\verticalGap}
120 \vspace{8pt}
121 \begin{align*}
122 \hspace{-6pt} \makebox[0pt][l]{$16.$} \hspace{5pt} \hspace{23.5pt}
\int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx \, dx = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^n
\frac{2^k}{k} \tag*{\Phi x II 153}

```

```
123 \end{align*}
124 \end{document}
```

Приложение Б. Работа №2. Страница из учебника, описывающая «симплектические многообразия»

Б.1. Исходный лист

Б.2. Полученный лист

Б.3. Код

```
1 \documentclass[9pt,a5paper]{article}
2 \special{papersize=148mm,210mm}
3 \usepackage[left=2.2cm, right=1.5cm, top=1.5cm,
   bottom=1.5cm]{geometry}
4
5 \usepackage{graphicx}
6 \graphicspath{ {./} }
7
8 \usepackage[russian,english]{babel}
9 \usepackage[T2C]{fontenc}
10
11 \usepackage{array}
12 \usepackage{tabularx}
13 \usepackage{ragged2e}
14 \usepackage{amsmath}
15
16 \usepackage{multirow}
17
18 % Package for graphs
19 \usepackage{tikz}
20
21 % Package for letterspacing
22 \usepackage[letterspace=300]{microtype}
23
24 % \setdefaultlanguage{russian}
25
26 % For russian controls
27 \usepackage{amssymb}
28
29 \title{СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ}
30 \author{Илья Семенов}
31
32 \pagenumbering{gobble}
33
34 % Makes possible using vars
35 \makeatletter
36
37 % Document margins correction
38 \sloppy
39
40 % Add new table column styles
41 \newcolumntype{C}[1]{>{\centering\let\newline\\arraybackslash
   \hspace{0pt}}m{#1}}
42 \newcolumntype{R}[1]{>{\RaggedLeft\arraybackslash}p{#1}}
43
44 \setlength{\tabcolsep}{0pt}
45 \renewcommand{\arraystretch}{1}
46
47 % Replace eng >= <= to rus ones
48 \renewcommand{\leq}{\leqslant}
```

```

49 \renewcommand{\geq}{\geqslant}
50 \renewcommand{\epsilon}{\varepsilon}
51 \renewcommand{\theta}{\vartheta}
52 \renewcommand{\phi}{\varphi}
53
54 % Макросы для векторного рисунка
55 \newcommand{\circlenode}[3]{node[minimum size=2.2pt, inner sep=0pt,
    outer sep=0pt, draw, circle, fill=white] {}}
56 \newcommand\textnode[3]{node[minimum size=0pt, inner sep=0pt,
    outer sep=0pt, rotate=#2] {\scalebox{#3}{#1}}}
57 \newcommand\backgroundnode[3]{node[rotate=#3, fill=white,
    minimum width=#1, minimum height=#2] {}}
58
59 \newcommand\hs[1]{\hspace{#1}}
60 \newcommand\vs[1]{\vspace{#1}}
61 \newcommand\s[2]{\scalebox{#1}{#2}}
62
63 \newcommand\eq{\hs{-.6pt}=\joinrel\hs{-4pt}=\hs{-.6pt}}
64 \newcommand\eqv{\hs{-1pt}\equiv\joinrel\hs{-4pt}\equiv\hs{-1pt}}
65 \newcommand\rarrow{\hs{3pt}-\hs{5pt}\joinrel\xrightarrow{}}
66 \newcommand\ti{-\joinrel\hs{-4pt}-}
67
68 % Remove space around align
69 \setlength{\abovedisplayskip}{0pt}
70 \setlength{\belowdisplayskip}{0pt}
71 \setlength{\abovedisplayshortskip}{0pt}
72 \setlength{\belowdisplayshortskip}{0pt}
73
74 % Set default latex font
75 \newcommand\Lcs[1]{\normalfont\ttfamily\textbackslash#1}}
76
77 \begin{document}
78 \hs{-20pt}
79 \begin{tabularx}{\textwidth}{m{.2\textwidth} C{.6\textwidth}
    R{.2\textwidth}}
80 \footnotesize180& \s{.69}{\@title} & \s{.69}{[ГЛ.8]\hs{100pt}}
81 \end{tabularx}
82
83 \vs{10pt}
84
85 \small\textbf{Д. Условие коммутативности потоков.} Пусть  $\pmb{A}$ ,
    \hs{5pt}  $\pmb{B}$  --- векторные поля \hs{2pt} на \hs{1pt}
    многообразии \hs{2pt}  $M$ .
86
87 \vs{-1pt}
88
89 \small\textit{Теорема}\hs{-1pt}. \hs{.5pt} \textit{Два потока \hs{1pt}
     $A^t$ , \hs{2pt}  $B^s$  \hs{1pt} коммутируют \hs{1pt} тогда \hs{1pt}
    и тогда, \hs{2pt} когда \hs{2pt} скобка \hs{4pt} Пуассона \hs{2pt}
    соответствующих \hs{1pt} векторных \hs{1pt} полей  $\pmb{[A, \hs{8pt} B]}$ 
    \hs{.5pt} равна \hs{.5pt} нулю.}
90

```

```

91 \vs{-1.5pt}
92
93 \small\textls{Доказательство}\hs{-1pt}.\hs{5pt} Если \hs{7pt}
    $A^{\{t\}}B^{\{s\}} \equiv B^{\{s\}}A^{\{t\}}$, \hs{3pt} то \hs{4pt} по \hs{4pt}
    лемме \hs{6pt}1 $\pmb{[A, \hs{10pt} B]} \equiv 0$.
94 \hs{3pt} Если \hs{2pt} $\pmb{[A, \hs{5pt} B]} = 0$, \hs{2pt} то по
    \hs{1pt} лемме \hs{.7pt} 1 \hs{0pt} для \hs{1pt} любой \hs{1pt}
    функции $\phi$ \hs{2pt} в \hs{0pt} любой \hs{1pt} точке \textit{x}
95 \vs{-6pt}
96 \[
97 \phi(A^{\{t\}}B^{\{s\}}x) \hs{2pt} \text{---} \hs{2pt} \phi(B^{\{s\}}A^{\{t\}}x) \equiv
    o(s^2+t^2), \quad s \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0. \vs{-3.5pt}
98 \]
99 Мы \hs{1pt} покажем, \hs{1pt} что отсюда \hs{1pt} вытекает \hs{1pt}
    $\phi(A^{\{t\}}B^{\{s\}}x) \equiv \phi(B^{\{s\}}A^{\{t\}}x)$ \hs{1pt} при достаточно
    \hs{1pt} малых \hs{1pt} $s$ \hs{.2pt} и \hs{0pt} $t$.
100
101 \vs{5pt}
102
103 \footnotesize \hs{1pt} Применяя это соотношение к \hs{1pt} локальным
    координатам $(\phi \equiv x_1, \dots, \phi \equiv x_n)$, \vs{-11pt}
104 получим $A^{\{t\}}B^{\{s\}} \equiv B^{\{s\}}A^{\{t\}}$.
105 \vs{-2pt}
106 \footnotesize \hs{1pt} Рассмотрим прямоугольник \hs{1pt} $0 \hs{1pt}
    \leq \hs{1pt} t \hs{1pt} \leq \hs{1pt} t_0$, $0 \leq s \leq s_0$ \hs{.2pt}
    (рис. 170) на плоскости \vs{-1pt}\newline
107 $(t, s)$. \hs{-2pt} Каждому пути, \hs{0pt} ведущему \hs{-3pt} из
    $(0, 0)$ \hs{1pt} в $(t_0, s_0)$ и состоящему \hs{1pt} из конечного
    \vs{-1pt}\newline
108 числа \hs{.5pt} отрезков координатных направлений, сопоставим
    произведение преобразований \hs{1pt} потоков \hs{1pt}
    $A^{\{t\}}$ \hs{1pt} и \hs{.5pt} $B^{\{s\}}$. Каждому отрезку $t_1
    \hs{.5pt} \leq \hs{.5pt} 1 \hs{.5pt} \leq \hs{.5pt} t_2$ \hs{.5pt}
    сопоставим $A^{\{t_2-t_1\}}$,
110 \hs{-18pt}
111 \begin{tabular}[m{5.1cm} c]{c}
112     & \multicolumn{2}{c}{\hs{1pt}} \\
113     & \begin{tikzpicture}[scale=1.35, transform shape]
114         % Внешняя фигура
115         \draw
116             (0,0) to[out=168,in=10]
117             (-2.5,.05) to[out=79,in=-60]
118             (-2.86,2.61) to[out=18.5,in=158]
119             (.4,2.7) to[out=-92,in=75] (0,0);
120
121         % Внутренняя фигура
122         \draw
123             (.03,1.98) \circlenode to[out=-100,in=70]
124             (-.42,.42) \circlenode to[out=172,in=4]
125             (-1.96,.56) \circlenode to[out=95,in=-65]
126             (-2.29,2.33) \circlenode to[out=25,in=177]
127             (-.51,2.595) \circlenode;

```

```

128
129 % Внутренняя фигура 2
130 \draw
131     (-1.16,1.45) --
132     (-1.095,1.78) \circlenode --
133     (-.83,1.735) \circlenode --
134     (-.75,2.04) --
135     (-.52,2) --
136     (-.48,2.21) \circlenode;
137
138 % Внутренняя фигура 3
139 \draw
140     (-1.45,.55) to[out=88,in=-90]
141     (-1.42,1.46) to[out=5,in=177]
142     (-1.16,1.45) \circlenode to[out=3,in=170]
143     (-.8,1.39) \circlenode --
144     (-.71,1.71) \circlenode --
145     (-.65,1.95) --
146     (-.43,1.91) --
147     (-.37,2.17) \circlenode;
148
149 % Текстовые подписи
150 \draw
151     (.5,1.9) \backgroundnode{20pt}{7.5pt}{5}
152     (.13,1.85) \textnode{$B$}{5}{.7}
153     (.25,1.98) \textnode{$s$}{5}{.7}
154     (.33,1.91) \textnode{$0$}{-10}{.42}
155     (.39,1.88) \textnode{$A$}{5}{.7}
156     (.51,1.98) \textnode{$t$}{5}{.6}
157     (.59,1.93) \textnode{$0$}{-10}{.42}
158     (.7,1.89) \textnode{$x$}{5}{.7}
159
160     (-.55,.28) \textnode{$A$}{-22}{.6}
161     (-.4,.32) \textnode{$t$}{-22}{.7}
162     (-.34,.24) \textnode{0}{-32}{.4}
163     (-.24,.18) \textnode{$x$}{-22}{.7}
164
165     (-2.13,.36) \textnode{\textit{M}}{0}{.7}
166     (-1.85,.36) \textnode{$x$}{0}{.7}
167
168     (-2.55,2.49) \textnode{$B$}{0}{.7}
169     (-2.39,2.62) \textnode{$s$}{0}{.72}
170     (-2.3,2.55) \textnode{$0$}{-10}{.4}
171     (-2.2,2.5) \textnode{$x$}{10}{.7}
172
173     (-.83,2.8) \textnode{$A$}{-10}{.7}
174     (-.68,2.88) \textnode{$t$}{-10}{.65}
175     (-.62,2.81) \textnode{$0$}{-20}{.42}
176     (-.53,2.75) \textnode{$B$}{-15}{.7}
177     (-.35,2.85) \textnode{$s$}{-15}{.7}
178     (-.28,2.78) \textnode{$0$}{-30}{.42}
179     (-.2,2.70) \textnode{$x$}{-15}{.7}

```

```

180
181          (-.2,2.14) \textnode{$\beta'$}{0}{.7}
182          (-.58,1.65) \textnode{$\beta$}{0}{.7}
183          (-.8,1.23) \textnode{$\gamma$}{0}{.8}
184          (-1.21,1.29) \textnode{$\delta$}{0}{.7}
185          (-1.22,1.78) \textnode{$\epsilon$}{0}{.7}
186          (-.92,1.9) \textnode{$\alpha$}{0}{.7}
187          (-.63,2.33) \textnode{$\alpha'$}{0}{.7};
188      \end{tikzpicture}
188  }\\[-18pt]
189  \vs{10pt}
190  отрезку \hs{2pt}  $s_1$  \hs{.5pt} \leq \hs{.5pt}  $s$  \hs{.5pt} \leq
191  \hs{.5pt}  $s_2$  -  $B^{s_2-s_1}$ ; при- \vs{-1pt} \newline
192  менять \hs{2pt} преобразования \hs{2pt} будем \hs{2.4pt} в
193  \vs{-1pt} \newline
194  порядке, \hs{1.1pt} в \hs{1pt} каком идут отрезки от \vs{-1pt}
195  \newline
196   $(0, \hs{3pt} 0)$ .
197  &
198
199  \\
200  \centering
201  \hs{-6pt} \includegraphics[scale=.24]{pic1} \hs{1pt}
202  & \\
203  \centering \scriptsize Рис. \hs{1.5pt} 170. \hs{0pt} К доказатель- &
204  \scriptsize Рис. \hs{2pt} 171. \hs{2pt} Криволинейный четырех- \\
205  \centering \scriptsize ству коммутативности & \scriptsize угольник
206   $\beta \gamma \delta \epsilon \alpha$ . \\
207  \centering \scriptsize потоков. &
208  \end{tabular}
209  \vs{7pt}
210  \footnotesize \hs{.5pt} Так, например, \hs{1pt} сторонам \hs{1pt}  $(0$ 
211  \hs{.5} \leq \hs{.5}  $t$  \hs{.5} \leq \hs{.5}  $t_0$ ,  $s \leq 0)$  и \hs{1pt}  $(t$ 
212  \leq  $t_0$ ,  $0 \leq \hs{.5} \leq \hs{.5} s \leq \hs{.5} \leq \hs{.5} s_0)$  отвечает
213  произведение \hs{1pt}  $B^{s_0} A^{t_0}$ , а сторонам \hs{1pt}  $(t \leq 0,$ 
214   $0 \leq \hs{.5} \leq \hs{.5} s \leq \hs{.5} \leq \hs{.5} s_0)$  \hs{3pt} и \hs{2pt}  $(s$ 
215  \leq  $s_0$ ,  $0 \leq \hs{.5} \leq \hs{.5} t \leq \hs{.5} \leq \hs{.5} t_0)$  --- произведение
216   $A^{t_0} B^{s_0}$ .
217  \vs{.5pt}
218  \footnotesize \hs{.5pt} Кроме того, мы сопоставим каждому \hs{1pt}
219  такому пути на \hs{1pt} плоскости \hs{0pt}  $(t, \hs{2pt} s)$  путь
220  \hs{1pt} на \hs{1pt} монгообразии \hs{1pt}  $MM$ , \hs{1pt} выходящий
221  \hs{.6pt} из \hs{.59pt} точки \hs{.8pt} \textit{x}, \hs{1pt} составленный
222  \hs{1pt} из \hs{.2pt} траекторий \vs{-1pt} потоков \hs{1pt}  $A^t$ 
223  \hs{.8pt} и \hs{.8pt}  $B^s$  \hs{.1pt} (рис. 171). \hs{1pt} Если
224  \hs{1pt} пути \hs{1pt} на плоскости \hs{1pt}  $(t, \hs{2pt} s)$  \hs{.5pt}
225  соответствует \vs{2pt} преобразование  $A^{t_1} B^{s_1} \dots A^{t_n}$ 
226   $B^{s_n}$ , то на монгообразии  $MM$  соответствующий путь \vs{-7pt}
227  заканчивается \hs{.5pt} в точке \hs{-.8pt}  $A^{t_1} B^{s_1} \dots$ 
228   $A^{t_n} B^{s_n}$  \textit{x}.
229  \hs{.5pt} Наша цель --- доказать, что все эти пути в действительности
230  заканчиваются в одной точке  $A^{t_0} B^{s_0} \leq A^{t_0} B^{s_0}$ 

```

\textit{x}.

208 \hs{.5pt} Разобъем отрезки $(0, t)$ и $(0, s)$ на $\hs{1pt}$
 N равных частей так, что $\hs{1pt}$ весь $\hs{1pt}$ прямоугольник
 $\hs{1pt}$ разделится на N^2 $\hs{.5pt}$ маленьких прямоугольников.
 Переход $\hs{1pt}$ от $\hs{1pt}$ сторон $(0, 0)$ --- $(0,$
 $\hs{2pt} t)$ --- $(s, \hs{2pt} t)$ к сторонам $(0, 0)$
 --- $(s, 0)$ --- (s, t) можно $\hs{1pt}$
 совершить $\hs{.5pt}$ в $\hs{1pt}$ N^2 шагов, $\hs{1pt}$ в каждом из которых
 $\hs{1pt}$ пара соведних сторон малень- $\hs{1pt}$ кого прямоугольника
 $\hs{1pt}$ заменяется другой парой $\hs{1pt}$ (рис. 172).
 209 \end{document}