**Д. Условие коммутативности потоков.** Пусть $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ — векторные поля на многообразии $M$.

Т е о р е м а. *Два потока* $A^t$, $B^s$ *коммутируют тогда и только тогда, когда скобка Пуассона соответствующих векторных полей* $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ *равна нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $A^tB^s \equiv B^sA^t$, то по лемме 1 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = 0$. Если $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = 0$, то по лемме 1 для любой функции $\varphi$ в любой точке $x$

$$\varphi(A^tB^sx) - \varphi(B^sA^tx) = o(s^2 + t^2), \quad s \longrightarrow 0, t \longrightarrow 0.$$

Мы покажем, что отсюда вытекает $\varphi(A^tB^sx) = \varphi(B^sA^tx)$ при достаточно малых $s$ и $t$.

Применяя это соотношение к локальным координатам ($\varphi = x_1, \ldots, \varphi = x_n$), получим $A^tB^s \equiv B^sA^t$.

Рассомтрим прямоугольник $0 \leqslant t \leqslant t_0, 0 \leqslant s \leqslant s_0$ (рис. 170) на плоскости $(t, s)$. Каждому пути, ведущему из (0, 0) в $(t_0, s_0)$ и состоящему из конечного числа отрезков координатных направлений, сопоставим произведение преобразований потоков $A^t$ и $B^s$. Каждому отрезку $t_1 \leqslant l \leqslant t_2$ сопоставим $A^{t_2 - t_1}$, отрезку $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ — $B^{s_2 - s_1}$; применять преобразования будем в порядке, в каком идут отрезки от (0, 0).

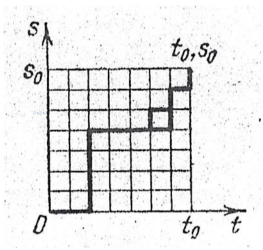


Рис. 170. К доказательству коммутативности потоков.

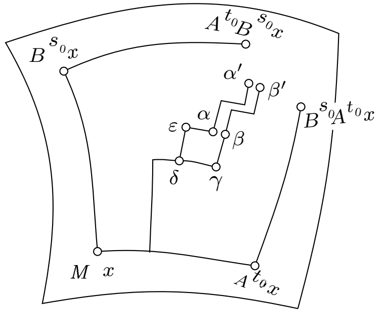


Рис. 171. Криволинейный четырехугольник $\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha$.

Так, например, сторонам $(0 \leqslant t \leqslant t_0, s = 0)$ и $(t = t_0, 0 \leqslant s \leqslant s_0)$ отвечает произведение $B^{s_0}A^{t_0}$, а сторонам $(t = 0, 0 \leqslant s \leqslant s_0)$ и $(s = s_0, 0 \leqslant t \leqslant t_0)$ — произведение $A^{t_0}B^{s_0}$.

Кроме того, мы сопоставим каждому такому пути на плоскости $(t, s)$ путь на монгообразии $M$, выходящий из точчи $x$, составленный из траекторий потоков $A^t$ и $B^s$ (рис. 171). Если пути на плоскости $(t, s)$ соответствует преобразование $A^{t_1}B^{s_1} \ldots A^{t_n}B^{s_n}$, то на монгообразии $M$ соответствующий путь заканчивается в точке $A^{t_1}B^{s_1} \ldots A^{t_n}B^{s_n}x$.

Наша цель — доказать, что все эти пути в действительности заканчиваются в одной точке $A^{t_0}B^{s_0} = A^{t_0}B^{s_0}x$.

Разобъем отрезки $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$ и $(0 \leqslant s \leqslant s_0)$ на $N$ равных частей так, что весь прямоугольник разделится на $N^2$ маленьких прямоугольников. Переход от сторон (0, 0) — (0, $t_0$) — ($s_0$, $t_0$) к сторонам (0, 0) — ($s_0$, 0) — ($s_0$, $t_0$) можно совершить в $N^2$ шагов, в каждом из которых пара соведних сторон маленького прямоугольника заменяется другой парой (рис. 172).