Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт компьютерных наук и кибербезопасности
Высшая школа технологий искусственного интелекта
Направление: 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Расчётное задание №2
«Устойчивость линейной системы автоматического управления»

по дисциплине: «Теория автоматического управления»

i=17

Выполнил студент
группы №3 ________________ Семенов И. А.

Проверил
преподователь ________________ Суханов А. А.

«_____»________________ 2025г.

Санкт-Петербург
осень, 2025

Постановка задачи

Дана передаточная функция разомкнутой системы:

$$H_{\text{раз}}(p) = \frac{K(T_1 p + 1)}{p(p^2 + \omega_0^2)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)},$$

где

$$K = \frac{i}{4}, \qquad \omega_0 = i, \qquad T_1 = 0.01, \qquad T_2 = 0.02i, \qquad T_3 = 0.01i.$$

В рамках выполнения данной работы $i = 17$.
Следовательно,

$$K = 4.25, \qquad \omega_0 = 17, \qquad T_1 = 0.01, \qquad T_2 = 0.34, \qquad T_3 = 0.17,$$

Таким образом, передаточная функция имеет вид:

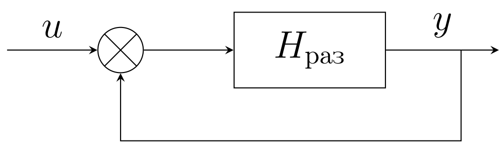
$$H_{\text{раз}}(p) = \frac{4.25(0.01p + 1)}{p(p^2 + 289)(0.34p + 1)(0.17p + 1)}$$

Решение

1. Характеристическое уравнение замкнутой системы

- По условию дана передаточная функция разомкнутой системы.
- Вычислим передаточную функцию замкнутой системы.

Рассмотрим систему, замкнутую единичной обратной связью:



Передаточная функция замкнутой системы:

$$H_{\text{зам}}(p) = \frac{H_{\text{раз}}(p)}{1 + H_{\text{раз}}(p)}.$$

Подставим выражение для $H_{\text{раз}}(p)$:

$$H_{\text{зам}}(p) = \frac{\dfrac{K(T_1p+1)}{p(p^2+\omega_0^2)(T_2p+1)(T_3p+1)}}{1 + \dfrac{K(T_1p+1)}{p(p^2+\omega_0^2)(T_2p+1)(T_3p+1)}}$$

$$= \frac{K(T_1p+1)}{p(p^2+\omega_0^2)(T_2p+1)(T_3p+1) + K(T_1p+1)}.$$

Характеристический полином замкнутой системы $\alpha(p)$ — это знаменатель передаточной функции:

$$\alpha(p) = p(p^2+\omega_0^2)(T_2p+1)(T_3p+1) + K(T_1p+1).$$

Подставим значения параметров для $i = 17$:

$$K = 4.25, \quad \omega_0 = 17, \quad T_1 = 0.01, \quad T_2 = 0.34, \quad T_3 = 0.17.$$

Тогда:

$$\alpha(p) = \underbrace{p(p^2+289)(0.34p+1)(0.17p+1)}_{(1)} + \underbrace{4.25(0.01p+1)}_{(2)}.$$

Раскроем скобки поэтапно.

Вычислим (1):

$$\begin{aligned}(1) &= p(p^2+289)(0.34p+1)(0.17p+1)\\ &= p(p^2+289)(0.0578p^2+0.51p+1)\\ &= p(0.0578p^4+0.51p^3+p^2+16.7042p^2+147.39p+289)\\ &= p(0.0578p^4+0.51p^3+17.7042p^2+147.39p+289)\\ &= 0.0578p^5+0.51p^4+17.7042p^3+147.39p^2+289p.\end{aligned}$$

Вычислим (2):

$$\begin{aligned}(2) &= 4.25(0.01p+1)\\ &= 0.0425p+4.25.\end{aligned}$$

Сложим (1) и (2):

$$\begin{aligned}\alpha(p) &= (1)+(2)\\ &= 0.0578p^5+0.51p^4+17.7042p^3+147.39p^2+289p+0.0425p+4.25\\ &= 0.0578p^5+0.51p^4+17.7042p^3+147.39p^2+289.0425p+4.25.\end{aligned}$$

Таким образом, получили характеристический полином пятого порядка:

$$\alpha(p) = 0.0578p^5+0.51p^4+17.7042p^3+147.39p^2+289.0425p+4.25,$$

где коэффициенты:

$$a_0 = 0.0578, \quad a_1 = 0.51, \quad a_2 = 17.7042, \quad a_3 = 147.39,$$
$$a_4 = 289.0425, \quad a_5 = 4.25.$$

2. Критерий устойчивости Гурвица

Для анализа устойчивости системы применим алгебраический критерий Гурвица.

Согласно теореме Гурвица, для того чтобы у вещественного многочлена $\alpha(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n$ все корни имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases}\operatorname{sign}\Delta_k = \operatorname{sign} a_0, & k = 2m-1\\ \Delta_k > 0, & k = 2m\end{cases} \qquad (m \in \mathbb{N}),$$

где Δ_k — ведущие главные миноры Γ порядка k (определители Гурвица).

Поскольку $a_0 = 0.0578 > 0$, условие сводится к $\Delta_k > 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, 5$.

Составим матрицу Гурвица для полинома 5-го порядка:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Подставим значения коэффициентов:

$$a_0 = 0.0578, \quad a_1 = 0.51, \quad a_2 = 17.7042, \quad a_3 = 147.39,$$
$$a_4 = 289.0425, \quad a_5 = 4.25.$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0.51 & 147.39 & 4.25 & 0 & 0 \\ 0.0578 & 17.7042 & 289.0425 & 0 & 0 \\ 0 & 0.51 & 147.39 & 4.25 & 0 \\ 0 & 0.0578 & 17.7042 & 289.0425 & 0 \\ 0 & 0 & 0.51 & 147.39 & 4.25 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определители Гурвица.

Определитель Δ_1:

$$\Delta_1 = a_1 = 0.51 > 0.$$

Определитель Δ_2:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0.51 \cdot 17.7042 - 0.0578 \cdot 147.39$$
$$= 9.029142 - 8.519142 = 0.51 > 0.$$

Определитель Δ_3:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3\Delta_2 - a_1(a_1 a_4 - a_0 a_5)$$
$$= 147.39 \cdot 0.51 - 0.51 \cdot (0.51 \cdot 289.0425 - 0.0578 \cdot 4.25)$$
$$= 75.1689 - 0.51 \cdot (147.411675 - 0.24565)$$
$$= 75.1689 - 0.51 \cdot 147.166025$$
$$= 75.1689 - 75.05467275 = 0.11422725 > 0.$$

Определитель Δ_4:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = a_4\Delta_3 - a_5 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Вычислим вспомогательный определитель:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1(a_2^2 - a_0a_4) - a_3(a_0a_2) + a_5(a_0^2)$$

$$\begin{aligned}
&= 0.51 \cdot (17.7042^2 - 0.0578 \cdot 289.0425) - \\
&\quad - 147.39 \cdot (0.0578 \cdot 17.7042) + 4.25 \cdot 0.0578^2 \\
&= 0.51 \cdot (313.438577 - 16.710658) - 147.39 \cdot 1.023503 + \\
&\quad + 4.25 \cdot 0.003341 \\
&= 0.51 \cdot 296.727919 - 150.854707 + 0.014199 \\
&= 151.331239 - 150.854707 + 0.014199 \\
&= 0.490731.
\end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
\Delta_4 &= 289.0425 \cdot 0.11422725 - 4.25 \cdot 0.490731 \\
&= 33.018932 - 2.085607 \\
&= 30.933325 > 0.
\end{aligned}$$

Определитель Δ_5:

$$\Delta_5 = a_5 \cdot \Delta_4 = 4.25 \cdot 30.933325 = 131.466631 > 0.$$

Вывод: Все определители Гурвица положительны:

$$\Delta_1 = 0.51 > 0, \quad \Delta_2 = 0.51 > 0, \quad \Delta_3 = 0.11422725 > 0,$$
$$\Delta_4 = 30.933325 > 0, \quad \Delta_5 = 131.466631 > 0.$$

Следовательно, по критерию Гурвица замкнутая система **устойчива**.

Ответ:

Система **устойчива**, так как все определители Гурвица положительны, следовательно, все корни характеристического полинома замкнутой системы имеют отрицательные вещественные части, что по критерию Гурвица означает устойчивость системы.

Семенов Илья
группа №3
$i = 17$