

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ
XXVIII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

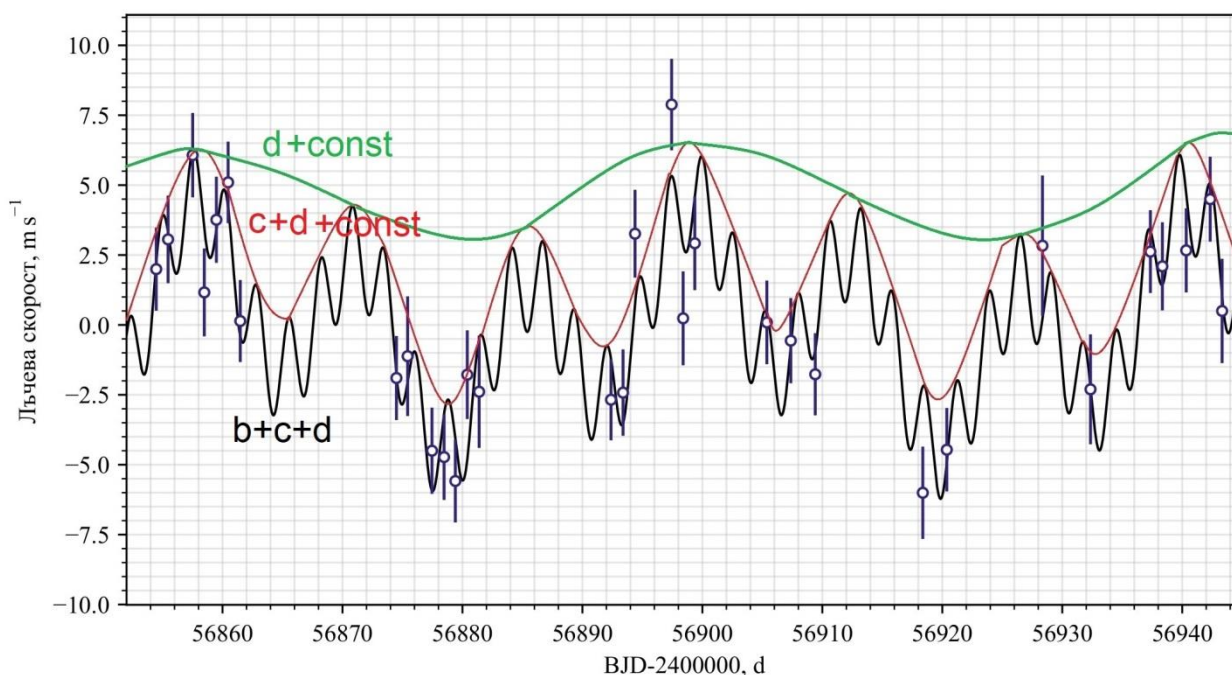
Национален кръг на олимпиадата по астрономия
Димитровград, 10 май 2025 г.
Възрастова група XI-XII клас, първи тур – Решения

Задача 1. Планетата Наско 7. През 2025 г. бившият участник в олимпиадата Атанас Стефанов (випуск 2019 г.) откри трета екзопланета, обикаляща около звездата GJ 3998. Звездата е червено джудже с маса 0,52 слънчеви маси, радиус 0,50 слънчеви радиуса и фотосферна температура 3730 K. Трите планети около звездата са обозначени GJ 3998 b, GJ 3998 c и GJ 3998 d, като планетата b е на най-вътрешна орбита, а планетата d – на най-външна. Приемете, че орбитите на планетите са кръгови и лежат в една равнина. На Фигура 2 е дадена кривата на лъчевите скорости на звездата, апроксимираща най-добре спектралните данни.

- **А)** Пресметнете минималната възможна маса на планетата b в земни маси. [4 т.]
- **Б)** Представете си, че сте на повърхността на планетата d. През какъв интервал от време планетата с ще има същите небесни координати като звездата? [3 т.]
- **В)** Пресметнете приблизително средната температура на повърхността на планетата с в градуси по Целзий, приемайки, че планетата е земеподобна. [3 т.]
- **Г)** В действителност, представените данни са коригирани за магнитна активност. Магнитната активност на звездата поражда големи тъмни петна. Защо петната влияят на наблюдаваната крива на лъчевите скорости? Подкрепете отговора си с примерна схема. [2 т.]

Решение.

А) Наличието на всяка от трите планети внася в кривата на лъчевите скорости синусоидална компонента с период, равен на орбиталния период на планетата. Тъй като периодите се различават значително, можем да разложим тези компоненти, като първо премахнем най-вътрешната планета b (червената крива), а после и планета c, за да остане само ефекта от планета d (зелената крива).



Фигура A1. Разлагане на кривата на лъчевите скорости.

Можем да измерим орбиталния период на трите планети по диаграмата с точност $\sim 1\%$ за b, c и $\sim 3\%$ за d (тъй като за нея има само 2 пълни периода). Получаваме $P_B = 2,65 \text{ d}$, $P_C = 13,7 \text{ d}$, $P_D = 42 \text{ d}$.

Отделно от периода, за b трябва да измерим и амплитудата u_B (половината от разстоянието от максимум до минимум). Измерваме множество разлики от максимум до средното на околните два минимума и след усредняване получаваме $u_B = 1,8 \text{ m/s}$. Ако i е наклонът на орбитите спрямо небесната равнина, то скоростта на центъра на звездата спрямо центъра на масите е

$$v_S = \frac{u_B}{\sin i}.$$

Минимален резултат за скоростта, а оттам и за масата на планетата, ще получим при $i = 90^\circ$ (като доказването на това не се изисква от участниците). Разстоянието от центъра на звездата до центъра на масите за системата „звезда – планета b“ тогава е

$$r_S = \frac{v_S P_B}{2\pi} = 65,59 \text{ km}.$$

Същевременно, от III закон на Кеплер намираме разстоянието от центъра на звездата до планета b,

$$r_B = \left(\frac{M_S}{M_\odot} \left(\frac{P_B}{1 \text{ yr}} \right)^2 \right)^{1/3} \text{ au} = 0,030 \text{ au},$$

или $r_B = 4,488 \cdot 10^6 \text{ km} = 68420 r_S$. То е практически равно на радиуса на орбитата на b около центъра на масите. И тъй като

$$M_S r_S = M_B r_B,$$

получаваме $M_B = M_S / 68420$, или **2,5 земни маси**.

Б) Можем да изчислим синодичния период на планетата c спрямо планетата d от

$$\frac{1}{P_C} = \frac{1}{P_{SYN}} + \frac{1}{P_D}.$$

Пресмятаме и получаваме $P_{SYN} = 20,3 \text{ d}$. Планетата c ще има същите небесни координати като звездата в горно и в долно съединение, тоест два пъти на синодичен период. Това става веднъж на **10,2 d**.

В) От III закон на Кеплер намираме разстоянието планета c – звезда,

$$r_C = \left(\frac{M_S}{M_\odot} \left(\frac{P_C}{1 \text{ yr}} \right)^2 \right)^{1/3} \text{ au} = 0,090 \text{ au}.$$

Лъчистият поток на единица площ, създаван от звездата със светимост L върху планетата c, ще бъде

$$F = \frac{L}{4\pi r_C^2},$$

където по закона на Стефан-Болцман $L = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$.

Проекцията на планетата, гледано от звездата, е диск с радиус R_C . Умножаваме неговата площ по F , за да намерим общата мощност, която планетата поема от звездата. Ако Бонд-албедото на планетата е A , то умножаваме по $(1 - A)$, за да пресметнем погълнатата от планетата мощност, тоест енергията на единица време, която загрева планетата:

$$L_P = \frac{L}{4\pi r_C^2} \pi R_C^2 (1 - A).$$

По закона за запазване на енергията тази мощност е равна на излъчената топлинно от планетата:

$$L_P = 4\pi R_C^2 \sigma T_C^4.$$

Заместваме и получаваме

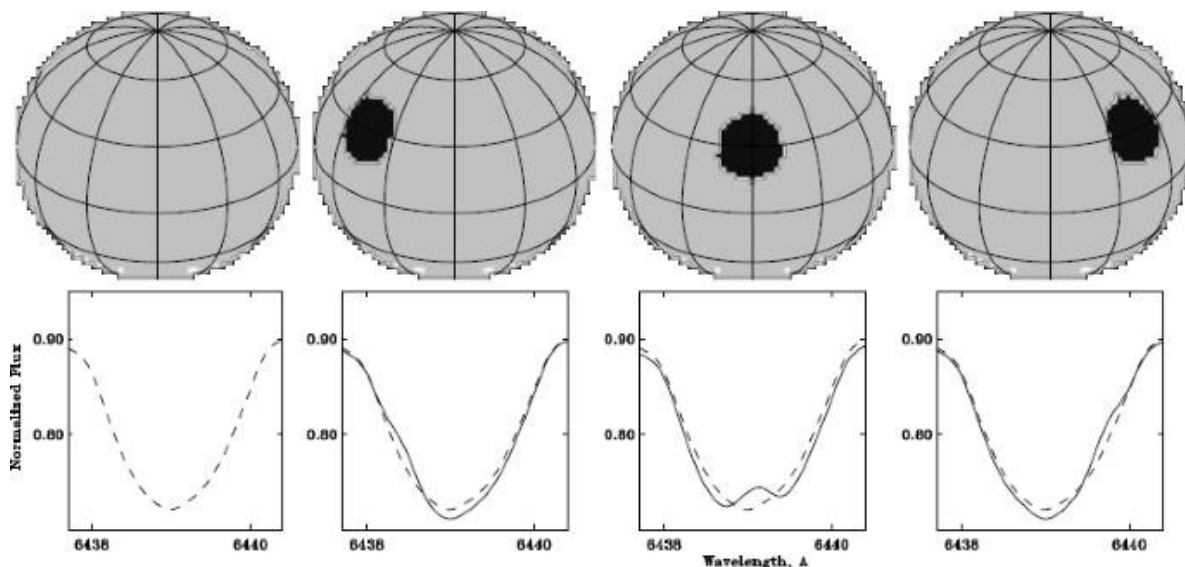
$$4\pi R_c^2 \sigma T_c^4 = \frac{4\pi R_s^2 \sigma T_s^4}{4\pi r_c^2} \pi R_c^2 (1 - A) \Rightarrow T_c^4 = T_s^4 \frac{R_s^2}{r_c^2} \frac{1 - A}{4},$$

$$T_c = T_s \left(\frac{R_s^2}{r_c^2} \frac{1 - A}{4} \right)^{1/4}.$$

За земната повърхност $A = 0,3$ и при такава стойност получаваме $T_c = 388 \text{ K} = 115^\circ\text{C}$. Когато $A = 0$, получаваме максималната възможна стойност за температурата на повърхността, без да отчитаме парников ефект $T_c = 424 \text{ K} = 151^\circ\text{C}$.

Г) Част от разширението на линията, от чието отместване получаваме лъчевата скорост, е породено от околоосно въртене – светлината от доближаващата се половина на звездата при околоосното въртене е с намалена дължина на вълната от ефекта на Доплер, а тази от отдалечаващата се половина е с увеличена дължина на вълната. Ако голямо тъмно петно е разположено в отдалечаващата се половина, това ще отслаби червено отместената светлина и средата на линията ще се измести към синьото, и обратно. Ефектът е много слаб, но в случая е значим, тъй като за регистриране на тези маломасивни планети се изисква много висока точност в измерването на средата на линията.

Ефектът може да се забележи на Фигура A2: минимумът на линията във втория спектър (когато петното се приближава) е вдясно от средното (пунктираната крива). На четвъртия спектър, когато петното се отдалечава, минимумът е вляво.



Фигура A2. Влияние на магнитната активност върху профила на спектралните линии.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

- A) Общо – 4 т.
- Б) Общо – 3 т.
- В) Общо – 3 т.
- Г) Общо – 2 т.

Задача 2. Три обекта на лунното небе. В момент на първа четвърт вие се намирате на лунната повърхност, в най-източната на земното небе точка по видимия лунен диск (маркирана с X на Фигура 1). Изображението на Фигура 1 е за наблюдател, който вижда точката X в зенита. Движете се директно към Земята, със скорост 10 m/s по лунната повърхност. Както на Земята, на лунния хоризонт изток е посоката, към която се движи повърхността при околоосното въртене. На височина 9 градуса над

точката изток по математическия хоризонт наблюдавате три природни обекта. Всеки от обектите е с нулева скорост спрямо вас.

- Обект А е на разстояние от вас $d_A = 300 \text{ km}$.
- Обект В е на разстояние от вас $d_B = 300\,000 \text{ km}$.
- Обект С е на разстояние от вас $d_C = 300\,000\,000 \text{ km}$.

За всеки от трите обекта:

- Опишете предстоящата траектория с подходящ чертеж и с подходящи количествени параметри, като приемете, че не действат други сили освен гравитационните.
- Посочете на чертежа положението на точката, в която обектът ще има (или е имал) максимална скорост спрямо масивното тяло, което му действа с най-голяма гравитационна сила в момента на наблюдението.
- Изчислете тази скорост.
- Изчислете разстоянието от точката до това масивно тяло. Ако точката е на повърхността на тялото, изчислете къде по повърхността е.

$$3 \text{ обекта} \times [4 \text{ т.}] = [12 \text{ т.}]$$

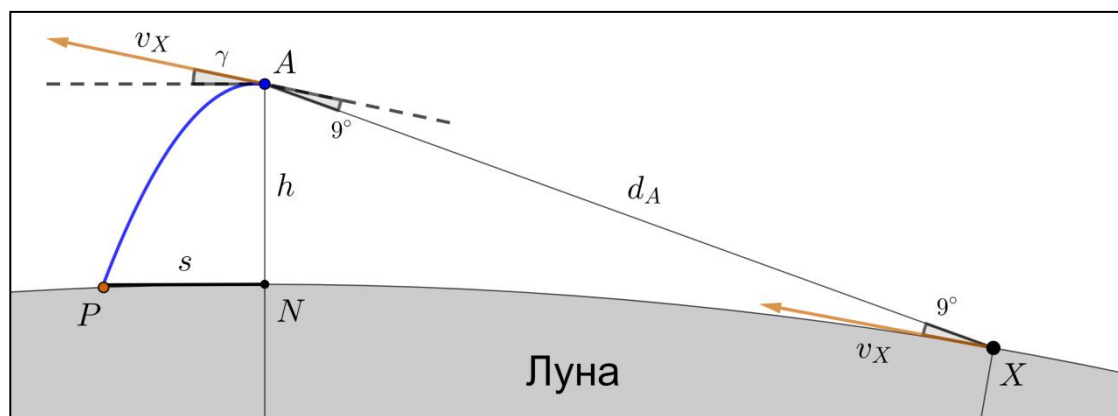


Фигура 1. Място по лунния диск.

Указание: Формули без чертеж няма да бъдат оценявани при проверката! Приемете, че Луната се движи по кръгова орбита в равнината на еклиптиката и равнината на лунния екватор.

Решение.

А) (Обект А) Нека да намерим височината h на точката А над лунната повърхност. Разглеждаме $\triangle XAL$ (L – център на Луната). За наблюдател в точка X точка А е на височина 9° , а точка L е в надир, тоест $\angle AXL = 99^\circ$.



Фигура А3. Траектория на Обект А.

По косинусова теорема

$$LA^2 = LX^2 + XA^2 - 2LX \cdot XA \cdot \cos 99^\circ,$$

$$(R_L + h)^2 = R_L^2 + d_A^2 - 2R_L d_A \cos 99^\circ.$$

Получаваме $h = 71,36 \text{ km}$. Дъгата по лунната повърхност от X до точката N под A намираме от централния ъгъл в L :

$$\beta = \arctan\left(\frac{d_A}{R_L}\right) = 9,4^\circ.$$

Ще пренебрегнем околоосното въртене на Луната. На чертежа $\gamma = \beta$ и $v_X = 10 \text{ m/s}$. Гравитационното ускорение на повърхността на Луната е

$$g_{L0} = \frac{GM_L}{R_L^2} = 1,62 \text{ m/s}^2.$$

Аналогично, гравитационното ускорение в точка A е

$$g_{LA} = \frac{GM_L}{(R_L + h)^2} = 1,50 \text{ m/s}^2.$$

Можем с добра точност да приемем, че траекторията е близка до парабола, със средно гравитационно ускорение $g_L = 1,56 \text{ m/s}^2$. Можем също да забележим, че обектът е в точка A е съвсем близо до достигане на максималната си височина, защото $v_X \ll \sqrt{2gh}$ (камо ли вертикалната компонента $v_X \sin \gamma$!). Затова приближаваме, че падането става с нулева начална скорост по вертикалата.

Тялото ще падне на лунната повърхност за време

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g_L}} = 303 \text{ s}.$$

Разстоянието между мястото под точка A и мястото на удара е

$$s = (v_X \cos \gamma)t = \mathbf{2,99 \text{ km}}.$$

Скоростта на удара е приблизително

$$v = \sqrt{v_X^2 + 2g_L h} = \mathbf{473 \text{ m/s}}.$$

Коментар. Ако силно желаем, може и да отчетем допълнително, че лунният екватор се върти със скорост

$$v_Q = \frac{2\pi R_L}{T_L} = \frac{2\pi(1738 \text{ km})}{27,32 \text{ d}} = 4,6 \text{ m/s},$$

както и че виждаме обекта в момент Δt преди достигане на максимална височина, където

$$\Delta t = \frac{(v_X + v_Q) \sin \gamma}{g_L} \approx \frac{(v_X + v_Q) \sin \gamma}{v} t = 1,5 \text{ s}.$$

Тогава резултатът за хоризонталното разстояние е практически непроменен:

$$s \approx ((v_X + v_Q) \cos \gamma - v_Q)(t + \Delta t) = 2,99 \text{ km}.$$

Б) (Обект В) Гледано от точка X по лунния диск, центърът на Земята е на математическия хоризонт, в точката изток. Следователно ъгълът Земя-Луна- B е 9° . Разстоянието Земя- B (r_B) намираме по косинусова теорема:

$$r_B = \sqrt{r_L^2 + d_B^2 - 2r_L d_B \cos 9^\circ} = 99810 \text{ km}.$$

Тялото е в гравитационното поле на Земята и можем да пренебрегнем влиянието на трети тела върху него. То е неподвижно спрямо наблюдателя на Луната, но Луната се движи по орбитата си със скорост

$$v_L = \frac{2\pi r_L}{T_L} = 1,02 \text{ km/s}.$$

Тази скорост е по-ниска от скоростта на избягване от Земята за разстояние r_B , така че тялото ще се движи по елиптична орбита около Земята, която трябва да решим.

По синусова теорема намираме ъгъл B в триъгълника:

$$\sin B = (\sin 9^\circ) \frac{r_L}{r_B}.$$

Получаваме $B = 142,9^\circ$. Оттук намираме ъгъла θ_B между вектора на скоростта на B и отсечката Земя- B :

$$\theta_B = 360^\circ - 99^\circ - 142,9^\circ = 118,1^\circ.$$

Голямата полуос на орбитата на B намираме от закона за запазване на енергията:

$$\frac{m_B v_L^2}{2} - \frac{GM_E m_B}{r_B} = -\frac{GM_E m_B}{2a_B}.$$

В резултат $a_B = 57390 \text{ km}$. От закона за запазване на момента на импулса

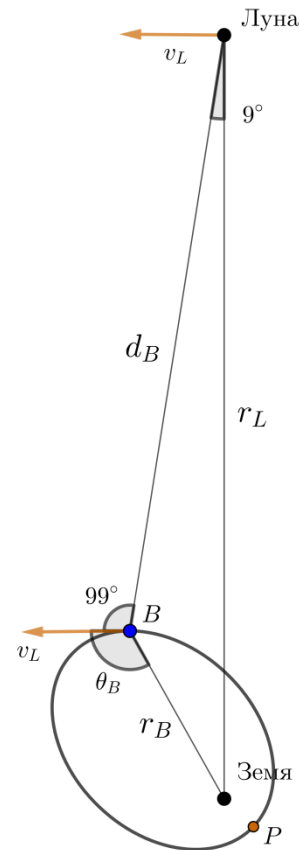
$$\begin{aligned} m_B v_L r_B \sin \theta_B &= m_B v_{PB} r_{PB}, \\ v_L r_B \sin \theta_B &= \sqrt{GM_E a_B (1 - e_B^2)}, \\ e_B &= \sqrt{1 - \frac{(v_L r_B \sin \theta_B)^2}{GM_E a_B}} = 0,804. \end{aligned}$$

Разстоянието Земя- B в перигей тогава е

$$r_{PB} = a_B (1 - e_B) = \mathbf{11250 \text{ km}}.$$

Скоростта на B в перигей е

$$v_{PB} = \sqrt{\frac{GM_E}{a_B}} \sqrt{\frac{1 + e_B}{1 - e_B}} = \mathbf{7,99 \text{ km/s}}.$$



Фигура А4. Траектория на Обект В.

В) (Обект С) Гледано от точка X по лунния диск, Слънцето е в надир, а разстоянието до него е 1 ау. Следователно ъгълът Слънце- X - C е 99° . Разстоянието Слънце- C (r_C) намираме по косинусова теорема:

$$r_C = \sqrt{r_E^2 + d_C^2 - 2r_E d_C \cos 99^\circ} = 2,376 \text{ ау}.$$

Скоростта на избягване от Слънцето за това разстояние е

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{r_C}} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_E}} \sqrt{\frac{2r_E}{r_C}} = (29,79 \text{ km/s}) \cdot \left(\frac{2}{2,376}\right)^{1/2} = 27,33 \text{ km/s}.$$

Обект C се движи със скоростта на наблюдателя, която в тази отправна система е почти равна на скоростта на Земята около Слънцето $v_E = 29,79 \text{ km/s}$. Това означава, че пълната механична енергия на обект C е положителна и той ще се движи по хипербола.

По синусова теорема намираме ъгъл C в триъгълника:

$$\sin C = (\sin 99^\circ) \frac{r_E}{r_C}.$$

Получаваме $B = 24,6^\circ$. Оттук намираме ъгъла θ_C между вектора на скоростта на C и отсечката Слънце- C :

$$\theta_C = 180^\circ - 9^\circ - 24,6^\circ = 146,4^\circ.$$

Отчитаме приноса на вектора на орбиталното движение на Луната, което в случая е по направлението Слънце-Земя. То няма да промени съществено големината на v_E , но ще отмести посоката с ъгъл $\Delta\theta = \arctan(v_L/v_E) = 2,0^\circ$ по часовниковата стрелка. Коригираната стойност ще бъде $\theta'_C = 148,4^\circ$.

Записваме законите за запазване на енергията и на момента на импулса, като сравняваме настоящото положение на C с перихелия му:

$$\frac{m_C v_E^2}{2} - \frac{GM_\odot m_C}{r_C} = \frac{m_C v_{PC}^2}{2} - \frac{GM_\odot m_C}{r_{PC}}, \quad m_C v_E r_C \sin \theta'_C = m_C v_{PC} r_{PC}.$$

Заместваме $v_{PC} = v_E r_C \sin \theta'_C / r_{PC}$ и получаваме уравнение за r_{PC} :

$$v_E^2 - \frac{2GM_\odot}{r_C} = \left(\frac{v_E r_C \sin \theta'_C}{r_{PC}} \right)^2 - \frac{2GM_\odot}{r_{PC}}.$$

Използвайки формулата за кръгова скорост на 1 аи от Слънцето, имаме

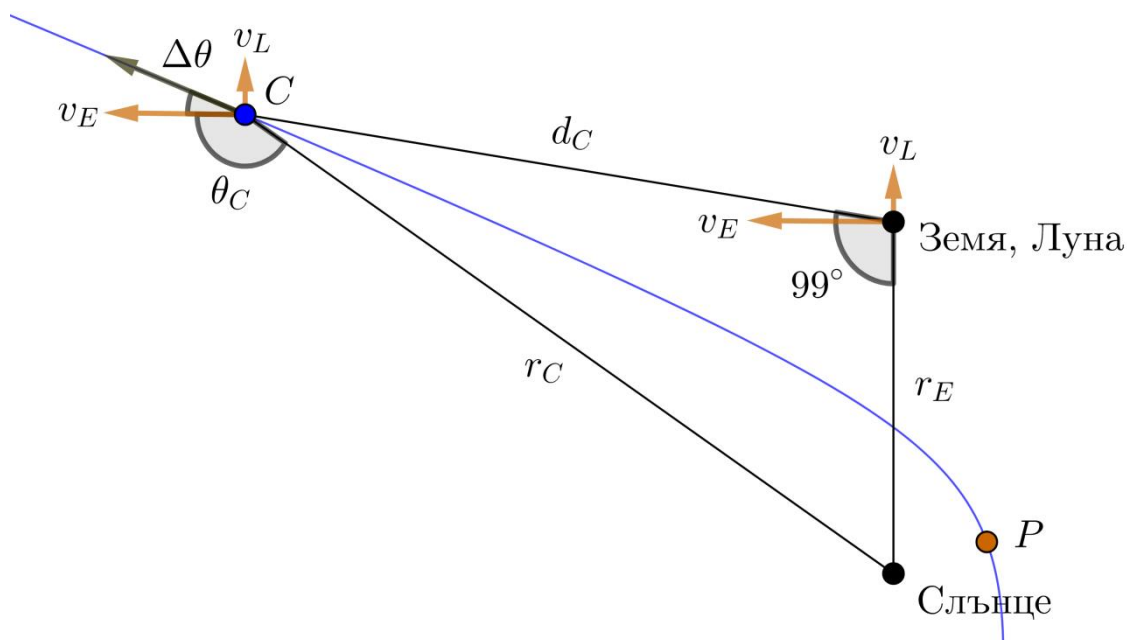
$$v_E^2 - \frac{2v_E^2 r_E}{r_C} = v_E^2 (r_C \sin \theta'_C)^2 \left(\frac{1}{r_{PC}} \right)^2 - \frac{2v_E^2 r_E}{r_{PC}}.$$

Съкращаваме v_E и работим с мерни единици аи за разстоянията, при което

$$1 - \frac{2}{r_C} = (r_C \sin \theta'_C)^2 \left(\frac{1}{r_{PC}} \right)^2 - \frac{2}{r_{PC}},$$

$$(r_C \sin \theta'_C)^2 \left(\frac{1}{r_{PC}} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{r_{PC}} \right) + \left(\frac{2}{r_C} - 1 \right) = 0.$$

Решаваме квадратното уравнение и получаваме $r_{PC} = 0,733 \text{ au}$. Заместваме обратно и получаваме $v_{PC} = 50,6 \text{ km/s}$.



Фигура А5. Траектория на Обект С.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

- А) Общо – 4 т.
- Б) Общо – 4 т.
- В) Общо – 4 т.

Задача 3. Лазерна локация на Луната. Методът на лунната лазерна локация се основава на измерване на времето, нужно на лазерен лъч от Земята да се върне обратно от т. нар. ретрорефлектор, монтиран на лунната повърхност. Свръхточното определяне на разстоянието до Луната дава възможност да се изследват например земната прецесия и общата теория на относителността.

Астронавтите от мисията Аполо 15 оставят на Луната ретрорефлектор, който и до днес се използва за лазерна локация. Той представлява плоскост със страна $l = 85 \text{ cm}$, по която са разположени равномерно $n = 300$ малки отражателя. Всеки

отражател може да се разглежда като диск с ефективен диаметър $D_{\text{eff}} = 2,6$ cm. Поради лунния прах по тях, отражателите връщат само част $k = 0,1$ от идващото излъчване.

Обсерваторията Apache Point в щата Ню Мексико разполага с най-добрите възможности за лазерна локация. Тя изпраща към Луната лазерни импулси с дължина на вълната $\lambda = 532$ nm, всеки от които има енергия $E = 115$ mJ и продължителност $\tau = 9 \cdot 10^{-11}$ s. Импулсите се излъчват от фокуса на телескопа и се предават от обектива (диаметър $D_T = 3,5$ m) към Луната. При изхода от телескопа снопът излъчване може да се приеме за идеално колимиран (с ъгъл на разходимост нула) и съвпадащ с главната оптична ос. При преминаване през оптичната система на телескопа и атмосферата се запазва само част $\eta = 0,5$ от излъчването. През цялото време воденето на телескопа е свързано с Луната. Всеки импулс се отразява от ретрорефлектора и върнатият към Земята сигнал се изследва със същия телескоп. При това се използва тесноивичен филтър, който пропуска част $f = 0,25$ от излъчването. Квантовата ефективност на детектора е $Q = 0,3$. Тя се явява отношението на броя засечени фотони към броя попаднали върху детектора фотони.

Характерната астрономическа видимост на мястото на обсерваторията е $\phi = 1''$. Това означава, че в резултат на атмосферната турбулентност точков източник на небето се размазва до кръгче с именно такъв ъглов диаметър. Може да приемете, че в рамките на това кръгче интензитетът се разпределя равномерно.

- **А)** С каква точност α (в дъгови секунди) трябва да насочим лазера по небето към правилното място по лунния диск, така че поне някаква част от лазерното излъчване да попадне в ретрорефлектора? [1 т.]
- **Б)** Оценете на какво ъглово отстояние β (в дъгови секунди) от видимото положение на ретрорефлектора трябва да изпратим лазерния импулс, така че центърът на снопа да попадне в ретрорефлектора. Не отчитайте околоосното въртене на Земята. [2 т.]
- **В)** Оказва се, че върнатият от ретрорефлектора сигнал влиза под ъгъл γ спрямо главната оптична ос на телескопа. Намерете връзката между γ и β . [1,5 т.]
- **Г)** Оценете по порядък очаквания брой фотони N , който детекторът ще засече от един импулс след отражението му от ретрорефлектора. Опишете приближенията, които използвате. [5,5 т.]

Либрацията на Луната и продължителността на лазерния импулс са два фактора, които водят до неизбежна грешка при определянето на разстоянието от обсерваторията до ретрорефлектора. На Фигура 3 е дадена либрацията на Луната по ширина и дължина през 12 часа за период от 18,6 години. Да приемем, че равнината на ретрорефлектора е разположена перпендикулярно на направлението към Земята, когато либрацията по ширина и дължина е нула. Ретрорефлекторът е монтиран на селенографска ширина $\varphi = 26^\circ$ N.

- **Д)** Оценете грешката Δr (в сантиметри) при определяне на разстоянието обсерватория-ретрорефлектор, когато условията на либрация са най-лоши за целта. [3 т.]

Решение.

А) Както е указано в условието, когато излъчването от звезда премине през атмосферата, то придобива ъгъл на разходимост $\phi = 1''$. Това е вярно и в обратната посока, тоест лазерният импулс придобива същата разходимост. Гледано от нас, той ще покрива кръгче с диаметър ϕ по лунния диск. Точното необходимо място на прицелване на лазера трябва да попада в рамките на това кръгче, тоест центърът на кръгчето може да отстои на максимум $\phi/2$ от него. Така $\alpha = \phi/2 = 0,5''$.

Б) Направлението на импулса трябва да е такова, че в момента на достигане на Луната центърът му да съвпадне с положението на ретрорефлектора. Във всеки даден

момент видимото от Земята положение на Луната по небето съответства на истинското положение на Луната в пространството преди време $t_0 = r_L/c$. А импулсът трябва да се изпрати към мястото на Луната в пространството след време още t_0 . Орбиталната скорост на Луната е $v = 2\pi r_L/T = 1,0 \text{ km/s}$. Тогава разстоянието в пространството между видимото място на ретрорефлектора и мястото му на контакт с импулса е $2vt_0$. По земното небе това съответства на ъглово отстояние

$$\beta = \frac{2vt_0}{r_L} = \frac{2v}{c} = 1,4''.$$

В) Всеки приет от нас сигнал от ретрорефлектора идва от видимото положение на ретрорефлектора – все пак това е определението за видимо положение. Същевременно главната оптична ос на телескопа винаги следи правилното място на насочване на лазера от предишното подусловие. Тогава заключаваме, че $\gamma = \beta$. Тук не се изисква намиране на точна числена стойност.

Същият извод може да се направи и по доста по-сложен начин, проследявайки пътя на лъчите в отправната система на ретрорефлектора и връщайки се в отправната система на наблюдателя. Съвсем накратко, всяка една смяна на отправната система се асоциира с ъгъл на аберация v/c . Оттук може да получим израза $\gamma = 2v/c$, за който забелязваме, че съвпада с израза за β .

Г) В началото броят фотони е $N_0 = E/\left(\frac{hc}{\lambda}\right)$. С излизане от атмосферата той се умножава по η . В резултат на разходимостта поради астрономическата видимост снопът има площ $\pi(\phi r_L)^2/4$ при достигането си до Луната. Той се приема от обща повърхност $\pi D_{\text{eff}}^2/4$, която отразява само част k от фотоните. Така в обратно направление се отправя брой фотони

$$N_{\text{back}} = \frac{\eta k n E \lambda D_{\text{eff}}^2}{hc \phi^2 r_L^2}.$$

След отражението основният фактор за разходимостта на импулса става дифракцията. Това може да се провери, като намерим ъгловия диаметър на диска на Ейри за ефективния диаметър на отражателите D_{eff} :

$$2\theta = 2 \frac{1,22\lambda}{D_{\text{eff}}} = 5.10^{-5} \text{ rad} = 10'' \gg \phi.$$

Сега за оценката си ще приемем, че в рамките на диска на Ейри интензитетът е разпределен равномерно. Преди навлизане обратно в земната атмосфера снопът има площ $\pi(\theta r_L)^2$. Той се приема от площ $\pi D_T^2/4$, като тогава до детектора достигат $N_{\text{back}} \eta D_T^2/4(\theta r_L)^2$ фотона, защото има още едно преминаване през оптиката и атмосферата. От тези фотони заради филтъра и квантовата ефективност се засича само част fQ . Накрая достигаем до

$$N = \frac{\eta^2 k f Q n D_{\text{eff}}^4 D_T^2}{4(1,22)^2 \phi^2 r_L^4 hc \lambda} \approx 1.$$

Д) Грешката в измерването на разстоянието идва от това, че броят получени фотони е много малък, а отделните фотони от импулса са неразличими. Като пример, ако няма либрация, фотон в задния край на импулса се връща време $\tau = 9.10^{-11} \text{ s}$ след фотон от предния край на импулса. За фотони в задния край и в средата разликата става $\tau' = \tau/2$. Тъй като разстоянието до Луната r_L се изчислява от времето на пътуване t по връзката $r_L = ct/2$, продължителността на лазерния импулс ще се асоциира с грешка $\Delta r_\tau = c\tau'/2 = 0,7 \text{ cm}$.

При наличие на либрация плоскостта на ретрорефлектора е наклонена спрямо зрителния лъч и затова някои ъглови отражатели са по-далеч от други спрямо импулса

– обаче няма начин да различим от кой ъглов отражател идват върнатите фотони. Нека ъгълът на наклон на плоскостта е ξ . Разликата в разстоянията до най-близкия и най-далечния ъглов отражател става $l \sin \xi$. Грешката при определяне на разстоянието тогава трябва да е $\Delta r_\xi = l \sin \xi / 2 \approx l \xi / 2$.

Съгласно фигурата най-лошият вариант откъм либрация има компоненти $\xi_\varphi = 6,8^\circ$ по ширина и $\xi_\lambda = 8,0^\circ$ по дължина. Значението на тези ъгли е подобно на деклинацията и ректасцензията по небесната сфера. Затова може да запишем

$$\xi = \sqrt{\xi_\varphi^2 + (\xi_\lambda \cos \varphi)^2} = 9,9^\circ.$$

Така пресмятаме $\Delta r_\xi = 7,3$ cm. Както знаем от теорията на грешките, най-правилно е да съберем двата независими източника на грешка квадратично. За пълната грешка в определянето на разстоянието имаме

$$\Delta r = \sqrt{\Delta r_\tau^2 + \Delta r_\xi^2} \approx \Delta r_\xi \approx 7 \text{ cm}.$$

Коментар. Източниците на експериментална грешка в действителност са много повече, но дадените в задачата са тези, чието влияние се оценява най-лесно. Тъй като в един наблюдателен сеанс към Луната се пращат множество импулси, грешката може да бъде намалена, и при оптимални условия на либрация точността на лазерната локация достига милиметри.

Литература:

[1] <https://arxiv.org/abs/1309.6294>

Критерии за оценяване (общо 13 т.):

- А)** За разбиране, че разходимостта поради атмосферата не зависи от посоката на лъчите – **0,5 т.**
За верен числен резултат – **0,5 т.**
- Б)** За разбиране, че виждаме Луната по небето в минало нейно положение – **0,5 т.**
За разбиране, че трябва да насочим лазера към бъдещото положение на Луната – **0,5 т.**
За израз за β – **0,5 т.** (признават се и при изпусната двойка)
За верен числен резултат – **0,5 т.**
- В)** За отговор $\gamma = \beta$ – **0,5 т.**
За аргументация – **1 т.**
- Г)** За намиране на броя излъчени фотони N_0 – **1 т.**
За намиране на броя фотони N_{back} , върнати от ретрорефлектора – **1 т.** (ако е изпуснато n или k – **0,5 т.**)
За разбиране, че дифракцията е най-важният фактор по пътя наобратно; за правилна формула за ъгловия размер на снопа фотони – **1,5 т.**
За намиране на броя фотони N , регистрирани от детектора – **1 т.** (ако е изпуснато f или Q – **0,5 т.**)
За двукратно отчитане на загубите от атмосферата и оптиката – **0,5 т.**
За верен числен резултат – **0,5 т.**
- Д)** За обяснение как дължината на импулса се явява източник на грешка – **0,5 т.**
За изчисляване на тази грешка – **0,5 т.** (ако няма множител $1/2$ за пътя – **0 т.**)
За обяснение как либрацията се явява източник на грешка – **0,5 т.**
За измервания и изчисляване на тази грешка – **1 т.** (ако няма косинус – **0,5 т.**)
За правилен подход при събиране на грешките и краен резултат – **0,5 т.**

Задача 4. Ета Кил. Звездата Ета Кил има далеч най-голяма светимост измежду всички звезди, видими с просто око на нощното небе. Тя е представител на т.нар. ярки сини променливи. Това са масивни звезди към края на живота си, които спорадично претърпяват гигантски избухвания, с което изхвърлят голяма част от масата си.

В резултат на такова избухване, наблюдавано около 1843 г., Ета Кил изхвърля практически наведнъж огромно количество газ и прах с набор от различни постоянни скорости, насочени радиално навън от звездата. Това води до появата на мъглявината Хомункулус. Тя има биполярна структура с екваториален диск и два издатъка по оста ѝ на симетрия. Издатъците са на практика кухи, тоест изхвърленият прах е съсредоточен в тънка черупка с определена дебелина.

През 2000 г. с помощта на телескопа Хъбъл е изследван спектърът на мъглявината. Ориентацията на процепа на спектрографа е избрана да съвпада с оста на симетрия на мъглявината, както е показано на Фигура 4. Издатъкът в долния ляв край на фигурата (SE) е по-близък до наблюдателя и при него оптичната плътност е по-голяма. Това означава, че при него се засича излъчване само от обърнатата към нас негова страна, докато при другия издатък се засича излъчване и от предната, и от задната му страна, което прави анализа на спектъра значително по-сложен. По-нататък в задачата се работи само със спектрите на издатъка SE и на екваториалния диск.

По дължината на целия процеп се разглежда профилът на линията [Ni II] с лабораторна дължина на вълната $\lambda_0 = 7380 \text{ \AA}$. За пример на Фигура 5 е показан нейният профил на позиции $2,15'' \text{ NW}$ и $4,56'' \text{ SE}$ по процепа (позицията нула е при централната звезда). На фигурата дължината на вълната е директно превърната в съответстващата ѝ по ефекта на Доплер лъчева скорост. Всички лъчеви скорости не са спрямо Слънцето, а са вече коригирани така, че да са относно централната звезда. Фигура 6(а) обобщава интензитета на линията в зависимост от позицията по процепа. Фигура 6(б) указва схематично елементите на спектъра. Скоростите от участък 1 са свързани с емисионни линии на разширяващия се газ по черупката. Участък 2 се асоциира с излъчване на газ от околностите на Ета Кил, намиращ се в покой. Това излъчване се отразява дифузно към нас от праха в черупката, като в отправната система на праха отражението не променя енергията на излъчването. Участък 3 съответства на собствени емисионни линии от газа по екваториалния диск.

На Фигура 7 са дадени само максимумите на спектралните линии от участък 1 и участък 2. В първата подточка на задачата правете измерванията си по нея при позиции от $5,5'' \text{ SE}$ до $7,0'' \text{ SE}$.

- А) Определете разстоянието r до Ета Кил. [6 т.]
- Б) Оценете дебелината d на черупката на мъглявината Хомункулус.

Пренебрегнете инструменталната грешка при получаването на спектъра. [3 т.]

В Таблица 1 са дадени наблюдения за максимумите v_r на спектралните линии по участък 3 спрямо позицията δ по процепа на спектрографа.

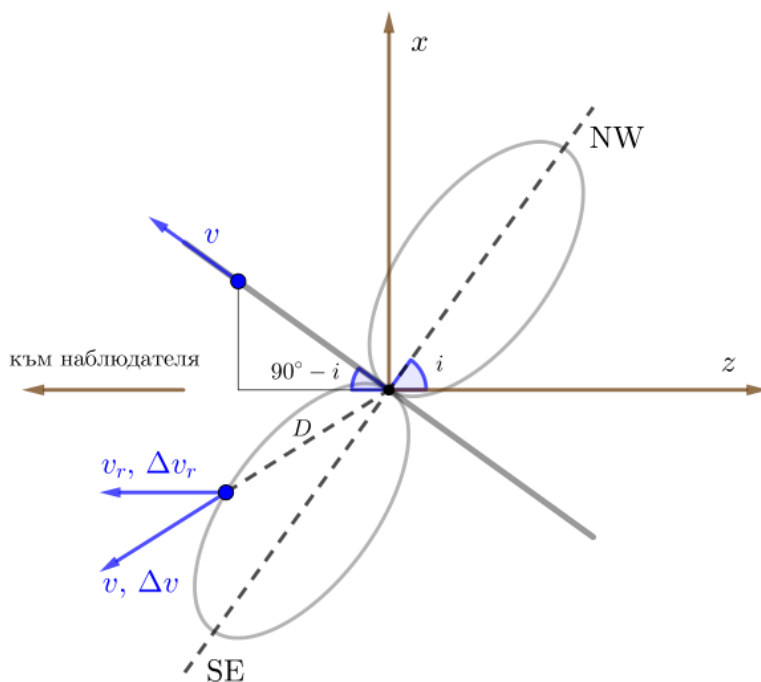
- В) Представете наблюденията на графика и от нея определете наклона на оста на мъглявината Хомункулус i спрямо зрителния лъч. [4 т.]

Решение.

А) Методът за намиране на разстоянието до звездата се основава на разликата между лъчевите скорости, съответстващи на собствените емисионни линии на газа в черупката и отразеното от черупката излъчване. Да разгледаме участък от черупката, изследван от спектрографа. Нека характерната му скорост на отдалечаване от централната звезда е v . Възрастта на мъглявината при получаване на спектъра е $t = 2000 - 1843 = 157 \text{ yr}$, като разстоянието от участъка до звездата е $D = vt$.

Въвеждаме координатни оси z и x съответно по и перпендикулярно на зрителния лъч, като координатното начало е при звездата и $x > 0$ за издатъка NE. Лъчевата скорост v_r на участъка се явява проекцията на v по оста z . При това $z = v_r t$,

включително когато участъкът се приближава към нас и лъчевата скорост е отрицателна.



Фигура А6. Геометрия на мъглявината Хомункулус.

Компонентата на [Ni II] линията, идваща от собственото излъчване на участъка, има спектрално отместване, отговарящо именно на лъчевата скорост v_r . С компонентата, която съответства на отражение, ситуацията е по-сложна. В отправната система на праха светлината от централната област на мъглявината търпи червено отместване, съответстващо на скорост на наблюдателя v , тоест дължината на вълната на максимума се измества на

$$\lambda' = \frac{\lambda_0}{1 - \frac{v}{c}} \approx \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

При преизлъчването това може да се разглежда като новата лабораторна дължина на вълната. За нас преизлъчването става с лъчева скорост v_r , при което регистрираната от нас дължина на вълната е

$$\lambda = \lambda' \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) \approx \lambda_0 \left(1 + \frac{v + v_r}{c}\right).$$

Правим извода, че отместването на компонентата от отражение ще отговаря на лъчева скорост $v + v_r$. По-убедителен начин да докажем това е чрез релятивистко извеждане, но това изисква повече опит и не се очаква от участниците. Отбелязваме, че тъй като $v > |v_r| > 0$, величината $v + v_r$ ще е положителна.

Пристъпваме към измерванията. За позициите δ по процепа между $5,5''$ и $7,0''$ може да получим съответно от участък 1 и 2 стойностите $v_1 = v_r$ и $v_2 = v + v_r$. Разликата между тях е $v_2 - v_1 = v$. Оттук чрез $x^2 + z^2 = D^2$ достигаме до

$$x = \sqrt{((v_2 - v_1)t)^2 - (v_1 t)^2}.$$

Но x е пряко свързано с разстоянието до звездата чрез $x = \delta r$, откъдето

$$r = \frac{\sqrt{v_2^2 - 2v_1v_2}}{\delta} t.$$

С тази зависимост изчисляваме r по няколко стойности на δ :

δ ["]	v_1 [km/s]	v_2 [km/s]	$\sqrt{v_2^2 - 2v_1v_2}$ [km/s]	r [km/"]
5,5	-508	106	345	$3,10 \cdot 10^{11}$
6,0	-494	141	399	$3,29 \cdot 10^{11}$
6,5	-438	188	447	$3,40 \cdot 10^{11}$
7,0	-414	227	485	$3,46 \cdot 10^{11}$

Сега усредняваме до $r = 3,31 \cdot 10^{11}$ km/". Имайки предвид, че $1'' \cdot 1 \text{ pc} = 1 \text{ au}$, превръщането на нашия резултат за r в парсеци изисква само да го разделим на $1,496 \cdot 10^8$, защото именно толкова km дават 1 au. Крайният ни отговор е

$$r = 2200 \text{ pc.}$$

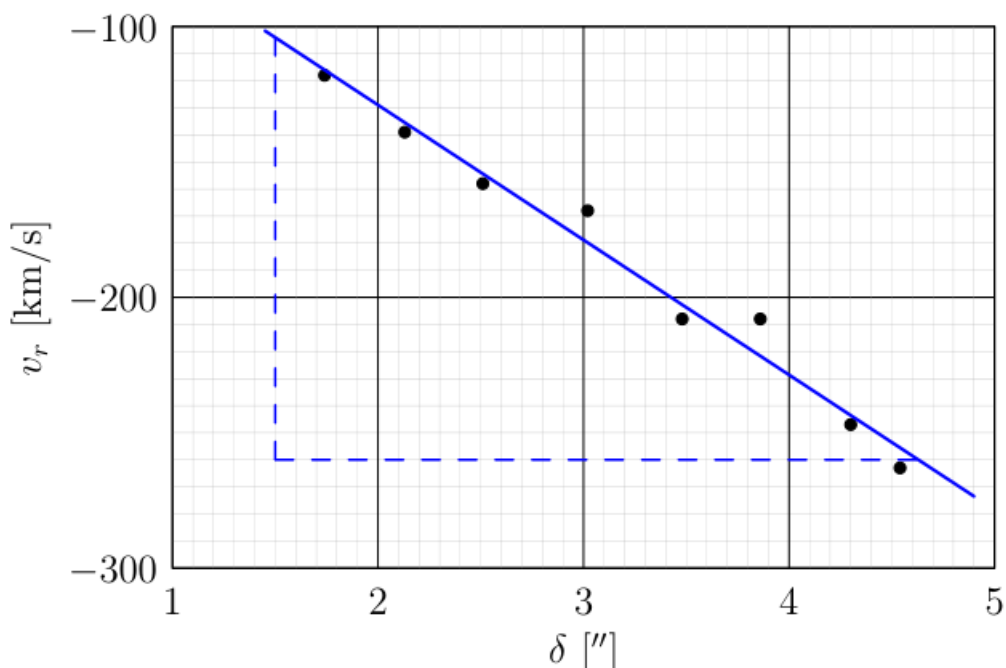
Б) Ще определим характерната дебелина на черупката по наблюдението на $4,56''$ SE от Фигура 5. Там профилът на линията на собствено излъчване е центриран при $v_r = -564$ km/s. Ширината на линията стандартно се отчита на нивото на интензитет, намиращо се по средата между фона около линията и максимума на линията (т.нар. FWHM, от „full width at half maximum“). Тази ширина е $\Delta v_r = 108$ km/s.

Съгласно условието може да приемем, че ширината не идва от инструментална грешка, а е пряко свързана с дебелината на черупката. Идеята е, че дебелината идва от различието в скоростите на отдалечаване на изхвърления материал. Ако предният и задният край на черупката имат разлика в скоростите на отдалечаване Δv , то дебелината е $d = \Delta v t$, защото разширяването става с постоянна скорост. Нека характерната скорост на разширение на черупката при $4,56''$ SE е v . Тогава е вярно

$$\frac{\Delta v_r}{\Delta v} = \frac{|v_r|}{v}.$$

От предишната част на задачата знаем, че разликата в скоростите от Фигура 7 дава именно v . Така измерваме $v = 644$ km/s, откъдето пресмятаме $\Delta v = 123$ km/s. Това води до отговора $d = 6 \cdot 10^{11}$ km.

В) Първо ще разгледаме как наклонът на екваториалния диск спрямо зрителния лъч (той е $90^\circ - i$) може да се определи от дадените наблюдения. Ако участък от диска се отдалечава от Ета Кил със скорост v , лъчевата му скорост ще е $v_r = -v \sin i$.



Фигура А7. Графика на лъчевата скорост v_r спрямо позицията δ .

Тъй като тангенциалната му скорост е $v \cos i$, позицията му по оста x е просто $x = (v \cos i)t$. Тя обаче може да се изрази и като $x = \delta r$. Така достигаме

$$v_r = -\left(\frac{r \tan i}{t}\right) \delta.$$

Затова графиката на v_r в зависимост от δ следва да е права линия с наклон $a = -r \tan i / t$. Нанасяме съответните точки и прекарваме правата, която им пасва най-добре. Така намираме $a = -49,8 \text{ km}/(\text{s} \cdot ''')$.

Сега остава да използваме резултата си за разстоянието r . Най-удобно е да вземем това разстояние като $r = 3,31 \cdot 10^{11} \text{ km}/'''$. Получаваме $\tan i = 0,74$, откъдето следва $i = 37^\circ$.

Литература:

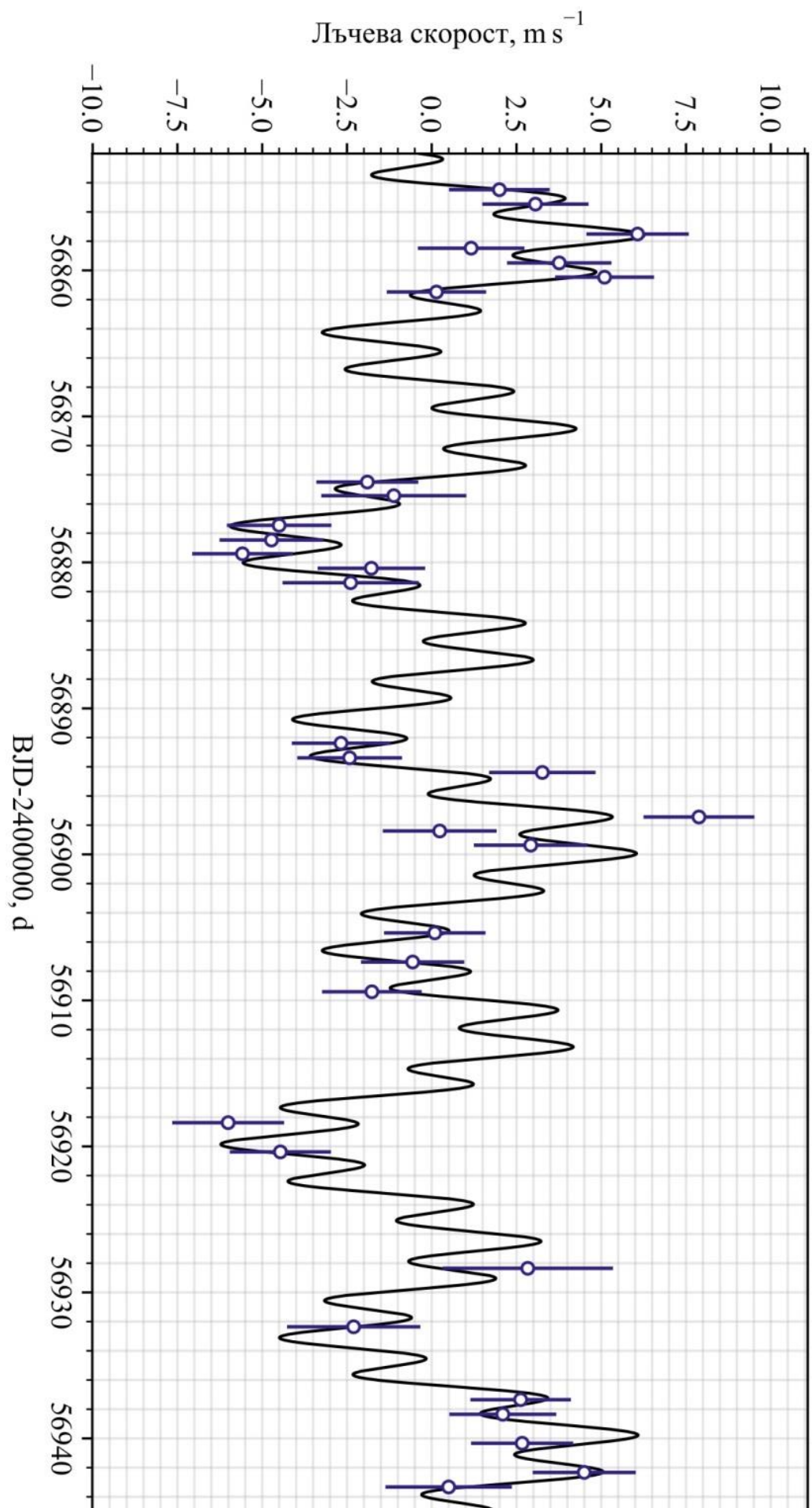
[1] <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/319419/pdf>

Критерии за оценяване (общо 13 т.):

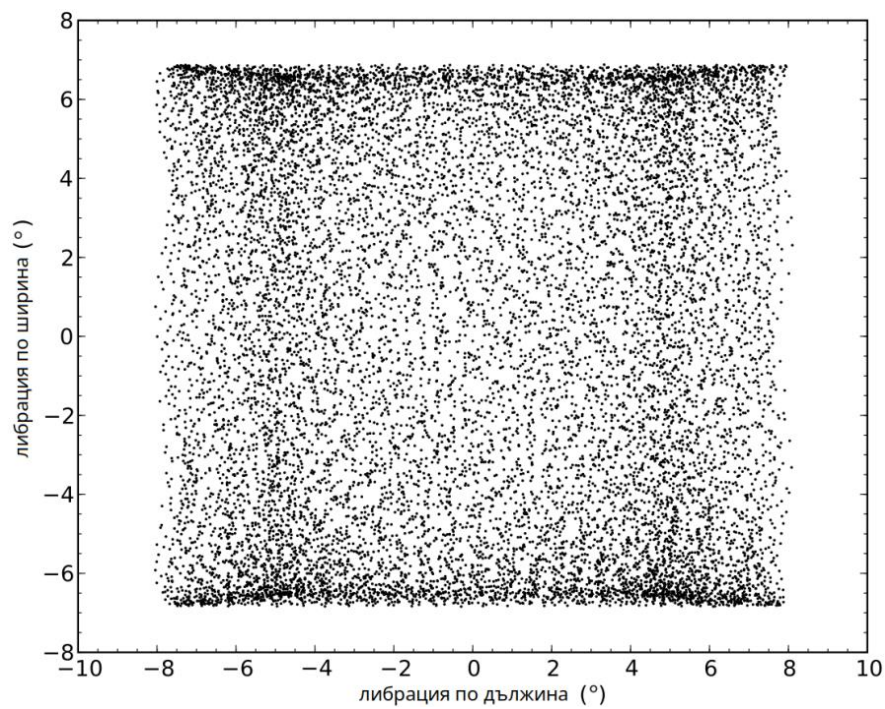
- A)** За интерпретация на спектралното отместване на отразеното от праха излъчване – **1,5 т.**
 За правилен геометричен модел на разширяването на черупката – **1 т.**
 За извеждане на връзка между позицията δ и разстоянието r – **1 т.**
 За достатъчен брой (≥ 4) измервания – **1,5 т.**
 За вярна усреднена стойност за разстоянието r – **1 т.**
- Б)** За измерване на интервала лъчеви скорости Δv_r по профила на линията – **1 т.**
 За намиране на интервала от скорости на разширение Δv – **1 т.**
 За формула за дебелината d и верен числен резултат – **1 т.**
- В)** За извеждане на връзка между v_r и δ за екваториалния диск – **1 т.**
 За техническо изпълнение на графиката – **2 т.**
 За намиране на наклона и краен резултат – **1 т.**

Справочни данни (по всички задачи):

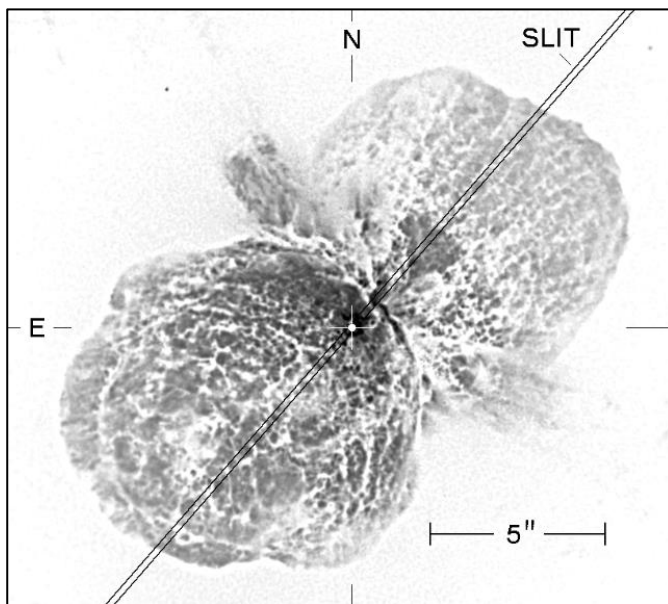
Гравитационна константа	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Скорост на светлината във вакуум	$c = 300000 \text{ km/s}$
Константа на Планк	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Астрономическа единица	$r_E = 1,496 \cdot 10^8 \text{ km}$
Маса на Слънцето	$M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Радиус на Слънцето	$R_\odot = 696000 \text{ km}$
Маса на Земята	$M_E = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Маса на Луната	$M_L = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
Радиус на Луната	$R_L = 1738 \text{ km}$
Радиус на лунната орбита	$r_L = 384400 \text{ km}$



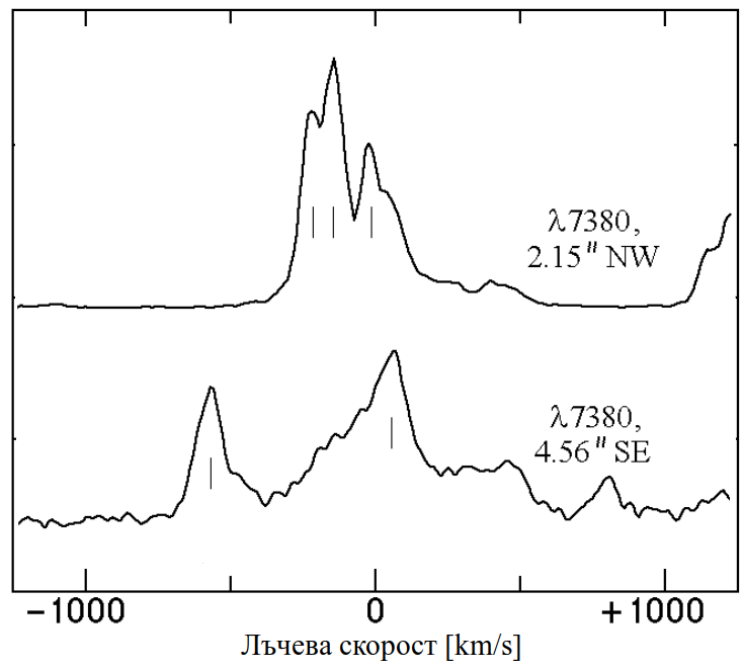
Фигура 2. Крива на лъчевите скорости на звездата GJ 3998 (към Задача 1).



Фигура 3. Данни за либрация на Луната (към Задача 3).



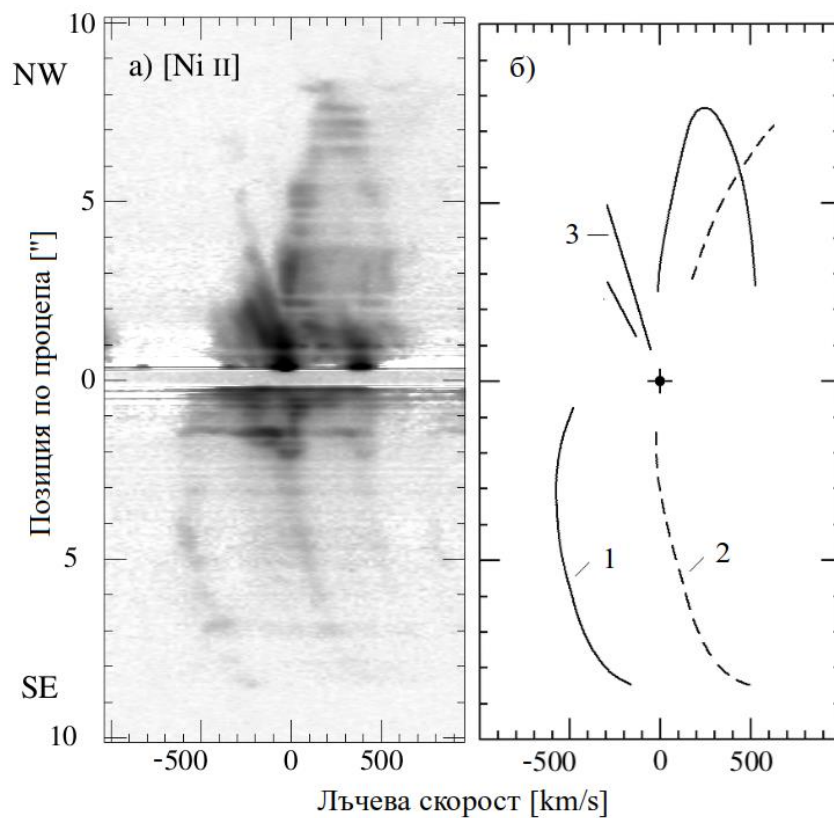
Фигура 4. Мъглявината Хомункулус (към Задача 4).



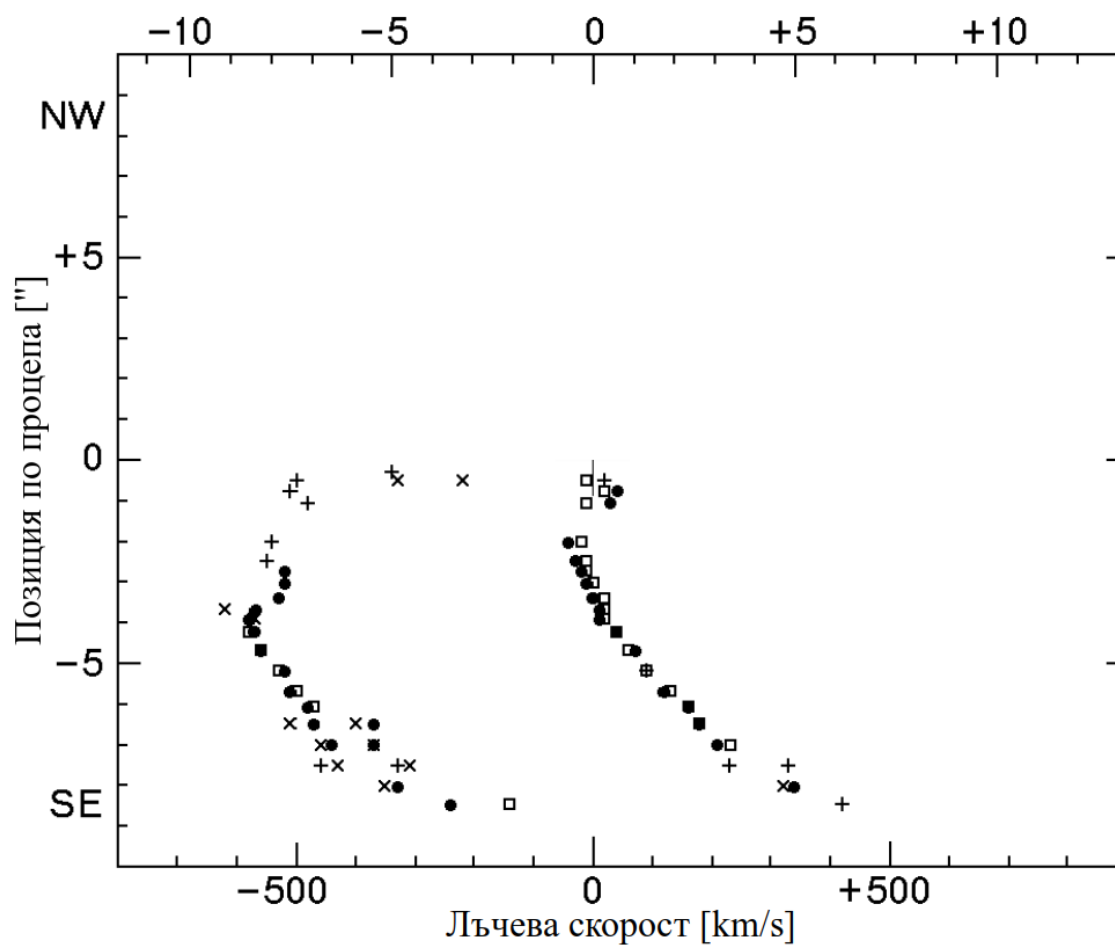
Фигура 5. Профил на линията [Ni II] на две места по процепа (към Задача 4).

δ ["]	v_r [km/s]	δ ["]	v_r [km/s]
1,74	-118	3,48	-208
2,13	-139	3,86	-208
2,51	-158	4,30	-247
3,02	-168	4,54	-263

Таблица 1. Спектрални наблюдения по участък 3 (към Задача 4).



Фигура 6. Пълен спектър на мъглявината Хомункулус (към Задача 4).



Фигура 7. Спектрални наблюдения по участъци 1 и 2 (към Задача 4).