

Übungsserie 2

Abgabe: gemäss Angaben Dozent

Erzeugen Sie für jede der folgenden Aufgaben wie beschrieben eine Datei *Name_Vorname_Gruppe_S2_AufgX* (S2 steht für die Serie 2, X ist die Aufgabennummer), fassen Sie diese in eine ZIP-Datei *Name_Vorname_Gruppe_S2.zip* zusammen und laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf OLAT hoch. Die einzelnen m-Files müssen ausführbar sein und in den Kommentarzeilen (beginnen mit %) soll bei Funktionen ein Beispiel eines funktionierenden Aufrufs angegeben werden. Verspätete Abgaben können nicht mehr berücksichtigt werden.

Aufgabe 1 (ca. 40 Minuten):

Lösen Sie die folgende Aufgabe manuell auf einem Blatt Papier und scannen Sie dieses in die Datei *Name_Vorname_Gruppe_S2_Aufg1.pdf*:

a) Geben Sie für die reelle **Dezimalzahl** $x_0 = 118'559.999$ die Maschinenzahl \tilde{x}_0 in normalisierter Gleitpunktdarstellung zur Basis 12 (Duodezimalsystem) mit Mantisselänge $n = 7$ und hinreichend grossem Exponenten an (verwenden Sie dazu die Ziffern 0-9 sowie $A \triangleq 10$, $B \triangleq 11$). **Wie gross ist der absolute und relative Fehler**, der bei der Abbildung auf die Maschinenzahl entsteht, wenn die überflüssigen Ziffern abgeschnitten werden? Wie gross ist der absolute und relative Fehler, wenn gerundet wird?

b) Berechnen Sie nun den Funktionswert $f(x) = x^3 - 1.6665 \cdot 10^{15}$ sowohl für x_0 als auch \tilde{x}_0 . Wie gross ist der relative Fehler der Funktionswerte für die abgeschnittene Maschinenzahl \tilde{x}_0 und für die gerundete?

c) Berechnen Sie für die abgeschnittene Maschinenzahl die Konditionszahl und vergleichen Sie diese mit dem Verhältnis der relativen Fehlern aus a) und b). Gab die Konditionszahl in diesem Beispiel eine realistische Abschätzung für die Fehlerfortpflanzung?

Aufgabe 2¹ (ca. 40 Minuten):

Erzeugen Sie ein ausführbares Skript *Name_Vorname_Gruppe_S2_Aufg2.m*, welches die folgenden Aufgaben lösen soll:

a) Zeichnen Sie die beiden Polynome

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^7 - 14x^6 + 84x^5 - 280x^4 + 560x^3 - 672x^2 + 448x - 128 \\ f_2(x) &= (x-2)^7 \end{aligned}$$

auf dem Intervall $x \in [1.99, 2.01]$ mit 501 äquidistanten Punkten. Was stellen Sie fest? Analytisch sind die beiden Polynome identisch aber weshalb weichen die beiden von MATLAB gezeichneten Polynome voneinander ab? Schreiben Sie Ihre Antwort als Kommentar in Ihr Skript.

b) Plotten Sie die Funktion

$$g(x) = \frac{x}{\sin(1+x) - \sin(1)}$$

auf dem Intervall $x \in [-10^{-14}, 10^{-14}]$ mit einer Schrittweite von 10^{-17} . Ist die numerische Berechnung des Grenzwertes $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ auf diese Weise stabil?

c) Formen Sie manuell den Nenner von $g(x)$ unter Zuhilfenahme des Additionstheorems $\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ um und plotten Sie diese 'neue' Funktion nochmals auf dem gleichen Intervall wie b). Was stellen Sie fest und weshalb? Welcher Wert nimmt $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ also an? Schreiben Sie Ihre Antwort als Kommentar in Ihr Skript.

¹Beispiele übernommen aus 'Numerik-Algorithmen', G. Engeln-Müllges, K. Niederdröck, R. Wodicka

Aufgabe 3 (ca. 40 Minuten):

Erzeugen Sie ein ausführbares Skript *Name_Vorname_Gruppe_S2_Aufg3.m*, welches die folgenden Aufgaben lösen soll:

Bereits Archimedes entwickelte einen Algorithmus, um die Kreiszahl π zu bestimmen. Er verwendete dafür die Idee, einem Kreis gleichförmige Vielecke einzuschreiben. Wir betrachten eine leicht abgeänderte Variante dieses Algorithmus.

a) Gehen wir zum Beispiel von einem dem Einheitskreis eingeschriebenen Sechseck aus (mit also $n = 6$ auf dem Kreis liegenden Ecken). Dieses Sechseck setzt sich zusammen aus sechs gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge $s_6 = 1$. Summiert man die Länge der Seiten, die den Kreis berühren, erhält man $6 \cdot 1 \approx 2\pi = 6.28\dots$. Je grösser die Anzahl der Ecken eines solchen 'Vielecks', umso genauer muss sich die Summe der Seitenlängen 2π annähern. Es lässt sich zeigen, dass für die Seitenlänge eines Vielecks mit $2n$ Ecken gilt:

$$s_{2n} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}}}$$

Implementieren Sie einen Algorithmus, der Ihnen ausgehend von $n = 6$ die Summe der Seitenlänge $2n \cdot s_{2n}$ berechnet. Plotten Sie $2n \cdot s_{2n}$ als Funktion von $2n$. Was passiert für grosse n und weshalb?

b) Der Ausdruck s_{2n} lässt sich umschreiben unter Verwendung von

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \text{ bzw. } a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

als

$$s_{2n} = \sqrt{\frac{s_n^2}{2(1 + \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}})}}$$

Berechnen sie 2π erneut mit dieser Varianten. Was beobachten Sie?

Aufgabe 4 (ca. 20 Minuten):

Erzeugen Sie ein ausführbares Skript *Name_Vorname_Gruppe_S2_Aufg4.m*, welches die folgenden Aufgaben lösen soll:

- Überlegen Sie sich einen kurzen iterativen Algorithmus, der die Maschinengenauigkeit Ihres Rechners prüft. Schliessen Sie aus dem Ergebnis, ob Ihr Rechner im Dual- oder Dezimalsystem rechnet und mit welcher Stellenzahl er operiert.