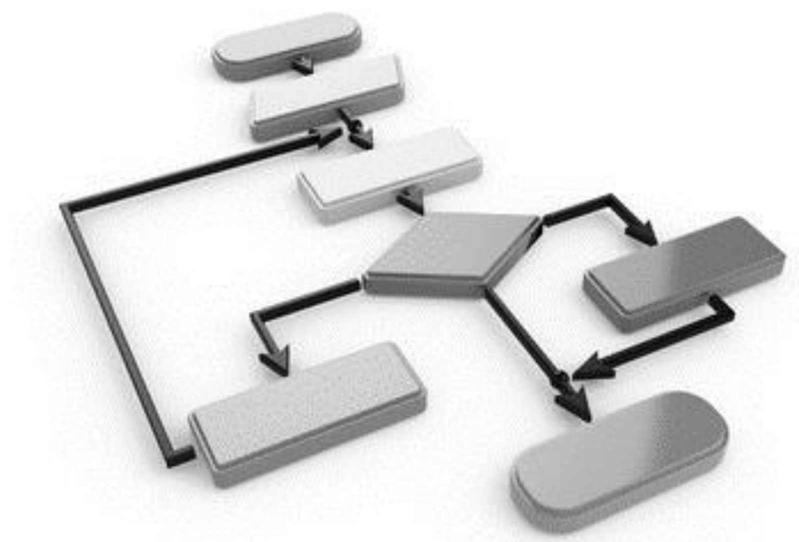


Lecture 10

Dynamic Programming

CSE373: Design and Analysis of Algorithms

The Change Problem

Goal: Convert some amount of money $\boldsymbol{M}$ into given denominations, using the fewest possible number of coins

Input: An amount of money $\boldsymbol{M}$, and an array of $\boldsymbol{d}$ denominations $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_d)$, in an increasing order of value ($c_1 < c_2 < \ldots < c_d$)

Output: A list of d integers $i_1, i_2, \ldots, i_d$ such that

$$c_1 i_1 + c_2 i_2 + \ldots + c_d i_d = \boldsymbol{M}$$

and $i_1 + i_2 + \ldots + i_d$ is minimal

The Change Problem

To find the minimum number of Canadian coins to make any amount, the greedy method always works

- At each step, just choose the largest coin that does not overshoot the desired amount

The Change Problem

The greedy method would not work if we did not have 5¢ coins

- For 31 cents, the greedy method gives seven coins (25+1+1+1+1+1+1), but we can do it with four (10+10+10+1)

The greedy method also would not work if we had a 21¢ coin

- For 63 cents, the greedy method gives six coins (25+25+10+1+1+1), but we can do it with three (21+21+21)

Example

We assume coins in the following denominations:

1¢ 3¢ 7¢

We'll use 77¢ as our goal

A Recursive Solution

Given the denominations ***c***: $c_1, c_2, \ldots, c_d$, the recurrence relation is:

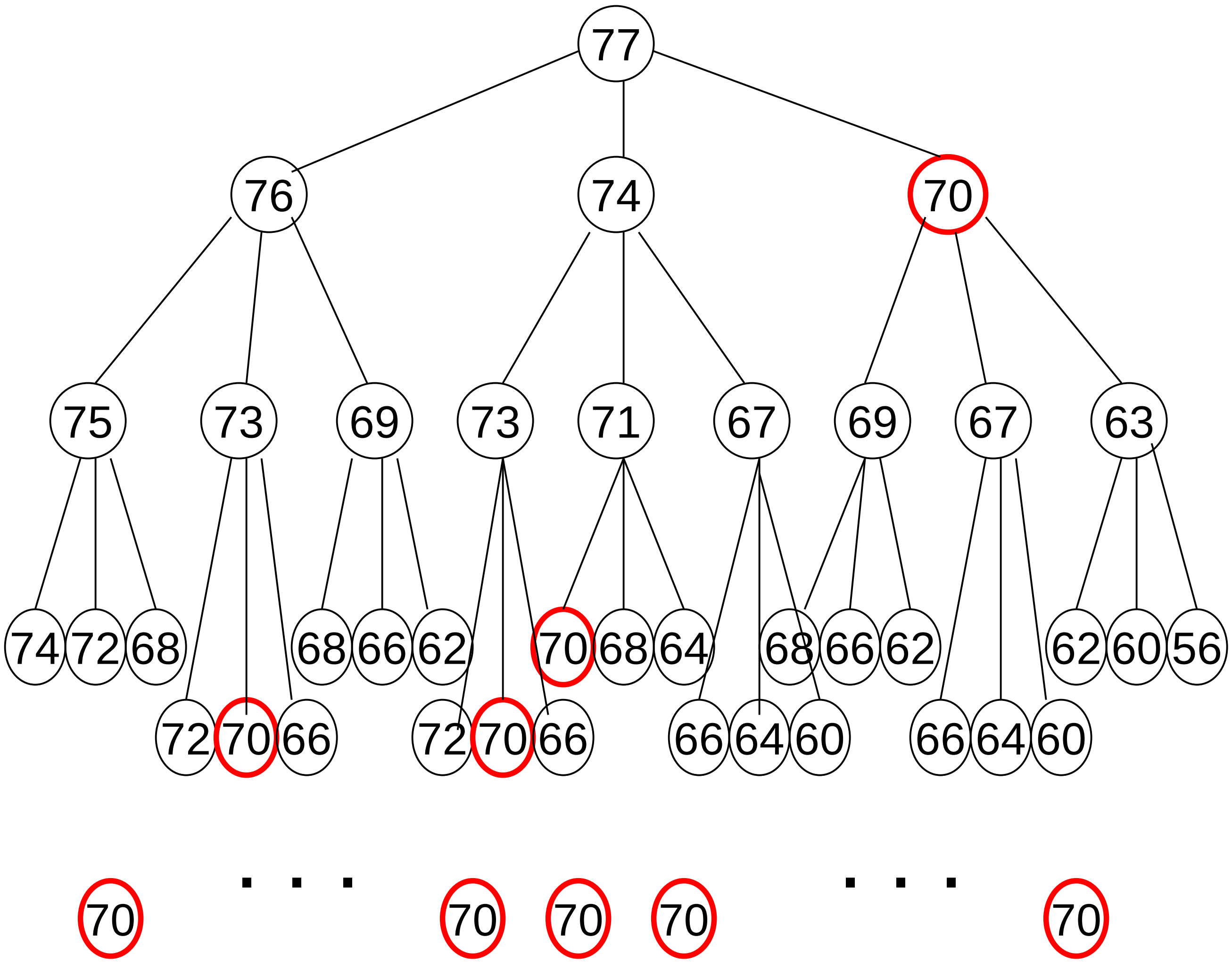
$$minNumCoins(M) = \textbf{min of} \begin{cases} minNumCoins(M-c_1) + 1 \\ minNumCoins(M-c_2) + 1 \\ \ldots \\ minNumCoins(M-c_d) + 1 \end{cases}$$

For 77¢:

- One 1¢ coin plus the best solution for 76¢
- One 3¢ coin plus the best solution for 74¢
- One 7¢ coin plus the best solution for 70¢

Choose the best solution from among the 3 given above

A Recursive Solution



A Dynamic Programming Solution

Idea: Solve first for one cent, then two cents, then three cents, etc., up to the desired amount

Save each answer in an array !

For each new amount N, compute cost of solution based on smaller sum + one additional coin.

- For example, to find the solution for 13¢,
  - First, solve for all of 1¢, 2¢, 3¢, ..., 12¢
  - Next, choose the best solution among:
    - solution for 12¢ + 1¢ coin
    - solution for 10¢ + 3¢ coin
    - solution for 6¢ + 7¢ coin

A Dynamic Programming Solution

DP_Change(M,C)

$d \leftarrow$ number of elements in C
$Cost_0 \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 1$ to M
    $Cost_i \leftarrow \infty$
    for $j \leftarrow 1$ to d
        if $i \geq c_j$ and $Cost_{i - c_j} + 1 < Cost_i$
            $Cost_i \leftarrow Cost_{i - c_j} + 1$
            $Prev_i \leftarrow c_j$
return $Cost_M$

Example

$M = 31$ $C = (1, 10, 25)$

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

$M = 31$ $C = (1, 10, 25)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31　　　　C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31   C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	0	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	∞	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	0	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31   C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	∞	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	0	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	∞	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	0	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

$M = 31$ $C = (1, 10, 25)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	∞
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	0

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31   C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31   C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31   C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31   C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	6	1	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	1	25	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	6	1	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	1	25	0	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	6	1	2	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	1	25	1	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	6	1	2	∞	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	1	25	1	0	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	6	1	2	3	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	1	25	1	1	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	6	1	2	3	∞	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	1	25	1	1	0	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	6	1	2	3	4	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	1	25	1	1	1	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	6	1	2	3	4	∞	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	1	25	1	1	1	0	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	1	25	1	1	1	1	0	0

Example

M = 31   C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	∞	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	1	25	1	1	1	1	0	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	3	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	1	25	1	1	1	1	10	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	3	∞
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	1	25	1	1	1	1	10	0

Example

M = 31 C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	3	4
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	1	25	1	1	1	1	10	1

Example

M = 31   C = (1, 10, 25)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cost	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Prev	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Cost	7	8	9	10	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	3	4
Prev	1	1	1	1	10	1	1	1	1	25	1	1	1	1	10	1

A Dynamic Programming Solution

Print_DP_Change(M,C)

$d \leftarrow$ number of elements in C

$Cost_0 \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 1$ to M

  $Cost_i \leftarrow \infty$

  for $j \leftarrow 1$ to d

    if $i \geq c_j$ and $Cost_{i - c_j} + 1 < Cost_i$

      $Cost_i \leftarrow Cost_{i - c_j} + 1$

      $Prev_i \leftarrow c_j$

$i \leftarrow M$

while $i > 0$

  print $Prev_i$

  $i \leftarrow i - Prev_i$

Maximum-sum Interval

Given a sequence of real numbers $a_1 a_2 \ldots a_n$, find a consecutive subsequence with the maximum sum.

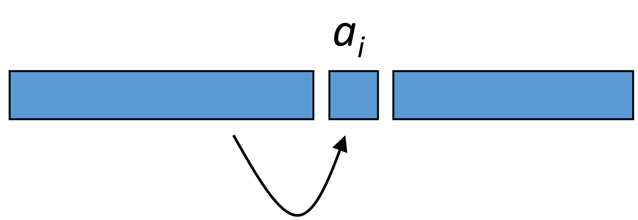
9 −3 1 7 −15 2 3 −4 2 −7 6 −2 8 4 -9

For each position, we can compute the maximum-sum interval starting at that position in $O(n)$ time. Therefore, a naive algorithm runs in $O(n^2)$ time.

Dynamic Programming Solution

The recurrence relation: Define S_i to be the maximum sum of the intervals ending at position *i*.

$$S_i \leftarrow \max\{S_{i-1} + a_i, a_i\}$$



If $S_{\mathrm{i}} < 0$, concatenating a_i with its previous interval gives less sum than a_i itself.

Dynamic Programming Solution

MaxSumInterval(A,n)

1. $Sum_0 \leftarrow 0$
2. **for** $i \leftarrow 1$ to n
3. $\quad Sum_i \leftarrow Sum_{i-1} + A_i$
4. $\quad Prev_i \leftarrow i - 1$
5. $\quad$ **if** $A_i > Sum_i$
6. $\quad\quad Sum_i \leftarrow A_i$
7. $\quad\quad Prev_i \leftarrow 0$

Print_MaxSumInterval(Prev,i)

1. **if** $Prev_i > 0$
2. $\quad$ Print_MaxSumInterval(Prev,$Prev_i$)
3. $\quad$ Print A_i

Dynamic Programming Solution

9 -3 1 7 -15 2 3 -4 2 -7 6 -2 8 4 -9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	0	9	-3	1	7	-15	2	3	-4	2	-7	6	-2	8	4	-9
Sum	0	9	6	7	14	-1	2	5	1	3	-4	6	4	12	16	7
Prev	0	0	1	2	3	4	0	6	7	8	9	0	11	12	13	14

The maximum sum

The maximum-sum interval: 6 -2 8 4

Rock Climbing Problem

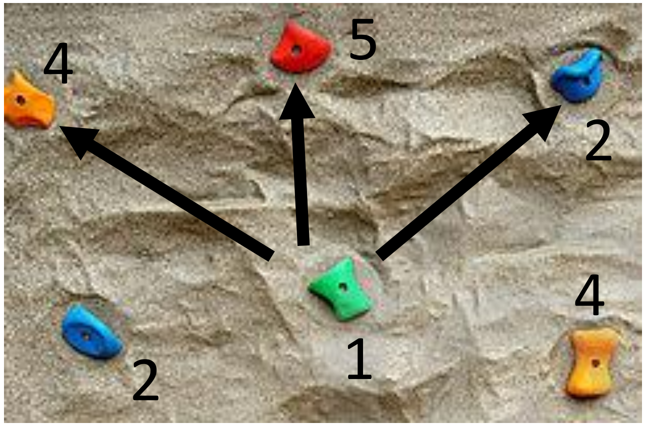
A rock climber wants to get from the bottom of a rock to the top by the safest possible path.

At every step, he reaches for handholds above him; some holds are safer than other.

From every place, he can only reach a few nearest handholds.

Rock Climbing Problem

At every step our climber can reach exactly three handholds: above, above and to the right and above and to the left.



There is a table of “danger ratings” provided. The “Danger” of a path is the sum of danger ratings of all handholds on the path.

Rock Climbing Problem

We represent the wall as a table. Every cell of the table contains the danger rating of the corresponding block.

	1	2	3	4	5
1	2	8	9	5	8
2	4	4	6	2	3
3	5	7	5	6	1
4	3	2	5	4	8

The obvious greedy algorithm does not give an optimal solution.

The rating of a greedy path is 13.

The rating of an optimal path is 12.

Dynamic Programming Solution

For $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq j \leq m$, define $A(i,j)$ to be the cumulative rating of the least dangerous path from the bottom to the hold *(i,j)*.

Let $C(i,j)$ be the rating of the hold (i,j). There are three cases for $A(i,j)$:

Left ($j = 1$): $C(i,j) + \min\{A(i+1,j), A(i+1,j+1)\}$

Right ($j = m$): $C(i,j) + \min\{A(i+1,j-1), A(i+1,j)\}$

Middle: $C(i,j) + \min\{A(i+1,j-1), A(i+1,j), A(i+1,j+1)\}$

For the first row ($i = n$), $A(i,j) = C(i,j)$.

Dynamic Programming Solution

Add initialization row: *A(n+1,j)=0*. No danger to stand on the ground. Add two initialization columns: A(i,0)=A(i,m+1)=∞. It is infinitely dangerous to try to hold on to the air where the wall ends.

Now the recurrence becomes, for every i,j:

$$A(i,j) = C(i,j) + \min\{A(i+1,j-1), A(i+1,j), A(i+1,j+1)\}$$

The final result is $\min\{A(1,j)$

Dynamic Programming Solution

C(i,j):

	1	2	3	4	5
1	2	8	9	5	8
2	4	4	6	2	3
3	5	7	5	6	1
4	3	2	5	4	8

A(i,j):

i\j	0	1	2	3	4	5	6
0							
1	∞						∞
2	∞						∞
3	∞						∞
4	∞						∞
5	∞	0	0	0	0	0	∞

Initialization: $A(i,0)=A(i,m+1)=\infty$, *$A(n,j)=0$*

Dynamic Programming Solution

C(i,j):

	1	2	3	4	5
1	2	8	9	5	8
2	4	4	6	2	3
3	5	7	5	6	1
4	3	2	5	4	8

A(i,j):

i\j	0	1	2	3	4	5	6
0							
1	∞						∞
2	∞						∞
3	∞						∞
4	∞	3	2	5	4	8	∞
5	∞	0	0	0	0	0	∞

The values in the fourth row are the same as C(i,j).

Dynamic Programming Solution

C(i,j):

	1	2	3	4	5
1	2	8	9	5	8
2	4	4	6	2	3
3	5	7	5	6	1
4	3	2	5	4	8

A(i,j):

i\j	0	1	2	3	4	5	6
0							
1	∞						∞
2	∞						∞
3	∞	7					∞
4	∞	3	2	5	4	8	∞
5	∞	0	0	0	0	0	∞

A(3,1)=5+min{∞,3,2}=7.

Dynamic Programming Solution

C(i,j):

	1	2	3	4	5
1	2	8	9	5	8
2	4	4	6	2	3
3	5	7	5	6	1
4	3	2	5	4	8

A(i,j):

i\j	0	1	2	3	4	5	6
0							
1	∞						∞
2	∞						∞
3	∞	7	9				∞
4	∞	3	2	5	4	8	∞
5	∞	0	0	0	0	0	∞

A(3,1)=5+min{∞,3,2}=7. A(3,2)=7+min{3,2,5}=9

Dynamic Programming Solution

C(i,j):

	1	2	3	4	5
1	2	8	9	5	8
2	4	4	6	2	3
3	5	7	5	6	1
4	3	2	5	4	8

A(i,j):

i\j	0	1	2	3	4	5	6
0							
1	∞						∞
2	∞						∞
3	∞	7	9	7			∞
4	∞	3	2	5	4	8	∞
5	∞	0	0	0	0	0	∞

$A(3,1)=5+\min\{\infty,3,2\}=7$. $A(3,2)=7+\min\{3,2,5\}=9$
$A(3,3)=5+\min\{2,5,4\}=7$.

Dynamic Programming Solution

C(i,j):

	1	2	3	4	5
1	2	8	9	5	8
2	4	4	6	2	3
3	5	7	5	6	1
4	3	2	5	4	8

A(i,j):

i\j	0	1	2	3	4	5	6
0							
1	∞						∞
2	∞						∞
3	∞	7	9	7	10		∞
4	∞	3	2	5	4	8	∞
5	∞	0	0	0	0	0	∞

A(3,1)=5+min{∞,3,2}=7. A(3,2)=7+min{3,2,5}=9
A(3,3)=5+min{2,5,4}=7. A(3,4)=5+min{5,4,8}=7.

Dynamic Programming Solution

C(i,j):

	1	2	3	4	5
1	2	8	9	5	8
2	4	4	6	2	3
3	5	7	5	6	1
4	3	2	5	4	8

A(i,j):

i\j	0	1	2	3	4	5	6
0							
1	∞						∞
2	∞						∞
3	∞	7	9	7	10	5	∞
4	∞	3	2	5	4	8	∞
5	∞	0	0	0	0	0	∞

A(3,1)=5+min{∞,3,2}=7. A(3,2)=7+min{3,2,5}=9
A(3,3)=5+min{2,5,4}=7. A(3,4)=5+min{5,4,8}=7. A(3,5)=1+min{4,8,∞}=7.

Dynamic Programming Solution

C(i,j):

	1	2	3	4	5
1	2	8	9	5	8
2	4	4	6	2	3
3	5	7	5	6	1
4	3	2	5	4	8

A(i,j):

i\j	0	1	2	3	4	5	6
0							
1	∞						∞
2	∞						∞
3	∞	7	9	7	10	5	∞
4	∞	3	2	5	4	8	∞
5	∞	0	0	0	0	0	∞

The best cumulative rating on the third row is 5.

Dynamic Programming Solution

C(i,j):

	1	2	3	4	5
1	2	8	9	5	8
2	4	4	6	2	3
3	5	7	5	6	1
4	3	2	5	4	8

A(i,j):

i\j	0	1	2	3	4	5	6
0							
1	∞						∞
2	∞	11	11	13	7	8	∞
3	∞	7	9	7	10	5	∞
4	∞	3	2	5	4	8	∞
5	∞	0	0	0	0	0	∞

The best cumulative rating on the second row is 7.

Dynamic Programming Solution

C(i,j):

	1	2	3	4	5
1	2	8	9	5	8
2	4	4	6	2	3
3	5	7	5	6	1
4	3	2	5	4	8

A(i,j):

i\j	0	1	2	3	4	5	6
0							
1	∞	13	19	16	12	15	∞
2	∞	11	11	13	7	8	∞
3	∞	7	9	7	10	5	∞
4	∞	3	2	5	4	8	∞
5	∞	0	0	0	0	0	∞

The best cumulative rating on the first row is 12.