투자자산운용사 채권 보충자료

본 자료는 채권운용전략에서 일부내용에 대한 이해를 높이기 위해 수학적 도출과정을 정리한 내용입니다.시험 대비하여서는 직관적 이해만으로도 충분하지만 보충자료를 통해 이해도를 높이시기바랍니다.

.　presented by Y.B Jeon

·표기 해설
·Par : 채권액면가　P : 채권가격　, c : 액면이자율 , y : 만기수익률 , n : 채권 만기

1. 채권수익률 상승하면 채권가격은 하락한다.

만약 무이표채의 경우 가정하면

P(y) = Par $\times(1+y)^{-n}$ 이므로 이를 y에 대하여 미분하면

$dP/dy = -n \times Par \times (1+y)^{-n-1} < 0$

채권수익률과 채권가격간에는 음(-)의 관계

2. 가격곡선 우하향 형태이면서 기울기가 완만해진다. (볼록성)

이는 채권가격곡선의 기울기의 변화를 뜻하는데 채권수익률과 채권가격간 변화가 선형관계를 이루지 않는다는 것을 암시.

이는 곡선의 기울기의 변화 즉, 2차 미분의 부호를 통해 확인 가능!

P(y) = Par $\times$ $((1+y)^{-n}$

$dP/dy = -n \times Par \times (1+y)^{-n-1}$

$$\frac{d(\frac{dP}{dy})}{dy} = \frac{d^2P}{dy^2} = (-n)Par(-n-1)(1+y)^{-n-2}$$

$= n(n+1)Par(1+y)^{-n-2} > 0$

=> 수익률 상승하는 경우 기울기도 증가하는 것을 알 수 있다!!!

3.　장기채권이 단기채권보다 가격의 상대적변화율이 높다.

$dP/dy = -n \times Par \times (1+y)^{-n-1} < 0$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{-n \times Par}{(1+y)^{n+1}} \Rightarrow dP = \frac{-n \times Par}{(1+y)^{n+1}} \times dy$$

☞이는 y가 변할때의 채권가격의 변화폭을 의미!

만기가 다른 채권간에 채권가격이 다르므로 가격의 변화폭을 비교하는 것보다는 채권가격변화율을 비교하는 것이 보다 타당함.

그러므로 다음의 식으로 변환하면 (절대값으로 표시 한 것임)

$$\left|\frac{dP}{P}\right| = \frac{\frac{n(Par)(dy)}{(1+y)^{n+1}}}{\frac{Par}{(1+y)^n}} = \frac{n(dy)}{1+y}$$ ☞ 가격변화율은 n에 비례!

4. 금액듀레이션(Dollar Duration : DD)

☞ $DD = -dP/dy$　(:항상 양의 값을 갖도록 한 것임($dP/dy < 0$ 이므로)

금액듀레이션은 만기수익률의 변화에 대한 채권가격의 절대적 변화의 관계를 나타낸것!
[다른 표현]

$$\frac{dP}{P}=-MD\times dy \rightarrow dP=-MD\times P\times dy=-DD\times dy \text{이므로} DD=-\frac{dP}{dy}$$

Δy가 작을 경우는 다음과 같이 표시가 가능하다.
$\Delta P \approx -DD\times \Delta y$

5. 수정듀레이션(Modified Duration : MD)

$$MD = \frac{DD}{P}=\frac{-\frac{dP}{dy}}{P}=\frac{(-\frac{dP}{P})}{dy}$$

즉 채권의 수정듀레이션은 그 채권의 금액듀레이션을 채권가격으로 나누어 상대적인 수치로 변환한 값!

$$MD=\frac{DD}{P}=\frac{-\frac{dP}{dy}}{P}=\frac{-\frac{dP}{P}}{dy} \text{이므로}, MD\times dy=-(dP/P)=(-\text{채권가격의 상대적 변화율})$$

이 된다. (-) 부호는 단지 MD 수치를 (+)로 전환하기 위하여 사용된 것으로, 결국

MD × dy = 채권가격의 상대적 변화율

현실적으로 이자율의 상승은 dy가 아니라 25bp, 50bp 등의 값을 가지는 △y이므로 dy를 △y로, 또 가격변화 dP를 △P로 대체하면 MD×△y ≈ -(△P/P) 이 성립한다.
양변에 100을 곱하면,
MD×△y×100 ≈ -(△P/P)×100 은 "채권가격의 변화"를 나타낸다. 이제
△y 100bp 상승을 가정하면,
MD×(0.01)×100 ≈ -(△P/P)×100, 즉
MD ≈ -(△P/P) × 100 이 된다. 그러므로 MD는 대략적으로
"이자율이 100bp만큼 상승할 때의 채권가격의 % 변화"

6. 이표채 수정듀레이션 (MD)

☞ $MD=D/(1+y)$
[증명]

$$P=\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{CF(t)}{(1+y)^{t}}\right)=\sum_{t=1}^{n}\left(CF(t)\cdot(1+y)^{-t}\right)$$

$$\frac{dP}{dy}=\sum_{t=1}^{n}\left(-t\cdot CF(t)\cdot(1+y)^{-t-1}\right)$$

$$-\frac{dP}{dy}=\sum_{t=1}^{n}\left(t\cdot CF(t)\cdot(1+y)^{-t-1}\right)=\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\frac{CF(t)}{(1+y)^{t+1}}\cdot t}{P}\right)$$

$$MD=\frac{\left(-\frac{dP}{dy}\right)}{P}=\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{CF(t)}{(1+y)^{t+1}}\cdot t\right)}{P}=\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\frac{CF(t)}{(1+y)^{t+1}}\cdot t}{P}\right)$$

$$=\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{(1+y)}\frac{CF(t)}{(1+y)^{t}}\cdot t}{P}\right)=\frac{1}{(1+y)}\cdot\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\frac{CF(t)}{(1+y)^{t}}\cdot t}{P}\right)$$

$$=\frac{1}{(1+y)}\cdot D$$

7. 매컬리 듀레이션 (Macaulay Duration: D)

듀레이션과 채권가격 변동성

$$P=\frac{C}{1+y}+\frac{C}{(1+y)^2}+\cdot\cdot\cdot+\frac{C}{(1+y)^n}+\frac{Par}{(1+y)^n}\quad(\text{단}, C=Par\cdot c)$$

$$\frac{dP}{dy}=\frac{(-1)C}{(1+y)^2}+\frac{(-2)C}{(1+y)^3}+\cdot\cdot\cdot+\frac{(-n)C}{(1+y)^{n+1}}+\frac{(-n)Par}{(1+y)^{n+1}}$$

$$\frac{dP}{dy}=-\frac{1}{1+y}\left[\frac{1C}{1+y}+\frac{2C}{(1+y)^2}+\cdot\cdot\cdot+\frac{nC}{(1+y)^n}+\frac{nPar}{(1+y)^n}\right]$$

$$\frac{dP}{dy}\frac{1}{P}=-\frac{1}{1+y}\underline{\left[\frac{1C}{1+y}+\frac{2C}{(1+y)^2}+\cdot\cdot\cdot+\frac{nC}{(1+y)^n}+\frac{nPar}{(1+y)^n}\right]\frac{1}{P}}$$

밑줄 친 부분이 Macaulay Duration 이다.

☞ Macaulay Duration $=\sum_{t=1}^{n}\frac{\frac{CF(t)}{(1+y)^n}\times t}{P}$ 다시 정리하면

$$\frac{dP}{dy}\frac{1}{P}=-\frac{1}{1+y}\cdot D$$

$\frac{dP}{P}=-D\cdot\frac{dy}{1+y}$ 가 된다.

다르게 표시하면 $D = -\dfrac{\dfrac{\triangle P}{P}}{\left(\dfrac{dy}{1+y}\right)}$ 로 수익률 변화에 대한 민감도이해가능

$MD = \dfrac{D}{1+y}$ 이므로

$\dfrac{\triangle P}{P} = -MD \bullet dy$

8. 무이표채의 메컬리듀레이션

무이표채권의 경우 현금흐름이 만기에 한번만 발생하므로 듀레이션은 다음과 같다.

$$D = \sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\dfrac{CF(t)}{(1+y)^t}}{P} \bullet t\right) = \frac{\dfrac{CF(n)}{(1+y)^n}}{P} \bullet n = \frac{\dfrac{CF(n)}{(1+y)^n}}{\dfrac{CF(n)}{(1+y)^n}} \bullet n = n$$

9. 금액컨벡시티의 정의

$$DC = \frac{d\left(\dfrac{dP}{dy}\right)}{dy} = \frac{\dfrac{d^2P}{dy}}{dy} = \frac{d^2P}{dy^2}$$

여기서 $P=$ 채권의가격, $y=$ 채권의만기수익률이다. 시장의 현물이자율 곡선은 수평이며 또 평행 이동한다고 가정한다.

[채권가격의 변화와 금액컨벡시티]
만기수익률 변화 △y에 따른 채권가격의 변화 △P를 추정할 때, 테일러의 정리 중 2차 도함수까지 사용하여 △P의 근사치를 구하면 다음과 같다.

$$\triangle P \approx P'(y) \times \triangle y + P''(y) \times \frac{(\triangle y)^2}{2!} = \frac{dP}{dy} \times \triangle y + \frac{d^2P}{dy^2} \times \frac{(\triangle y)^2}{2!}$$

$$= -DD \times \triangle y + DC \times \frac{(\triangle y)^2}{2!}$$

여기서 $DD=$ 금액듀레이션, $DC=$ 금액컨벡시티를 나타낸다.

10. 컨벡시티의 정의

컨벡시티 C는 다음과 같이 정의

$$C = \frac{DC}{P} = \frac{\left(\frac{d^2P}{dy^2}\right)}{P}$$

여기서, $P=$ 채권의 가격, $DC=$ 채권의 금액컨벡시티, 그리고 $y=$ 채권의 만기수익률이다.
☞ 채권의 컨벡시티는 금액컨벡시티를 채권가격으로 나눈 상대적 값으로 채권가격의 변동성을 상대적으로 표현하는 방식
[채권가격의 상대적 변화와 컨벡시티]
시장이자율 변화에 따른 채권가격의 상대적 변화는 다음과 같다.

$$\triangle P \approx -DD \times \triangle y + DC \times \frac{(\triangle y)^2}{2!}$$

양변을 P로 나누고 $DD/P = MD$, $DC/P = C$를 이용하면

$$\frac{\triangle P}{P} \approx -\frac{DD}{P} \times \triangle y + \frac{DC}{P} \times \frac{(\triangle y)^2}{2!} = -MD \times \triangle y + C \times \frac{(\triangle y)^2}{2!}$$

($MD=$ 수정듀레이션, $C=$ 컨벡시티)