B1947 선물 전달

sianke1991

n 명의 사람이 각각의 선물을 모은 후, 그 n 명의 사람이 선물 하나 씩을 가져오는데, 본인이 가져온 선물은 되가져오지 않는다. 이렇게 할 수 있는 경우의 수를 찾는다. 예를 들어 n=4이고, 0번, 1번, 2번, 3번 사람이 각각 선물 0, 1, 2, 3을 모은 경우 다음과 같이 선물을 가져올 수 있다.

0번 사람	1번 사람	2번 사람	3번 사람
1	0	3	2
1	2	3	0
1	3	0	2
2	0	3	1
2	3	0	1
2	3	1	0
3	0	1	2
3	2	0	1
3	2	1	0

모든 경우에 대해 본인이 가져온 선물을 되가져오지 않는다.

인원 수가 n일 때 위와 같이 선물을 교환할 수 있는 경우의 수를 f(n)이라고 하자. 예를 들어 4명에 대해 f(4) = 9인 것이다. 본래 4 개의 선물을 4 명에게 분배하는 경우의 수는 4! = 24가 되어야 한다. 하지만 이 경우의 수는 본인의 선물을 본인이 되가져오는 경우를 포함하는 것이다. 이제 본인의 선물을 본인이 되가져오는 경우를 제거해 나가자.
4명의 사람 중 한 사람은 선물을 되가져오고 나머지 사람은 되가져오지 않는 경우의 수는 (4 choose 1)*f(3) 이다.
4명의 사람 중 두 사람은 선물을 되가져오고 나머지 사람은 되가져오지 않는 경우의 수는 (4 choose 2)*f(2) 이다.
4명의 사람 중 세 사람은 선물을 되가져오고 나머지 사람은 되가져오지 않는 경우의 수는 (4 choose 3)*f(1) 이다.
4명의 사람 중 네 사람이 선물을 되가져오는 경우의 수는 (4 choose 4)*f(0) 이다. (여기서 편의 상 f(0)=1로 둔다.)
따라서 다음 식을 세울 수 있다.

$$f(4)=4!-\binom{4}{1}f(3)-\binom{4}{2}f(2)-\binom{4}{3}f(1)-\binom{4}{4}f(0)$$

위 식도 점화식이라고 볼 수 있지만 f(4)를 구하기 위해 f(3) 부터 f(0) 까지의 값이 전부 필요하다. 이 식으로 원하는 항의 값을 계산하면 시간복잡도는 $O(n^2)$ 이다. (그리고 이 문제에서 인원 수의 최대치는 1,000,000 이므로 $O(n^2)$의 알고리즘을 사용하면 시간 초과가 발생할 것이다.) 그러므로 더 그럴듯한 점화식을 세우기 위해 위의 식을 더 조작해본다. 바로 f(3), f(2), f(1), f(0)에 대해서도 식을 세워서 윗 식에 대입해 보는 것이다.

$$f(3)=3!-\binom{3}{1}f(2)-\binom{3}{2}f(1)-\binom{3}{3}f(0)$$

f(3)을 표현하는 윗 식의 양 변에 이항계수 4 choose 1을 곱하면 다음과 같이 된다.

$$\binom{4}{1}f(3)=\frac{4!}{1!}-\binom{4}{1}\binom{3}{1}f(2)-\binom{4}{1}\binom{3}{2}f(1)-\binom{4}{1}\binom{3}{3}f(0)$$

$$\binom{4}{1}f(3)=\frac{4!}{1!}-2\binom{4}{2}f(2)-3\binom{4}{3}f(1)-4\binom{4}{4}f(0)$$

(여기서 이항계수의 곱에 대한 성질을 사용하였다.)

$$\binom{4}{1}\binom{3}{1}=2\times\frac{4\,3}{1\cdot 1\cdot 2}=2\binom{4}{2}$$

$$\binom{4}{1}\binom{3}{2}=3\times\frac{4\,3\,2}{1\cdot 2\,1\cdot 3}=3\binom{4}{3}$$

$$f(2)=2!-\binom{2}{1}f(1)-\binom{2}{2}f(0)$$

f(2)를 표현하는 윗 식의 양 변에 이항계수 4 choose 2를 곱하면 다음과 같이 된다.

$$\binom{4}{2}f(2)=\frac{4!}{2!}-\binom{4}{2}\binom{2}{1}f(1)-\binom{4}{2}\binom{2}{2}f(0)$$

$$\binom{4}{2}f(2)=\frac{4!}{2!}-3\binom{4}{3}f(1)-6\binom{4}{4}f(0)$$

$$f(1)=1!-\binom{1}{1}f(0)$$

f(1)을 표현하는 윗 식의 양 변에 이항계수 4 choose 3을 곱하면 다음과 같이 된다.

$$\binom{4}{3}f(1)=\frac{4!}{3!}-\binom{4}{3}\binom{1}{1}f(0)$$

$$\binom{4}{3}f(1)=\frac{4!}{3!}-4\binom{4}{4}f(0)$$

$$f(0)=0!$$

f(0)을 표현하는 윗 식의 양 변에 이항계수 4 choose 4를 곱하면 다음과 같이 된다.

$$\binom{4}{4}f(0)=\frac{4!}{4!}$$

이상

$$\binom{4}{1}f(3)=\frac{4!}{1!}-2\binom{4}{2}f(2)-3\binom{4}{3}f(1)-4\binom{4}{4}f(0)$$

$$f(2)=2!-\binom{2}{1}f(1)-\binom{2}{2}f(0)$$

$$\binom{4}{2}f(2)=\frac{4!}{2!}-3\binom{4}{3}f(1)-6\binom{4}{4}f(0)$$

$$f(1)=1!-\binom{1}{1}f(0)$$

$$\binom{4}{3}f(1)=\frac{4!}{3!}-4\binom{4}{4}f(0)$$

$$f(0)=0!$$

$$\binom{4}{4}f(0)=\frac{4!}{4!}$$

을 식

$$f(4)=4!-\binom{4}{1}f(3)-\binom{4}{2}f(2)-\binom{4}{3}f(1)-\binom{4}{4}f(0)$$

에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$f(4)=\frac{4!}{0!}-\frac{4!}{1!}+\frac{4!}{2!}-\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{4!}$$

일반적인 인원수 n 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$f(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n}\frac{n!}{i!}$$

예를 들어 f(5)는 다음과 같이 계산된다.

$$f(5)=\frac{5!}{0!}-\frac{5!}{1!}+\frac{5!}{2!}-\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{4!}-\frac{5!}{5!}$$

우변의 첫 다섯 항은 5*f(4)로 나타낼 수 있으므로-

$$f(5)=5f(4)-1$$

로 표현할 수 있다.

또한 f(4)와 f(3)은 다음과 같이 계산된다.

$$f(4)=\frac{4!}{0!}-\frac{4!}{1!}+\frac{4!}{2!}-\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{4!}$$

$$f(3)=\frac{3!}{0!}-\frac{3!}{1!}+\frac{3!}{2!}-\frac{3!}{3!}$$

f(4)를 나타내는 값의 첫 넷 항은 4*f(3)으로 나타낼 수 있으므로-

$$f(4)=4f(3)+1$$

로 표현할 수 있다.

일반적으로 n이 짝수라면

$$f(n)=nf(n-1)+1$$

이 성립하고,

n이 홀수라면

$$f(n)=nf(n-1)-1$$

이 성립한다. 이 점화식을 사용하면 f(n)을 구할 때 바로 전 항 f(n-1) 만을 참조하므로 시간복잡도 O(n)으로 문제를 풀 수 있다.

Note. 점화식에 곱셈이 들어있는데 다루고 있는 수가 매우 크므로 오버플로에 주의해야 한다. 오버플로에 대비하기 위해 int 대신 long long을 사용하도록 하자.

```
#include <stdio.h>
long long dp[1000001] = {1};
int main() {
    int n;
    scanf("%d", &n);
    for (long long i=2; i<=n; i++) {
        if (i%2==0) dp[i] = (i*dp[i-1]+1)%1000000000;
        else dp[i] = (i*dp[i-1]-1)%1000000000;
    } //i loop
    printf("%lld", dp[n]);
    return 0;
}
```