Université de Liège

Ingénieur Civil - Bachelier

Projet 1

Etude du retard moyen d'un étudiant

MUKOLONGA Jean-David 20170679
SIBOYABASORE Cedric 20175202

28 avril 2019

1 Question 1 : Manipulation des lois de probabilités

1.a

Par définition, les lois marginales des variables aléatoires T, B et C sont obtenues en marginalisant la loi conjointe $P_{T,B,C}(t_i, b_j, c_k)$, c'est-à-dire en effectuant

$$P_T(t_i) = \sum_{j=1}^{5} \sum_{k=1}^{3} P_{T,B,C}(t_i, b_j, c_k), \quad \forall i = 1, 2, 3, 4$$

$$P_B(b_j) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{3} P_{T,B,C}(t_i, b_j, c_k), \quad \forall j = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$P_C(c_k) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} P_{T,B,C}(t_i, b_j, c_k), \quad \forall k = 1, 2, 3$$

Or, la loi de probabilité conjointe des trois variables nous est fournie dans le tableau tridimensionnel TBC. Nous pouvons dès lors déterminer les lois de probabilités marginales pour chacune des variables T, B et C.
Elles sont calculées grâce à des triple boucles sommant les éléments de TBC dans notre script ***Q1a.m*** qui renvoie les trois lois marginales sous forme de vecteurs *loi_mar_T*, *loi_mar_B*, *loi_mar_C* et les valeurs contenues dans ces vecteurs sont affichées dans TABLE 1, TABLE 2 et TABLE 3 qui sont des tableaux situés en annexes (comme les autres tableaux que nous allons utiliser dans ce rapport).

1.b

Nous obtenons les lois de probabilités conjointes $P_{T,B}(t_i, b_j)$, $P_{T,C}(t_i, c_k)$ et $P_{B,C}(b_j, c_k)$ des paires de variables en réalisant

$$P_{T,B}(t_i, b_j) = \sum_{k=1}^{3} P_{T,B,C}(t_i, b_j, c_k), \quad \forall i = 1, 2, 3, 4 \; et \; \forall j = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$P_{T,C}(t_i, c_k) = \sum_{j=1}^{5} P_{T,B,C}(t_i, b_j, c_k), \quad \forall i = 1, 2, 3, 4 \; et \; \forall k = 1, 2, 3$$

$$P_{B,C}(b_j,c_k) = \sum_{i=1}^{4} P_{T,B,C}(t_i,b_j,c_k), \quad \forall j = 1,2,3,4,5 \; et \; \forall k = 1,2,3$$

Les lois de probabilités conjointes des paires de variables aléatoires (T,B), (T,C) et (B,C) sont calculées dans notre script ***Q1b.m*** qui les renvoie sous forme de tableaux bidimensionnels loi_con_TB, loi_con_TC, loi_con_BC et leurs valeurs sont représentées dans les tables de contingence TABLE 4, TABLE 5 et TABLE 6.

1.c

Les lois conditionnelles demandées sont définies par

$$P_{T|B,C}(T|B,C) = \frac{P_{T,B,C}(t_i,b_j,c_k)}{P_{B,C}(b_j,c_k)}, \quad \forall i = 1,2,3,4 \; , \; \forall j = 1,2,3,4,5 \; et \; \forall k = 1,2,3$$

$$P_{B|T,C}(B|T,C) = \frac{P_{T,B,C}(t_i,b_j,c_k)}{P_{T,C}(t_i,c_k)}, \quad \forall i = 1,2,3,4 \; , \; \forall j = 1,2,3,4,5 \; et \; \forall k = 1,2,3$$

$$P_{C|T,B}(C|T,B) = \frac{P_{T,B,C}(t_i,b_j,c_k)}{P_{T,B}(t_i,b_j)}, \quad \forall i = 1,2,3,4 \; , \; \forall j = 1,2,3,4,5 \; et \; \forall k = 1,2,3$$

où le numérateur représente la loi conjointe des trois variables fournie par TBC et chaque dénominateur représente une loi conjointe d'un couple de variables calculée au point b. Dans le script ***Q1c.m***, nous divisons donc la loi conjointe fournie par TBC par les lois conjointes calculées par ***Q1b.m*** et nous renvoyons les lois conditionnelles $P_{T|B,C}(T|B,C)$, $P_{B|T,C}(B|T,C)$ et $P_{C|T,B}(C|T,B)$ respectivement sous forme de tableaux tri-dimensionnels loi_cond_TBC, loi_cond_BTC et loi_cond_CTB dont les valeurs se trouvent dans TABLE 7, TABLE 8, TABLE 9, TABLE 10, TABLE 11, TABLE 12, TABLE 13, TABLE 14 et TABLE 15.

1.d

En observant les tableaux contenant les lois de probabilité conditionnelles de $P_{T|B,C}(T|B,C)$ (TABLE 7, TABLE 8, TABLE 9), nous remarquons des répétitions de valeurs. En effet, pour une valeur de C fixée, la loi $P_{T|B,C}(T|B,C)$ ne change que si la valeur de T change. En passant d'un tableau à l'autre, les valeurs changent, ce qui signifie que $P_{T|B,C}(T|B,C)$ dépend également de C.

Parallèlement, pour les tableaux contenant les lois de probabilité conditionnelle de $P_{B|T,C}(B|T, C)$ (TABLE 10, TABLE 11 et TABLE 12), la loi conditionnelle $P_{B|T,C}(B|T, C)$ dépend uniquement des valeurs de B et de la valeur de C fixée. Elle est indépendante de T.
Nous pouvons déduire de ces observations qu'il existe une relation de dépendance entre les variables aléatoires.

2 Question 2 : Probabilités des évènements

2.a

Par complémentarité, calculer la probabilité qu'au moins un évènement défavorable ait lieu revient à soustraire à 1 la probabilité qu'aucun évènement défavorable ait lieu, c'est-à-dire soustraire à 1 la probabilité qu'un évènement favorable ai lieu.
Les évènements favorables correspondent au cas où le train et le bus sont à l'heure sans problème exogène et au cas où le train est à l'heure, le bus est un peu en avance sans problème exogène, c'est-à-dire aux cas où (T =1,B =1,C =1) et (T =1,B =2,C =1).
La probabilité qu'au moins un évènement défavorable ait lieu vaut donc

$$1 - P_{T,B,C}(1, 1, 1) - P_{T,B,C}(1, 2, 1)$$

Les deux probabilités présentes dans ce calcul sont contenues dans la matrice TBC et le calcul est effectué dans le fichier ***Q2a.m*** qui renvoie 0.6329 comme réponse.

2.b

Le deuxième scénario nous semble le plus plausible. En effet, si le train et le bus, deux transports indépendants l'un de l'autre, ne circulent pas, il nous paraît plus probable qu'ils soient tous deux affectés par une grève nationale. Il nous semble en revanche peu probable qu'une grève ait lieu alors que le train et le bus arrivent tous deux à l'heure.

Les probabilités liés à ces deux scénarios peuvent être calculées grâce aux lois de probabilités conditionnelles calculées par ***Q1c.m*** .
La probabilité qu'une grève ait lieu sachant que le train et le bus sont à l'heure vaut

$$P_{C|T,B}(C = 3|T = 1, B = 1) = 1.7204e - 05$$

et la probabilité qu'une grève ait lieu sachant que le train et le bus ne circulent pas vaut

$$P_{C|T,B}(C = 3|T = 3, B = 4) = 0.8827.$$

Le calcul de ces probabilités confirme nos soupçons.

2.c

Nous devons calculer

$$P_{B|T}(B = 5, T = 3) * P_{C|T}(C = 1, T = 3)$$

car nous avons une condition sur la variable C et le "**et**" nous oblige à multiplier les deux probabilités.
En utilisant la formule de base pour calculer des probabilités conditionnelles, le calcul, devient

$$P_{B|T}(B = 5, T = 2) * P_{C|T}(C = 1, T = 2) = \frac{P_{T,C}(2, 5)}{P_T(2)} * \frac{P_{T,B}(2, 1)}{P_T(2)}$$

où les numérateurs sont des probabilités conjointes de couples de variables (T,B) et (T,C) données par ***Q1b.m*** et les dénominateurs correspondent à la probabilité marginale P_T fournie par ***Q1a.m***
Le résultat fourni par le calcul, implémenté dans ***Q2c.m***, vaut 0.0085.

3 Question 3 : Retards moyens

3.a

Le retard moyen occasionné par chaque moyen de transport correspond à l'espérance mathématique de chaque variable aléatoire R_T et R_B. Cette espérance est égale à la probabilité que la variable prenne une certaine valeur multipliée par la valeur de la variable.

$$\mathbb{E}(R_T) = \sum_{i=1}^{4} P_T(t_i)R_T(i)$$

$$\mathbb{E}(R_B) = \sum_{j=1}^{5} P_B(b_j)R_B(i)$$

Dans le script ***Q3a.m***, nous calculons l'espérance des retards grâce à une fonction ***Esp.m*** qui prend en entrée un tableau contenant les différentes valeurs des variables R_T ou R_B et les lois marginales associées au moyen de transport considéré.
Nous obtenons

$$\mathbb{E}(R_T) = 4.3012\, minutes$$

$$\mathbb{E}(R_B) = 2.7053\, minutes.$$

De la même manière, pour calculer les variances

$$\mathbb{V}(R_T) = \mathbb{E}(R_T^2) - (\mathbb{E}(R_T))^2$$

$$\mathbb{V}(R_B) = \mathbb{E}(R_B^2) - (\mathbb{E}(R_B))^2,$$

nous créons une fonction ***Vari.m*** qui a les mêmes entrées que notre fonction ***Esp.m*** et qui retourne la variance associée au moyen de transport considéré.
Nous obtenons

$$\mathbb{V}(R_T) = 116.8773\, minutes^2$$

$$\mathbb{V}(R_B) = 11.1903\, minutes^2$$

3.b

Nous déterminons la fonction de retard total $\phi(T, B, C)$ en se basant sur la situation initiale dans laquelle nous partons de chez nous pour nous rendre au Sart-Tilman.
Nous définissons $\phi(T, B, C)$ comme étant un tableau tridimensionnel tel que l'élément $\phi(t, b, c)$ correspond au retard accumulé par rapport au début du cours (8h00) lorsque $T = t$, $B = b$ et $C = c$.

Par exemple, lorsque ($T = 1$,$B = 1$,$C = 1$), nous prenons le train de 7h00 qui est à l'heure et arrivons à la gare de Liège-Guillemins à 7h26. Ensuite, nous nous trouvons à l'arrêt du 48 à la même heure et prenons le 48 de 7h30 qui est également à l'heure. Comme le trajet en bus dure vingt minutes, nous arrivons à notre cours à 7h50 soit 10 minutes avant le début du cours. L'élément $\phi(1, 1, 1)$ de la matrice vaut donc **-10**.

Si ($T = 3$,$B = 5$,$C = 1$), le train de 7h00 ne circule pas (car $T = 3$) et nous devons donc attendre celui de 8h00. Avec ce dernier, nous arrivons à la gare des Guillemins à 8h26 et attendons le bus. Or, le 48 de 8h30 est en retard à cause d'un contrôleur (car $B = 5$). Il arrive donc à l'arrêt de bus à 8h45. Comme le trajet de bus dure 20 minutes, nous arrivons en cours à 9h05 soit 65 minutes après le début du cours. L'élément $\phi(3, 5, 1)$ vaut donc

65.

En suivant ce raisonnement, nous pouvons construire le reste de la matrice $\phi(T, B, C)$. Comme nous ne possédons pas d'informations concernant l'influence des conditions exogènes sur le retard, nous considérons que les valeurs de $\phi(T, B, C)$ sont indépendantes des trois valeurs de C et nous avons donc trois fois les mêmes valeurs.

3.b.i

Pour calculer l'espérance et la variance de $\phi(T, B, C)$ dans le script ***Q3b.m***, nous utilisons respectivement les fonctions ***Esp.m*** et ***Vari.m*** précédemment utilisées à la Question 3.a ainsi que la loi conjointe des trois variables T, B et C. Nous obtenons

$$\mathbb{E}(\phi(T, B, C)) = -2.5767 \; minutes$$

$$\mathbb{V}(\phi(T, B, C)) = 140.0095 \; minutes^2$$

3.b.ii

L'espérance E($\phi(T, B, C)$) représente le retard moyen avec lequel nous arrivons en cours.
Le fait que l'espérance E($\phi(T, B, C)$) vaille -2.5767 minutes nous indique que nous avons tendance à arriver en avance au cours, ce qui nous paraît logique car, dans la réalité, la grosse majorité des élèves se trouve déjà dans l'amphithéâtre quelques minutes avant que le cours ne débute et seulement quelques étudiants arrivent en retard.

3.b.iii

La relation entre E($\phi(T, B, C)$) et les espérances E(R_T) et E(R_B) n'est pas linéaire car l'espérance E($\phi(T, B, C)$) ne peut pas s'exprimer comme une combinaison linéaire des deux autres espérances.
En effet, la fonction de retard total $\phi(T, B, C)$ peut s'exprimer telle que

$$\phi(T, B, C) = R_T + 26 + 10 - (R_T + 26) mod 10 + R_B - 40.$$

Toutefois, E($\phi(T, B, C)$) ne peut s'exprimer comme

$$\mathbb{E}(\phi(T, B, C)) = \mathbb{E}(R_T) + 26 + 10 - (\mathbb{E}(R_T) + 26) mod 10 + \mathbb{E}(R_B) - 40$$

De même, la relation entre les variances $\mathbb{V}(\phi(T, B, C))$, $\mathbb{V}(R_T)$ et $\mathbb{V}(R_T)$ ne serait pas linéaire car dans l'expression de $\mathbb{V}(\phi(T, B, C))$ en fonction des deux autres variances, un terme cov_{R_T,R_B} apparaîtrait. Ce terme est nul si les variables R_T et R_B sont indépendantes. Or, il existe une dépendance entre ces variables. Le terme cov_{R_T,R_B} est donc non-nul et il n'y a donc pas de relation linéaire entre les variances.

3.c

3.c.i

Pour calculer l'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle de ϕ, il suffit d'étendre les formules

$$\mathbb{E}(\phi(\mathcal{T},\mathcal{B},C)|\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}\phi(t_i,b_j,\mathcal{C})\mathbb{P}_{\mathcal{T},\mathcal{B}|\mathcal{C}}(t_i,b_j|\mathcal{C})$$

et

$$\mathbb{V}(\phi(\mathcal{T},\mathcal{B},C)|\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}(\phi(t_i,b_j,\mathcal{C}) - \mathbb{E}(\phi(\mathcal{T},\mathcal{B},C)|\mathcal{C}))^2\mathbb{P}_{\mathcal{T},\mathcal{B}|\mathcal{C}}(t_i,b_j|\mathcal{C})$$

Le tout est implémenté dans le fichier ***Q3ci.m*** dans lequel nous utilisons une fois de plus la fonction ***Esp.m***. Les espérance et variance conditionnelles sont donc fournies sous forme de tableaux dont les valeurs sont affichées dans les Tables 16 et 17.

3.c.ii

Pour vérifier le théorème de l'espérance totale, c'est-à-dire vérifier la formule

$$\mathbb{E}(\phi(\mathcal{T},\mathcal{B},C)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\phi(\mathcal{T},\mathcal{B},C)|\mathcal{C})),$$

il nous suffit de calculer le membre de droite de la formule et de vérifier qu'il est bien égal au membre de gauche de la formule, que nous avions calculé au point 3.b.i dans le script ***Q3bi.m***.
Nous implémentons le calcul du membre de droite de la formule dans le script ***Q3Cii.m*** où nous utilisons la fonction ***Esp.m*** qui prend en entrée l'espérance conditionnelle calculée par ***Q3ci.m*** et la loi de probabilité marginale de C. Nous obtenons bien un résultat égal à -2.5767 minutes, ce qui correspond bien à l'espérance $\mathrm{E}(\phi(T,B,C))$ que nous avions trouvée au point 3.b.i.

3.c.iii

Pour vérifier le théorème de la variance totale, il suffit d'appliquer la formule

$$\mathbb{V}(\phi(\mathcal{T},\mathcal{B},\mathcal{C})) = \mathbb{E}(\mathbb{V}(\phi(\mathcal{T},\mathcal{B},C)|\mathcal{C})) + \mathbb{V}(\mathbb{E}(\phi(\mathcal{T},\mathcal{B},C)|\mathcal{C})).$$

Nous implémentons le calcul du membre de droite de la formule dans le fichier ***Q3Ciii.m*** où nous utilisons les fonctions ***Esp.m*** et ***Vari.m*** qui utilisent respectivement la variance conditionnelle et l'espérance conditionnelle. Nous obtenons bien la variance $\mathrm{V}(\phi(T,B,C)) = 140.0095$ $minutes^2$ calculée dans le script ***Q3bi.m***.

3.c.iv

Déterminer les valeurs de $\mathcal{C}$ pour lesquelles le réveil sonnera revient à déterminer les valeurs de $\mathcal{C}$ pour lesquelles la probabilité que la fonction de retard ϕ soit négative est supérieure à 0.5.
En effet, étant donné que la fonction ϕ représente le retard total, elle doit être négative pour que nous arrivions à l'heure (en avance ou tout pile à l'heure).

Ainsi, nous calculons la probabilité

$$\mathbb{P}_{\phi_{\mathcal{T},\mathcal{B},\mathcal{C}}|\mathcal{C}}(\phi_{\mathcal{T},\mathcal{B},\mathcal{C}}(t_i, b_j, \mathcal{C}) \leq 0|\mathcal{C}) > 0.5$$

Cette formule est implémentée dans le script ***Q3iv.m***. Nous stockons dans un tableau bidimensionnel P la loi conditionnelle sachant C pour $\phi(T,B,C) \leq 0$.
À l'aide ce fichier, nous trouvons que les probabilités associées à $\mathcal{C}$ =1,2,3 sont respectivement de 0.8525, 0.6750 et 0.00214 .
On a donc un réveil qui sonne pour $\mathcal{C}$ =1,2 .

4 Question 4 : Borne supérieure des retards

4.a

Dans le cas où aucune information sur la loi de répartition n'est fournie, nous pouvons traiter les bornes en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbb{P}(|\mathcal{X} - \mu_{\mathcal{X}}| \geq c\sigma_{\mathcal{X}}) \leq \frac{1}{c^2}$$

où $\mu_{\mathcal{X}}$ représente l'espérance de X et $\sigma_{\mathcal{X}}$ représente l'écart-type de X.

Nous recherchons ici la probabilité que $\mathcal{X}$ soit plus grande que la borne soit plus petite ou égale à 0.5.

$$\mathbb{P}(\mathcal{X} > borne) \leq 0.5$$

Nous déduisons de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que la borne peut se trouver comme suit

$$borne = c\sigma_{\mathcal{X}} + \mu_{\mathcal{X}}$$

oú $\frac{1}{c^2} = 0.5$ donc $c = 2\sqrt{5}$

Nous possédons l'espérance de chaque valeur de T et de B et l'écart-type associé qui n'est autre que la racine carrée de la variance associée. Nous les mettons dans des tableaux. Nous pouvons donc calculer les bornes de retard pour chaque valeur de T et de B.
Les différents résultats sont implémentés dans le script ***Q4a.m*** et affichés dans les Tables 18 et 19.

4.b

La loi de répartition est supposée normale. Nous recherchons toujours la probabilité que $\mathcal{X}$ soit plus grande que la borne soit plus petite ou égale à 0.5

$$\mathbb{P}(\mathcal{X} > borne) \leq 0.5$$

En se servant de la Table 1 dans le formulaire fourni pour l'examen [1], nous pouvons calculer la borne supérieure pour laquelle la probabilité d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$ est inférieure ou égale à 0.5. Nous trouvons que la borne vaut 1.69 et nous avons

$$\mathbb{P}(\mathcal{X} > 1.69) \leq 0.5.$$

Nous pouvons lier une loi $\mathcal{X}(\mu_{\mathcal{X}}, \sigma_{\mathcal{X}})$ avec une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Il suffit de centrer et réduire la loi normale. Nous avons donc

$$\mathcal{N} = \frac{\mathcal{X} - \mu_{\mathcal{X}}}{\sigma_{\mathcal{X}}}$$

1. http ://www.montefiore.ulg.ac.be/ lduchesne/proba/formulaire.pdf

Dés lors, la borne recherchée est telle que

$$borne = 1.69\sigma_{\mathcal{X}} + \mu_{\mathcal{X}}$$

Les résultats sont implémentés dans le fichier ***Q4b.m*** construit de la même manière que le fichier ***Q4a.m*** et affichés dans les Tables 20 et 21.

4.c

En observant les tableaux TABLE 18 et TABLE 19 avec les tableaux TABLE 20 et TABLE 21, nous remarquons que les bornes supérieures obtenues avec la loi de répartition normale sont plus élevées que les bornes obtenues lorsqu'on ne dispose d'aucune information sur la loi de répartition. Ce phénomène s'explique par le type de loi de répartition utilisé. La loi supposée décrit la répartition de la variable aléatoire. Nous comprenons donc que si cette loi est mal supposée, nous obtenons un résultat moins précis.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, quant à elle, fonctionne peu importe la loi de répartition. Elle fournira donc toujours un résultat moins précis. Si on suppose une autre loi de répartition, ce phénomène ne pourra que croître ou diminuer.
Cela dépendra de la manière dont cette loi décrit la répartition de la variable aléatoire.

Annexes

i	$P_T(t_i)$
1	0.7277
2	0.2084
3	0.0239
4	0.0400

TABLE 1 -Lois marginales de T

j	$P_B(b_j)$
1	0.4703
2	0.0466
3	0.4165
4	0.0566
5	0.0100

TABLE 2 -Lois marginales de B

k	$P_C(c_k)$
1	0.89
2	0.10
3	0.01

TABLE 3 -Lois marginales de C

$\mathrm{P}_{T,B}(t_i,b_j)$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	$\sum = \mathrm{P}_T(t_i)$
t_1	0.3488	0.0345	0.3030	0.0341	0.0073	0.7277
t_2	0.0965	0.0095	0.0892	0.0111	0.0021	0.2084
t_3	0.0062	0.0007	0.0076	0.0092	0.0002	0.0239
t_4	0.0188	0.0019	0.0167	0.0023	0.0004	0.0400
$\sum = \mathrm{P}_B(b_j)$	0.4703	0.0466	0.4165	0.0566	0.0100	1

TABLE 4 -Table de contingence du couple (T, B)

$\mathrm{P}_{T,C}(t_i,c_k)$	c_1	c_2	c_3	$\sum = \mathrm{P}_T(t_i)$
t_1	0.6675	0.0600	0.0002	0.7277
t_2	0.1780	0.0300	0.0004	0.2084
t_3	0.0089	0.0060	0.0090	0.0239
t_4	0.0356	0.0040	0.0004	0.0400
$\sum = \mathrm{P}_C(c_k)$	0.8900	0.1000	0.0100	1

TABLE 5 -Table de contingence du couple (T, C)

$\mathrm{P}_{B,C}(b_j,c_k)$	c_1	c_2	c_3	$\sum = \mathrm{P}_B(b_j)$
b_1	0.4450	0.0250	0.0003	0.4703
b_2	0.0445	0.0020	0.0001	0.0466
b_3	0.3560	0.0600	0.0005	0.4165
b_4	0.0356	0.0120	0.0090	0.0566
b_5	0.0089	0.0010	0.0001	0.0100
$\sum = \mathrm{P}_C(c_k)$	0.8900	0.1000	0.0100	1

TABLE 6 -Table de contingence du couple (B, C)

$\mathbb{P}_{\mathcal{T}\|\mathcal{B},\mathcal{C}}(t_i, b_j, 1)$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_4
t_1	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
t_2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
t_3	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
t_4	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04

TABLE 7 -Table de la loi conjointe de $\mathcal{T}$ sachant $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ pour $\mathcal{C} = 1$

$\mathbb{P}_{\mathcal{T}\|\mathcal{B},\mathcal{C}}(t_i, b_j, 2)$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_4
t_1	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
t_2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
t_3	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
t_4	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04

TABLE 8 -Table de la loi conjointe de $\mathcal{T}$ sachant $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ pour $\mathcal{C} = 2$

$\mathbb{P}_{\mathcal{T}\|\mathcal{B},\mathcal{C}}(t_i, b_j, 3)$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_4
t_1	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
t_2	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
t_3	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
t_4	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04

TABLE 9 -Table de la loi conjointe de $\mathcal{T}$ sachant $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ pour $\mathcal{C} = 3$

$\mathbb{P}_{\mathcal{B}\|\mathcal{T},\mathcal{C}}(t_i, b_j, 1)$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_4
t_1	0.5	0.05	0.4	0.04	0.01
t_2	0.5	0.05	0.4	0.04	0.01
t_3	0.5	0.05	0.4	0.04	0.01
t_4	0.5	0.05	0.4	0.04	0.01

TABLE 10 -Table de la loi conjointe de $\mathcal{B}$ sachant $\mathcal{T}, \mathcal{C}$ pour $\mathcal{C} = 1$

$\mathbb{P}_{\mathcal{B}\|\mathcal{T},\mathcal{C}}(t_i, b_j, 2)$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_4
t_1	0.25	0.02	0.6	0.12	0.01
t_2	0.25	0.02	0.6	0.12	0.01
t_3	0.25	0.02	0.6	0.12	0.01
t_4	0.25	0.02	0.6	0.12	0.01

TABLE 11 -Table de la loi conjointe de $\mathcal{B}$ sachant $\mathcal{T}, \mathcal{C}$ pour $\mathcal{C} = 2$

$\mathbb{P}_{\mathcal{B}\|\mathcal{T},\mathcal{C}}(t_i, b_j, 1)$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_4
t_1	0.03	0.01	0.05	0.9	0.01
t_2	0.03	0.01	0.05	0.9	0.01
t_3	0.03	0.01	0.05	0.9	0.01
t_4	0.03	0.01	0.05	0.9	0.01

TABLE 12 -Table de la loi conjointe de $\mathcal{B}$ sachant $\mathcal{T}, \mathcal{C}$ pour $\mathcal{C} = 3$

$\mathbb{P}_{\mathcal{C}\|\mathcal{T},\mathcal{B}}(t_i, b_j, 1)$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_4
t_1	0.95697	0.96524	0.88116	0.78345	0.91727
t_2	0.92217	0.93645	0.79803	0.6426	0.85413
t_3	0.71543	0.67939	0.46781	0.038797	0.37238
t_4	0.9462	0.95494	0.85474	0.62898	0.89

TABLE 13 -Table de la loi conjointe de $\mathcal{C}$ sachant $\mathcal{T}, \mathcal{B}$ pour $\mathcal{C} = 1$

$\mathbb{P}_{\mathcal{C}\|\mathcal{T},\mathcal{B}}(t_i, b_j, 2)$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_4
t_1	0.04301	0.034705	0.11881	0.21127	0.082452
t_2	0.077711	0.063131	0.20175	0.32491	0.14395
t_3	0.24116	0.18321	0.47306	0.078466	0.25105
t_4	0.053158	0.042918	0.14406	0.21201	0.1

TABLE 14 -Table de la loi conjointe de $\mathcal{C}$ sachant $\mathcal{T}, \mathcal{B}$ pour $\mathcal{C} = 2$

$\mathbb{P}_{\mathcal{C}\|\mathcal{T},\mathcal{B}}(t_i, b_j, 3)$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_4
t_1	1.7204e-05	5.7842e-05	3.3002e-05	0.0052817	0.00027484
t_2	0.00012434	0.00042088	0.00022416	0.032491	0.0019194
t_3	0.043408	0.1374	0.059133	0.88274	0.37657
t_4	0.00063789	0.0021459	0.0012005	0.15901	0.01

TABLE 15 -Table de la loi conjointe de $\mathcal{C}$ sachant $\mathcal{T}, \mathcal{B}$ pour $\mathcal{C} = 3$

k	$\mathbb{E}(\phi(\mathcal{T}, \mathcal{B}, C)\|\mathcal{C})$
1	-3.7500
2	2.1100
3	54.9800

TABLE 16 -Espérance conditionnelle de ϕ sachant $\mathcal{C}$

k	$\mathbb{V}(\phi(\mathcal{T}, \mathcal{B}, C)\|\mathcal{C})$
1	88.0075
2	231.9139
3	194.1956

TABLE 17 -Variance conditionnelle de ϕ sachant $\mathcal{C}$

$\mathcal{T}$	Esp.	Var.	Borne.
1	0	1	4.4721
2	8	2^2	16.9443
3	60	1	64.4721
4	30	20^2	119.4427

TABLE 18 -Bornes supérieures pour $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$

$\mathcal{B}$	Esp.	Var.	Borne.
1	0	1	4.4721
2	-2	0.5^2	0.2361
3	5	3^2	18.4164
4	10	1	14.4721
5	15	5^2	37.3607

TABLE 19 -Bornes supérieures pour $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$

$\mathcal{T}$	Esp.	Var.	Borne.
1	0	1	1.6500
2	8	2^2	11.3000
3	60	1	61.6500
4	30	20^2	63.0000

TABLE 20 - Bornes supérieures pour $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ si répartition normale

$\mathcal{B}$	Esp.	Var.	Borne.
1	0	1	1.6500
2	-2	0.5^2	-1.1750
3	5	3^2	9.9500
4	10	1	11.6500
5	15	5^2	23.2500

TABLE 21 - Bornes supérieures pour $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ si répartition normale