MECA0011 – Projet transversal
Ecoulements irrotationnels

Groupe 50: LIONE Maxime, LAKHAL Rida, SIBOYABASORE Cédric

12 avril 2019

1 Questions générales

1.1 De quel(s) principe(s) fondamental(aux) découle l'équation résolue dans ce projet, à savoir $\Delta\psi = 0$, Ψ étant la fonction de courant ?

L'équation de Laplace $\Delta\psi = 0$ découle du principe de conservation de la masse dans lequel on utilise la condition d'irrotationnalité de l'écoulement :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$où\ u = \frac{\partial \psi}{\partial y}\ et\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

1.2 Dans le cadre de ce projet, comment se traduit numériquement la résolution de l'équation $\Delta\psi = 0$? (La réponse doit être brève, max 3 phrases)

Elle se traduit numériquement par la résolution du système linéaire $A\Psi = b$ à N équations. Chaque équation correspond à une équation de Laplace pour chaque point de discrétisation du domaine. Elles sont construites sur base des dérivées centrées (ou décentrées pour les noeuds au bord du domaine) et des conditions limites de Dirichlet (la fonction en un point particulier du domaine est une constante donnée).

1.3 Pour un écoulement irrotationnel, quelles sont les hypothèses nécessaires et suffisantes pour avoir une charge uniforme dans l'écoulement ? Justifiez.

Pour que la charge soit uniforme, il faut émettre les hypothèses que le fluide est parfait incompressible et que son écoulement irrotationnel est stationnaire.
En effet, le principe de conservation de la charge est exprimé par le théorème de Bernouilli

$$\frac{||U^2||}{2} + \frac{p}{\rho} + gZ = constante$$

Supposer que l'écoulement est stationnaire implique que les lignes de courant se confondent avec les trajectoires des particules et émettre l'hypothèse que le fluide est incompressible implique que la masse volumique reste constante. De plus, le fluide étant supposé parfait, la viscosité ainsi que les pertes de charge sont négligeables.
Ces caractéristiques du fluide et de l'écoulement qui est également irrotationnel justifient donc l'uniformité de la charge dans l'écoulement.

2 Ecoulement autour d'un tube de Prandtl

2.1 L'écoulement autour d'un tube de Prandtl peut être modélisé à l'aide d'une superposition d'une source et d'un écoulement uniforme. Quelle caractéristique de l'écoulement permet de repérer la limite du corps ? Illustrez la limite du corps à l'aide d'une figure.

On peut repérer la limite du corps grâce à une ligne de courant particulière, celle qui s'appuie sur le contour fermé. Cette ligne de courant est facilement identifiable dans la matrice Ψ représentant la fonction de courant. On y repère une longue répétition de la valeur 0.25, qui correspond donc à l'endroit où l'écoulement est le plus faible, et donc à la limite du corps (aucune particule ne pénètre la surface). Nous avons représenté cette ligne de courant délimitant le corps par un trait rouge sur la *Figure 1*.

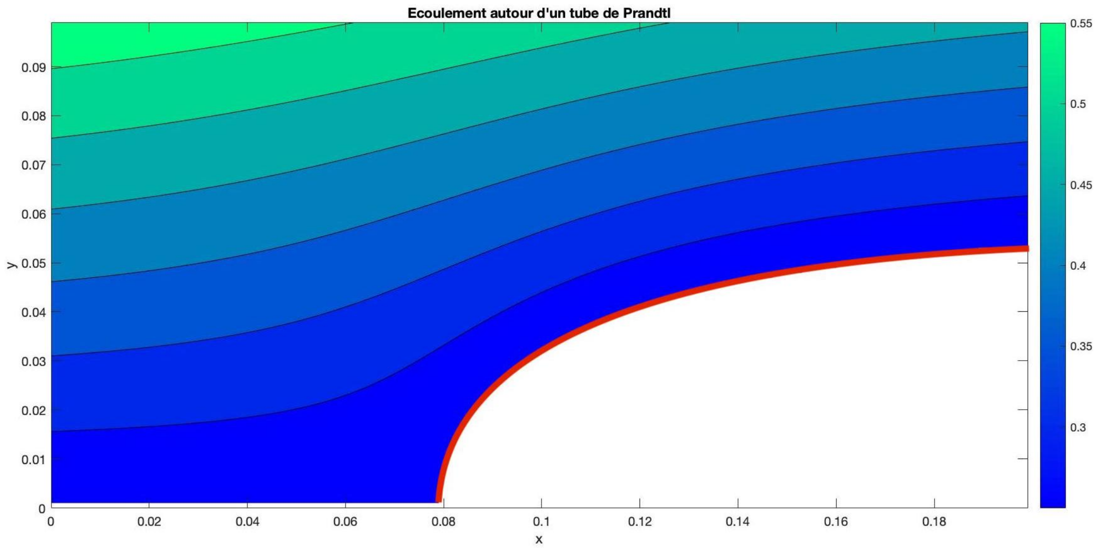

FIGURE 1

2.2 Quelle pression est censée être mesurée par le tube de mesure perpendiculaire à l'écoulement ? Sur le domaine de calcul proposé, à quelle distance horizontale (mesurée selon l'axe x) depuis la source la sonde de pression doit-elle être positionnée ?

Pour pouvoir mesurer l'état de pression dans le fluide, le tube de mesure perpendiculaire à l'écoulement est censé mesurer p_∞, la pression à l'infini (c'est-à-dire la pression qu'on a imposée à l'infini, au niveau des conditions, celle qui n'est donc pas influencée par le dispositif.)

Pour trouver la distance horizontale entre la source et la sonde de pression, nous avons d'abord cherché numériquement l'abscisse de la source. Pour ce faire, nous avons cherché, dans la matrice des x, l'abscisse du point où la vitesse d'écoulement est la plus élevée (ou la pression minimale vu Bernoulli), ce qui correspond bien au point de la source pour ce type d'écoulement. On a $a = 0.1010m$. Nous avons ensuite recherché l'abscisse de la sonde, en cherchant le x pour lequel la pression était la plus proche de $p_\infty = -8000Pa$[1], soit $x = 0.0910m$. La différence entre a et x correspond bien à la distance recherchée et vaut $0.0100m$ soit $10mm$.

2.3 Grâce à une figure, mettez clairement en évidence l'isobare qui permet de repérer les endroits où la prise de pression peut être positionnée ainsi que la limite du tube de Prandtl. Discutez brièvement cette figure (5 lignes maximum).

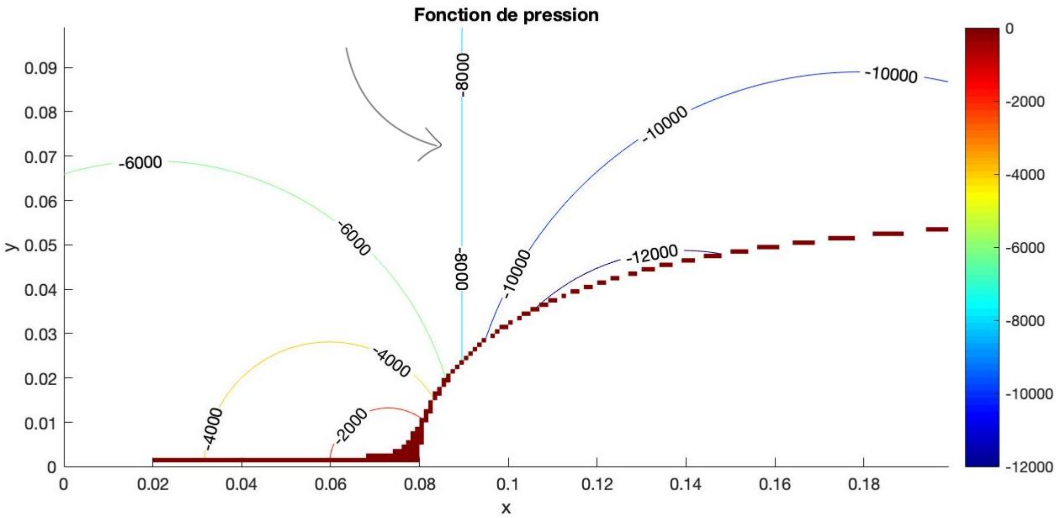

FIGURE 2

On peut voir la limite du tube de Prandtl en brun et les isobares, dont une verticale représentant celle de $p_\infty = -8000Pa$. Cette isobare est verticale car l'écoulement est uniforme à cet endroit. C'est à l'intersection de cette isobare avec la limite du tube que la source de la sonde de pression doit être positionnée.

1.

$$p_\infty = \rho g(C - \frac{U_\infty^2}{2g}), \; avec \; C = 0 \; et \; U_\infty = 4m/s$$

2.4 Démontrez ici mathématiquement la position et la forme de l'isobare. Discutez ensuite brièvement le résultat mathématique vis-à-vis du résultat numérique.

Pour calculer une pression p, on utilise Bernoulli

$$p = \rho g(C \ - \ \frac{U^2}{2g}).$$

On connaît également les expressions des vitesses horizontale et verticale

$$u = U_\infty \ + \ \frac{Q}{2\pi}\frac{x-a}{(x-a)^2 \ + \ (y-b)^2}$$

$$v = \frac{Q}{2\pi}\frac{y-b}{(x-a)^2 \ + \ (y-b)^2}$$

Donc, la vitesse U vaut

$$U = \sqrt{u^2 \ + \ v^2}$$

En repartant de Bernoulli, on a

$$p = \rho g(C \ - \ \frac{u^2 \ + \ v^2}{2g})$$

$$\Leftrightarrow p = \rho g C \ - \ \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2)$$

$$\Leftrightarrow p = \rho g C \ - \ \frac{\rho}{2}(U_\infty^2 + 2\frac{Q}{2\pi}\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}U_\infty + \frac{Q^2}{4\pi^2}\frac{(x-a)^2}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2}$$
$$+\frac{Q^2}{4\pi^2}\frac{(y-b)^2}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2})$$

$$\Leftrightarrow p = \rho g C \ - \ \frac{\rho}{2}(U_\infty^2 + \frac{Q}{\pi}\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}U_\infty + \frac{Q^2}{4\pi^2}\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow p = \rho g C \ - \ \frac{\rho}{2}(U_\infty^2 + \frac{Q}{\pi}\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}U_\infty + \frac{Q^2}{4\pi^2}\frac{1}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$$\Leftrightarrow p = \rho g C \ - \ \frac{\rho U_\infty^2}{2} + \frac{\rho Q U_\infty}{2\pi}\frac{1}{(x-a)^2+(y-b)^2}(x-a+\frac{Q}{4\pi U_\infty})$$

Or, la pression à l'infini p_∞ est telle que

$$p_\infty = \rho g(C - \frac{U_\infty^2}{2g})$$

On obtient

$$p_\infty = \rho g C - \rho\frac{U_\infty^2}{2} = \rho g C \ - \ \frac{\rho U_\infty^2}{2} + \frac{\rho Q U_\infty}{2\pi}\frac{1}{(x-a)^2+(y-b)^2}(x-a+\frac{Q}{4\pi U_\infty})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\rho Q U_\infty}{2\pi}\frac{1}{(x-a)^2+(y-b)^2}(x-a+\frac{Q}{4\pi U_\infty})=0$$

$$\Leftrightarrow x-a+\frac{Q}{4\pi U_\infty}=0 \;\; (les\;\; autres\;\; termes\, étant \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x=a-\frac{Q}{4\pi U_\infty}$$

L'isobare est donc une droite verticale d'équation $x = a - \frac{Q}{4\pi U_\infty}$ qui se situe en abscisse $a - \frac{Q}{4\pi U_\infty}$. Sachant que la source se trouve en $a = 0.1010m$, point de vitesse d'écoulement la plus élevée, on peut déterminer cette abscisse x à laquelle se trouve l'isobare. Mathématiquement, on trouve

$$x = a - \frac{Q}{4\pi U_\infty} = 0.1010 - \frac{0.5}{4\pi * 4} = 0.09105281606\ m.$$

Ces résultats coïncident bien avec les résultats numériques précédemment trouvés. En effet, on peut voir à la *Figure 2* que l'isobare de p_∞ est bien verticale. On avait également trouvé (à la *Question 2.2*) la valeur 0.0910 m pour son abscisse. *(La précision de ce résultat numérique reste cependant quelque peu limitée due à la discrétisation du domaine)*

3 Ecoulement autour d'un îlot

3.1 Pour le premier îlot, quelles sont les valeurs de traînée, portance et circulation ? Discutez en 5 lignes maximum vos résultats.

On trouve une valeur de traînée, de portance et de circulation nulle ($fx, fy \simeq 0\ N/m\ et\ c \simeq 0\ m^2/s$).

On peut comprendre ces résultats car la somme des pressions à gauche (*/au dessus*) de l'îlot est égale à celle à droite (*/en dessous*). De plus, on peut voir sur la *Figure 3* que l'écoulement autour de l'îlot est symétrique par rapport à ces mêmes côtés. La circulation autour de l'îlot est donc nulle car elle ne contient pas de points singuliers et que l'écoulement est irrotationnel.

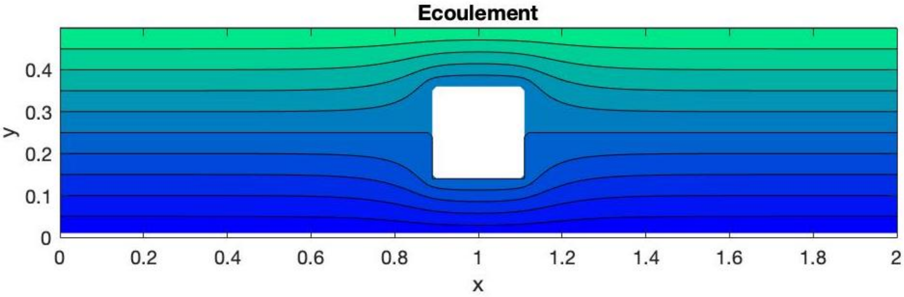

FIGURE 3

3.2 Pour le second îlot, quelles sont les valeurs de traînée, portance et circulation ? Discutez brièvement (5 lignes maximum) vos résultats, en comparant notamment au cas précédent.

On obtient une traînée de 0 $\frac{N}{m}$, une portance de -1231.5 $\frac{N}{m}$ et une circulation de 1.0458 $\frac{m^2}{s}$.

Pour les mêmes raisons, la traînée est nulle. Mais contrairement au cas précédent, on peut voir une dissymétrie de l'écoulement due à la différence des CL. La portance est donc négative car on voit ici que les lignes de courant sont plus rapprochées au dessus de la face supérieure donc les pressions verticales y sont plus importantes que les pressions agissant sur la face inférieure. La circulation est non-nulle car ici, elle contient des points singuliers.

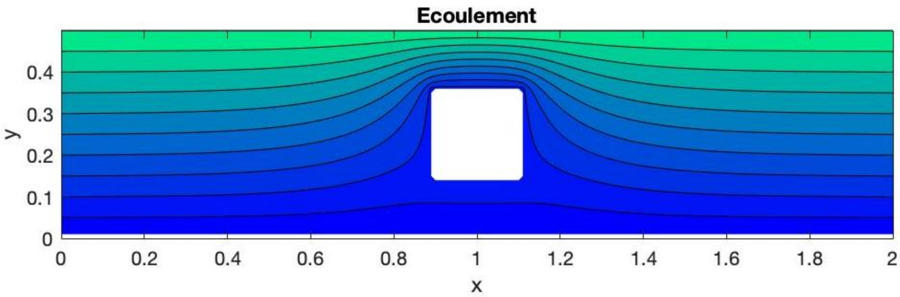

FIGURE 4