BAB 4
TRIGONOMETRI

CAPAIAN DAN MATERI PEMBELAJARAN

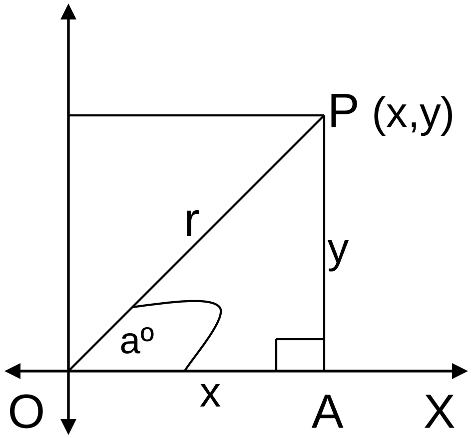
Capaian Pembelajaran:

Mahasiswa memahami identitas dan rumus-rumus Trigonometri

Materi Pembelajaran:

- Nilai Perbandingan Fungsi Trigonometri
- Relasi Kebalikan Fungsi Trigonometri
- Persamaan Trigonometri
- Identitas Trigonometri Dasar
- Aturan Sinus dan Cosinus
- Bentuk K cos (x – a)
- Bentuk K sin (x + a)

NILAI PERBANDINGAN FUNGSI TRIGONOMETRI



Setiap sudut di kuadran 1 (aº lancip) dapat diturunkan *pengertian fungsi trigonometri*. Hakekatnya merupakan nilai perbandingan dari 3 sisi suatu segitiga siku-siku "OAP"

$$\text{Sin } a^o = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} \quad \frac{AP}{OP} \quad \frac{y}{r}$$

$$\text{Cos } a^o = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} \quad \frac{OA}{OP} \quad \frac{x}{r}$$

$$\text{Tan } a^o = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} \quad \frac{AP}{OA} \quad \frac{y}{x}$$

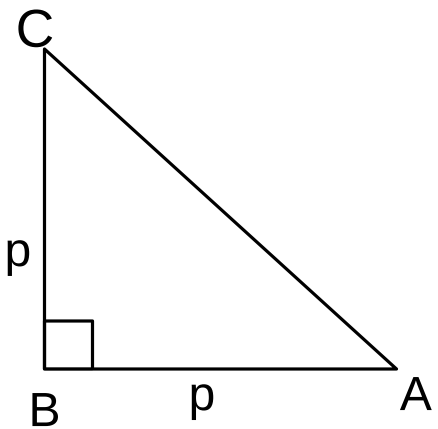
RELASI KEBALIKAN FUNGSI TRIGONOMETRI

$$\text{Sec } a^o = \frac{1}{\cos a^o} = \frac{OP}{OA} = \frac{r}{x}$$

$$\text{Cosec } a^o = \frac{1}{\sin a^o} = \frac{OP}{AP} = \frac{r}{y}$$

$$\text{Cotan } a^o = \frac{1}{\tan a^o} = \frac{OA}{AP} = \frac{x}{y}$$

Pembuktian :



Pada segitiga ABC siku-siku di B samakaki dengan panjang sisi siku-sikunya p, berarti AB = BC = p

Sehingga didapat AC = $\sqrt{p^2 + p^2} = p\sqrt{2}$

Sudut A= 45°, Misalnya mencari sin A :

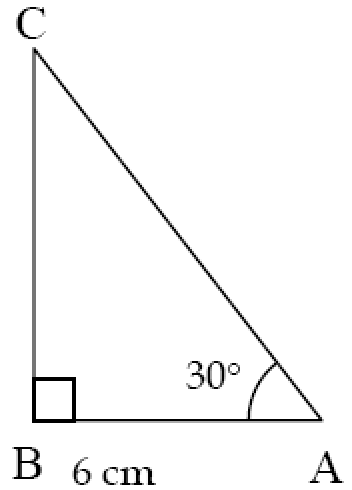
Sin A = sin 45°= $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{p}{p\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

Berikut ini adalah tabel perbandingan trigonometri dari sudut-sudut istimewa :

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Diketahui segitiga ABC siku-siku di titik B. Jika panjang AB = 6cm, dan $\angle A = 30°$, hitunglah panjang sisi BC dan AC !

Panjang sisi BC dapat dihitung dengan menggunakan perbandingan trigonometri berikut :



$\tan A = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow \tan 30° = \frac{BC}{6}$

Jadi: BC = 6 x tan 30° = 6 x $\frac{1}{3}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Maka panjang AC didapat dengan rumus pytagoras :

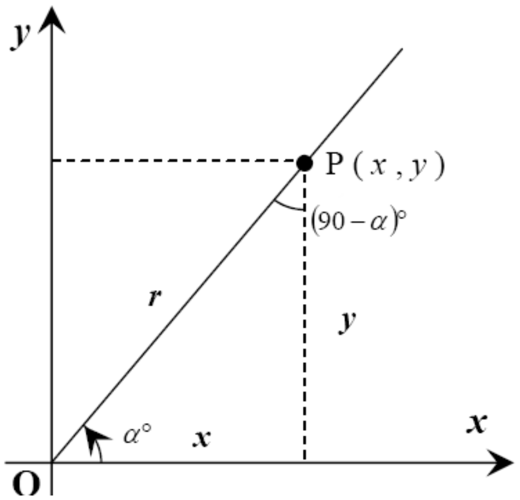
$AC^2 = 6^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow AC^2 = 48 \Leftrightarrow AC = 4\sqrt{3}$ cm

Sudut di Kuadran I

Sin $\alpha = \frac{y}{r}$ (bernilai positif)

Cos $\alpha = \frac{x}{r}$ (bernilai positif)

Tan $\alpha = \frac{y}{x}$ (bernilai positif)



Sin $(90 - \alpha)° = \frac{y}{r} = \cos \alpha$

Cos $(90 - \alpha)° = \frac{x}{r} = \sin \alpha$

Tan $(90 - \alpha)° = \frac{y}{x} = \text{cotan } \alpha$

Sudut di Kuadran II

Sin α = $\frac{y}{r}$ (bernilai positif)

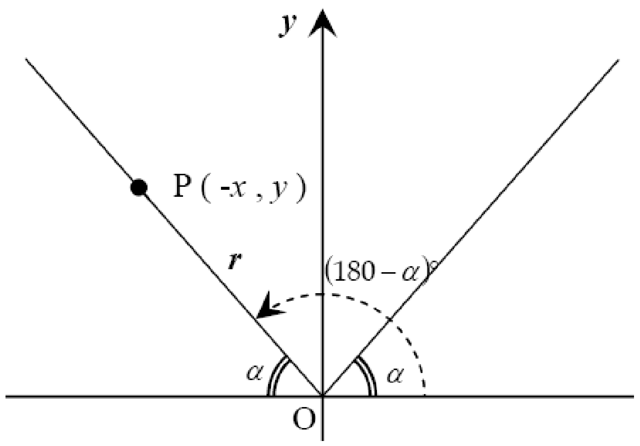
Cos α = $\frac{-x}{r}$ (bernilai negatif)

Tan α = $\frac{y}{-x}$ (bernilai negatif)

Sin (180 - α)° = $\frac{y}{r}$ = sin α

Cos(180 - α)° = $\frac{-x}{r}$ = - cos α

Tan (180 - α)° = $\frac{-x}{y}$ = -tan α



Sudut di Kuadran III

Sin α = $\frac{-y}{r}$ (bernilai negatif)

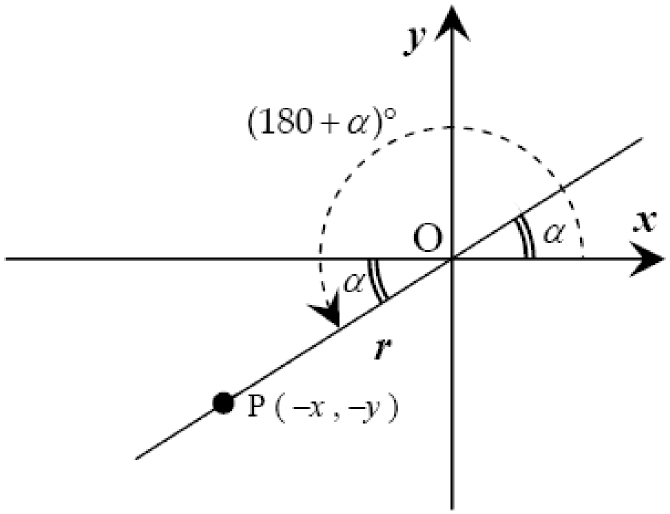
Cos α = $\frac{-x}{r}$ (bernilai negatif)

Tan α = $\frac{-y}{-x}$ (bernilai positif)

Sin (180 + α)° = $\frac{-y}{r}$ = - sin α

Cos (180 + α)° = $\frac{-x}{r}$ = - cos α

Tan (180 + α)° = $\frac{-y}{-x}$ = tan α

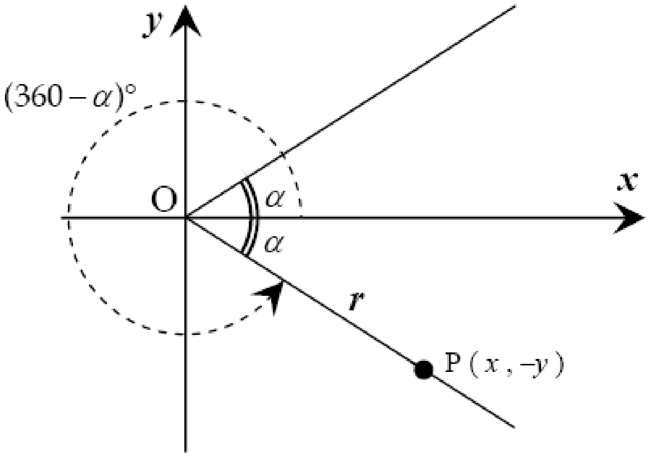


Sudut di Kuadran IV

Sin α = $\dfrac{-y}{r}$ (bernilai negatif)

Cos α = $\dfrac{x}{r}$ (bernilai positif)

Tan α = $\dfrac{-y}{x}$ (bernilai negatif)



Sin (360 - α)° = $\dfrac{-y}{r}$ = - sin α

Cos (360 - α)° = $\dfrac{x}{r}$ = cos α

Tan (360 - α)° = $\dfrac{-y}{x}$ = - tan α

Persamaan trigonometri

Tentukan himpunan solusi dari : sin x = $\frac{1}{2}$ pada 0°≤ x ≤ 360°

Solusi :

Sin x = $\frac{1}{2}$ karena sin x nilanya + maka x berada dalam kuadran I atau II sehingga :

i). Sin x = sin 30° (kuadaran I)
x = 30° ± k.360°

untuk k = 0 ⇨ x = 30°

k = 1 ⇨ x = 390° (tidak memenuhi)

ii). Sin x = sin (180 – 30)° (Kuadaran II)
x = 150° ± k.360°

untuk k = 0 ⇨ x = 150°

IDENTITAS TRIGONOMETRI

Identitas hasil bagi: $\tan(A) = \dfrac{\sin(A)}{\cos(A)}$ $\cot(A) = \dfrac{\cos(A)}{\sin(A)}$

Identitas Gaanjil/Genap:

$\cos(-A) = \cos(A)$ $\sin(-A) = -\sin(A)$ $\tan(-A) = -\tan(A)$

$\sec(-A) = \sec(A)$ $\csc(-A) = -\csc(A)$ $\cot(-A) = -\cot(A)$

Fungsi genap Fungsi ganjil Fungsi ganjil

Identitas Resripokal:

$$\csc(A) = \frac{1}{\sin(A)} \quad \sec(A) = \frac{1}{\cos(A)} \quad \cot(A) = \frac{1}{\tan(A)}$$

$$\sin(A) = \frac{1}{\csc(A)} \quad \cos(A) = \frac{1}{\sec(A)} \quad \tan(A) = \frac{1}{\cot(A)}$$

Identitas Phytagoras:

$$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$$

$$\tan^2(A) + 1 = \sec^2(A) \qquad 1 + \cot^2(A) = \csc^2(A)$$

IDENTITAS TRIGONOMETRI PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN

$$\sin(A \pm B) = \sin(A)\cos(B) \pm \cos(A)\sin(B)$$

$$\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \sin(A)\sin(B)$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan(A) \pm \tan(B)}{1 \mp \tan(A)\tan(B)}$$

IDENTITAS TRIGONOMETRI
RUMUS SUDUT RANGKAP

$$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$$

$$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A) = 1 - 2\sin^2(A) = 2\cos^2(A) - 1$$

$$\tan(2A) = \frac{2\tan(A)}{1 - \tan^2(A)}$$

IDENTITAS TRIGONOMETRI

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(A)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(A)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(A)}{1+\cos(A)}}$$

ATURAN SINUS DAN COSINUS

Aturan sinus

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Aturan cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$

Bentuk a cos x° + b sin x°

Mengubah bentuk a cos x° + b sin x° menjadi bentuk k cos (x – a).

Bentuk a cos x° + b sin x° dapat diubah ke dalam bentuk k cos $(x - \alpha)°$ dengan **k** adalah konstanta positif dan $0 \leq x \leq 360°$, nilai-nilai k dan α ditentukan oleh nilai-nilai a dan b dengan cara pengerjaan:

$$a \cos x° + b \sin x° = k \cos (x - \alpha)°$$

$$a \cos x° + b \sin x° = k \cos x° \cos \alpha° + k \sin x° \sin \alpha°$$

Maka : $a = k \cos \alpha°$, $b = k \sin \alpha°$

$$k^2 \cos^2\alpha° + k^2 \sin^2\alpha° = a^2 + b^2$$

$$k^2 (\cos^2\alpha° + \sin^2\alpha°) = a^2 + b^2$$

$$k^2 = a^2 + b^2$$

$$k = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ dengan } k > 0$$

$$\frac{k \sin \alpha°}{k \cos \alpha°} = \frac{b}{a} \rightarrow \tan \alpha° = \frac{b}{a}$$

Bentuk a cos x° + b sin x°

Mengubah bentuk a cos x° + b sin x° menjadi bentuk k sin (x + a).

Bentuk a cos x° + b sin x° dapat diubah ke dalam bentuk k cos $(x - \alpha)°$ dengan **k** adalah konstanta positif dan $0 \leq x \leq 360°$, nilai-nilai k dan α ditentukan oleh nilai-nilai a dan b dengan cara pengerjaan:

$$\mathbf{a \cos x° + b \sin x° = k \sin (x + \alpha)°}$$

$$\mathbf{a \cos x° + b \sin x° = k \sin x° \cos \alpha° + k \cos x° \sin \alpha°}$$

$$\mathbf{Maka: a = k \sin \alpha°, b = k \cos \alpha°}$$

$$\mathbf{k^2 \sin^2\alpha° + k^2 \cos^2\alpha° = a^2 + b^2}$$

$$\mathbf{k^2 (\sin^2\alpha° + \cos^2\alpha°) = a^2 + b^2}$$

$$\mathbf{k^2 = a^2 + b^2}$$

$$\mathbf{k = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ dengan } k > 0}$$

$$\frac{\boldsymbol{k \sin \alpha^{\circ}}}{\boldsymbol{k \cos \alpha^{\circ}}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \rightarrow \mathbf{tan}\, \boldsymbol{\alpha^{\circ}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$$

Contoh :

Ubahlah bentuk 4 cos x – 4 sin x ke dalam bentuk k sin (x+α) ,dengan $k > 0$ dan $0 \leq x \leq 360°$.

Solusi.

$4 \cos x - 4 \sin x = k \sin (x+\alpha)$

$4 \cos x - 4 \sin x = k \sin x \cos \alpha + k \cos x \sin \alpha$

$k \sin \alpha = 4 \quad \rightarrow a = 4$

$K \cos \alpha = -4 \rightarrow b = -4$

$$k = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{4}{-4} = -1 \text{ (}\alpha\text{ di kudaran II)} \rightarrow \alpha = 135°$$

$$\mathbf{jadi, 4 \cos x + 4 \sin x = 4\sqrt{2} \sin(x + 135°)}$$

Penyelesaian Persamaan a cos x° + b sin x° = c

Untuk menentukan penyelesaian persamaan trigonometri berbentuk **a cos x° + b sin x° = c,** dengan a, b dan c ϵ R dan $\neq 0$, dapat diselesaikan Dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1 : ubahlah bentuk trigonometri **a cos x° + b sin x°,** kedalam bentuk k cos (x – α)° dengan $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan $\tan\alpha^\circ = \frac{b}{a}$ atau ke dalam bentuk k sin (x – α)° dengan $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan $\tan\alpha^\circ = \frac{b}{a}$.

Langkah 2 : kemudian dengan mengganti **a cos x° + b sin x°= c** dengan k cos (x – α)° atau k sin (x – α)° maka persamaan itu menjadi

$$\mathbf{k\cos(x-\alpha)^\circ = c} \;\; \boldsymbol{atau} \;\; \mathbf{k\sin(x-\alpha)^\circ = c}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{\cos(x-\alpha)^\circ = \frac{c}{k}} \qquad \Leftrightarrow \mathbf{k\sin(x-\alpha)^\circ = \frac{c}{k}}$$

Langkah 3 : Syarat persamaan dapat diselesaiakan $\mathbf{jika}, |\mathbf{c}| \leq \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$

Perhatikanlah contoh dibawah ini.!

Contoh 1: Agar persamaan (a+1) cos x + a sin x = a + 2, memiliki Penyelesaian,tentukan batas a!

Jawab !

$$|\mathbf{a}+\mathbf{2}| \leq \sqrt{(\mathbf{a}+\mathbf{1})^2+\mathbf{a}^2},\ \text{dengan}\ (a+1)^2 + a^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |\mathbf{a}+\mathbf{2}| \leq \sqrt{(\mathbf{a}+\mathbf{1})^2+\mathbf{a}^2},$$

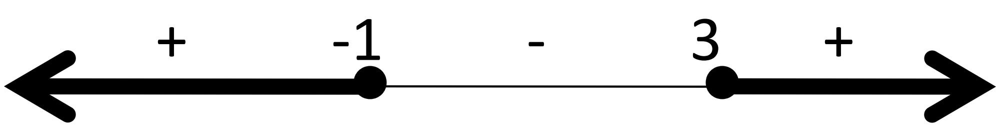
$$\Leftrightarrow (\mathbf{a}+\mathbf{2})^2 \leq \mathbf{2a}^2 + \mathbf{2a} + \mathbf{1}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{a}^2 + \mathbf{4a} + \mathbf{4} \leq \mathbf{2a}^2 + \mathbf{2a} + \mathbf{1}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{a}^2 - \mathbf{2a} - \mathbf{3} \geq \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{a}+\mathbf{1})(\mathbf{a}-\mathbf{3}) \geq \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{a} \leq -\mathbf{1}\ \mathbf{atau}\ \mathbf{a} \geq \mathbf{3}$$



Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi y = f(x) = a cos x° + b sin x°.

Nilai-nilai stasioner (nilai maksimum atau minimum) fungsi trigonometri **y = f(x) = a cos x° + b sin x°.** Dengan $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan $\tan \alpha^\circ = \frac{b}{a}$
Adalah.!

1. $\mathbf{nilai\ maksimum\ y_{maks} = \sqrt{a^2 + b^2},\ untuk\ cos\ (x - a)^\circ = 1}$

2. $\mathbf{nilai\ minimum\ y_{min} = -\sqrt{a^2 + b^2},\ untuk\ cos\ (x - a)^\circ = -1}$

Contoh 1:

Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi $y = 2\cos x^\circ - \sqrt{5}\sin x^\circ$
solusi !

$y = 2\cos x^\circ - \sqrt{5}\sin x^\circ$, dengan $a = 2$ dan $b = -\sqrt{5}$

$$y_{maks} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + \left(-\sqrt{5}\right)^2} = 3$$

$$y_{min} = -\sqrt{a^2 + b^2} = -\sqrt{2^2 + \left(-\sqrt{5}\right)^2} = -3$$

jadi, $y_{maks} = 3$, dan $y_{min} = -3$

contoh 2: Titik – titik stasioner $y = f(x) = \cos 2x° + \sqrt{3} \sin 2x°$, adalah ....

solusi !

$$y = f(x) = \cos 2x° + \sqrt{3} \sin 2x° \quad \rightarrow a = \sqrt{3} \text{ dan } b = 1$$

$$k = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\tan \alpha° = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 60°$$

Titik maksimum:

$y_{\text{maks}} = 2$ dicapai untuk $\cos(2x - 60)° = 1$, maka

$$\Leftrightarrow \cos(2x - 60)° = 1 = \cos 0$$

$$2x - 60° = k.360° \Leftrightarrow x = 30 + k.360°$$

untuk $k = 0$, maka $x = 30°$ diperoleh $(30°, 2)$

untuk $k = 1$, maka $x = 210°$ diperoleh $(210°, 2)$

Titik minimum :

$y_{min} = -2$ dicapai untuk $\cos(2x - 60)° = -1$

$$\cos(2x - 60)° = -1 = \cos 180°$$

$2x - 60° = 180 + k.360°$, atau $2x - 60° = -180 + k.360°$

$\Leftrightarrow x = 120° + k.180°$, atau $x = -60° + k.180°$

untuk $k = 0$, maka $x = 120°$ atau $x = -60°$

untuk $k = 1$, maka $x = 300°$ atau $x = 120°$

titik minimum $(120°, -2)$ atau $(300°, -2)$

jadi titik stasionernya adalah:

$\Leftrightarrow$ titik maksimum $(30°, 2)$ dan $(210°, 2)$

$\Leftrightarrow$ titik minimum $(120°, -2)$ dan $(300°, -2)$

Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi y = f(x) = a cos x° + b sin x° + c

Nilai-nilai stasioner (nilai maksimum atau minimum) fungsi trigonometri

y = f(x) = a cos x° + b sin x°+ c = k cos (x – α) + c Dengan $k = \sqrt{a^2 + b^2}$

dan $\tan \alpha^\circ = \frac{b}{a}$ adalah!

$$\mathbf{1, titik\ minimum\ y_{maks} = k + c = \sqrt{a^2 + b^2} + c, untuk\ \cos(x - \alpha)^\circ = 1}$$

$$\mathbf{2, titik\ minimum\ y_{min} = -k + c = -\sqrt{a^2 + b^2} + c, untuk\ \cos(x - \alpha)^\circ = -1}$$

Contoh !.

Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi y = 8 cos x° + 6 sin x° + 5

Solusi!

$$y = 8 \cos x^\circ + 6 \sin x^\circ + 5$$

$$y_{mak} = \sqrt{a^2 + b^2} + c = \sqrt{8^2 + 6^2} + 5 = -10 + 5 = 15$$

$$y_{min} = -\sqrt{a^2 + b^2} + c = -\sqrt{8^2 + 6^2} + 5 = -10 + 5 = -5$$

Menggambar Grafik Fungsi y = f(x)

Langkah – langkah menggambar grafik fungsi:

Langkah 1 : Ubahlah fungsi $y = f(x) = a \cos x^\circ + b \sin x^\circ + c$ menjadi fungsi $f(x) = k \cos (x - \alpha)^\circ + c$.

Lankah 2 : Tentukan titik-titik stasionernya.

1. Titik maksimum.
2. Titik minimum.

Langkah 3 : Tentukan titik potong dengan sumbu koordinat.

- titik potong dengan sumbu –x diperoleh bila $y = 0$
- titik potong dengan sumbu –y diperoleh bila $x = 0$

Langkah 4 : Gambarkan titik-titik (x,y) yang diperoleh pada langkah 2 dan 3 pada bidang kartesius.

Contoh !

seketsa grafik fungsi $y = f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$ dalam interval $0 \le x \le 360°$!

Solusi!

$y = f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x \quad \rightarrow a = \sqrt{3}$ dan $b = 1$

$y = f(x) = 2\cos(x + 30)°$

$$k = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \alpha = 30°$$

2. titik stasioner.

$y_{maks} = 2$ dicapai untuk $\cos(x - 30)° = 1 \rightarrow x = 30°$

$y_{min} = -2$ dicapai untuk $\cos(x - 30)° = -1 \rightarrow x = 210°$

3. titik potong dengan sumbu koordinat.

$\rightarrow$ titik potong dengan sumbu $- x$ jika $y = 0$

$2\cos(x - 30)° = 0 = \cos 90°$

$x = 120° + k.360°$ atau $x = -60° + k.360°$

untuk $k = 0$ maka $x = 120°$ atau $x = -60°$

untuk $k = 1$ maka $x = 480°$ atau $x = 300°$

titik potong dengan sumbu $- x$ adalah $(120°, 0)$ dan $(300°, 0)$

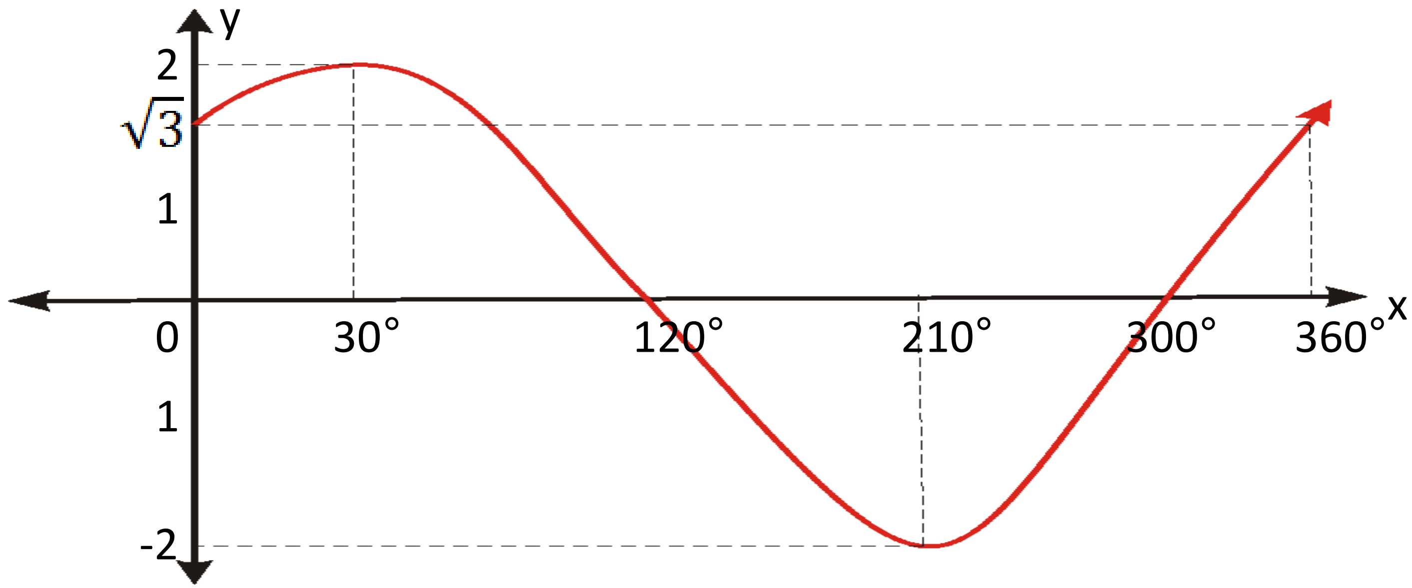
$\rightarrow$ titik potong dengan sumbu $-$ y jika $x = 0$.

$$y = 2\cos(x - 30)^\circ$$

$$y = 2\cos(0 - 30)^\circ$$

$$= 2\cos 30^\circ \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

titik potong dengan sumbu $-$ y adalah $(0, \sqrt{3})$



Catatan : dalam menggambar grafik fungsi trigonometri dapat juga menggunakan cara Tabel dan Tranlasi grafik fungsi.

VI. Menggambar Grafik Fungsi Kuadrat dalam fungsi Trigonometri.

Contoh !:

Seketsalah kurva fungsi $y=f(x)= 2 \sin^2 x - 2 \sin x + 1$ dalam interval $-180 \leq x \leq 180$

Solusi !

1. Menentukan titik potong dengan sumbu kordinat.

a. Titik potong dengan sumbu x , jika $y = 0$

$$2 \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 .2.1 = -4$$

$$D = b^2 - 4ac$$

Karena $D < 0$, maka grafik tidak memotong sumbu –x.(ingat sifat-sifat grafik fungsi kuadrat).

b. Titik potong dengan sumbu y jika $x = 0$.

$$y = 2 \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0$$

$$y = 2 \sin^2 0 - 2 \sin 0 + 1 = 1$$

Titik potong dengan sumbu- y adalah (0,1)

2. Menentukan titik Stasioner.

$y = 2\sin^2 x - 2\sin x + 1$

$y' = 4\sin x\cos x - 2\cos x = 2\sin 2x - 2\cos x$ (Turunan pertama).

$y'' = 4\cos 2x + 2\sin x$ (Turunan Kedua).

Nilai Setasioner dicapai jika $y' = 0$, maka:

$4\cos 2x + 2\sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ atau $\sin x = ½$

$\cos x = 0 = \cos 90°$

$x = 90°+k.360°$ or $x = 90°+k.360°$

Untuk $k = 0$ maka $x=90°$ or $x = -90°$

$\sin x = ½ = \sin 30°$

$x = 30°+k.360°$ or $x = 150°+k.360°$

Untuk $k = 0$ maka $x=30°$ or $x = 150°$

***Untuk $x = 90°$** $\Leftrightarrow y'' = 4\cos 2x + 2\sin x$

$= 4\cos 2.90° + 2\sin 90° \Leftrightarrow 4\cos 180° + 2\sin 90°$

$= 4.(-1) + 2(1) = -2$

$-2 < 0$ maka fungsi f adalah maksimum.

$X = 90° \rightarrow y_{\text{maks}} = 2\sin^2 90° - 2\sin 90° + 1 = 1$

Titik maksimumnya adalah (90° ,1)

***Untuk $x = -90°$** $\Leftrightarrow$ $y'' = 4 \cos 2(-90°) + 2 \sin (-90°)$

$= 4 \cos 180° + 2- \sin 90° \Leftrightarrow 4\ (-1)- 2\ (1)$

$= 4\ .(-1) - 2(1) = -6 < 0$ (fungsi maksimum)

$X = -90° \rightarrow y_{\text{maks}} = 2 \sin^2(-90°) -2 \sin (-90°) + 1 = 5$

Titik maksimumnya adalah **(-90° ,5)**

***Untuk $x = 30°$** $\Leftrightarrow$ $y'' = 4 \cos 2(30°) + 2 \sin (30°)$

$= 4 \cos 60° + 2 \sin 30° \Leftrightarrow 4\ (½)- 2\ (½)$

$= 2+ 1 = 3 > 0$ (fungsi minimum)

$X = 30° \rightarrow y_{\text{maks}} = 2 \sin^2(30°) - 2 \sin (30°) + 1 = ½$

Titik maksimumnya adalah **(30° ,½)**

***Untuk $x = 150°$** $\Leftrightarrow$ $y'' = 4 \cos 2(150°) + 2 \sin (150°)$

$= 4 \cos 300° + 2 \sin 150° \Leftrightarrow 4\ (½)- 2\ (½)$

$= 2+ 1 = 3 > 0$ (fungsi minimum)

$X = 30° \rightarrow y_{\text{maks}} = 2 \sin^2(150°) - 2 \sin (150°) + 1 = ½$

Titik maksimumnya adalah **(150° ,½)**

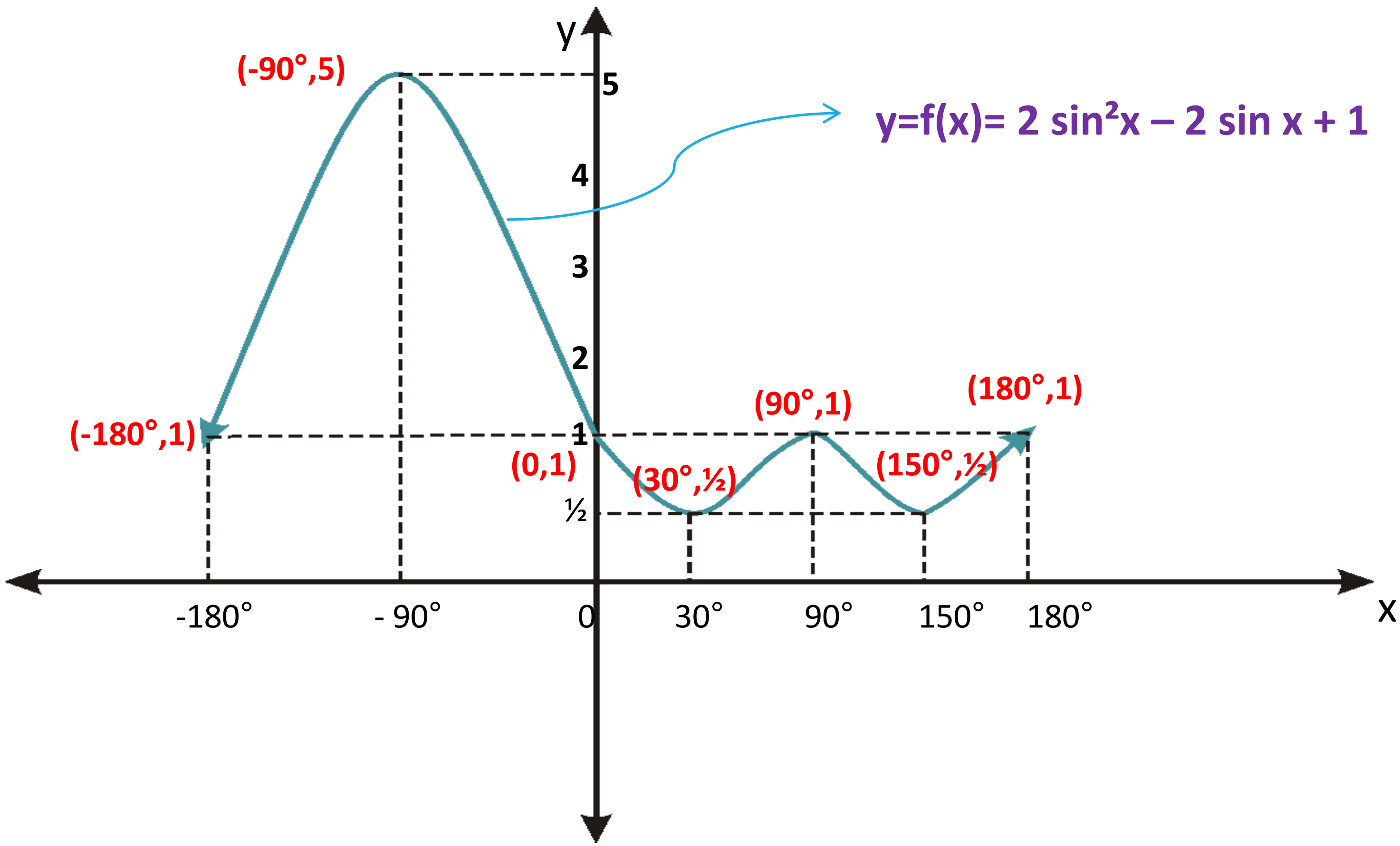
CATATAN :

COS (-B) = COS B

SIN (-B) = - SIN B

TAN (-B) = TAN B

***Untuk x = - 180°**$\rightarrow y = 2\sin^2(-180°) - 2\sin(-180°) + 1 = 1$, titiknya (-180°,1)
***Untuk x = 180°**$\rightarrow y = 2\sin^2(180°) - 2\sin(180°) + 1 = 1$, titiknya (180°,1)



REFERENSI

- Stroud, KA, Engineering Mathematics, Fifth Edition,
- Anthony Crof, Robert Davidson, and Martin Hargreaves, 2001, Engineering Mathematics : A Fondation for Electronic, Electrical, Communications and Systems Engineerings, Third Edition, Pearson, Prentice-Hall.
- Kreyszig E., 1988, Advanced Engineering Mathemetics, Sixth Edition, John Willey & Sons
- Anton HA., 2000, ElementaryLinear Algebra with Applications, John Wiley & Sons