



Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Робототехники и комплексной автоматизации

КАФЕДРА Системы автоматизированного проектирования (РК-6)

### **ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ**

Студент	Смирнова Анита Андреевна
Группа	РК6-61
Тип задания	Лабораторная работа
Тема лабораторной работы	Многошаговые методы численного решения задачи Коши

Студент	_____	<b><u>Смирнова А.А.</u></b>
	<i>подпись, дата</i>	<i>фамилия, и.о</i>
Преподаватель	_____	<b><u>Соколов П.А.</u></b>
	<i>подпись, дата</i>	<i>фамилия, и.о.</i>
Преподаватель	_____	<b><u>Першин Ю.А.</u></b>
	<i>подпись, дата</i>	<i>фамилия, и.о.</i>

Оценка \_\_\_\_\_

Москва, 2019 г.

## **Оглавление**

Задание на лабораторную работу	<b>3</b>
Цель выполнения лабораторной работы	<b>5</b>
Задачи, выполненные в процессе реализации лабораторной работы	<b>5</b>
Заключение	<b>12</b>
Список использованных источников	<b>12</b>

## Задание на лабораторную работу

### *Многошаговые методы численного решения задачи Коши*

При создании численных схем решения дифференциальных уравнений в частных производных дискретизация времени приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с соответствующей задачей Коши. Численные методы решения таких систем можно разделить на одношаговые, использующие информацию только с предыдущего или только с последующего временного шага при нахождении решения на текущем шаге, и многошаговые, использующие информацию с нескольких итераций по времени. Многошаговые методы дополнительно требуют использования одношагового метода для проведения первых итераций, инициализирующих многошаговый метод. В этом задании мы используем метод Адамса–Башфорта 4-го порядка и инициализирующий его метод Рунге–Кутты 4-го порядка для нахождения решения нестационарного уравнения теплопроводности.

Дано нестационарное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (1)$$

где  $T=T(x,y,t)$  – температура в точке  $(x,y)$  в момент времени  $t$ ,

$f(x, y) = 1$  – функция тепловых источников, описывающая в данном случае равномерный нагрев. Рассматривается пространство

$$\Omega = \{(x,y) \text{ in } [0; 1] \times [0; 1]\},$$

однородные (т.е. нулевые) граничные условия:  $T(x,0,t) = T(0,y,t) = T(x,1,t) = T(1,y,t) = 0$  и нулевые начальные условия  $T(x,y,0) = 0$ .

*Требуется:*

1. Используя результаты лабораторной работы 3 (вариант 2), провести дискретизацию пространства с  $N = 18$  узлами вдоль каждого направления и дискретизацию по времени с шагом  $\Delta t$ , используя метод

Адамса–Башфорта 4-го порядка и метод Рунге–Кутты 4-го порядка. Например, для метода Адамса–Башфорта 4-го порядка результатом дискретизации должен быть итерационный метод вида:

$$T_{n+1} = T_n + \Delta t \sum_{k=1}^4 (a_k A T_{n-k+1} + f(x, y)), \quad (2)$$

где  $A$  и  $f(x, y)$  были выведены в лабораторной работе 3 (вариант 2).

2. Написать функцию `ab4()`, которая проводит одну итерацию метода Адамса–Башфорта 4-го порядка, используя решения системы ОДУ на трех предыдущих итерациях. Аргументы функции следует определить самостоятельно.

3. Написать функцию `rk4()`, которая проводит одну итерацию метода Рунге–Кутты, используя решение системы ОДУ на предыдущей итерации. Аргументы функции следует определить самостоятельно.

4. Написать функцию `ode_solve(f, t_final, delta_t)`, которая находит решение ОДУ с правой частью, выраженной функцией  $f$ , до момента времени  $t_{\text{final}}$  с шагом по времени  $\delta t$ , используя метод Рунге–Кутты 4-го порядка для инициализации первых двух шагов и метод Адамса–Башфорта 4-го порядка для дальнейших итераций.

5. Проведя несколько вычислительных экспериментов с помощью функции `ode_solve()`, определить с точностью до порядка максимальное значение  $\Delta t$ , обозначаемое  $\Delta t_{\text{max}}$ , при котором решение заданного дифференциального уравнения является неустойчивым. Требуется продемонстрировать неустойчивость решения с помощью графика зависимости температуры, усредненной по области  $[0; 1] \times [0; 1]$ , от времени.

6. Используя  $\Delta t$  на порядок меньшее, чем  $\Delta t_{\text{max}}$ , построить:

- линии уровня функции  $T(x,y,t)$  для нескольких моментов времени, демонстрирующих сходимость решения;
- график зависимости температуры, усредненной по области  $[0; 1] \times [0; 1]$ , от времени.

7. Сравнить решение, к которому сходится численное решение заданного дифференциального уравнения, с решением, полученным в лабораторной работе 3 (вариант 2). Сравнив их дополнительно с решением, полученным при шаге  $\Delta t_{max}$ , сделать вывод об устойчивости решения и устойчивости метода.

### Цель выполнения лабораторной работы

Реализовать и проанализировать многошаговый метод Адамса–Башфорта, сравнить результаты, получившиеся в лабораторной 3.

### Задачи, выполненные в процессе реализации лабораторной работы

1. Уравнение, которое необходимо решить:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \left( - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + f(x, y) \quad (2)$$

Для решения задачи можно воспользоваться результатами лабораторной работы 3:

$$- \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = - \frac{AT}{h^2} \quad (3)$$

$$A' = \frac{A}{h^2} \quad (4)$$

$$- \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = - A' T \quad (5)$$

Тогда в (2) можно подставить (5):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = A'T + f(x, y) \quad (6)$$

Для уравнения (6) можно записать метод Адамса–Башфорта 4-го порядка:

$$T_{n+1} = T_n + \Delta t \sum_{j=1}^4 a_j (A'T_{n-j+1} + f(x, y)), \quad (7)$$

где коэффициенты  $a_j$  имеют вид:

$$a_j = \int_0^1 \prod_{j \neq k} \frac{s+k-1}{k-j} ds, \quad j = 1, \dots, p \quad (8)$$

Из формулы (8) были выведены коэффициенты для метода Адамса–Башфорта 4-го порядка:

$$a_1 = \int_0^1 \prod_{j \neq 1} \frac{s+k-1}{k-j} ds = \int_0^1 \frac{s+2-1}{2-1} \cdot \frac{s+3-1}{3-1} \cdot \frac{s+4-1}{4-1} ds = \int_0^1 \frac{(s+1) \cdot (s+2) \cdot (s+3)}{6} ds = \frac{55}{14}$$

$$a_2 = \int_0^1 \prod_{j \neq 2} \frac{s+k-1}{k-j} ds = \int_0^1 \frac{s+1-1}{1-2} \cdot \frac{s+3-1}{3-2} \cdot \frac{s+4-1}{4-2} ds = \int_0^1 \frac{-s \cdot (s+2) \cdot (s+3)}{2} ds = -\frac{59}{14}$$

$$a_3 = \int_0^1 \prod_{j \neq 3} \frac{s+k-1}{k-j} ds = \int_0^1 \frac{s+1-1}{1-3} \cdot \frac{s+2-1}{2-3} \cdot \frac{s+4-1}{4-3} ds = \int_0^1 \frac{s \cdot (s+1) \cdot (s+3)}{2} ds = \frac{37}{14}$$

$$a_4 = \int_0^1 \prod_{j \neq 4} \frac{s+k-1}{k-j} ds = \int_0^1 \frac{s+1-1}{1-4} \cdot \frac{s+2-1}{2-4} \cdot \frac{s+3-1}{3-4} ds = \int_0^1 \frac{-s \cdot (s+1) \cdot (s+2)}{6} ds = -\frac{3}{8}$$

Метод Рунге–Кутты 4-го порядка можно сформулировать как:

$$T_0 = \alpha_0 \quad (9)$$

$$k_1 = \Delta t \cdot (A'T_i + f(x, y)) \quad (10)$$

$$k_2 = \Delta t \cdot (A'(T_i + \frac{1}{2}k_1) + f(x, y)) \quad (11)$$

$$k_3 = \Delta t \cdot (A'(T_i + \frac{1}{2}k_2) + f(x, y)) \quad (12)$$

$$k_4 = \Delta t \cdot (A'(T_i + k_3) + f(x, y)) \quad (13)$$

$$T_{i+1} = T_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (14)$$

2. С использованием формулы (17) была написана функция ab4(T, f, delta\_t, i), которая проводит одну итерацию метода Адамса–Башфорта 4-го

порядка, используя решения системы ОДУ на трех предыдущих итерациях. Аргументы функции: номер итерации  $i$ , значения функции  $f$ , массив  $T$ , дельта по времени  $\Delta t$ .

3. Была написана функция `rk4(T_previous, f, delta_t)`, которая проводит одну итерацию метода Рунге–Кутты, используя решение системы ОДУ на предыдущей итерации. Аргументы функции: значения функции  $f$ , значение температуры  $T\_previous$  на предыдущей итерации, дельта по времени  $\Delta t$ .

4. Была написана функция `ode_solve(f, t_final, delta_t)`, которая находит решение ОДУ с правой частью, выраженной функцией  $f$ , до момента времени  $t\_final$  с шагом по времени  $delta\_t$ , используя метод Рунге–Кутты 4-го порядка для инициализации первых двух шагов и метод Адамса–Башфорта 4-го порядка для дальнейших итераций.

5. Было проведено несколько вычислительных экспериментов с помощью функции `ode_solve()`. Было определено, что максимальное значение  $\Delta t$ , обозначаемое  $\Delta t_{max}$ , при котором решение заданного дифференциального уравнения является неустойчивым, равно  $10^{-3}$ . Неустойчивость решения демонстрирует график зависимости температуры, усредненной по области  $[0; 1] \times [0; 1]$ , от времени на рис. 1. Для вектора температур в каждый момент времени осуществлялось усреднение - сложение всех значений в векторе, после этого деление полученной суммы на количество элементов. Для всех моментов времени из усредненных значений температуры был составлен новый вектор, где  $i$ -ый элемент является усредненной температурой в  $i$ -ый момент времени.

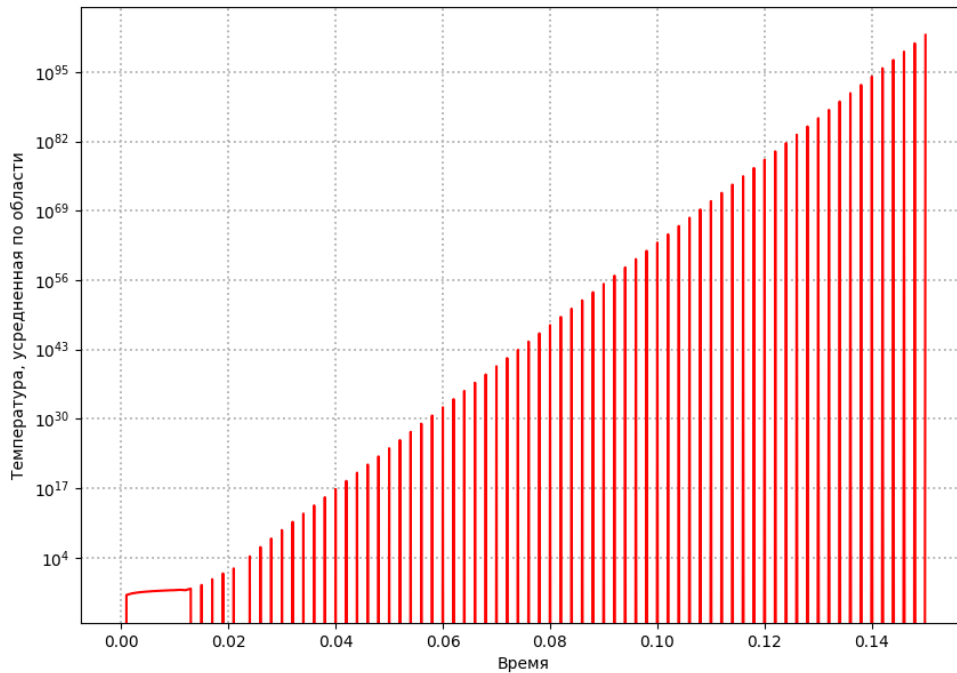


Рис. 1. График зависимости температуры, усредненной по области  $[0; 1] \times [0; 1]$ , от времени,  $\Delta t = \Delta t_{max} = 10^{-3}$ .

6. Было использовано  $\Delta t$  на порядок меньшее, чем  $\Delta t_{max}$ , равное  $10^{-4}$ .

- Для такого  $\Delta t$  были построены графики линий уровня функции  $T(x, y, t)$  для нескольких моментов времени, демонстрирующих сходимость решения. На рис.2 - 4 изображены эти графики.

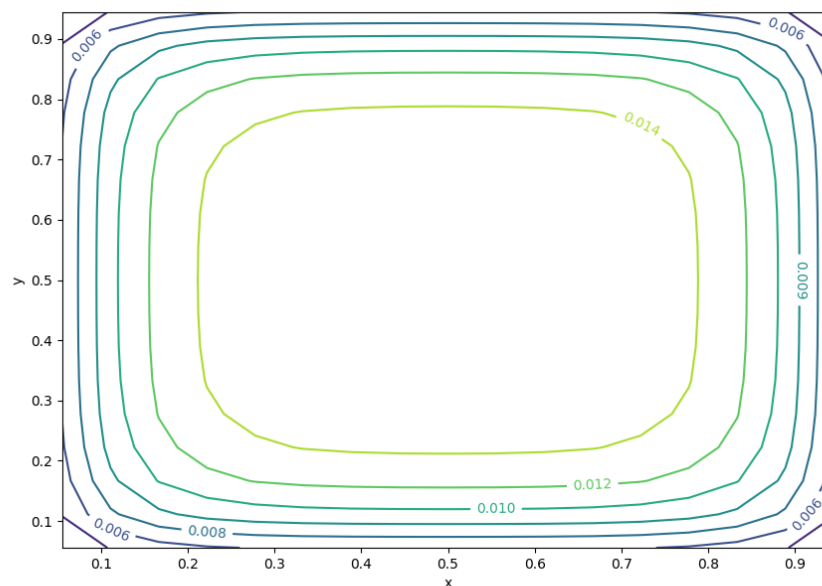


Рис. 2. Линии уровня функции  $T(x, y, t)$  в начальное время  $t=0$ .



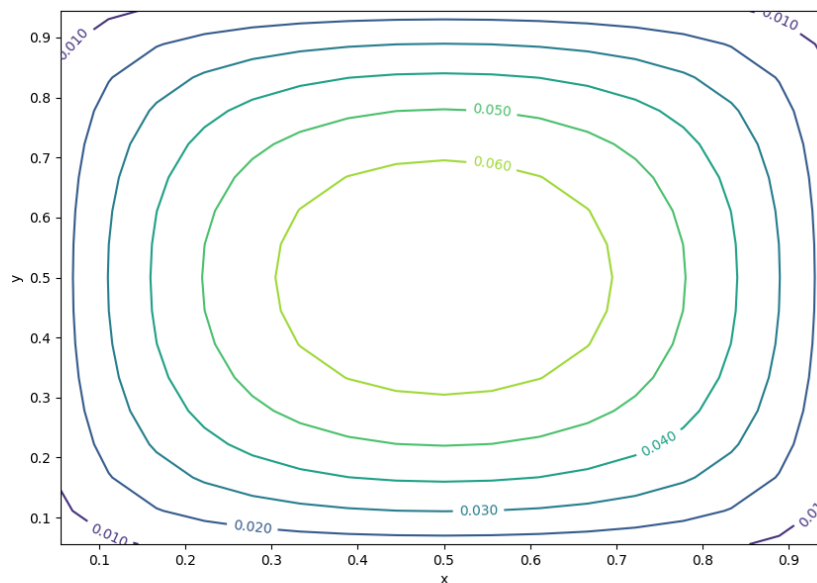


Рис. 3. Линии уровня функции  $T(x,y,t)$  при  $t=0.4 \cdot t_{\text{final}}$

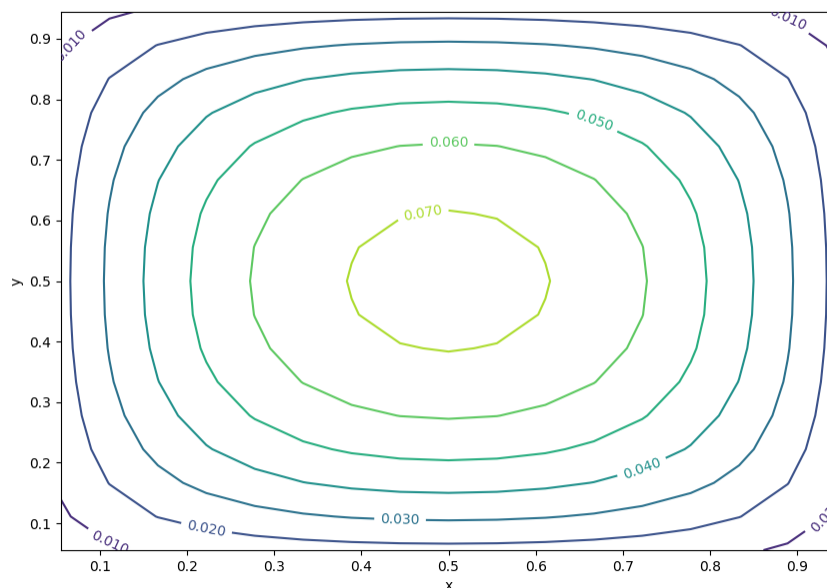


Рис. 4. Линии уровня функции  $T(x,y,t)$  при  $t = 0.9 \cdot t_{\text{final}}$

- Для  $\Delta t = 10^{-4}$  был построен график зависимости температуры, усредненной по области  $[0; 1] \times [0; 1]$  от времени. График изображен на рис. 5. Усреднение осуществлялось также, как и для рис. 1.

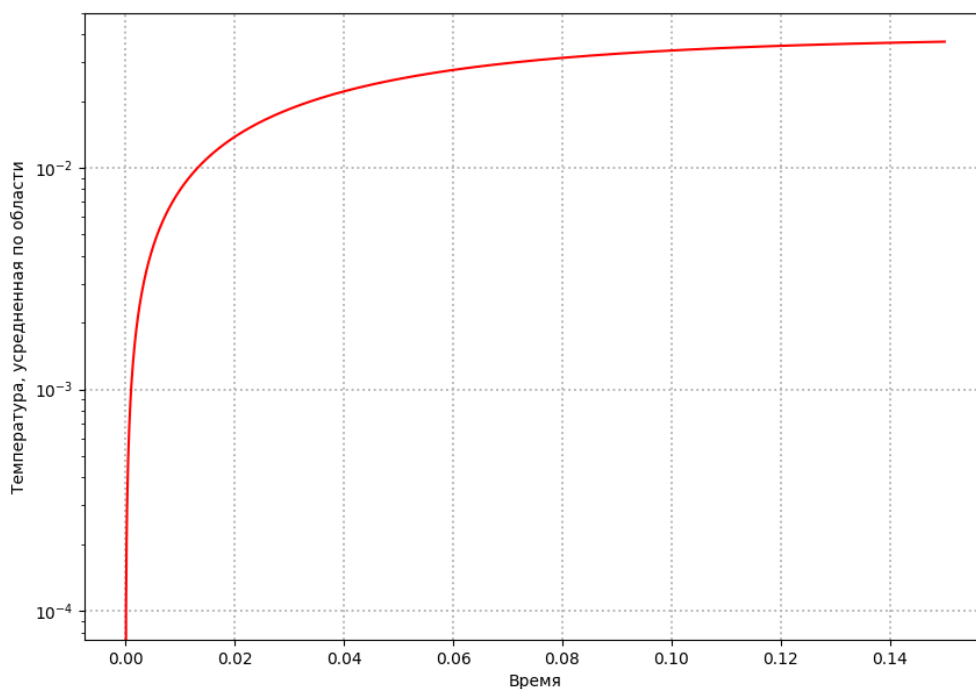


Рис. 5. График зависимости температуры, усредненной по области  $[0; 1] \times [0; 1]$ , от времени,  $\Delta t = 10^{-4}$ .

7. На рис. 6. изображены линии уровня решения, полученного при шаге  $\Delta t_{max}$ . На рис. 7 изображены результаты лабораторной 3. Из этих графиков можно сделать вывод, что при  $\Delta t_{max}$  решение заданного дифференциального уравнения является неустойчивым, но при  $\Delta t < \Delta t_{max}$ , результаты совпадают с результатами лабораторной 3.

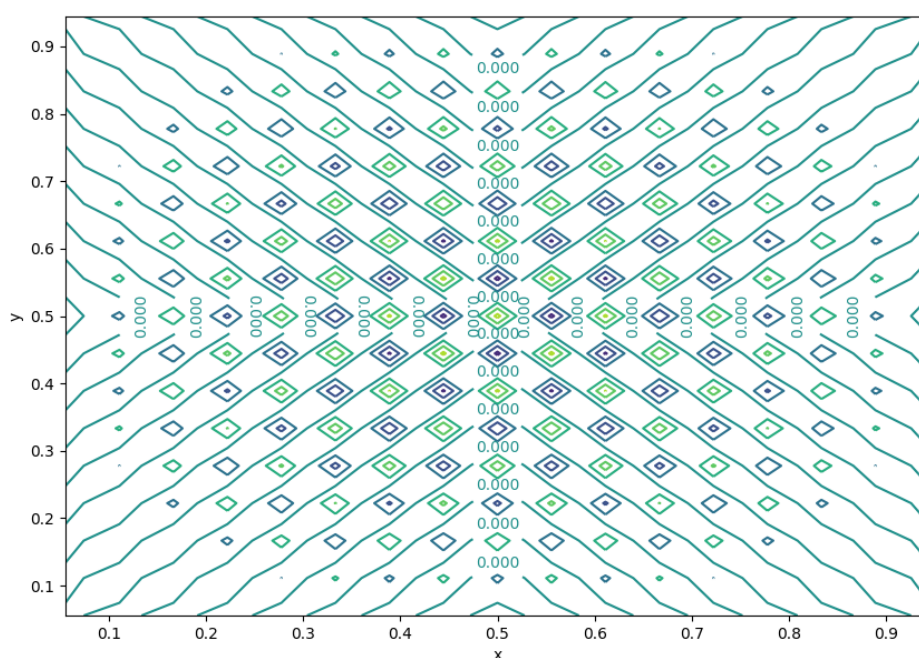


Рис. 6. Линии уровня решения, полученного при шаге  $\Delta t_{max}$ .

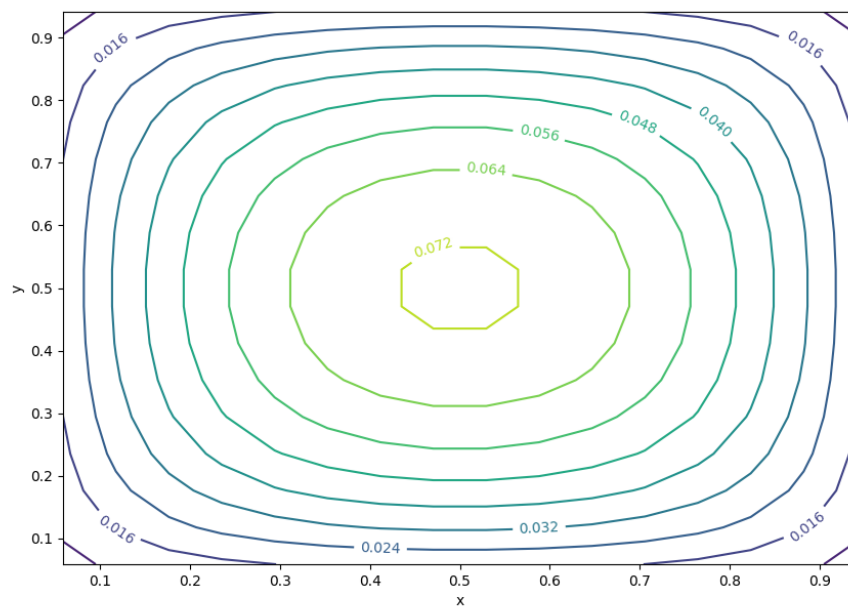


Рис. 7. Линии уровня функции из лабораторной 3.

## Заключение

Многошаговый метод Адамса–Башфорта не устойчив при любых  $\Delta t$ , но при подобранном в ходе эксперимента  $\Delta t$  дает устойчивое решение заданного дифференциального уравнения.

## Список использованных источников

1. Першин А.Ю., Соколов А.П., Вычислительная математика, Лабораторные работ. Учебное пособие. Москва, 2018.
2. Першин А.Ю. Лекции по вычислительной математике. Москва, 2019, 143 с.