Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Робототехники и комплексной автоматизации

КАФЕДРА Системы автоматизированного проектирования (РК-6)

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Студент	Смирнова Анита Андреевна
Группа	РК6-61
Тип задания	Лабораторная работа
Тема лабораторной работы	Интерполяция Лагранжа, интерполяция сплайнами

Студент	________________ *подпись, дата*	**_Смирнова А.А.__** *фамилия, и.о.*
Преподаватель	________________ *подпись, дата*	**_Соколов П.А.__** *фамилия, и.о.*
Преподаватель	________________ *подпись, дата*	**Першин Ю.А.__** *фамилия, и.о.*

Оценка ________________________________

Москва, 2019 г.

Оглавление

Задание на лабораторную работу

1. *Интерполяция Лагранжа*

Дана рациональная функция, известная как аппроксимация Паде:

$$f_{n,m}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{1+\sum_{k=1}^{n} b_k x^k} \text{ ,где } x \in [-1; 1]$$

1.1. Разработать функцию l_i(i, x, x_nodes), которая возвращает значение i-го базисного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes, в точке x.

1.2. Написать функцию L(x, x_nodes, y_nodes), которая возвращает значение интерполяционного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes и ординатами y_nodes, в точке x.

1.3. Сгенерировать 100 функций fn,m(x), где целые степени n,m ∈ [7; 15] и вещественные коэффициенты a_j , b_k ∈ [0; 1] генерируются случайным образом для каждой из функций.

1.4. Для нескольких из сгенерированных функций вывести на экран одновременно графики $f_{n,m}(x)$ и соответствующего интерполяционного полинома L(x), построенного по N равномерно расположенным узлам, где N выбирается по собственному усмотрению, но должно быть не меньше 5. На том же графике выведите L(x), построенного по чебышевским узлам.

1.5. Для каждой из функции, сгенерированных в предыдущем пункте, найдите интерполяционные полиномы L(x), построенные по N ∈ {1,2,...,30} равномерно расположенным узлам и чебышевским узлам. Для каждого N рассчитайте расстояние между $f_{n,m}(x)$ и L(x) в лебеговом пространстве L^∞. Рассмотрите несколько графиков зависимости этого расстояния для равномерных и чебышевских узлов от N и сделайте по ним вывод. Добавьте в отчет один характерный график, который наглядно демонстрирует верность вашего вывода.

1.6. Объясните, что такое аппроксимация Паде и почему предложенный метод генерации случайных функций fn,m(x) позволяет до некоторой степени обобщить выводы предыдущего пункта на произвольные функции.

2. Интерполяция кубическими сплайнам

2.1. Разработать функцию qubic_spline_coeff(x_nodes, y_nodes), которая посредством решения матричного уравнения вычисляет коэффициенты естественного кубического сплайна. Для простоты, решение матричного уравнения можно производить с помощью вычисления обратной матрицы с использованием функции numpy.linalg.inv()

2.2. Написать функции qubic_spline(x, qs_coeff) и d_qubic_spline(x,qs_coeff), которые вычисляют соответственно значение кубического сплайна и его производной в точке (qs_coeff обозначает матрицу коэффициентов).

2.3. На интернет-ресурсе https://rp5.ru найдите данные о температуре за один произвольный календарный месяц в произвольном городе, первая буква которого совпадает с первой буквой вашей фамилии. Проведите интерполяцию кубическими сплайнами по полученным данным и выведите результат на экран.

2.4. Из текущей выборки удалите половину узлов таким образом, что в выборке остаются измерения только в 03:00, 09:00, 15:00, 21:00. Проведите интерполяцию кубическими сплайнами по новой выборке и выведите результаты на экран.

2.5. Из последней выборки снова удалите половину узлов таким образом, что в выборке остаются измерения только в 03:00, 15:00, и проведите аналогичную интерполяцию кубическими сплайнами.

2.6. Сравните три полученные аппроксимации эволюции температуры. Оцените, насколько хорошо аппроксимации во втором и третьем случае предсказывают температуру в известные моменты времени, которые были отброшены при фильтрации узлов интерполяции. Также оцените, насколько хорошо эти аппроксимации предсказывают температуру, усредненную в течение дня (усредненная температура получается путем вычисления среднего арифметического известных значений температуры в течение каждого из дней).

Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы – применить теоретические знания для реализации двух методов интерполяции (интерполирование полиномами Лагранжа и интерполяцию кубическими сплайнам) с помощью библиотеки numpy, а также вспомогательных библиотек pandas, mathplotlib, random и других; проанализировать эти способы.

Задачи, выполненные в процессе реализации лабораторной работы

1. **Интерполяция Лагранжа**

1.1. В соответствии с формулой

$$\prod_{i\neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (1)$$

была разработана функция l_i(i, x, x_nodes), которая возвращает значение i-го базисного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes, в точке x.

1.2. В соответствии с формулой

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{i\neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (2)$$

была разработана функция L(x, x_nodes, y_nodes), которая возвращает значение интерполяционного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes и ординатами y_nodes, в точке x. [1]

1.3. В соответствии с формулой,

$$f_{n,m}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{1 + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k}, \quad (3)$$

где $x \in [-1; 1]$

известной как аппроксимация Паде, была разработана функция f, известная как аппроксимация Паде, которая принимает 2 аргумента - словарь со сгенерированными случайно коэффициентами с помощью библиотеки random и список узлов x_nodes, возвращает список y_nodes. [2]

Далее была реализована функция f_n, которая генерирует 100 функций f, и возвращает массив словарей, в котором каждой сгенерированной функции соответствует словарь, хранящий значения коэффициентов и значений самой функции. В дальнейшем эта функция использовалась для отрисовки случайных функций.

1.4. Для нескольких из сгенерированных функций были выведены на экран одновременно:

1) график $f_{n,m}(x)$
2) соответствующий интерполяционный полином L(x), построенный по 6 равномерно расположенным узлам.
3) L(x), построенный по чебышевским узлам.

Все 3 графика изображены на рис. 1.

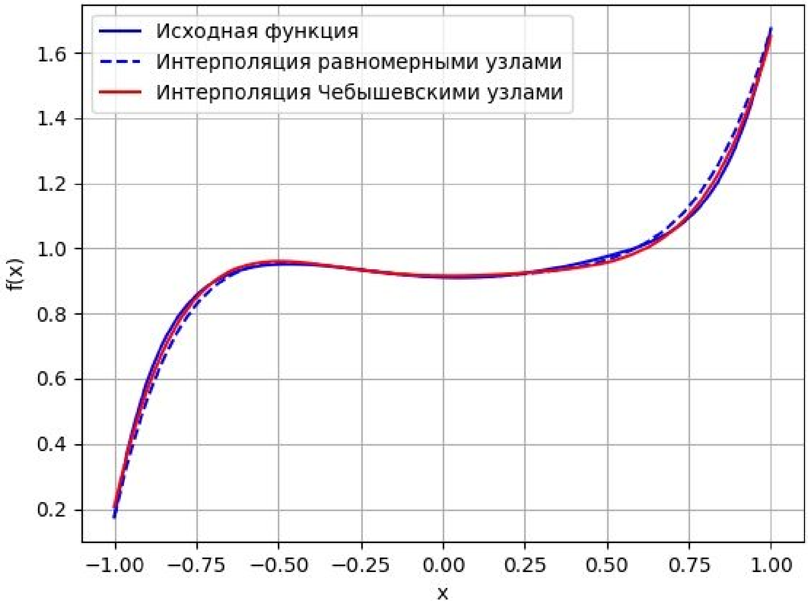

Рис. 1. Интерполяция Лагранжа для функции Паде для 6 узлов

1.5. Для каждой из функции, сгенерированной в предыдущем пункте, были найдены интерполяционные полиномы L(x), построенные по N $\in$ {1,2,...,30} и N $\in$ {1,2,...,60} равномерно расположенным узлам и чебышевским узлам. Для каждого N было рассчитано расстояние между $f_{n,m}(x)$ и L(x) в лебеговом пространстве L^{∞}. Для нахождения расстояния использовалась равномерная норма:

$$\|x\|_{\infty} = max_{t\in[a,\, b]}|x(t)| \quad (4)$$

Графики зависимости этого расстояния для равномерных и чебышевских узлов от количества узлов представлены на рис. 2 и рис. 3. [1]

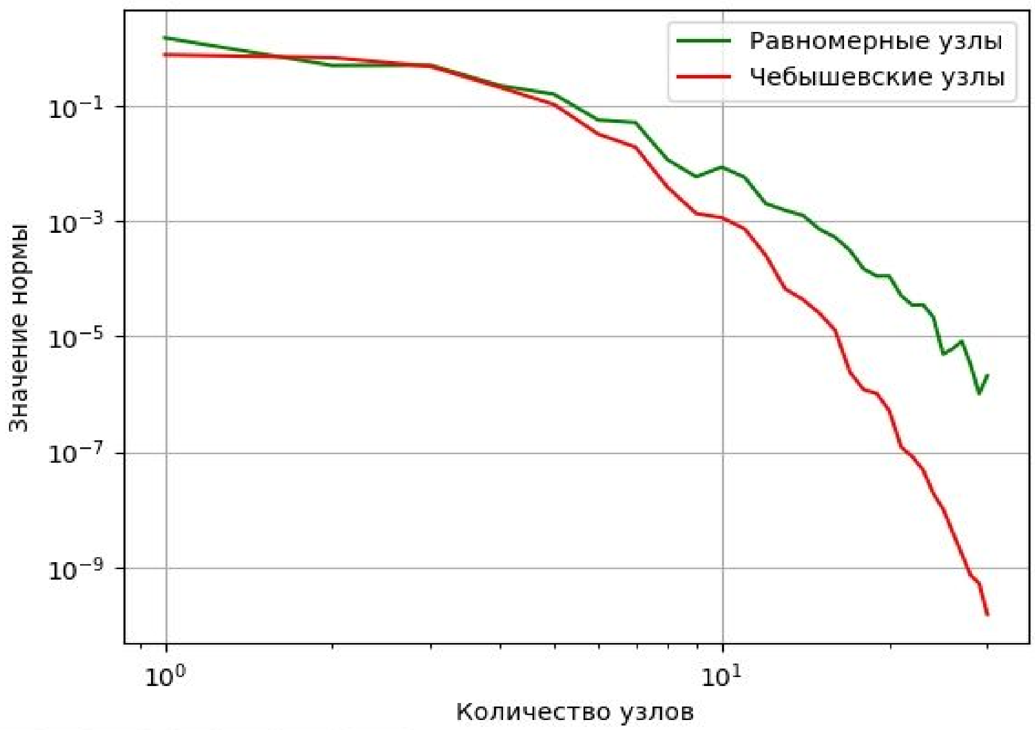

Рис. 2. Зависимость расстояния между полиномом Лагранжа и исходной функции Паде от количества узлов N < 31

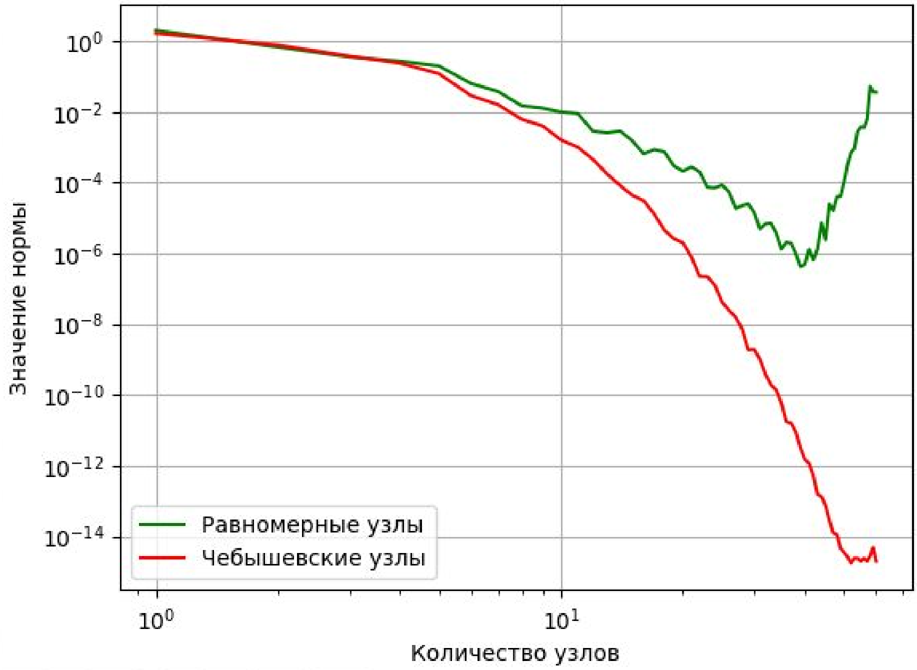

Рис. 3. Зависимость расстояния между полиномом Лагранжа и исходной функции Паде от количества узлов при N < 61

Вывод: из графика на рис. 3. следует, что при интерполяции с достаточно большим количеством равномерно расположенных узлов (больше шестидесяти) на краях промежутка интерполяции появляются паразитные осцилляции, а из рис. 2. следует, что при увеличении количества узлов точность интерполяции для чебышевских узлов выше, чем равномерных узлов.

1.6. Аппроксимации Паде имеют формулу

$$f_{n,m}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{1 + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k} \quad (5)$$

и являются локально наилучшими рациональными аппроксимациями аналитической функции, заданной своим разложением в степенной ряд. С помощью аппроксимации Паде, при построении которой используются локальные данные (коэффициенты степенного ряда), можно получать результаты о глобальных свойствах соответствующей аналитической функции (аналитическое продолжение, характер и расположение особенностей и т. д.) и вычислять значение функции за пределами круга сходимости степенного ряда. Поэтому предложенный метод генерации случайных функций $f_{n,m}(x)$ позволяет до некоторой степени обобщить выводы предыдущего пункта на произвольные функции. [2][3][4]

2. Интерполяция кубическими сплайнам

2.1. Была разработана функция qubic_spline_coeff(x_nodes, y_nodes), которая посредством решения матричного уравнения вычисляет коэффициенты естественного кубического сплайна. Для решения матричного уравнения использовалась функция solve из библиотеки scipy.

2.2. Была написана функция qubic_spline(x, qs_coeff) и d_qubic_spline(x,qs_coeff), которые вычисляют соответственно значение кубического сплайна и его производной в точке, где qs_coeff обозначает матрицу коэффициентов.

2.3. С интернет-ресурса https://rp5.ru были взяты данные о температуре за февраль 2018 года в Сингапуре. Формат csv был преобразован в формат DataFrame с помощью библиотеки pandas, далее для дальнейшей работы в numpy array.

Данные были отрисованы с помощью библиотеки matplotlib в виде графика, изображенном на рис. 4.

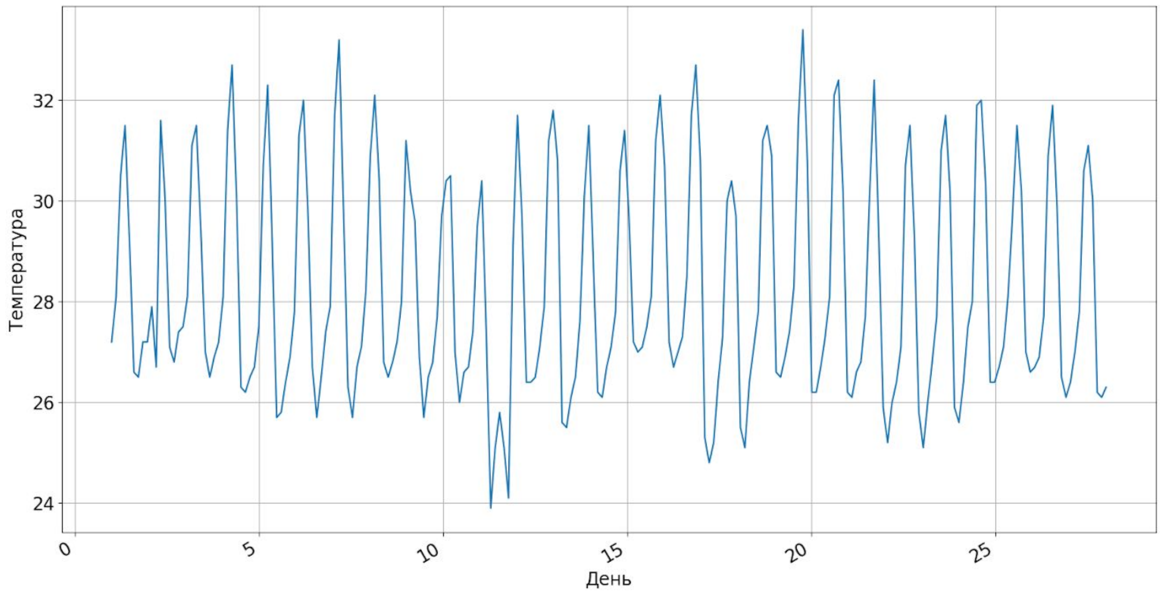

Рис. 4. Температура за февраль 2018 в Сингапуре

Была проведена интерполяция кубическими сплайнами по полученным данным. Результаты интерполяции отражает график на рис. 5.

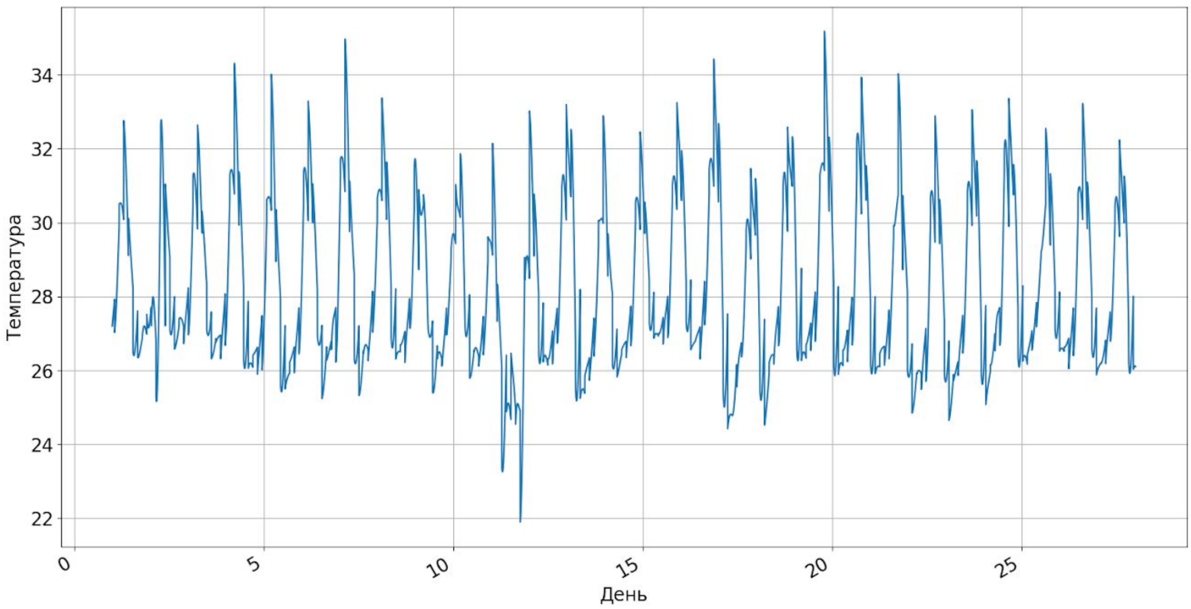

Рис. 5. Интерполяция кубическими сплайнами по полным данным

2.4. Из текущей выборки была удалена половина узлов, проведена интерполяция кубическими сплайнами по новой выборке. Результаты интерполяции отражает график на рис. 6.

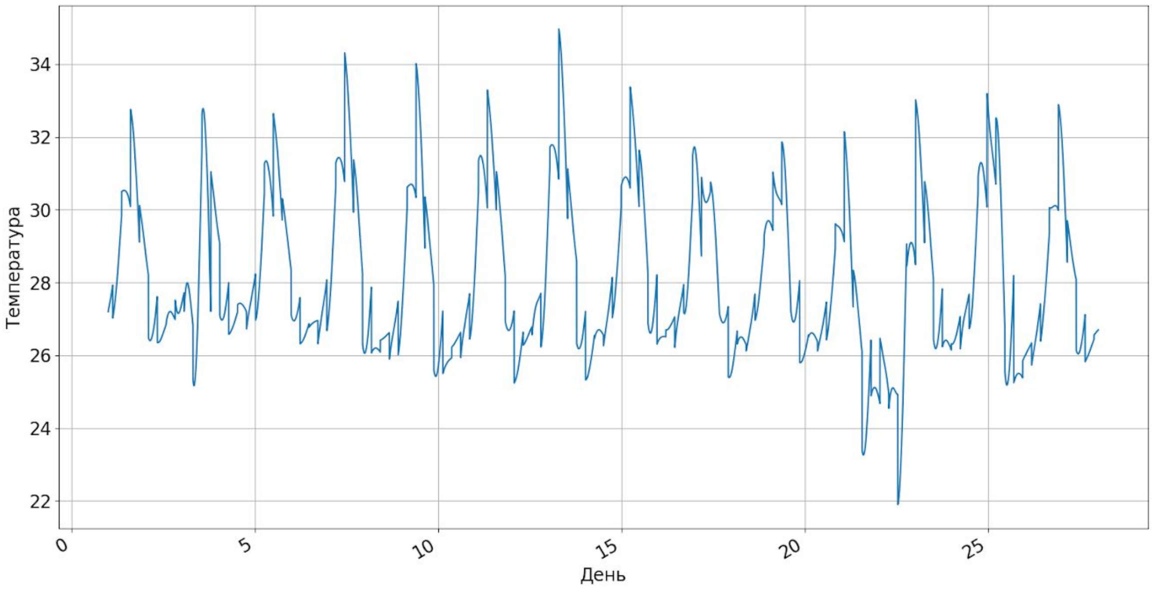

Рис. 6. Интерполяция кубическими сплайнами по половине данных

2.5. Из последней выборки была удалена половина узлов и проведена аналогичная интерполяция кубическими сплайнами. Результаты интерполяции отражает график на рис. 7.

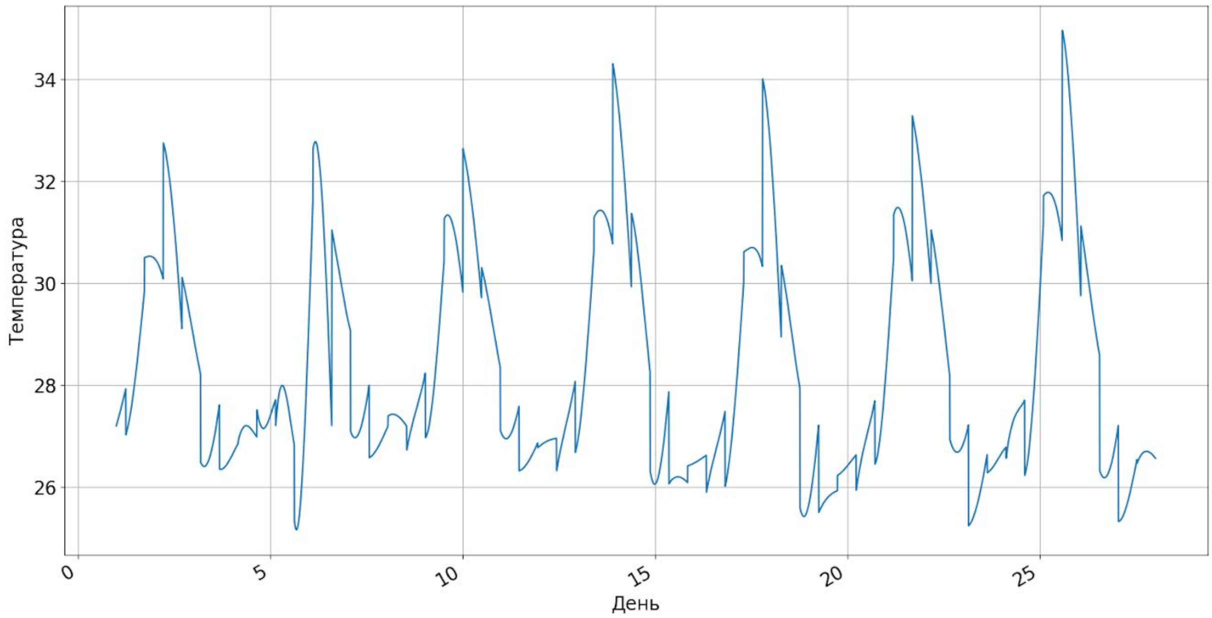

Рис. 7. Интерполяция кубическими сплайнами по четверти данных

2.6. Было сделано сравнение трех полученных аппроксимаций эволюции температуры:

1) По предсказанию температуры в известные моменты времени, которые были отброшены при фильтрации узлов интерполяции.

По результатам сравнения максимальная абсолютная погрешность на выборке с половиной данных получается около 9.2 градуса, а для выборки с четвертью данных - 18. При уменьшении узлов в 2 раза, погрешность значительно возрастает.

2) По тому, насколько хорошо аппроксимации предсказывают температуру, усредненную в течение.

По результатам сравнения максимальная абсолютная погрешность на выборке с половиной данных получается около 2.3 градуса, а для выборки с четвертью данных - 2.7. При уменьшении узлов в 2 раза, погрешность возрастает незначительно.

Заключение

В лабораторной работе были реализованы 2 метода интерполяции.

1) Интерполяция полиномами Лагранжа.

Результаты лабораторной работы подтвердили, что базисные полиномы при увеличении их степени (т.е. при увеличении количества узлов) имеют тенденцию к росту амплитуды ближе к граничным узлам отрезка. Чем выше степень базисного полинома, тем более заметным становится этот эффект. Такое поведение приводит к появлению нежелательных, паразитных осцилляций у граничных узлов. Использование неравномерно распределенных узлов, концентрирующихся у границ отрезка, решает эту проблему. Результаты показали, что использование узлов Чебышева является оптимальным с точки зрения минимизации ошибки интерполирования.

2) Интерполяция сплайнами.

В отличии от глобальной интерполяции Лагранжа (интерполяции одной аппроксимирующей функцией по всему отрезку [a;b]), интерполяция сплайнами представляет собой локальную интерполяцию, где мы делим отрезок [a;b] на маленькие подотрезки и используем интерполяцию полиномом малой степени на каждом из этих подотрезков, после чего “склеиваем” полученное множество полиномов в единую функцию, заданную на всем отрезке [a;b]. Интерполяция сплайнами решает проблему гладкости в кусочной интерполяции с помощью введения дополнительных условий на значения интерполяционных многочленов в узлах, а именно, условий равенства первых и вторых производных в узлах.

Для обеих интерполяций увеличение узлов приводило к увеличению точности интерполяции. [1]

Список использованных источников

1. **Першин А.Ю.** Лекции по вычислительной математике. Москва, 2019, 143 с.
2. **Гончар А. А.**, Лекции лауреатов Демидовской премии. Рациональные аппроксимации аналитических функций, 1998 год
3. **Рахманов Е.А**, Паде Аппроксимация [Электронный ресурс] // URL: https://bigenc.ru/mathematics/text/2312406
4. Першин А.Ю., Соколов А.П., Вычислительная математика, Лабораторные работ. Учебное пособие. Москва, 2018.