极限与连续性

目录

一、 极限与无穷 1
1.1 数列极限的定义 1
1.2 数列极限的性质 1
1.3 数列极限存在的条件 1

一、 极限与无穷

极限是无穷的变化量中一种极有规律的情况。这种量必须可以比较，一般为数字，此外极限还有更为严格的要求，例如确界存在定理。符合这种几何线段似的稠密性和完备性的量可以使用极限。而极限是指在这种量的变化过程中无限趋向于一个确定的值。

极限可以被数学语言严格的定义，例如数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义，单变量函数的 $\varepsilon - \sigma$ 定义。而且由于实数的完备性以及同一性。可以将所有具有极限的量可以转换为实数并进行极限分析。

有理数柯西序列使用极限的相关概念将有理数扩展为实数。这说明极限也是研究无理数的有效工具。

1.1 数列极限的定义

定义 1 设$\{a_n\}$为数列，a为定数。若对任给的正数ε，总存在正整数N，使得当$n > N$时，有

$$| a_n - a | < \varepsilon,$$

则称数列$\{a_n\}$收敛于a，定数a称为数列$\{a_n\}$的极限，并记作

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

这个定义又被称为$\varepsilon - N$定义。 这个定义还有一种等价定义

定义 1' 任给$\varepsilon > 0$, 若在$U(a;\varepsilon)$之外数列$\{a_n\}$中的项至多只有有限个，则称数列$\{a_n\}$收敛于极限a。

这个等价定义在证明数列发散时常常简单有效。

定义 2 若$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$，则称$\{a_n\}$为无穷小数列.

定义 3 若$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$，则称$\{a_n\}$为无穷大数列。

1.2 数列极限的性质

- 唯一性
- 有界性
- 保号性
- 保不等式性
- 迫敛性，又叫夹逼准则
- 四则运算法则
- 数列收敛的充要条件是任意子列都收敛

1.3 数列极限存在的条件